М. В. МИЛОВАНОВ
М. М. ТОЛКАЧЕВ
Р. И. ТЫШКЕВИЧ
А. С. ФЕДЕНКО

АЛГЕБРА
и аналитическая геометрия

Часть 2

Утверждено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебника для студентов математических специальностей высших учебных заведений

Минск
"Амалфея"
2001

УДК 512+514] (075.8)
ББК 22.151.5 я729
М60

Авторы: *М. В. Милованов*, кандидат физ.-мат. наук, доцент – гл. 24; *М. М. Толкачев*, доцент – гл. 18, 19, 22; *Р. И Тышкевич*, доктор физ.-мат. наук, профессор – гл. 17, 20, 21, 23; *А. С. Феденко*, доктор физ.-мат. наук, профессор – гл. 25–29

Рецензенты: *А. Н. Скиба*, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины; *В. С. Монахов*, доктор физ.-мат. наук, профессор; *А. Д. Корзников*, кандидат физ.-мат. наук, доцент, зав. кафедрой высшей математики Белорусской государственной политехнической академии

Милованов М. В. и др.
М60 Алгебра и аналитическая геометрия. Ч. 2 / М. В. Милованов, М. М. Толкачев, Р. И Тышкевич, А. С. Феденко. – Мн.: Амалфея, 2001. – 352 с.: ил.
ISBN 985-441-167-2.

Книга является второй частью учебника и состоит из двух связанных разделов – "Теория линейных пространств" и "Геометрия n-мерного пространства". Последняя глава посвящена тензорам. Кроме большого числа примеров, иллюстрирующих теорию, в книгу включено много упражнений.

Учебник рассчитан на студентов математических специальностей университетов, а также может быть использован студентами физических и инженерных специальностей вузов.

ISBN 985-441-167-2

ПРЕДИСЛОВИЕ

Книга является второй частью учебника «Алгебра и аналитическая геометрия». Авторы первой части кандидат физ.-мат. наук, доцент М. В. Милованов, доктор физ.-мат. наук, профессор Р. И. Тышкевич, доктор физ.-мат. наук, профессор А. С. Феденко.

Вторая часть учебника начинается с третьего раздела – «Теория линейных пространств». Изложение основных тем линейной алгебры проводится в строгом соответствии с программой. При изучении линейных операторов широко используется их матричная запись, что приводит к сокращению доказательств и позволяет использовать теорию систем линейных уравнений. Несколько полнее обычного трактуется вопрос о нормальных формах матриц. Поскольку жорданова нормальная форма не всегда существует, наряду с ней рассматривается фробениусова нормальная форма, существующая при любом основном поле. Билинейная и квадратичная формы определяются как соответствующие многочлены. В главе «Евклидовы и унитарные пространства» подчеркнута тесная связь билинейных форм с билинейными функциями. В главе «Линейные операторы евклидовых и унитарных пространств» подробные доказательства всех утверждений даны только для случая евклидова пространства, а в случае унитарного пространства отмечены лишь особенности этих доказательств.

В четвертом разделе – «Геометрия n-мерного пространства» – наиболее ярко проявляются идеи, положенные в основу учебника, а именно: при изучении всех основных вопросов используются понятия и методы, описанные в первых трех разделах. По существу, рассматривая аффинные и проективные пространства, мы продолжаем изучать линейные пространства с несколько иной, геометрической точки зрения. То же относится и к евклидовым линейным и точечным пространствам. Системы линейных уравнений истолковываются в аффинном пространстве полнее, чем в линейном. Теория квадрик является естественным обобщением и завершением теории фигур второго порядка. В то же время она служит геометрической интерпретацией теории квадратичных форм. Последняя глава книги посвящена тензорам. Из различных возможных определений тензора выбрано наиболее простое. На его основе естественно описываются тензоры, встречающиеся в этой книге. Рассматриваются основные операции над тензорами.

Нумерация разделов, глав, параграфов и рисунков во второй части учебника продолжает соответствующую нумерацию в первой части. Начало доказательства теорем, предложений, лемм, следствий и свойств обозначено символом ➤, а конец ➤.

Авторы выражают искреннюю благодарность рецензентам: коллективу кафедры алгебры и геометрии Гомельского государственного университета имени Ф. Скорины; персонально заведующему кафедрой, доктору физ.-мат. наук, профессору А. Н. Скибе; доктору физ.-мат. наук, профессору В. С. Монахову и заведующему кафедрой «Высшая математика 2» Белорусской государственной политехнической академии кандидату физ.-мат. наук, доценту А. Д. Корзникову за ценные замечания и предложения, которые, безусловно, улучшили учебник.

3

Раздел

ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ПРОСТРАНСТВ

17. ЛИНЕЙНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

Понятие линейного (векторного) пространства является основным в линейной алгебре и одним из важнейших в математике. В этой главе излагаются основы теории линейных пространств.

17.1. Определение линейного пространства

Рассмотрим множество всех свободных векторов (классов эквивалентных направленных отрезков). Среди операций, которые мы умеем производить над векторами, выделим две: сложение векторов и умножение вектора на действительное число. Мы знаем, что относительно сложения множество векторов является абелевой группой. Кроме того, эти операции обладают следующими свойствами:

1) $\alpha(\beta\mathbf{v}) = (\alpha\beta)\mathbf{v}$ *для любых действительных чисел* α *и* β *и любого вектора* $\mathbf{v}$;

2) $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$ *для любого вектора* $\mathbf{v}$;

3) $(\alpha + \beta)\mathbf{v} = \alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{v}$ *и* $\alpha(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \alpha\mathbf{u} + \alpha\mathbf{v}$ *для любых действительных чисел* α *и* β *и любых векторов* $\mathbf{u}$ *и* $\mathbf{v}$, *т. е. выполняется дистрибутивный закон.*

Аналогичная картина характерна и для многих других математических объектов. Это множества, элементы которых можно складывать, причем относительно сложения такие множества являются абелевыми группами. Можно также умножать элементы этих множеств на «числа». Операции сложения и умножения обладают свойствами, идентичными приведенным выше свойствам 1 – 3. Примерами таких множеств являются множество $P[x]$ многочленов над произвольным полем P (относительно сложения многочленов и умножения многочлена на элемент поля P), множество $P_{m,n}$ всех $m \times n$-матриц над полем P.

Предположим теперь, что нас интересуют только свойства, общие для всех таких объектов (множеств), т. е. не связанные с природой элементов, составляющих эти объекты (например, с тем, что это именно свободные векторы или многочлены), и конкретным определением операций. Такие свойства должны следовать из существования операций сложения и умножения с указанными выше формальными законами. Подобные свойства разумно изучать с единой точки зрения. Поэтому естественно возникает следующее

Определение 17.1. *Пусть V – аддитивная абелева группа, а P – произвольное поле. Пусть, далее, определено умножение элементов группы V на элементы поля P со значениями в V.* Более точно: *каждой паре α, $\mathbf{a}$, где $\alpha \in P$, $\mathbf{a} \in V$, поставлен в соответствие определенный элемент множества V, который называется произведением элемента $\mathbf{a}$ на α и обозначается символом $\alpha\mathbf{a}$. Группа V, рассматриваемая вместе с этим умножением, называется линейным пространством над полем P, если выполняются следующие условия (аксиомы):*

1) $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a}$ *для любых* α, $\beta \in P$ *и* $\mathbf{a} \in V$;

2) $1\mathbf{a} = \mathbf{a}$, *где* 1 *– единица поля* P *и* $\mathbf{a} \in V$;

3) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$, $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$ *для любых* α, $\beta \in P$ *и* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$.

Часто вместо слова «линейное» говорят «векторное» (пространство).

Условимся элементы пространства V называть *векторами* и обозначать их строчными буквами латинского алфавита, выделенными жирным шрифтом. Элементы поля P будем называть *числами* и обозначать, кроме нуля и единицы, строчными буквами греческого или латинского алфавита. Для обозначения нуля и единицы будем использовать символы 0 и 1 соответственно. Поле P назовем *основным полем.*

Для нас наиболее важны линейные пространства над полями действительных и комплексных чисел. Ниже эти пространства называются *действительным* и *комплексным* линейными пространствами соответственно.

Приведем примеры линейных пространств. Читателю рекомендуется доказать самостоятельно, что в каждом из приведенных ниже случаев мы действительно имеем дело с линейным пространством.

Пример 17.1. Множество всех свободных векторов относительно обычных операций сложения векторов и умножения вектора на действительное число является действительным линейным пространством. Аналогично линейными пространствами являются множество всех векторов плоскости и множество всех векторов прямой.

Пример 17.2. Пусть P – произвольное поле. Множество $P_{m,n}$ всех $m \times n$-матриц над полем P относительно сложения матриц и умножения матрицы на элемент поля P является линейным пространством над P. В частности, множество $P_{1,n}$ всех n-членных строк $[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ и множество $P_{n,1}$ всех n-членных столбцов

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \tag{1}$$

являются линейными пространствами над полем P. Эти пространства часто называют ***арифметическими*** или ***координатными n-мерными пространствами*** и обозначают P^n. В частности, $\mathbf{R}^n$ – действительное n-мерное арифметическое пространство.

Далее столбец (1) будем записывать в транспонированном виде:

$$[\alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \ldots \quad \alpha_n]^T.$$

Пример 17.3. Множество $P[x]$ всех многочленов от переменной x над полем P относительно операций сложения многочленов и умножения многочлена на элемент поля P является линейным пространством над P.

Пример 17.4. Множество всех функций вида $f\colon \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ является действительным линейным пространством. Сложение векторов и умножение их на числа задаются формулами

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha(f(x)), \tag{2}$$

где f, g – функции; α, $x \in \mathbf{R}$.

Пусть V – линейное пространство над полем P. Непосредственно из определения вытекают следующие свойства пространства V.

1. Так как относительно сложения векторов V является абелевой группой, то *в V лишь один нулевой вектор – нейтральный относительно сложения элемент*. Этот вектор ниже обозначается символом $\mathbf{0}$. *Для любого вектора* $\mathbf{a}$ $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$. По той же причине *для каждого вектора* $\mathbf{a}$ *в V существует единственный противоположный вектор* $-\mathbf{a}$, *такой, что* $-\mathbf{a} + \mathbf{a} = \mathbf{0}$. *Для любых*

векторов $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *уравнение* $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ *имеет в* V *единственное решение* $\mathbf{x} = \mathbf{b} + (-\mathbf{a})$, *которое называется разностью векторов* $\mathbf{b}$ *и* $\mathbf{a}$ *и обозначается* $\mathbf{b} - \mathbf{a}$. *Для любого вектора* $\mathbf{a}$ $\mathbf{a} - \mathbf{a} = \mathbf{0}$. *Если* $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ — *векторы, то из равенства* $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{a} + \mathbf{c}$ *следует* $\mathbf{b} = \mathbf{c}$. *Можно говорить о сумме нескольких векторов, причем порядок слагаемых роли не играет.*

2. *Дистрибутивный закон выполняется и для вычитания, т. е. если* $\alpha,\ \beta \in P$, $\mathbf{a},\ \mathbf{b} \in V$, *то* $\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{b}$, $(\alpha - \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \beta\mathbf{a}$.

➤ Действительно, $\alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \alpha\mathbf{b} = \alpha((\mathbf{a} - \mathbf{b}) + \mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a} - \mathbf{b} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a}$. Первое из равенств следует теперь из определения разности. Второе получается аналогично: $(\alpha - \beta)\mathbf{a} + \beta\mathbf{a} = ((\alpha - \beta) + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a}$. ≺

3. *Если* $\mathbf{a} \in V$, $\alpha \in P$, *то* $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$ *тогда и только тогда, когда* $\alpha = 0$ *или* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$.

➤ В самом деле, $0\mathbf{a} = (\alpha - \alpha)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\alpha\mathbf{0} = \alpha(\mathbf{a} - \mathbf{a}) = \alpha\mathbf{a} - \alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Пусть, далее, $\alpha \neq 0$ и верно равенство $\alpha\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Умножая обе части этого равенства на α^{-1}, получаем $\alpha^{-1}(\alpha\mathbf{a}) = \alpha^{-1}\mathbf{0}$, $1\mathbf{a} = \mathbf{0}$, $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. ≺

4. *Если* $\mathbf{a} \in V$, $\alpha \in P$, *то* $(-\alpha)\mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a}) = -(\alpha\mathbf{a})$.

➤ Действительно, так как $(-\alpha)\mathbf{a} + \alpha\mathbf{a} = (-\alpha + \alpha)\mathbf{a} = 0\mathbf{a} = \mathbf{0}$, то $(-\alpha)\mathbf{a} = -(\alpha\mathbf{a})$. Аналогично $\alpha(-\mathbf{a}) + \alpha\mathbf{a} = \alpha(-\mathbf{a} + \mathbf{a}) = \alpha\mathbf{0} = \mathbf{0}$, поэтому $\alpha(-\mathbf{a}) = -(\alpha\mathbf{a})$. ≺

Упражнения

1. Пусть $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$, $C[\alpha,\ \beta]$ — множество всех функций вида $f\colon [\alpha,\ \beta] \to \mathbf{R}$, непрерывных на отрезке $[\alpha,\ \beta]$. Докажите, что если сложение функций и умножение функции на действительное число задаются формулами (2), то $C[\alpha,\ \beta]$ — действительное линейное пространство.

2. Докажите, что множество всех бесконечных последовательностей, составленных из элементов поля P, превратится в линейное пространство над P, если определить сложение последовательностей и умножение последовательности на элемент поля P с помощью формул

$$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots) + (\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_n,\ \ldots) =$$
$$(\alpha_1 + \beta_1,\ \alpha_2 + \beta_2,\ \ldots,\ \alpha_n + \beta_n,\ \ldots),$$
$$\gamma(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n,\ \ldots) = (\gamma\alpha_1,\ \gamma\alpha_2,\ \ldots,\ \gamma\alpha_n,\ \ldots).$$

3. Докажите, что произвольное расширение поля P можно рассматривать как линейное пространство над P.

17.2. Линейная зависимость

Пусть задана конечная система векторов

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_m \tag{1}$$

линейного пространства V над полем P. Мы употребляем слово «система» вместо «подмножество», когда хотим отметить, что среди рассматриваемых векторов не исключены повторения (например, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$). Кроме того, мы считаем, что система *упорядочена,* т. е. указано, какой из векторов является первым, какой вторым и т. д.

Определение 17.2. *Система векторов (1) называется линейно зависимой, если в поле P существуют числа $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_m$, не равные одновременно нулю и такие, что*

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \tag{2}$$

В противном случае (когда таких чисел не существует) система (1) называется линейно независимой. Другими словами, *система (1) называется линейно независимой, если из равенства (2) следуют равенства*

$$\alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0,\ \ldots,\ \alpha_m = 0.$$

Такие же определения линейных зависимости и независимости систем свободных векторов приведены в § 12.5.

Пример 17.5. В пространстве $\mathbf{R}_{1,3}$ строк длины 3 система векторов $\mathbf{a}_1 = (1, 4, 6)$, $\mathbf{a}_2 = (1 - 1, 1)$, $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 3)$ линейно зависима, так как $2\mathbf{a}_1 + 3\mathbf{a}_2 - 5\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$.

Пример 17.6. Система строк

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0),\ \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0),\ \ldots,\ \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1) \tag{3}$$

пространства строк $P_{1,n}$ линейно независима, так как из равенства $\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$ следует $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_n) = \mathbf{0}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = \mathbf{0}$.

При $m = 1$ определение линейной зависимости приводит к следующему утверждению.

Предложение 17.1. *Система, содержащая лишь один вектор, линейно зависима тогда и только тогда, когда этот вектор нулевой.*

Определение 17.3. *Если*

$$\beta_1,\ \beta_2,\ \ldots,\ \beta_m \tag{4}$$

являются элементами поля P, то вектор

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_m\mathbf{a}_m \tag{5}$$

называется линейной комбинацией векторов (1), а числа (4) — коэффициентами этой линейной комбинации.

Линейная комбинация (5) называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты равны нулю, и *нетривиальной* в противном случае. Тривиальная линейная комбинация любых векторов равна нулевому вектору.

Очевидно, что определения линейных зависимости и независимости можно сформулировать в следующем виде: *конечная система векторов называется линейно зависимой, если существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору. Конечная система векторов называется линейно независимой, если только тривиальная линейная комбинация этих векторов равна нулевому вектору.*

Предложение 17.2. *При $m > 1$ система векторов (1) линейно зависима, если и только если какой-либо из векторов этой системы является линейной комбинацией остальных.*

Для пространства свободных векторов это утверждение доказано в § 12.5, причем приведенное там доказательство дословно переносится на общий случай.

Предложение 17.3. *Система векторов (1), в которой $\mathbf{a}_1 \neq \mathbf{0}$ и $m > 1$, линейно зависима тогда и только тогда, когда какой-либо из ее векторов является линейной комбинацией предыдущих.*

➤ Пусть система векторов (1) линейно зависима, т. е. верно равенство

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \tag{6}$$

в котором есть ненулевые коэффициенты, и α_s — последний из них (т. е. $\alpha_s \neq 0$ и $\alpha_i = 0$ для $i = s + 1, \ldots, m$). Перепишем равенство (6) в виде

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_s\mathbf{a}_s = \mathbf{0}. \tag{7}$$

При $s = 1$ мы имели бы $\alpha_1 \mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, $\alpha_1 \neq 0$, $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$, что противоречит условию. Следовательно, $s > 1$. Умножив обе части равенства (7) на α_s^{-1} и перенеся все слагаемые, кроме последнего, в правую часть, получим представление вектора $\mathbf{a}_s$ в виде линейной комбинации предыдущих векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{s-1}$.

Обратное утверждение очевидно. ◄

Следствие 17.1. *Если система векторов (1) линейно независима, а система* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{b}$ *линейно зависима, то вектор* $\mathbf{b}$ *является линейной комбинацией векторов (1).*

Отметим еще три свойства линейной зависимости.

1. *Система, содержащая нулевой вектор, линейно зависима.*

► Пусть, например, в системе (1) $\mathbf{a}_1 = \mathbf{0}$. Тогда $1\mathbf{a}_1 + 0\mathbf{a}_2 + \ldots + 0\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. ◄

2. *Система, содержащая равные векторы, линейно зависима.*

► Пусть, например, в системе (1) $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$. Тогда $(-1)\mathbf{a}_1 + 1\mathbf{a}_2 + 0\mathbf{a}_3 + \ldots + 0\mathbf{a}_m = \mathbf{0}$. ◄

3. *Если какая-либо подсистема (часть) системы векторов линейно зависима, то и вся система линейно зависима.*

► Пусть, например, подсистема $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l$, $l < m$, системы векторов (1) линейно зависима. Тогда существует нетривиальная линейная комбинация этих векторов, равная нулевому вектору:

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_l \mathbf{a}_l = \mathbf{0}.$$

Из последнего равенства следует

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_l \mathbf{a}_l + 0\mathbf{a}_{l+1} + \ldots + 0\mathbf{a}_m = \mathbf{0}.$$

Итак, получена нетривиальная линейная комбинация

$$\alpha_1 \mathbf{a}_1 + \alpha_2 \mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_l \mathbf{a}_l + 0\mathbf{a}_{l+1} + \ldots + 0\mathbf{a}_m$$

векторов системы (1), равная нулевому вектору, следовательно, система (1) линейно зависима. ◄

Можно говорить о линейной зависимости и линейной независимости бесконечных систем векторов. Свойство 3 подсказывает следующее

Определение 17.4. *Бесконечная система векторов называется линейно независимой, если линейно независима каждая ее конечная подсистема, и линейно зависимой, если какая-либо ее конечная подсистема линейно зависима.*

Определение 17.5. *Пусть A — система векторов пространства V и $\mathbf{b} \in V$. Если вектор $\mathbf{b}$ является линейной комбинацией векторов из A, то говорят, что $\mathbf{b}$ линейно выражается через A. Если каждый вектор системы B линейно выражается через A, то будем говорить, что система векторов B линейно выражается через A.*

Пример 17.7. Действительное линейное пространство свободных векторов линейно выражается через произвольную систему трех некомпланарных векторов. Линейное пространство свободных векторов фиксированной плоскости линейно выражается через любую пару неколлинеарных векторов этой плоскости. Линейное пространство векторов прямой линейно выражается через любой ненулевой вектор этой прямой.

Пример 17.8. Пространство $P_{1,n}$ линейно выражается через систему строк (3).

Заметим, что *если A — подсистема системы B, то A линейно выражается через B.*

➤ В самом деле, пусть $\mathbf{a} \in A$. Вектор $\mathbf{a}$ запишем в виде $\mathbf{a} = 1\mathbf{a}$. Последнее равенство есть линейное выражение произвольного вектора $\mathbf{a}$ системы A через векторы системы B, поскольку $\mathbf{a} \in B$. ◄

Очевидна транзитивность линейной выражаемости, а именно: *если система A линейно выражается через систему B, а система B — через систему C, то система A линейно выражается через систему C.*

Определение 17.6. *Системы векторов A и B называются эквивалентными, если A линейно выражается через B, а B — через A.*

Из транзитивности линейной выражаемости следует транзитивность эквивалентности систем векторов: *если A, B и C — такие системы векторов, что A и B эквивалентны и B и C эквивалентны, то A и C также эквивалентны.*

Предложение 17.4. *Если какой-либо вектор $\mathbf{b}$ системы A линейно выражается через другие векторы этой системы, то система $A \setminus \{\mathbf{b}\}$ эквивалентна системе A.*

➤ Пусть C – система векторов, полученная из системы A в результате исключения вектора $\mathbf{b}$. Тогда всякий вектор системы C содержится в A и поэтому линейно выражается через A. Точно так же каждый отличный от $\mathbf{b}$ вектор системы A линейно выражается через систему C. По условию вектор $\mathbf{b}$ также линейно выражается через систему C. Следовательно, системы A и C эквивалентны. ➤

Теорема 17.1. *Если система векторов*

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m \tag{8}$$

линейно независима и линейно выражается через систему

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l, \tag{9}$$

то $m \leqslant l$.

➤ Рассмотрим систему векторов

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l. \tag{10}$$

По условию вектор $\mathbf{b}_1$ линейно выражается через остальные векторы системы (10), поэтому система (10) линейно зависима. Согласно предложению 17.3, какой-либо из векторов $\mathbf{a}_i$ линейно выражается через предыдущие. Например, пусть это будет вектор $\mathbf{a}_l$. Исключив $\mathbf{a}_l$ из системы (10), получим систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{l-1}, \tag{11}$$

эквивалентную, согласно предложению 17.4, системе (10), а следовательно, и системе (9). Взяв вместо системы (9) систему (11) и повторив аналогичные рассуждения, придем к системе векторов

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{l-2},$$

эквивалентной системе (9). При $m > l$ через l аналогичных шагов мы получили бы систему

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_l, \tag{12}$$

вовсе не содержащую векторов $\mathbf{a}_i$, являющуюся подсистемой системы (8) и эквивалентную системе (9). Но тогда вектор $\mathbf{b}_m$ линейно выражался бы через систему (12), что противоречит линейной независимости системы (8). ➤

Замечание. Теорему 17.1 удобно формулировать в следующем виде: если «бóльшая» система векторов линейно выражается через «меньшую», то «бóльшая» система линейно зависима.

Очевидно

Следствие 17.2. *Две конечные эквивалентные линейно независимые системы, векторов содержат одно и то же число векторов.*

Упражнения

1. Докажите, что в пространстве $P[x]$ система многочленов $1, x, x^2, \ldots, x^n, \ldots$ линейно независима.

2. Докажите, что функции $1, (\sin x)^2, (\cos x)^2$ линейно зависимы над **R**.

17.3. Базис. Размерность

Определение 17.7. *Система векторов линейного пространства V называется базисом, если она линейно независима и все пространство V линейно выражается через нее. Линейное пространство, имеющее конечный базис, называется конечномерным. Линейное пространство, состоящее только из одного нулевого вектора (нулевое линейное пространство), также называется конечномерным. Ненулевое линейное пространство называется бесконечномерным, если в нем нет конечного базиса.*

В курсе линейной алгебры изучаются конечномерные линейные пространства.

Предложение 17.5. *Если в линейном пространстве V существует базис, состоящий из n векторов, то каждый базис этого пространства состоит из n векторов.*

➤ Пусть в пространстве V существует базис, состоящий из n векторов. Всякий вектор пространства линейно выражается через базис. Поэтому, согласно теореме 17.1, любая система, в которой число векторов больше n, линейно зависима. Если бы в пространстве V существовал еще «меньший» базис, состоящий, скажем, из m векторов, где $m < n$, то, аналогично предыдущему, всякая система векторов этого пространства, в которой число векторов больше m, в частности исходный базис, была бы линейно зависима. ➤

О п р е д е л е н и е 17.8. *Линейное пространство, в котором существует базис, состоящий из n векторов, называется n-мерным. Нулевое линейное пространство называется нульмерным. Если пространство V n-мерно, то число n называют размерностью пространства V и пишут* $n = \dim V$.

Пример 17.9. Пространство свободных векторов трехмерно, его базис составляет любая тройка некомпланарных векторов. Пространство всех векторов плоскости двумерно, а пространство всех векторов прямой одномерно.

Пример 17.10. В пространстве $P_{1,n}$ система строк

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1) \quad (1)$$

линейно независима. Произвольная строка $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ линейно выражается через систему (1): $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{e}_n$. Поэтому система строк (1) является базисом пространства строк $P_{1,n}$ и, значит, $\dim P_{1,n} = n$.

Теорема 17.2. *Для произвольного n-мерного линейного пространства верны следующие три утверждения:*

1) *всякая система векторов, в которой число векторов больше n, линейно зависима;*

2) *всякая линейно независимая система n векторов является базисом;*

3) *всякая линейно независимая система векторов, число векторов в которой меньше n, может быть дополнена до базиса.*

➤ 1. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы 17.1.

2. Пусть

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \quad (2)$$

является линейно независимой системой векторов n-мерного линейного пространства V, $\mathbf{b}$ – произвольный вектор этого пространства. Согласно первому утверждению теоремы, система векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b}$ линейно зависима. В силу следствия 17.1 вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через систему (2). Итак, система (2) является базисом пространства V.

3. Пусть заданы линейно независимая система векторов

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m, \quad (3)$$

базис

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \quad (4)$$

пространства V и пусть $m < n$. Система

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_m,\ \mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_n \tag{5}$$

линейно зависима. Последовательно исключим из системы (5) все векторы, являющиеся линейными комбинациями предыдущих. Так как векторы (3) линейно независимы, то все они останутся в системе, и полученная система примет вид

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_m,\ \mathbf{b}_{i_1},\ \mathbf{b}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{b}_{i_l}. \tag{6}$$

Согласно предложению 17.3, система (6) линейно независима. Всякий вектор пространства V линейно выражается через базис (4) и, следовательно, через эквивалентную этому базису систему (6). Итак, система векторов (6) — базис пространства V, полученный в результате дополнения системы векторов (3). ◄

Упражнения

1. Найдите какой-либо базис пространства многочленов $P[x]$.

2. Какова размерность поля **C** как линейного пространства над полем **R**?

3. Докажите, что если поле P состоит из m элементов, то в n-мерном линейном пространстве над P имеется ровно

$$(m^n - 1)(m^n - m)(m^n - m^2) \cdots (m^n - m^{n-1})$$

базисов.

4. Пусть α — корень неприводимого над полем P многочлена степени n. Докажите, что минимальное расширение $P(\alpha)$ (см. § 11,1) является линейным пространством над P. Какова его размерность?

17.4. Координаты вектора

Пусть V — n-мерное линейное пространство над полем P, система векторов

$$\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_n \tag{1}$$

является базисом пространства V, $\mathbf{a}$ — произвольный вектор этого пространства. Тогда $\mathbf{a}$ линейно выражается через базис (1), т. е.

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{b}_n,\ \ \alpha_i \in P. \tag{2}$$

О п р е д е л е н и е 17.9. *Представление вектора* **a** *в виде (2) называется разложением по базисным векторам (1), а коэффициенты*

$$\alpha_1, \ \alpha_2, \ \ldots, \ \alpha_n \tag{3}$$

называются координатами вектора **a** *в базисе (1). Столбец*

$$[\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \ldots \ \ \alpha_n]^T$$

называется координатным столбцом вектора **a** *в базисе (1).*

Важно отметить, что последовательность векторов в базисе всегда предполагается заданной. Например, базисы (1) и $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_n$ считаются разными.

Теорема 17.3. *Координаты вектора в заданном базисе определены однозначно.*

➤ Пусть наряду с координатами (3) вектор **a** имеет в том же базисе (1) еще и координаты $\beta_1, \ \beta_2, \ \ldots, \ \beta_n$. Тогда

$$\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{b}_n,$$
$$\mathbf{a} = \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \beta_n\mathbf{b}_n.$$

Вычитая почленно второе равенство из первого, получаем

$$(\alpha_1 - \beta_1)\mathbf{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\mathbf{b}_2 + \ldots + (\alpha_n - \beta_n)\mathbf{b}_n = \mathbf{0}.$$

Но базис – линейно независимая система, поэтому из последнего равенства следует, что все его коэффициенты равны нулю. Итак, $\alpha_i - \beta_i = 0, \ \alpha_i = \beta_i, \ i = 1, 2, \ldots, n.$ ➤

Запишем базис (1) в виде матрицы-строки

$$[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_n],$$

а разложение (2) вектора **a** по базисным векторам (1) – в виде матричного равенства

$$\mathbf{a} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_n][\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \ldots \ \ \alpha_n]^T. \tag{4}$$

Положив $[\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \ldots \ \mathbf{b}_n] = \mathbf{B}$, $[\alpha_1 \ \ \alpha_2 \ \ \ldots \ \ \alpha_n]^T = A$, перепишем равенство (4) в виде $\mathbf{a} = \mathbf{B}A$. Итак, *вектор* **a** *можно представить в виде произведения базисной строки* **B** *и его координатного столбца* A.

Поскольку координаты вектора в фиксированном базисе определены однозначно, то верно следующее

Предложение 17.6. *Если* **a** *– вектор,* **B** *– базисная строка, составленная из векторов (1), C – матрица-столбец и* **a** = **B***C, то C – координатный столбец вектора* **a** *в базисе (1).*

В дальнейшем нам понадобится следующее утверждение: *если сложение матриц над пространством V или умножение матрицы над полем P на матрицу над V выполнять по тем же правилам, что и соответствующие действия с матрицами над полем, то останутся справедливыми все формальные свойства сложения и умножения матриц.* Доказательства, приведенные в § 2.4 для матриц над полем, сохраняются и в этом случае.

Теорема 17.4. *Координатный столбец суммы векторов равен сумме координатных столбцов слагаемых. При умножении вектора на число его координатный столбец умножается на это число. Координатный столбец линейной комбинации векторов равен линейной комбинации координатных столбцов этих векторов с теми же коэффициентами.*

➤ Пусть **B** – базисная строка, составленная из векторов (1), A, C – координатные столбцы векторов **a**, **c** в базисе (1). Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{B}A$, $\mathbf{c} = \mathbf{B}C$, $\mathbf{a} + \mathbf{c} = \mathbf{B}A + \mathbf{B}C = \mathbf{B}(A + C)$. Следовательно, $(A + C)$ – координатный столбец вектора $(\mathbf{a} + \mathbf{c})$ в базисе (1). Далее, если $\alpha \in P$, то $\alpha\mathbf{a} = \alpha(\mathbf{B}A) = \mathbf{B}(\alpha A)$, следовательно, αA – координатный столбец вектора $\alpha\mathbf{a}$. Последнее утверждение теоремы доказывается индукцией по числу векторов. ➤

С л е д с т в и е 17.3. *Система векторов линейно независима, если и только если линейно независима система их координатных столбцов.*

Упражнения

1. Пусть V – n-мерное линейное пространство над конечным полем из m элементов. Сколько векторов входит в V?

2. Сколько векторов входит в линейное пространство $P_{m,n}$ матриц над конечным полем P из q элементов?

17.5. Ранг системы векторов

Определение 17.10. *Пусть A – какая-либо система векторов линейного пространства, а B – ее подсистема. Система B называется базисом системы A, если выполняются следующие два условия:*

1) *система B линейно независима;*

2) *система A линейно выражается через подсистему B.*

Теорема 17.5. *В каждой конечной системе векторов, содержащей хотя бы один ненулевой вектор, имеется базис. Все базисы системы состоят из одного и того же числа векторов.*

➤ Пусть A – конечная система векторов, хотя бы один из которых ненулевой. Последовательно исключив из системы A все векторы, линейно выражающиеся через оставшиеся векторы этой системы, получим, согласно предложениям 17.3 и 17.4, линейно независимую систему, эквивалентную системе A, т. е. базис системы A.

Любые два базиса системы эквивалентны и, согласно следствию 17.2, состоят из одного и того же числа векторов. ➤

Определение 17.11. *Число векторов, составляющих базис системы векторов, называется рангом этой системы. Если каждый вектор системы нулевой, то ее ранг по определению равен нулю.*

Предложение 17.7. *Пусть A и B – конечные системы векторов, причем A линейно выражается через B. Тогда ранг системы A не превосходит ранга системы B.*

➤ Это утверждение очевидно, если все векторы системы A нулевые. В противном случае базис системы векторов A линейно выражается через базис системы векторов B, и на основании теоремы 17.1 предложение доказано. ➤

Следствие 17.4. *Ранги эквивалентных систем векторов равны.* Ниже окажется полезной

Лемма 17.1. *Вектор* $\mathbf{b}$ *линейно выражается через систему векторов*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \tag{1}$$

если и только если ранги системы (1) и системы

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n, \mathbf{b} \qquad (2)$$

равны.

➤ Если вектор $\mathbf{b}$ линейно выражается через систему (1), то системы (1) и (2) эквивалентны и, следовательно, их ранги равны. Обратно, пусть ранги систем (1) и (2) равны r. Тогда любая линейно независимая подсистема системы (1), состоящая из r векторов, является базисом как системы (1), так и системы (2). Вектор $\mathbf{b}$, линейно выражаясь через этот базис, выражается через систему (1). ◄

Мы уже рассматривали элементарные преобразования строк и столбцов матрицы (см. § 2.2). Повторим здесь определение элементарных преобразований для более общего случая, а именно: вместо строк или столбцов матрицы возьмем любую систему векторов произвольного линейного пространства.

Определение 17.12. *Элементарными преобразованиями системы векторов называются:*

1) *умножение какого-либо вектора этой системы на отличное от нуля число из основного поля;*

2) *прибавление к одному вектору системы другого ее вектора, умноженного на произвольное число из основного поля.*

Предложение 17.8. *Элементарные преобразования системы векторов не изменяют ее ранга.*

➤ Пусть дана система векторов (1). Какой-либо ее вектор, например $\mathbf{a}_1$, умножим на отличное от нуля число α. Полученная в результате система векторов

$$\alpha\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n \qquad (3)$$

линейно выражается через систему (1), которая в свою очередь линейно выражается через систему (3), поскольку $\mathbf{a}_1 = \alpha^{-1}(\alpha\mathbf{a}_1)$. Итак, эти системы эквивалентны, и потому их ранги равны.

Прибавив к какому-либо вектору системы (1), например $\mathbf{a}_1$, другой ее вектор, скажем $\mathbf{a}_2$, умноженный на число β, получим систему

$$\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n. \qquad (4)$$

Она линейно выражается через систему (1), которая в свою очередь линейно выражается через систему (4), так как $\mathbf{a}_1 = (\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{a}_2) - \beta\mathbf{a}_2$. Следовательно, системы (1) и (4) эквивалентны, и их ранги равны. ◄

17.6. Ранг матрицы

Пусть дана матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

над произвольным полем P. Будем рассматривать ее столбцы как векторы пространства $P_{m,1}$ m-членных столбцов.

Определение 17.13. *Ранг системы столбцов матрицы A называется рангом матрицы A и обозначается символом* rank A.

Пример 17.11. $\operatorname{rank} O_{m,n} = 0$, $\operatorname{rank}[1\ 2\ 3] = 1$,

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 1,\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = 2,\quad \operatorname{rank}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 2.$$

В § 4.4 для квадратных матриц было введено понятие минора. Будем употреблять это понятие и в том случае, когда матрица не квадратная. Нас интересуют порядки тех миноров матриц, которые отличны от нуля, а именно – максимальные среди таких порядков.

Определение 17.14. *Минор M порядка r матрицы A называется базисным минором матрицы A, если выполняются следующие два условия:*

1) $M \neq 0$;

2) *все миноры матрицы A, порядки которых больше r, равны нулю.*

Теорема 17.6. (теорема о ранге матрицы). *Ранг матрицы равен порядку ее базисных миноров.*

В доказательстве этой теоремы используются следующие две леммы.

Лемма 17.2. *Если столбцы (строки) квадратной матрицы линейно зависимы, то ее определитель равен нулю.*

➤ Пусть A – квадратная матрица порядка n, система столбцов которой линейно зависима. При $n = 1$ $A = 0$. При $n > 1$ какой-либо из столбцов матрицы A линейно выражается через остальные, поэтому по теореме 4.5 ее определитель равен нулю. ◄

Лемма 17.3. *Пусть для* $i = 1, 2, ..., k$

$$\mathbf{a}_i = [a_{1i}, a_{2i}, \ldots a_{ri}\ a_{r+1\,i} \ldots a_{mi}]^T, \ \mathbf{b}_i = [a_{1i}, a_{2i} \ldots a_{ri}]^T,$$

т. е. столбец $\mathbf{b}_i$ *получается из столбца* $\mathbf{a}_i$ *после исключения всех элементов, начиная с* $(r + 1)$*-го. Если система столбцов*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{2}$$

линейно зависима, то линейно зависима и система столбцов

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k. \tag{3}$$

➤ Рассмотрим нетривиальную линейную комбинацию столбцов (2), равную нулевому столбцу:

$$\beta_1\mathbf{a}_1 + \beta_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}. \tag{4}$$

Равенство (4) равносильно системе равенств

$$\beta_1 a_{j1} + \beta_2 a_{j2} + \ldots + \beta_k a_{jk} = 0, \ j = 1, \ 2, \ \ldots, \ m,$$

а система первых r этих равенств ($j = 1, 2, ..., r$) равносильна равенству

$$\beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2 + \ldots + \beta_k\mathbf{b}_k = \mathbf{0}.$$

Последнее означает линейную зависимость системы столбцов (3). ◄

Перейдем к доказательству непосредственно теоремы о ранге матрицы.

➤ Для нулевых матриц теорема очевидна, для ненулевых достаточно доказать, что именно те r столбцов, в которых расположен базисный минор, составляют базис системы столбцов рассматриваемой матрицы.

Пусть A – ненулевая матрица вида (1), M – ее базисный минор порядка r. Для упрощения обозначений будем считать, что минор M занимает левый верхний угол матрицы A, т. е. расположен в ее строках и столбцах с номерами 1, 2, ..., r. Согласно лемме 17.2, столбцы минора M

линейно независимы, а поэтому в силу леммы 17.3 линейно независимы и первые r столбцов матрицы A. Остается доказать, что при $n > r$ для $l = r + 1, \ldots, n$ каждый l-й столбец матрицы A линейно выражается через r первых столбцов. С этой целью для каждого $i = 1, 2, \ldots, m$ рассмотрим вспомогательный определитель

$$d_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{1l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{rl} \\ a_{i1} & \ldots & a_{ir} & a_{il} \end{vmatrix},$$

получающийся «окаймлением» минора M соответствующими элементами i-й строки и l-го столбца. При любом i $d_i = 0$. В самом деле, если $i \leqslant r$, то d_i содержит две равные строки. Если же $i > r$, то d_i — минор матрицы A, порядок которого больше, чем порядок базисного минора.

Заметим, что алгебраические дополнения элементов последней строки в определителе d_i не зависят от выбора номера i, и обозначим эти дополнения $A_1, A_2, \ldots, A_r, A_{r+1}$. Имеем $A_{r+1} = M$. Разложив определитель d_i по элементам последней строки, получим

$$A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \ldots + A_r a_{ir} + M a_{il} = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m,$$

или $(M \neq 0)$

$$a_{il} = -M^{-1}(A_1 a_{i1} + A_2 a_{i2} + \ldots + A_r a_{ir}),\ i = 1, 2, \ldots, m.$$

Последняя система равенств означает, что l-й столбец матрицы A есть линейная комбинация ее первых r столбцов. ◄

Обратимся еще раз к доказательству теоремы о ранге матрицы и заметим, что в нем не использовалось равенство нулю всех миноров матрицы A, порядки которых больше r. Мы рассматривали только те миноры, которые имеют порядок $r + 1$ и «окаймляют» минор M, т. е. содержат его целиком. Уже из равенства нулю только этих миноров следует, что каждый столбец матрицы A линейно выражается через те ее столбцы, в которых расположен минор M. Поэтому из доказательства теоремы о ранге матрицы вытекает следующее правило отыскания базисного минора: *при отыскании базисного минора следует переходить* *от миноров меньших порядков к минорам больших порядков. Если минор M порядка r не равен нулю, а все окаймляющие его миноры порядка $r+1$ равны нулю, то M — базисный минор.*

Пример 17.12. Вычислить ранг матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вначале найдем один из базисных миноров матрицы A. Начнем с какого-либо минора второго порядка. Например, $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} \neq 0$.

Далее рассмотрим миноры третьего порядка, окаймляющие взятый минор:

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 10 & 18 & 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 4 & 8 \\ 10 & 18 & 40 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \\ 10 & 8 & 4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 10 & 18 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 4 & -20 & 7 \\ 10 & -50 & 17 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 4 & 8 & 18 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 10 \\ 0 & -20 & -50 \\ 1 & 7 & 17 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 4 & 8 & 7 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 0 & -20 & -5 \\ 1 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Все эти миноры равны нулю, $\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 4 & 8 \end{vmatrix}$ — базисный минор, $\operatorname{rank} A = 2$.

Отметим ряд важных следствий из теоремы о ранге матрицы.

С л е д с т в и е 17.5. *Ранг матрицы не меняется при ее транспонировании, т. е. ранг матрицы равен рангу системы ее строк.*

➤ При транспонировании матрицы транспонируются и все ее миноры, точнее ее «подматрицы», определителями которых являются эти миноры. Но определитель не меняется при транспонировании. ◄

С л е д с т в и е 17.6. *Если определитель квадратной матрицы равен нулю, то ее строки (столбцы) линейно зависимы.*

➤ Пусть A — квадратная матрица порядка n и $\det A = 0$. Тогда порядок ее базисного минора меньше n и, следовательно, $\operatorname{rank} A < n$. ◄

Объединив это следствие и лемму 17.1, получим следующую теорему.

Теорема 17.7 (критерий равенства определителя нулю). *Определитель квадратной матрицы равен нулю* *тогда и только тогда, когда ее строки (столбцы) линейно зависимы.*

Следствие 17.7. *Пусть в n-мерном линейном пространстве V зафиксирован базис и векторы*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{5}$$

имеют в этом базисе координатные столбцы

$$A_i = [a_{1i}\ a_{2i}\ \ldots\ a_{ni}]^T,\ i = 1, 2, \ldots, k.$$

Тогда:

1) *ранг системы векторов (5) равен рангу матрицы*

$$A = [A_1\ A_2\ \ldots\ A_k] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nk} \end{bmatrix},$$

столбцами которой служат координатные столбцы этих векторов;

2) *система векторов (5) линейно независима, если и только если*

$$\operatorname{rank} A = k;$$

3) *система векторов (5) является базисом пространства V тогда и только тогда, когда $k = n$ и $\det A \neq 0$;*

4) *векторы $\mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{a}_{i_2}, \ldots, \mathbf{a}_{i_r}$ составляют базис системы (5) тогда и только тогда, когда столбцы матрицы A с номерами $i_1, i_2, \ldots, i_r$ содержат базисный минор порядка r этой матрицы.*

Доказательство следует непосредственно из вышесказанного.

Отметим еще два утверждения о ранге матрицы. Напомним, что элементарными преобразованиями матрицы называются элементарные преобразования ее строк или столбцов. Из предложения 17.8 и следствия 17.5 можно вывести

Следствие 17.8. *Элементарные преобразования матрицы не изменяют ее ранга.*

Последнее утверждение упрощает вычисление ранга матрицы: элементарными преобразованиями матрица приводится к столь простому виду, что уже ясно, чему равен ее ранг. Заметим, что ранг ступенчатой матрицы равен числу ее ненулевых строк.

Пример 17.13. Вычислить ранг матрицы

$$A=\begin{bmatrix}25&31&17&43\\75&94&54&134\\75&94&53&132\\25&32&20&48\end{bmatrix}.$$

Решение. Применим к матрице A элементарные преобразования:

$$\begin{bmatrix}25&31&17&43\\75&94&54&134\\75&94&53&132\\25&32&20&48\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}25&31&17&43\\0&1&3&5\\0&1&2&3\\0&1&3&5\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}25&31&17&43\\0&1&3&5\\0&0&-1&-2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Последняя матрица является ступенчатой, число ненулевых строк которой равно 3. Следовательно, $\operatorname{rank} A = 3$.

Предложение 17.9. Ранг произведения двух матриц не выше ранга каждого из сомножителей. Если один из сомножителей – невырожденная матрица, то ранг произведения равен рангу второго сомножителя.

➤ Из определения произведения матриц AB (см. § 2.4) видно, что строки матрицы AB линейно выражаются через строки матрицы B, а столбцы матрицы AB линейно выражаются через столбцы матрицы A. На основании предложения 17.7

$$\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} B,\quad \operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} A.$$

Пусть теперь A – квадратная невырожденная матрица. Согласно доказанному выше, $\operatorname{rank} AB \leqslant \operatorname{rank} B$. С другой стороны, $B = A^{-1}(AB)$, поэтому $\operatorname{rank} B \leqslant \operatorname{rank} AB$. Следовательно, $\operatorname{rank} AB = \operatorname{rank} B$. ➤

17.7. Связь между базисами

Пусть заданы n-мерное линейное пространство V, его базис

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_n \tag{1}$$

и произвольная система n векторов

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_n. \tag{2}$$

Пусть, далее,

$$a_{1i}, a_{2i}, \ldots, a_{mi} \tag{3}$$

являются координатами вектора $\mathbf{c}_i$ в базисе (1). Запишем матрицу

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

i-й столбец которой есть столбец координат (3), $i = 1, 2, ..., n$. Мы уже знаем, что система векторов (2) является базисом пространства V, если и только если $\det M \neq 0$ (см. следствие 17.7). Матрица M называется *матрицей перехода от базиса (1) к системе векторов (2)*.

Введя строки $[\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \dots\ \mathbf{b}_n]$ и $[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n]$, получим

$$[\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n] = [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2\ \dots\ \mathbf{b}_n]M. \tag{4}$$

Формула (4) с невырожденной матрицей M выражает связь между любыми двумя базисами пространства: если базис (1) считать исходным, то любой другой базис получается по формуле (4) при подходящем выборе матрицы перехода M. Обратно, *взяв в качестве M произвольную невырожденную матрицу порядка n над основным полем, получим по формуле (4) некоторый базис $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$.*

17.8. Преобразование координат

Задача преобразования координат состоит в установлении связи между координатами вектора в разных базисах. Связь между этими базисами предполагается известной. Мы уже решали эту задачу для пространства свободных векторов (см. § 12.9). Пусть теперь V – n-мерное линейное пространство, его базисы –

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n \tag{1}$$

и

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n, \tag{2}$$

M – матрица перехода от базиса (1) к базису (2). Пусть, далее, X и Y – координатные столбцы вектора $\mathbf{a}$ в базисах

(1) и (2) соответственно, $\mathbf{B}$ – строка векторов (1), $\mathbf{C}$ – строка векторов (2). Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{B}X = \mathbf{C}Y$. Но $\mathbf{C} = \mathbf{B}M$, поэтому $\mathbf{B}X = (\mathbf{B}M)Y = \mathbf{B}(MY)$, $\mathbf{B}(X - MY) = \mathbf{0}$. Последнее равенство указывает на то, что $X - MY$ – координатный столбец нулевого вектора в базисе (1). Однако координаты вектора в фиксированном базисе определены однозначно и, в частности, все координаты нулевого вектора равны нулю. Поэтому $X - MY$ – нулевой столбец, и

$$X = MY. \tag{3}$$

Формула (3) выражает зависимость между координатами вектора **a** *в базисах (1) и (2): координатный столбец вектора* **a** *в базисе (1) получается из координатного столбца в базисе (2) умножением слева на матрицу перехода от базиса (1) к базису (2).*

Отметим, что $\det M \neq 0$, поскольку M – матрица перехода от одного базиса к другому.

Если

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\quad M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

то равенство (3) равносильно следующей системе равенств:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n. \end{aligned}\right\}$$

Обратно, пусть M – произвольная квадратная матрица порядка n с определителем, отличным от нуля, система векторов (1) – базис пространства V, $\mathbf{B}M = [\mathbf{c}_1\ \mathbf{c}_2\ \dots\ \mathbf{c}_n]$. Тогда система векторов $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ также является базисом, и формула (3) выражает зависимость между координатами произвольного вектора в этих двух базисах.

Итак, *всякая формула вида (3) с произвольной невырожденной матрицей M может использоваться как формула преобразования координат вектора при переходе к новому базису.*

17.9. Подпространство

О п р е д е л е н и е 17.15. *Пусть V – линейное пространство над полем P. Непустое подмножество U пространства V называется подпространством пространства V, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $\mathbf{a} + \mathbf{b} \in U$ *для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in U$ *(U замкнуто относительно сложения);*

2) $\alpha\mathbf{a} \in U$ *для любого вектора* $\mathbf{a} \in U$ *и любого числа* $\alpha \in P$ *(U замкнуто относительно умножения векторов на числа).*

Очевидно, что совокупность условий 1 и 2 равносильна следующему условию: $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U$ *для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in U$ *и любых чисел* α, $\beta \in P$.

Из определения подпространства следует, что всякое подпространство U линейного пространства V над полем P само является линейным пространством над этим полем, если выполнять операции сложения векторов из U и умножения их на числа из P по правилам, определенным для пространства V.

Множество $\{\mathbf{0}\}$, содержащее только нулевой вектор пространства V, удовлетворяет условиям 1 и 2 и, следовательно, является подпространством пространства V. Это подпространство называется *нулевым*. С другой стороны, все пространство V является своим подпространством.

Общий способ получения подпространств заключается в следующем. Возьмем в пространстве V произвольные векторы

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k. \tag{1}$$

Так как сумма линейных комбинаций векторов (1) и произведение линейной комбинации этих векторов на число также являются линейными комбинациями векторов (1), то *множество всех линейных комбинаций векторов (1) является подпространством пространства V.* Это подпространство называют *линейной оболочкой векторов (1)* и обозначают $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$. Систему (1) называют *системой образующих подпространства* $L = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k)$.

Очевидно, что *базис системы векторов (1) является базисом пространства* L, и, следовательно, *размерность пространства* L *равна рангу системы векторов (1)*.

Предложение 17.10. *Каждое подпространство* U *n-мерного линейного пространства* V *конечномерно, причем* $\dim U \leqslant n$. *Если* $\dim U = n$, *то* $U = V$.

➤ Пусть $\mathbf{a}_1$ – ненулевой вектор из пространства U. Тогда $L(\mathbf{a}_1) \subset U$. Если $L(\mathbf{a}_1) = U$, то $\mathbf{a}_1$ – базис пространства U. В противном случае в U существует вектор $\mathbf{a}_2$, такой, что $\mathbf{a}_2 \overline{\in} L(\mathbf{a}_1)$. Согласно предложению 17.3, система $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ линейно независима. Имеем $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) \subset U$. Если $L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = U$, то $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ – базис пространства U. В противном случае в U существует такой вектор $\mathbf{a}_3$, что $\mathbf{a}_3 \overline{\in} L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$, и система векторов $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ линейно независима. Повторяя аналогичные рассуждения достаточное число раз, мы получим базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ пространства U. Для этого потребуется не более n шагов, поскольку любая система $n + 1$ векторов в пространстве V линейно зависима. Итак, $k \leqslant n$. Если же $k = n$, то построенная система $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k$ является базисом пространства V, поэтому $V = L(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, ..., \mathbf{a}_k) = U$. ➤

17.10. Сумма и пересечение подпространств

Пусть

$$U_1, U_2, ..., U_k \tag{1}$$

являются подпространствами линейного пространства V.

Определение 17.16. *Пересечением подпространств* (1) *называется множество всех векторов, принадлежащих каждому из этих подпространств. Суммой подпространств* (1) *называется множество всех векторов* $\mathbf{a}$ *пространства* V, *представимых в виде*

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + ... + \mathbf{a}_k,\ \mathbf{a}_i \in U_i,\ i = 1, 2, ..., k.$$

Обозначим пересечение подпространств (1)

$$U_1 \cap U_2 \cap ... \cap U_k \text{ или } \bigcap_{i=1}^{k} U_i.$$

а их сумму

$$U_1 + U_2 + \ldots + U_k \text{ или } \sum_{i=1}^{k} U_i .$$

Предложение 17.11. *Сумма и пересечение подпространств линейного пространства являются его подпространствами.*

➤ Пусть (1) – подпространства пространства V, U – их сумма. Заметим, что $U \neq \varnothing$, поскольку $\mathbf{0} \in U$. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U$, α, β – числа из основного поля. Векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ можно записать в виде

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_k,\ \mathbf{b} = \mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2 + \ldots + \mathbf{b}_k,$$

где $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_i \in U_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, поэтому

$$\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} = (\alpha\mathbf{a}_1 + \beta\mathbf{b}_1) + (\alpha\mathbf{a}_2 + \beta\mathbf{b}_2) + \ldots + (\alpha\mathbf{a}_k + \beta\mathbf{b}_k).$$

Поскольку U_i – подпространство, то $\alpha\mathbf{a}_i + \beta\mathbf{b}_i \in U_i$, $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U$, т. е. U – подпространство.

Доказательство того, что пересечение подпространств линейного пространства является его подпространством, мы оставляем читателю. ➤

Теорема 17.8. *Размерность суммы двух конечномерных подпространств линейного пространства равна сумме их размерностей минус размерность пересечения.*

➤ Если какое-либо из подпространств нулевое, теорема очевидна. Пусть U_1 и U_2 – ненулевые конечномерные подпространства линейного пространства V, $A = U_1 + U_2$, $B = U_1 \cap U_2$. Пространство B конечномерно, поскольку является подпространством конечномерного пространства U_1. Пусть

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k \tag{2}$$

есть базис пространства B (в случае $\mathbf{B} = \{\mathbf{0}\}$ система (2) – пустое множество). Дополним систему (2) до базиса

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l \tag{3}$$

пространства U_1 и до базиса

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m \tag{4}$$

пространства U_2 (в случае $B = \{\mathbf{0}\}$ системы (3) и (4) – произвольные базисы пространств U_1 и U_2 соответственно) и рассмотрим систему векторов

$$\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_k, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l, \mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_m. \tag{5}$$

Теорема будет доказана, если мы покажем, что система (5) является базисом пространства A.

Пусть $\mathbf{a} \in A$. Тогда $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_i \in U_i$, $i = 1, 2$. Так как (3) – базис пространства U_1, то $\mathbf{a}_1$ линейно выражается через векторы (3). Аналогично $\mathbf{a}_2$ линейно выражается через систему (4). Следовательно, произвольный вектор $\mathbf{a}$ из пространства A линейно выражается через систему (5).

Остается доказать, что система (5) линейно независима. Пусть

$$\alpha_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_1\mathbf{b}_1 + \beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_l\mathbf{a}_l + \gamma_1\mathbf{c}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{c}_m = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Перепишем равенство (6) в виде

$$\alpha_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{b}_k + \beta_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \beta_l\mathbf{a}_l = -(\gamma_1\mathbf{c}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{c}_m) \tag{7}$$

и обозначим буквой $\mathbf{c}$ правую часть этого равенства. Далее имеем $\mathbf{c} \in U_1 \cap U_2$, и, следовательно,

$$\mathbf{c} = -(\gamma_1\mathbf{c}_1 + \ldots + \gamma_m\mathbf{c}_m) \in B.$$

Итак, вектор $\mathbf{c}$ линейно выражается через базис (2) пространства B:

$$\mathbf{c} = \delta_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \delta_k\mathbf{b}_k.$$

Сравнивая два разложения вектора $\mathbf{c}$, получаем $\gamma_1 = \ldots = \gamma_m = 0$, поскольку координаты вектора в заданном базисе определены однозначно. Из равенства (7) теперь находим $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = \beta_1 = \ldots = \beta_l = 0$. Итак, из равенства (6) следует равенство нулю всех коэффициентов, так что система (5) линейно независима. ◄

17.11. Прямая сумма подпространств

Пусть S – сумма ненулевых подпространств

$$U_1, U_2, \ldots, U_k \tag{1}$$

линейного пространства V. По определению S – множество всех векторов $\mathbf{a}$ пространства V, которые представимы в виде суммы слагаемых, взятых по одному из каждого подпространства U_i:

$$\mathbf{a} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k,\ \mathbf{u}_i \in U_i\ i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (2)$$

Определение 17.17. *Сумма S подпространств называется прямой суммой, если каждый ее вектор* **a** *лишь одним способом может быть представлен в виде (2).* Иными словами, *сумма S прямая, если из каждого равенства вида*

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i \in U_i$, следует равенство соответствующих слагаемых: $\mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$.

Если сумма S прямая, то будем писать:

$$S = U_1 \oplus U_2 \oplus \ldots \oplus U_k. \qquad (3)$$

Пусть S – прямая сумма (3). Тогда по определению из условия

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0},\ \mathbf{u}_i \in U_i,\ i = 1, 2, \ldots, k, \qquad (4)$$

для всех слагаемых $\mathbf{u}_i$ следуют равенства:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0},\ i = 1, 2, \ldots, k. \qquad (5)$$

Важно заметить, что последнее условие является и достаточным для того, чтобы сумма S была прямой, а именно, верно

Предложение 17.12. *Пусть из всякого условия вида (4) следуют равенства (5). Тогда сумма подпространств (1) прямая.*

➤ Пусть

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \ldots + \mathbf{v}_k,$$

где $\mathbf{u}_i$, $\mathbf{v}_i \in U_i$. Тогда

$$(\mathbf{u}_1 - \mathbf{v}_1) + (\mathbf{u}_2 - \mathbf{v}_2) + \ldots + (\mathbf{u}_k - \mathbf{v}_k) = \mathbf{0},$$

$$\mathbf{u}_i - \mathbf{v}_i = \mathbf{0},\ \mathbf{u}_i = \mathbf{v}_i. \ ◀$$

Предложение 17.13. *Для того чтобы сумма подпространств была прямой, необходимо и достаточно, чтобы каждое из этих подпространств пересекалось с суммой всех остальных слагаемых только по нулевому подпространству.*

➤ Пусть S – прямая сумма подпространств (1). Возьмем произвольный вектор $\mathbf{v}$, принадлежащий пересечению какого-либо из подпространств (1), например подпространства U_1, с суммой всех остальных подпространств (1). Имеем

$$\mathbf{v} = \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k, \ \mathbf{u}_i \in U_i, \ i = 2, \ldots, k,$$

или, если $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_1$,

$$\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k = \mathbf{0}, \ \mathbf{u}_i \in U_i, \ i = 1, \ 2, \ldots, k,$$

Но сумма S прямая, поэтому из последнего равенства следует равенство нулю каждого слагаемого $\mathbf{u}_i$. В частности, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$, $\mathbf{v} = -\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$,

$$U_1 \bigcap (U_2 + \ldots + U_k) = \{\mathbf{0}\}.$$

Пусть, обратно, условие предложения 17.13 выполняется, и пусть верно равенство (4). Перепишем это равенство в виде

$$-\mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2 + \ldots + \mathbf{u}_k.$$

Левая часть последнего равенства представляет собой вектор из подпространства U_1, правая – вектор из подпространства $U_2 + \ldots + U_k$. Но это один и тот же вектор, следовательно, он входит в пересечение $U_1 \bigcap (U_2 + \ldots + U_k)$. Имеем: $-\mathbf{u}_1 = 0$, $\mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$. Аналогично доказывается, что $\mathbf{u}_2 = \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{u}_k = \mathbf{0}$. ◀

Предложение 17.14. *Пусть S – прямая сумма подпространств (1), $\mathbf{b}_{i1}, \mathbf{b}_{i2}, \ldots, \mathbf{b}_{in_i}$ – базис подпространства U_i, $i = 1, 2, \ldots, k$.* Тогда *система векторов*

$$\mathbf{b}_{11}, \ \ldots, \ \mathbf{b}_{1n_1}, \ \mathbf{b}_{21}, \ \ldots, \ \mathbf{b}_{2n_2}, \ \ldots, \ \mathbf{b}_{k1}, \ \ldots, \ \mathbf{b}_{kn_k}$$

является базисом пространства S. Размерность прямой суммы, конечномерных подпространств равна сумме их размерностей.

▶ При $k = 2$ это утверждение следует из доказательства теоремы 17.8, при $k > 2$ доказывается по индукции. ◀

Упражнения

1. Сравните определения прямой суммы подпространств и прямой суммы абелевых групп.

2. Приведите примеры прямой суммы подпространств в трехмерном пространстве свободных векторов.

18. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

В первой части данного пособия рассматривались системы линейных уравнений, матрицы и определители над полем действительных чисел. Отмечалось, что все введенные понятия и полученные результаты сохраняются и в случае произвольного поля. В частности, метод Гаусса решения систем линейных уравнений, теория определителей и правило Крамера дословно переносятся на случай произвольного основного поля. Это касается не только приведенных результатов, но и их доказательств. В новом доказательстве нуждается только утверждение о равенстве нулю определителя, содержащего две одинаковые строки.

В этой главе излагается теория систем линейных уравнений над произвольным полем. Приводится критерий совместности системы. Обсуждается вопрос о числе ее решений.

18.1. Критерий совместности системы линейных уравнений

Пусть P – произвольное поле. Рассмотрим, как это делалось ранее для поля действительных чисел, совокупность k уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k, \end{array}\right\} \tag{1}$$

где a_{ij}, b_i – элементы поля P; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – неизвестные. Эту совокупность называют *системой линейных уравнений над полем P с n неизвестными, a_{ij} – коэффициентами системы, b_i – свободными членами.*

Последовательность $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ элементов поля P называется *решением системы* (1), если верны равенства

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\lambda_1 + a_{12}\lambda_2 + \ldots + a_{1n}\lambda_n = b_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}\lambda_1 + a_{k2}\lambda_2 + \ldots + a_{kn}\lambda_n = b_k, \end{array}\right\} \tag{2}$$

т. е. если после подстановки в каждое из уравнений (1) вместо неизвестных x_i соответствующих чисел λ_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, это уравнение превращается в верное равенство.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной* в противном случае.

Системы линейных уравнений называются *эквивалентными*, если множества их решений совпадают.

Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{bmatrix},$$

составленная из коэффициентов системы (1), называется *матрицей (основной) системы (1)*. Если к матрице A приписать справа столбец свободных членов системы (1), то получится матрица

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} & b_k \end{bmatrix},$$

которая называется *расширенной матрицей системы (1)*.

Систему уравнений (1) можно записать в виде одного матричного уравнения $AX = B$, где X и B – столбцы неизвестных и свободных членов соответственно:

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T, \ B = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_n]^T.$$

Решения системы уравнений (1) удобно интерпретировать как векторы пространства P^n столбцов (или строк): столбец $\Lambda^T = [\lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_n]^T$ (или строка Λ) есть решение системы (1), если $A\Lambda^T = B$.

Как отмечалось выше, все решения системы линейных уравнений можно найти методом Гаусса. Однако часто бывает важно не решить саму систему, а выяснить, есть ли у нее решения и сколько их. К ответу на такие вопросы мы и приступаем.

Теорема 18.1 (критерий Кронекера – Капелли совместности системы линейных уравнений). *Система линейных уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг матрицы этой системы равен рангу ее расширенной матрицы.*

➤ Система (1) совместна тогда и только тогда, когда в поле P существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, что верны равенства (2). Обозначив столбцы матрицы A через A_1, A_2, ..., A_n, заметим, что совокупность равенств (2) равносильна равенству

$$\lambda_1 A_1 + \lambda_2 A_2 + \ldots + \lambda_n A_n = B,$$

которое означает, что последний столбец матрицы $\bar{A}$ линейно выражается через столбцы матрицы A. Следовательно, система (1) совместна тогда и только тогда, когда последний столбец матрицы $\bar{A}$ линейно выражается через столбцы матрицы A. Согласно лемме 17.1, это имеет место тогда и лишь тогда, когда ранг системы столбцов матрицы $\bar{A}$ равен рангу системы столбцов матрицы A, т. е. ранги этих матриц равны. ◄

18.2. Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *однородной,* если все ее свободные члены равны нулю. Такая система всегда совместна: она имеет нулевое решение. Если истолковывать ее решения как векторы пространства P^n строк над основным полем P (n – число неизвестных), то обнаруживается прямая связь между подпространствами этого пространства и системами линейных уравнений. Подобно тому как плоскость и прямая в декартовой системе координат задаются линейным уравнением или двумя линейными уравнениями, подпространства описываются однородными системами линейных уравнений.

Теорема 18.2. 1. *Множество всех решений однородной системы линейных уравнений с n неизвестными является подпространством размерности $n - r$, где r – ранг матрицы системы.*

2. *Для любого подпространства U пространства P^n существует такая однородная система линейных уравнений с n неизвестными, множество всех решений которой совпадает с U. Если $U \neq P^n$, то минимальное число уравнений в такой системе равно $n - \dim U$.*

► 1. Пусть

$$AX = O \qquad (1)$$

есть однородная система линейных уравнений над полем P с n неизвестными, A – ненулевая матрица, U – множество всех решений системы (1), $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in U$, α, $\beta \in P$. Тогда $A(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(A\mathbf{a}) + \beta(A\mathbf{b})$. Но $A\mathbf{a} = A\mathbf{b} = \mathbf{0}$, поэтому $A(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U$, U – подпространство в P^n.

В § 2.3 было доказано, что система (1) эквивалентна (возможно, после перенумерации неизвестных) некоторой системе ступенчатого вида:

$$\left.\begin{array}{r} a_{11}x_1 = a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r + a_{1\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{22}x_2 + \ldots + a_{2r}x_r + a_{2\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{rr}x_r + a_{r\,r+1}x_{r+1} + \ldots + a_{rn}x_n = 0, \end{array}\right\} \quad (2)$$

где $r = \operatorname{rank} A$; $a_{ii} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Если $r = n$, то система (2) имеет единственное решение, следовательно, $U = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть $r < n$. Неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$ считаем свободными. Придавая свободным неизвестным произвольные значения из поля P и вычисляя с помощью уравнений (2) значения остальных неизвестных, находим подпространство U всех решений системы (2) и, следовательно, системы (1). Для того чтобы построить базис подпространства U, будем поочередно придавать свободным неизвестным следующие значения:

$$\begin{array}{l} x_{r+1} = 1,\ x_{r+2} = \ldots = x_n = 0, \\ x_{r+1} = 0,\ x_{r+2} = 1,\ x_{r+3} = \ldots = x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{r+1} = \ldots = x_{n-1} = 0,\ x_n = 1. \end{array}$$

Пусть

$$\mathbf{c}_i = [\lambda_{i1} \ \ldots \ \lambda_{ir} \ \underbrace{0 \ \ldots \ 0}_{i-1} \ 1 \ 0 \ \ldots \ 0],$$

где $i = 1, 2, \ldots, n - r$, – соответствующие этим значениям свободных неизвестных решения системы (2). Покажем, что векторы

$$\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_{n-r} \qquad (3)$$

составляют базис подпространства U. Во-первых, они линейно независимы, так как ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \ldots & \lambda_{1r} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \ldots & \lambda_{2r} & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{n-r\,1} & \lambda_{n-r\,2} & \ldots & \lambda_{n-r\,r} & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

строками которой они являются, равен $n - r$. Пусть, во-вторых, строка $\mathbf{b} = [\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n]$ является решением системы (2). Положим

$$\mathbf{d} = \mathbf{b} - \alpha_{r+1}\mathbf{c}_1 - \ldots - \alpha_n\mathbf{c}_{n-r}.$$

Так как векторы $\mathbf{c}_1$, $\mathbf{c}_2$, ..., $\mathbf{c}_{n-r}$, $\mathbf{b}$ принадлежат подпространству U, то и $\mathbf{d} \in U$, т. е. $\mathbf{d}$ – решение системы (2). Все координаты вектора $\mathbf{d}$, начиная с $(r + 1)$-й, равны нулю, т. е. $\mathbf{d}$ получается при нулевых значениях свободных неизвестных. Но решение однородной системы, соответствующее нулевым значениям свободных неизвестных, является нулевым, т. е.

$$\mathbf{d} = \mathbf{0},\ \mathbf{b} = \alpha_{r+1}\mathbf{c}_1 + \alpha_{r+2}\mathbf{c}_2 + \ldots + \alpha_n\mathbf{c}_{n-r}.$$

Итак, (3) – базис подпространства U. Следовательно, $\dim U = n - r$, т. е. первое утверждение теоремы доказано.

2. Как отмечалось выше, нулевое подпространство совпадает с множеством решений однородной системы, ранг матрицы которой равен n. С другой стороны, P^n – множество решений однородной системы, все коэффициенты которой – нули. Пусть теперь U – подпространство в P^n, $\dim U = m$, $0 \neq m \neq n$. Возьмем в U какой-либо базис

$$\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \ldots,\ \mathbf{b}_m \tag{4}$$

и рассмотрим матрицу

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m \end{bmatrix},$$

составленную из строк $\mathbf{b}_i$. Ее ранг равен m. Для определенности будем считать, что базисный минор этой матрицы расположен в последних m столбцах. Как показано в § 4.8, матрицу B с помощью элементарных преобразований строк можно привести к виду

$$C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1\ n-m} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2\ n-m} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{m\ n-m} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}.$$

Запишем теперь систему уравнений:

$$\left.\begin{array}{lllll} a_{11}x_{n-m+1} & + a_{21}x_{n-m+2} & + \dots + a_{m1}x_n & = x_1, \\ a_{12}x_{n-m+1} & + a_{22}x_{n-m+2} & + \dots + a_{m2}x_n & = x_2, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1\ n-m}x_{n-m+1} & + a_{2\ n-m}x_{n-m+2} & + \dots + a_{m\ n-m}x_n & = x_{n-m} \end{array}\right\} \quad (5)$$

и покажем, что она искомая, т. е. множество ее решений совпадает с подпространством U. В самом деле, система m строк матрицы C эквивалентна базису (4) подпространства U и, следовательно, сама является в U базисом. Поэтому U есть линейная оболочка строк матрицы C, т. е. множество всех строк вида

$$(\lambda_1 a_{11} + \lambda_2 a_{21} + \dots + \lambda_m a_{m1}, \ \dots, \ \lambda_1 a_{1\ n-m} + \dots + \\ + \lambda_m a_{m\ n-m}, \ \lambda_1, \ \lambda_2, \ \dots, \ \lambda_m).$$

С другой стороны, очевидно, что множество всех решений системы (5) такое же ($\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ – значения свободных неизвестных $x_{n-m+1}, x_{n-m+2}, \dots, x_n$).

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что число r линейно независимых строк в матрице однородной системы линейных уравнений, задающей m-мерное подпространство, должно быть равным $n - m$, поскольку $m = n - r$. ◄

З а м е ч а н и е. Очевидно, что при построении однородной системы линейных уравнений, задающей подпространство U, вместо базиса (4) можно брать произвольную конечную систему образующих этого пространства.

С л е д с т в и е 18.1. *Однородная система линейных уравнений имеет ненулевое решение тогда и лишь тогда, когда ранг ее матрицы меньше числа неизвестных. В частности, однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имеет ненулевое решение, если и только если ее определитель равен нулю.*

Базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называют также ее *фундаментальной системой решений*.

Пример 18.1. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 &= 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Р е ш е н и е. Выпишем матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & 19 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Заметим, что последняя матрица эквивалентна матрице

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -8 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & -5 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, исходная система эквивалентна системе

$$\left.\begin{aligned} x_1 - 8x_3 + 7x_4 &= 0, \\ x_2 + 6x_3 - 5x_4 &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

Неизвестные x_3, x_4 считаем свободными и записываем систему (6) в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= 8x_3 - 7x_4, \\ x_2 &= -6x_3 + 5x_4. \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Положим сначала $x_3 = 1$, $x_4 = 0$ и найдем из системы (7) значения x_1, x_2: $x_1 = 8$, $x_2 = -6$. Затем положим $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ и снова найдем из системы (7) значения $x_1 = -7$, $x_2 = 5$. Заметим, что при этом удобно пользоваться следующей схемой:

x_1	x_2	x_3	x_4
8	−6	1	0
−7	5	0	1

Итак, решения (8, −6, 1, 0) и (−7, 5, 0, 1) составляют искомую фундаментальную систему решений.

Пример 18.2. Найти однородную систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку $L(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, где $\mathbf{b}_1 = (1, -1, 1, 0)$; $\mathbf{b}_2 = (1, 1, 0, 1)$; $\mathbf{b}_3 = (2, 0, 1, 1)$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим матрицу, составленную из строк $\mathbf{b}_i$, и преобразуем ее

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, искомая система имеет вид

$$\left.\begin{aligned} x_3 + x_4 &= x_1, \\ -x_3 + x_4 &= x_2. \end{aligned}\right\}$$

Упражнения

1. Докажите, что однородная система линейных уравнений с действительными коэффициентами, имеющая ненулевое комплексное решение, имеет и ненулевое действительное решение.

2. Докажите, что фундаментальная система действительных решений однородной системы линейных уравнений с действительными коэффициентами является фундаментальной системой решений этой же однородной системы уравнений, рассматриваемой над полем комплексных чисел.

3. Докажите, что если суммы элементов в каждой строке и каждом столбце квадратной матрицы равны нулю, то алгебраические дополнения всех ее элементов равны.

18.3. Связь между решениями произвольной и соответствующей однородной систем линейных уравнений

Пусть задана произвольная система линейных уравнений

$$AX = B. \tag{1}$$

Однородная система

$$AX = O \tag{2}$$

с той же матрицей A называется *приведенной* для системы (1). Между решениями этих двух систем существует тесная связь, которую раскрывает

Теорема 18.3. *Если столбец* $\mathbf{a}$ *является решением системы (1), а подпространство* U *пространства* P^n *столбцов — множеством всех решений приведенной системы (2), то множество всех решений системы (1) совпадает с множеством* $\mathbf{a} + U = \{\mathbf{a} + \mathbf{u} \mid \mathbf{u} \in U\}$.

Доказательство этой теоремы основано на следующих двух леммах.

Лемма 18.1. *Если* $\mathbf{a}$ *— решение системы (1),* $\mathbf{u}$ *— решение системы (2), то* $\mathbf{a} + \mathbf{u}$ *— решение системы (1).*

➤ $A(\mathbf{a} + \mathbf{u}) = A\mathbf{a} + A\mathbf{u} = B + O = B$. ◄

Аналогично доказывается

Лемма 18.2. *Если* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *– решения системы (1), то* $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ *– решение системы (2).*

Перейдем к доказательству теоремы 18.3.

➤ Пусть система (1) совместна, $\mathbf{a}$ – одно из ее решений, W – множество всех решений системы. Согласно лемме 18.1, $\mathbf{a} + U \subseteq W$. С другой стороны, если $w \in W$, то по лемме 18.2 $\mathbf{w} - \mathbf{a} = \mathbf{u} \in U$, $\mathbf{w} = \mathbf{a} + \mathbf{u} \in \mathbf{a} + U$, $W \subseteq \mathbf{a} + U$. Следовательно, $W = \mathbf{a} + U$. ◄

Следствие 18.2. *Система линейных уравнений имеет единственное решение, если и только если ранги ее основной и расширенной матриц равны числу неизвестных.*

19. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе изучаются линейные операторы линейных пространств. Раскрывается тесная связь теории линейных операторов с теорией матриц.

19.1. Определение и простейшие свойства линейных операторов

Определение 19.1. *Пусть* V *и* W *– линейные пространства над одним и тем же полем* P*. Отображение* $f: V \to W$ *называется линейным оператором пространства* V *в пространство* W*, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) $f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b})$ *для любых векторов* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$;

2) $f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$ *для любого вектора* $\mathbf{a} \in V$ *и любого числа* $\alpha \in P$.

Очевидно, что совокупность условий 1 и 2 равносильна следующему условию: $f(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b})$ *для любых векторов* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$ *и любых чисел* $\alpha, \beta \in P$.

Линейный оператор пространства V *в себя называется линейным оператором (или линейным преобразованием) пространства* V.

Пример 19.1. Для произвольного линейного пространства тождественное отображение является линейным оператором.

Пример 19.2. Пусть V и W – линейные пространства над одним и тем же полем. Отображение 0: $V \to W$, ставящее в соответствие каждому вектору пространства V нулевой вектор пространства W, является линейным оператором пространства V в пространство W. Этот оператор называется *нулевым*.

Пример 19.3. Пусть P – поле, $V = P[x]$. Отображение пространства V в себя, ставящее в соответствие каждому многочлену из $P[x]$ его производную, является линейным оператором пространства V. Этот оператор называется *дифференцированием пространства* $P[x]$.

Пример 19.4. Пусть $V = U_1 \oplus U_2$ – прямая сумма подпространств. Любой вектор $\mathbf{a} \in V$ однозначно представляется в виде $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_i \in U_i$, $i = 1, 2$. Назовем вектор $\mathbf{a}_1$ *проекцией вектора* $\mathbf{a}$ *на подпространство* U_1 *параллельно подпространству* U_2. Отображение f: $V \to V$, ставящее в соответствие каждому вектору $\mathbf{a}$ его проекцию $\mathbf{a}_1$, является линейным оператором пространства V. Назовем этот оператор *проектором пространства* V *на подпространство* U_1 *параллельно подпространству* U_2. Аналогично определяется *проектор на подпространство* U_2.

Отметим простейшие свойства линейных операторов. Пусть V, W – линейные пространства над одним и тем же полем P, $\mathbf{0}_V$, $\mathbf{0}_W$ – нулевые векторы в пространствах V и W соответственно, f: $V \to W$ – линейный оператор.

1. $f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$. *Для любого вектора* $\mathbf{a}$ *пространства* V $f(-\mathbf{a}) = -f(\mathbf{a})$.

➤ Полагая в равенстве $f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a})$ $\alpha = 0$ и $\alpha = -1$, получаем требуемое. ◄

2. *Для любых векторов* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ *пространства* V *и любых чисел* $x_1, x_2, \ldots, x_k$ *из поля* P

$$f(x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_k\mathbf{a}_k) = x_1 f(\mathbf{a}_1) + x_2 f(\mathbf{a}_2) + \ldots + x_k f(\mathbf{a}_k).$$

➤ Достаточно применить индукцию по k. ◄

Свойство 2 иногда удобно формулировать в следующем виде: *если*

$$\mathbf{x} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \ldots\ \mathbf{a}_k]X,$$

где $X = [x_1, x_2 \ldots x_k]^T$ – *матрица-столбец, то*

$$f(\mathbf{x}) = [f(\mathbf{a}_1)\ f(\mathbf{a}_2)\ \ldots\ f(\mathbf{a}_k)]X.$$

3. *Если система векторов*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{1}$$

пространства V линейно зависима, то и система векторов

$$f(\mathbf{a}_1),\ f(\mathbf{a}_2),\ \dots,\ f(\mathbf{a}_k) \qquad (2)$$

пространства W линейно зависима.

➤ Если $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k = \mathbf{0}_V$, то

$$\alpha_1 f(\mathbf{a}_1) + \alpha_2 f(\mathbf{a}_2) + \dots + \alpha_k f(\mathbf{a}_k) =$$
$$= f(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_k\mathbf{a}_k) = f(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W. \blacktriangleleft$$

4. *Если U – подпространство пространства V, то $f(U)$ – подпространство пространства W.* В частности, *$f(V)$ – подпространство пространства W.*

➤ Так как $U \neq \varnothing$, то и $f(U) \neq \varnothing$. Далее, пусть $\mathbf{v}_1$ и $\mathbf{v}_2$ – векторы из $f(U)$. Тогда $\mathbf{v}_i = f(\mathbf{u}_i)$, $\mathbf{u}_i \in U$, $i = 1, 2$. Для любых α, $\beta \in P$

$$\alpha\mathbf{v}_1 + \beta\mathbf{v}_2 = \alpha f(\mathbf{u}_1) + \beta f(\mathbf{u}_2) = f(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2).$$

Поскольку U – подпространство, $\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2 \in U$. Но тогда $f(\alpha\mathbf{u}_1 + \beta\mathbf{u}_2) \in f(U)$. ◄

5. *Если (1) – система образующих подпространства U пространства V, то (2) – система образующих подпространства $f(U)$ и*

$$\dim f(U) \leqslant \dim U. \qquad (3)$$

➤ Если $\mathbf{b} \in f(U)$, то $\mathbf{b} = f(\mathbf{a})$ для некоторого вектора $\mathbf{a} \in U$. Так как (1) – система образующих подпространства U, то $\mathbf{a} = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2\ \dots\ \mathbf{a}_k]X$, $X \in P_{k,1}$. Следовательно (согласно свойству 2),

$$\mathbf{b} = f(\mathbf{a}) = [f(\mathbf{a}_1)\ f(\mathbf{a}_2)\ \dots\ f(\mathbf{a}_k)]X.$$

Доказано, что (2) – система образующих подпространства $f(U)$. В частности, если (1) – базис подпространства U, то (2) – система образующих для $f(U)$ и либо все ее векторы нулевые, а следовательно, $f(U) = \{\mathbf{0}_W\}$, либо она содержит базис пространства $f(U)$. В любом случае верно неравенство (3). ◄

Следующая теорема указывает на тот факт, что линейный оператор пространства V в пространство W однозначно определяется образами векторов какого-либо базиса пространства V, причем этими образами могут быть произвольные векторы пространства W.

Теорема 19.1. *Пусть даны линейные пространства V и W над полем P, базис пространства V*

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \tag{4}$$

и произвольная система векторов

$$\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_n \tag{5}$$

пространства W. Тогда существует единственный линейный оператор $f\colon V \to W$, при котором

$$f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

➤ Сначала докажем существование этого линейного оператора. Определим отображение $f\colon V \to W$ с помощью формулы $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}X$, где $\mathbf{x}$ – произвольный вектор пространства V; X – его координатный столбец в базисе (4); $\mathbf{w} = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_n]$. Так как в базисе (4) i-я координата вектора $\mathbf{v}_i$ равна 1, а все остальные – 0, то

$$f(\mathbf{v}_i) = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_n][0\ \ldots\ 1\ \ldots\ 0]^T = \mathbf{w}_i,$$

т. е. верны равенства (6).

Покажем, что f – линейный оператор. Пусть $\mathbf{y} \in V$, Y – координатный столбец вектора $\mathbf{y}$ в базисе (4), $\alpha,\ \beta \in P$. Координатным столбцом вектора $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ в том же базисе служит $\alpha X + \beta Y$, следовательно,

$$f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \mathbf{w}(\alpha X + \beta Y) = \alpha(\mathbf{w}X) + \beta(\mathbf{w}Y) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y}).$$

Итак, f – искомый линейный оператор.

Теперь докажем единственность оператора f. Если $g\colon V \to W$ – такой линейный оператор, что $g(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, и $\mathbf{x}$ – произвольный вектор из V с координатным столбцом X в базисе (4), то $\mathbf{x} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \ldots\ \mathbf{v}_n]X$, а

$$g(\mathbf{x}) = [g(\mathbf{v}_1)\ g(\mathbf{v}_2)\ \ldots\ f(\mathbf{v}_n)]X = [\mathbf{w}_1\ \mathbf{w}_2\ \ldots\ \mathbf{w}_n]X = f(\mathbf{x}).$$

Следовательно, $g = f$. ⮜

19.2. Действия с линейными операторами

Пусть V и W – линейные пространства над полем P. Множество всех линейных операторов пространства V в пространство W обозначим символом $L(V, W)$. Введем на этом множестве алгебраическую операцию — сложение. Определим также операцию умножения элементов множества $L(V, W)$ на числа из поля P.

Пусть $f, g \in L(V, W)$. Поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{a}$ пространства V вектор $f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})$ пространства W. Тем самым мы определим отображение $h: V \to W$, при котором $h(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})$ для любого вектора $\mathbf{a} \in V$. Отображение h называется *суммой линейных операторов* f и g и обозначается $f + g$.

Пусть теперь $f \in L(V, W)$, $\lambda \in P$. Поставим в соответствие каждому вектору $\mathbf{a}$ пространства V вектор $\lambda f(\mathbf{a})$ пространства W. Этим мы определили отображение $t: V \to W$, при котором $t(\mathbf{a}) = \lambda f(\mathbf{a})$ для любого вектора $\mathbf{a} \in V$. Отображение t называется *произведением линейного оператора f на число λ* и обозначается λf.

Предложение 19.1. *Если f и g — линейные операторы пространства V в пространство W, $\lambda \in P$, то $f + g$ и λf — также линейные операторы пространства V в пространство W.*

➤ Докажем, что $f + g \in L(V, W)$. Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\alpha, \beta \in P$. Тогда

$$(f + g)(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = f(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) + g(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) =$$
$$= \alpha f(\mathbf{a}) + \beta f(\mathbf{b}) + \alpha g(\mathbf{a}) + \beta g(\mathbf{b}) =$$
$$= \alpha(f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a})) + \beta(f(\mathbf{b}) + g(\mathbf{b})) = \alpha(f + g)(\mathbf{a}) + \beta(f + g)(\mathbf{b}).$$

Второе утверждение доказывается аналогично. ➤

Отметим некоторые другие свойства сложения линейных операторов и умножения линейного оператора на число. Для любых линейных операторов f, g, h и чисел α, β верны следующие равенства:

1) $f + g = g + f$;
2) $(f + g) + h = f + (g + h)$;
3) $f + 0 = f$;
4) $f + (-1)f = 0$.

Таким образом, *множество $L(V, W)$ является абелевой группой относительно сложения.*

5) $(\alpha\beta)f = \alpha(\beta f)$;
6) $1f = f$;

7) $\alpha(f+g)=\alpha f+\alpha g$;

8) $(\alpha+\beta)f=\alpha f+\beta f$.

Следовательно, *множество $L(V, W)$ является линейным пространством над полем P относительно сложения линейных операторов и умножения линейного оператора на число.*

Доказательства равенств 1 – 8 следуют непосредственно из определения равенства отображений, поэтому мы оставляем их читателю.

Умножение линейных операторов будем понимать как умножение отображений. Тогда верно

Предложение 19.2. *Если f – линейный оператор пространства V в пространство W, g – линейный оператор пространства W в пространство U, то gf – линейный оператор пространства V в пространство U.*

➤ Пусть $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$, $\alpha,\ \beta \in P$. Тогда $gf(\alpha\mathbf{a}+\beta\mathbf{b}) = g(f(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b})) = g(\alpha f(\mathbf{a})+\beta f(\mathbf{b})) = \alpha g(f(\mathbf{a}))+\beta g(f(\mathbf{b})) = \alpha(gf)(\mathbf{a}) + \beta(gf)(\mathbf{b}) \in U$. ➤

Для нас наиболее важны такие линейные операторы $f\colon V \to W$, когда первое и второе пространства совпадают, т. е. линейные операторы пространства V. Множество всех линейных операторов пространства V обозначается $L(V)$. Очевидно, что *если $f, g \in L(V)$, $\alpha \in P$, то fg, $f+g$, $\alpha f \in L(V)$.*

19.3. Матрица линейного оператора

Пусть в пространстве V заданы линейный оператор f и базис

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n. \tag{1}$$

Согласно теореме 19.1, оператор f однозначно определяется векторами $f(\mathbf{v}_1)$, $f(\mathbf{v}_2)$, ..., $f(\mathbf{v}_n)$, которые, в свою очередь, однозначно определяются своими координатами в базисе (1). Пусть $A_i = [a_{1i}\ a_{2i}\ \ldots\ a_{ni}]^T$, $i = 1, 2, \ldots, n$, – координатный столбец вектора $f(\mathbf{v}_i)$ в базисе (1). Составим $n \times n$-матрицу

$$A=[A_1\ A_2\ \ldots\ A_n]=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2}$$

столбцами которой являются координатные столбцы векторов $f(\mathbf{v}_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, в базисе (1). Из вышеизложенного следует, что оператор f однозначно определяется матрицей A. Матрица A называется *матрицей линейного оператора f в базисе* (1).

Пример 19.5. Тождественный оператор в любом базисе имеет единичную матрицу. Аналогично при любом выборе базиса матрица нулевого оператора нулевая.

Пример 19.6. Пусть Π – плоскость, V_2 – пространство всех свободных векторов плоскости Π, O – фиксированная точка плоскости Π, $\alpha \in \mathbf{R}$. Пусть, далее, $\mathbf{x}$ – произвольный вектор пространства V_2. Отложим вектор $\mathbf{x}$ от точки O, т. е. построим такой отрезок OM, что $\overrightarrow{OM} = \mathbf{x}$. Повернем отрезок OM в плоскости Π вокруг точки O на угол $|\alpha|$ против часовой стрелки при $\alpha \geqslant 0$ и по часовой стрелке при $\alpha < 0$. Полученный в результате отрезок обозначим OM'.

Рассмотрим теперь отображение $f: V_2 \to V_2$, $\mathbf{x} \to \overrightarrow{OM'}$. Читатель легко проверит, используя рис. 19.1, что f не зависит от выбора начальной точки O и является линейным оператором пространства V_2. Этот оператор ниже будем называть *оператором поворота плоскости на угол* α.

Найдем матрицу оператора поворота плоскости на угол α в базисе $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, векторы которого – единичные и взаимно ортогональные. В этом случае, как видно из рис. 19.2,

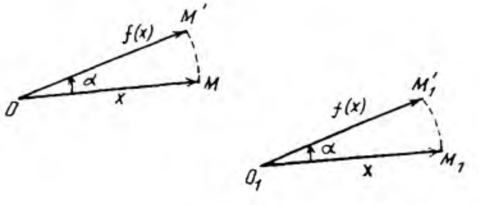


Рис. 19.1

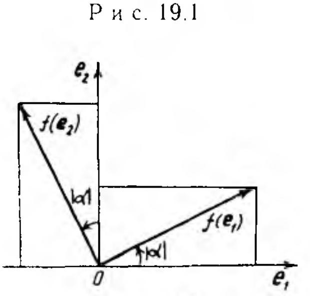


Рис. 19.2

$$f(\mathbf{e}_1) = \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \sin\alpha \cdot \mathbf{e}_2,$$
$$f(\mathbf{e}_2) = -\sin\alpha \cdot \mathbf{e}_1 + \cos\alpha \cdot \mathbf{e}_2$$

Следовательно, искомой матрицей является

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}.$$

Предложение 19.3. *Пусть f – линейный оператор пространства V, A – $n \times n$-матрица над основным полем. Матрица A является матрицей оператора f в базисе (1), если и только если для любого вектора $\mathbf{x}$ из пространства V с координатным столбцом X в базисе (1) образ $f(\mathbf{x})$ этого вектора имеет в том же базисе координатный столбец AX.*

➤ Пусть X – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в базисе (1), A – матрица линейного оператора f в этом базисе,

$$\mathbf{v} = [\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_n],\ \mathbf{w} = [f(\mathbf{v}_1)\ f(\mathbf{v}_2)\ \dots\ f(\mathbf{v}_n)].$$

Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{v}X$ и, следовательно, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}X$ (см. § 19.1, свойство 2). Но $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{v}A_i$, где A_i – столбец матрицы A с номером i, и, следовательно, $\mathbf{w} = \mathbf{v}A$. Поэтому $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}X = (\mathbf{v}A)X = \mathbf{v}(AX)$, AX – координатный столбец вектора $f(\mathbf{x})$ в базисе (1).

Перейдем к доказательству достаточности нашего утверждения. Так как для $i = 1, 2, \dots, n$ координатный столбец i-го базисного вектора $\mathbf{v}_i$ в базисе (1) равен $[0 \dots 1 \dots 0]^T$, где 1 стоит на i-м месте, то координатный столбец вектора $f(\mathbf{v}_i)$ в базисе (1)

$$A\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, A – матрица линейного оператора f в базисе (1). ➤

Важно заметить, что возможность задания с помощью матриц характерна именно для линейных операторов, т. е. верна следующая

Теорема 19.2. *Пусть $f\colon V \to V$ – некоторое преобразование n-мерного линейного пространства V над по-*

лем P, (1) – произвольный базис в V. Преобразование f является линейным тогда и только тогда, когда над полем P существует такая $n \times n$-матрица A, что для любого вектора $\mathbf{x}$ *с координатным столбцом X в базисе* (1) *его образ $f(\mathbf{x})$ имеет координатный столбец AX. Если это условие выполняется, то A – матрица оператора f в базисе* (1).

➤ Для линейного оператора f доказываемое утверждение следует из предложения 19.3.

Обратно, пусть такая матрица A существует, X и Y – координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ в базисе (1), $\alpha, \beta \in P$. Тогда вектор $\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}$ имеет в том же базисе координатный столбец $\alpha X + \beta Y$, и, следовательно, координатным столбцом вектора $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y})$ служит $A(\alpha X + \beta Y) = \alpha(AX) + \beta(AY)$. Так как вектор однозначно определяется своим координатным столбцом и правая часть последнего равенства – координатный столбец вектора $\alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$, то $f(\alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{y}) = \alpha f(\mathbf{x}) + \beta f(\mathbf{y})$; следовательно, f – линейный оператор. Согласно предложению 19.3, A – матрица оператора f в базисе (1). ➤

Важно подчеркнуть, что из двух предыдущих теорем вытекает, в частности, следующее: если f – линейный оператор линейного пространства V, A – его матрица в базисе (1), $\mathbf{x}$ –произвольный вектор пространства V, X и Y – координатные столбцы векторов $\mathbf{x}$ и $f(\mathbf{x})$ соответственно в том же базисе, то

$$Y = AX. \tag{3}$$

Обратно: всякая формула вида (3), где

$$X = [x_1 \ x_2 \ \ldots \ x_n]^T, \ Y = [y_1 \ y_2 \ \ldots \ y_n]^T$$

и A – квадратная матрица порядка n над основным полем, задает некоторый линейный оператор f, а именно, если координатный столбец произвольного вектора $\mathbf{x}$ в базисе (1) равен X, то $Y = AX$ – координатный столбец вектора $f(\mathbf{x})$, A – матрица оператора f в том же базисе.

Теорема 19.3. *Пусть f, g – линейные операторы линейного пространства V над полем P, $\alpha \in P$, A, B – матрицы операторов соответственно f и g в базисе*

(1). Тогда матрицами операторов fg, $f + g$ и αf в том же базисе являются AB, $A + B$ и αA.

➤ Докажем, что матрица произведения линейных операторов равна произведению матриц сомножителей. Пусть X – координатный столбец произвольного вектора $\mathbf{x}$ в базисе (1). Тогда вектор $g(\mathbf{x})$ имеет в том же базисе координатный столбец BX, а вектор $fg(\mathbf{x}) = f(g(\mathbf{x}))$ – координатный столбец $A(BX) = (AB)X$. Согласно предложению 19.3, AB – матрица линейного оператора fg.

Случаи $f + g$ и αf рассматриваются аналогично. ➤

Введем еще понятия многочлена от матрицы и многочлена от линейного оператора.

Пусть $g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m$ – многочлен с коэффициентами из поля P, A – квадратная матрица над этим полем. *Значением многочлена* $g(x)$ при $x = A$ или просто *многочленом* $g(A)$ называется матрица $\alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_m A^m$, где E – единичная матрица того же порядка, что и A.

Предложение 19.4. *Если $g(x)$ и $s(x)$ – многочлены над полем P, $g(x)s(x) = h(x)$, $g(x) + s(x) = t(x)$, A – квадратная матрица над полем P, то верны следующие равенства:*

1) $h(A) = g(A)s(A)$,

2) $t(A) = g(A) + s(A)$.

➤ Докажем первое из этих равенств. Пусть

$$g(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \ldots + \alpha_m x^m, \quad s(x) = \beta_0 + \beta_1 x + \ldots + \beta_l x^l.$$

Тогда

$$h(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_{m+l} x^{m+l}, \quad \gamma_k = \sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j,$$

где $k = 0, 1, \ldots, m + l$. Далее:

$$g(A) = \alpha_0 E + \alpha_1 A + \ldots + \alpha_m A^m, \quad s(A) = \beta_0 E + \beta_1 A + \ldots + \beta_l A^l,$$
$$g(A)s(A) = \alpha_0\beta_0 E + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)A + \ldots + \alpha_m\beta_l A^{m+l} =$$
$$= \gamma_0 E + \gamma_1 A + \ldots + \gamma_{m+l} A^{m+l} = h(A).$$

Второе равенство предлагаем читателю доказать самостоятельно. ➤

С л е д с т в и е 19.1. *Многочлены от одной матрицы перестановочны, т. е. $g(A)s(A) = s(A)g(A)$.*

➤ Доказательство этого утверждения непосредственно следует из предложения 19.4 и свойства перестановочности многочленов от x. ◄

Пусть теперь V – линейное пространство над полем P, f – линейный оператор пространства V. *Значением многочлена $g(x)$ при $x = f$* или просто *многочленом $g(f)$* называется линейный оператор

$$\alpha_0 e + \alpha_1 f + \ldots + \alpha_m f^m,$$

где e – тождественный оператор пространства V. Из вышесказанного следует

Предложение 19.5. *Если в некотором базисе оператор f имеет матрицу A, а $g(x)$ – многочлен, то матрицей оператора $f(g)$ в этом же базисе является $f(A)$.*

Из предыдущего предложения и следствия 19.1 вытекает, что *многочлены от одного линейного оператора перестановочны.*

Упражнения

1. Докажите, что если $g(x)$ – многочлен и $A = \mathrm{diag}\,[A_1, A_2, \ldots, A_n]$, то $g(A) = \mathrm{diag}\,[g(A_1), g(A_2), \ldots, g(A_n)]$.

2. Докажите, что множество $L(V)$ всех линейных операторов n-мерного пространства V над полем P является относительно сложения и умножения линейных операторов кольцом, изоморфным кольцу всех квадратных матриц порядка n над полем P.

19.4. Изоморфизмы линейных пространств

В определении линейного пространства речь идет о свойствах операций над векторами, но ничего не говорится о свойствах самих векторов. Не исключено, что, хотя векторы некоторых линейных пространств по своей природе совершенно различны, эти пространства с точки зрения свойств операций идентичны или, как говорят в алгебре, изоморфны. Точное определение таково.

Определение 19.2. *Пусть V и W – линейные пространства над одним и тем же полем P. Биективный линейный оператор пространства V на пространство W называется изоморфизмом линейных пространств V и W. Если такой изоморфизм существует,* *то говорят, что пространство V изоморфно пространству W, и пишут $V \cong W$.*

Отметим простейшие свойства изоморфизмов линейных пространств.

1. *Тождественное отображение $e: V \to V$ является изоморфизмом, так что $V \cong V$.*

2. *Если $f: V \to W$ — изоморфизм линейных пространств, то и $f^{-1}: W \to V$ — изоморфизм.* Поэтому *если $V \cong W$, то и $W \cong V$.* В этой ситуации просто говорят, что пространства V и W *изоморфны.*

➤ Существование отображения f^{-1} и его биективность следуют из биективности оператора f. Покажем, что для любых векторов $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ пространства W и любых чисел α и β из основного поля

$$f^{-1}(\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2) = \alpha f^{-1}(\mathbf{w}_1) + \beta f^{-1}(\mathbf{w}_2). \tag{1}$$

Так как f инъективно, то равенство (1) равносильно равенству

$$f(f^{-1}(\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2)) = f(\alpha f^{-1}(\mathbf{w}_1) + \beta f^{-1}(\mathbf{w}_2)). \tag{2}$$

Но

$$f(f^{-1}(\alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2)) = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2$$

и

$$f(\alpha f^{-1}(\mathbf{w}_1) + \beta f^{-1}(\mathbf{w}_2)) = \alpha ff^{-1}(\mathbf{w}_1) + \beta ff^{-1}(\mathbf{w}_2)) = \\ = \alpha\mathbf{w}_1 + \beta\mathbf{w}_2.$$

Это доказывает равенство (2), а вместе с ним и равенство (1). ◄

3. *Если $f: V \to W$, $g: W \to U$ — изоморфизмы линейных пространств, то и их произведение $gf: V \to U$ есть изоморфизм.* Следовательно, *из $V \cong W$ и $W \cong U$ вытекает $V \cong U$.*

➤ Действительно, gf есть биекция как произведение биекций. Согласно предложению 19.2, gf — линейный оператор. ◄

Совокупность свойств 1—3 означает, что отношение изоморфизма линейных пространств на множестве всех линейных пространств над одним и тем же полем есть отношение эквивалентности и потому разбивает это множество на непересекающиеся классы изоморфных линейных пространств. Ниже мы установим критерий изоморфизма линейных пространств.

Пусть снова $f\colon V \to W$ – изоморфизм линейных пространств.

4. *Если система векторов*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{3}$$

пространства V линейно независима, то система

$$f(\mathbf{a}_1), f(\mathbf{a}_2), \ldots, f(\mathbf{a}_k) \tag{4}$$

также линейно независима.

➤ Если бы векторы (4) были линейно зависимы, то их образы при изоморфизме f^{-1}, т. е. векторы (3), также были бы линейно зависимы. ◄

5. *Если* (3) – *базис пространства V, то* (4) – *базис пространства W.* Следовательно, *размерности изоморфных пространств равны.*

➤ Это следует из предыдущего утверждения и свойства 2 линейных операторов. ◄

6. *Пусть $\varnothing \neq U \subset V$. Тогда:*

1) *U является подпространством в V, если и только если $f(U)$ – подпространство в W;*

2) *если U – подпространство, то* $\dim U = \dim f(U)$.

➤ Если U – подпространство в V, то $f(U)$ является подпространством, согласно свойству 4 из § 19.1. Если же $f(U)$ – подпространство в W, то $f^{-1}(f(U)) = U$ – подпространство в V. Далее, учитывая свойство 5 из §19.1 и свойство 4, получаем требуемое. ◄

Лемма 19.1. *Пусть V и W – линейные пространства над полем P, $f\colon V \to W$ – линейный оператор, переводящий какой-либо базис*

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \tag{5}$$

пространства V в базис

$$f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n) \tag{6}$$

пространства W. Тогда f – изоморфизм линейных пространств.

➤ Нужно доказать, что отображение f биективно. Вначале докажем его иньективность. Пусть $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$ – векторы из пространства V с координатными столбцами соответственно X и Y в базисе (5). Пусть, далее,

$$[\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \dots\ \mathbf{v}_n] = \mathbf{v},\ [f(\mathbf{v}_1)\ f(\mathbf{v}_2)\ \dots\ f(\mathbf{v}_n)] = \mathbf{w}.$$

Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{v}X$, $\mathbf{y} = \mathbf{v}Y$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}X$, $f(\mathbf{y}) = \mathbf{w}Y$. Если теперь $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$, то $\mathbf{w}X = \mathbf{w}Y$ и, поскольку (6) – базис, $X = Y$, $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Итак, из равенства образов $f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{y})$ следует равенство $\mathbf{x} = \mathbf{y}$, т. е. f инъективно.

Докажем теперь сюръективность оператора f. Пусть $\mathbf{z}$ – произвольный вектор из W, Z – его координатный столбец в базисе (6). Тогда $\mathbf{x} = \mathbf{v}Z \in V$, $f(\mathbf{x}) = \mathbf{w}Z = \mathbf{z}$. ➤

Следствие 19.2. *Конечномерные линейные пространства над одним и тем же полем изоморфны тогда и только тогда, когда равны их размерности.*

➤ Для нулевых пространств теорема очевидна. Поэтому будем рассматривать ненулевые пространства. Выше уже доказывалось, что размерности изоморфных пространств равны. Пусть теперь V и W – линейные пространства над полем P одной и той же размерности n, система (5) – базис пространства V,

$$\mathbf{w}_1,\ \mathbf{w}_2,\ \dots,\ \mathbf{w}_n \tag{7}$$

является базисом пространства W. По теореме 19.1 существует линейный оператор f пространства V в пространство W, при котором $f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Так как системы векторов (5) и (7) – базисы пространств V и W, то f – изоморфизм. ➤

Следствие 19.3. *При фиксированных поле P и размерности n существует единственное с точностью до изоморфизма n-мерное линейное пространство над полем P. В частности, всякое n-мерное линейное пространство над полем P изоморфно пространству P^n n-членных столбцов (строк) над полем $P (n > 0)$.*

Предложение 19.6. *Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем P. Тогда линейное пространство $L(V)$ (всех линейных операторов пространства V) изоморфно линейному пространству $P_{n,n}$ всех $n \times n$-матриц над полем P.*

➤ Зафиксировав в пространстве V базис и поставив в соответствие каждому линейному оператору его матрицу в этом базисе, получим нужный изоморфизм. ➤

Сделаем некоторые важные выводы. В этой книге мы рассматриваем не столько линейные операторы одного пространства в другое, сколько линейные операторы пространства в себя. Вводя координаты, мы можем действия над векторами или линейными операторами пространства превратить в одноименные действия над матрицами. Конкретизируем это. Пусть V – n-мерное линейное пространство над полем P. Зафиксируем в V какой-либо базис и поставим в соответствие каждому вектору его координатный столбец, а каждому линейному оператору пространства V – его матрицу в этом базисе. Как показано выше, тем самым мы установим изоморфизм пространства V на пространство n-членных столбцов P^n и пространства линейных операторов $L(V)$ на пространство $P_{n,n}$ квадратных матриц порядка n над полем P. Отождествим теперь объекты, соответствующие друг другу при этих изоморфизмах, т. е. векторы пространства V будем рассматривать как соответствующие координатные столбцы, а линейные операторы – как матрицы. Тогда сложение и умножение векторов или линейных операторов на числа, а также умножение линейных операторов заменяются одноименными операциями над матрицами: действие линейного оператора на вектор означает умножение столбца на матрицу слева. При вычислениях эта точка зрения весьма удобна.

Учитывая сказанное выше, мы можем сформулировать более общий вариант теоремы 18.2 о задании подпространств системами линейных уравнений.

Теорема 19.4*. Пусть в n-мерном линейном пространстве V над полем P фиксирован произвольный базис. Тогда:*

1) *множество всех векторов из V, координаты которых удовлетворяют однородной системе линейных уравнений с n неизвестными, является в V подпространством размерности $n - r$, где r – ранг матрицы этой системы;*

2) *любое подпространство в V совпадает с множеством всех векторов, координаты которых в заданном*

базисе удовлетворяют некоторой однородной системе линейных уравнений над полем P с n неизвестными.

19.5. Ранг и дефект линейного оператора

Пусть f – линейный оператор линейного пространства V над полем P. Как было показано ранее, множество $f(V) = \{f(\mathbf{v}) \,|\, \mathbf{v} \in V\}$ является подпространством пространства V. Размерность этого подпространства называется *рангом оператора* f и обозначается $\operatorname{rank} f$.

Предложение 19.7. *Ранг линейного оператора совпадает с рангом его матрицы.*

➤ Пусть

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \tag{1}$$

является базисом пространства V, f – линейный оператор, A – матрица оператора f в этом базисе. Тогда

$$f(\mathbf{v}_1), f(\mathbf{v}_2), \ldots, f(\mathbf{v}_n) \tag{2}$$

является системой образующих пространства $f(V)$, а столбцы матрицы A – координатными столбцами векторов (2) в базисе (1). Поэтому ранг оператора f равен рангу системы (2), а ранг последней – рангу матрицы A. ➤

Определение 19.3. *Пусть f – линейный оператор пространства V. Множество всех векторов* $\mathbf{a}$ *пространства V, таких, что* $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, *называется ядром оператора f.*

Ядро линейного оператора f обозначается $\operatorname{Ker} f$. Итак, $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{a} \in V \,|\, f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}\}$.

Теорема 19.5. *Множество* $\operatorname{Ker} f$ *– подпространство пространства V. Кроме того,* $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \operatorname{rank} f$.

➤ Пусть $\mathbf{x}$ – произвольный вектор пространства V. Условие $\mathbf{x} \in \operatorname{Ker} f$ равносильно равенству

$$f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{3}$$

Если A – матрица оператора f в базисе (1), X – координатный столбец вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе, то равенство (3) равносильно матричному равенству

$$AX = O, \tag{4}$$

где O – нулевой столбец. Равенство (4) можно рассматривать как однородную систему линейных уравнений относительно неизвестных координат вектора $\mathbf{x}$ с матрицей A. Итак, $\operatorname{Ker} f$ совпадает с множеством всех векторов, координаты которых удовлетворяют системе (4). Но мы знаем, что последнее множество является подпространством пространства V размерности $\dim V - \operatorname{rank} A$. Учитывая, что $\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} f$, получаем $\dim \operatorname{Ker} f = \dim V - \operatorname{rank} f$. ◄

Определение 19.4. *Размерность пространства* $\operatorname{Ker} f$ *называется дефектом оператора* f.

Дефект оператора f обозначается $\operatorname{def} f$.

Предложение 19.8. *Линейный оператор инъективен тогда и только тогда, когда его ядро нулевое.*

► Пусть f – линейный оператор пространства V, $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$. Рассмотрим цепочку равносильных равенств: $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$, $f(\mathbf{a}) - f(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$, $f(\mathbf{a} - \mathbf{b}) = \mathbf{0}$. Последнее означает, что $\mathbf{a} - \mathbf{b} \in \operatorname{Ker} f$. Итак, $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$ тогда и только тогда, когда $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{k}$, $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{k}$, где $\mathbf{k} \in \operatorname{Ker} f$. Если теперь $\operatorname{Ker} f \neq \{\mathbf{0}\}$, $\mathbf{k} \in \operatorname{Ker} f$ и $\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$, то $f(\mathbf{b} + \mathbf{k}) = f(\mathbf{b})$, $\mathbf{b} + \mathbf{k} \neq \mathbf{b}$, и, следовательно, f не инъективно. Если же $\operatorname{Ker} f = \{\mathbf{0}\}$ и $f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{b})$, то $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ и f инъективно. ◄

Следствие 19.4. *Для линейного оператора f равносильны следующие утверждения:*

1) f – *инъекция*;
2) $\operatorname{def} f = 0$;
3) $\operatorname{rank} f = \dim V$;
4) f – *биекция*.

Доказательство следует непосредственно из теоремы 19.5 и предыдущего предложения 19.8.

Замечание. Читатель, знакомый с понятием гомоморфизма групп, легко поймет, что линейный оператор $f: V \to W$ является гомоморфизмом аддитивных групп пространств V и W, а $\operatorname{Ker} f$ – ядром этого гомоморфизма. Следовательно, аддитивная группа $f(V)$ изоморфна фактор-группе $V/\operatorname{Ker} f$.

19.6. Автоморфизмы линейного пространства

Определение 19.5. *Изоморфизм линейного пространства на себя называется автоморфизмом этого пространства.*

Теорема 19.6. *Для линейного оператора f n-мерного линейного пространства равносильны следующие утверждения:*

1) f – *автоморфизм;*

2) f – *инъекция;*

3) f – *сюръекция;*

4) *матрица оператора f в любом базисе невырожденная.*

➤ Равносильность первых трех утверждений вытекает из следствия 19.4. Далее, невырожденность матрицы оператора f равносильна тому, что ее ранг равен n, а последнее утверждение, в свою очередь, равносильно равенству $\operatorname{rank} f = n$, т. е. сюръективности оператора f. ◄

Множество всех автоморфизмов линейного пространства V обозначается $\operatorname{Aut} V$. Если $f\colon V \to V$ и $g\colon V \to V$ – два автоморфизма, то определено их произведение $fg\colon V \to V$, также являющееся автоморфизмом (почему?). Таким образом, композиция отображений определяет на $\operatorname{Aut} V$ алгебраическую операцию. Она ассоциативна (почему?). Тождественное отображение e является нейтральным элементом относительно этой операции. Для каждого автоморфизма f обратное отображение f^{-1} также является автоморфизмом (почему?). Итак, $\operatorname{Aut} V$ *есть группа относительно умножения автоморфизмов.*

Покажем теперь, что *группа* $\operatorname{Aut} V$ *изоморфна группе* $GL(n, P)$ *всех невырожденных квадратных матриц порядка n над основным полем P.* Для этого фиксируем в пространстве V базис и поставим в соответствие каждому автоморфизму пространства V его матрицу в отмеченном базисе. Матрица автоморфизма всегда невырожденная. Следовательно, определено отображение $\operatorname{Aut} V \to GL(n, P)$. Читателю нетрудно будет закончить доказательство самостоятельно.

Упражнения

1. Найдите порядок группы автоморфизмов n-мерного линейного пространства над конечным полем из q элементов.

2. Найдите число базисов в n-мерном линейном пространстве над конечным полем из q элементов.

19.7. Изменение матрицы линейного оператора при замене базиса

Лемма 19.2. *Пусть A – $n \times n$-матрица над полем P. Если для любого столбца X из P^n*

$$AX = BX, \tag{1}$$

то $A = B$.

➤ Полагая в равенстве (1) последовательно

$$X = [1\ 0\ \dots\ 0]^T,\ X = [0\ 1\ 0\ \dots\ 0]^T,\ \dots,\ X = [0\ \dots\ 0\ 1]^T,$$

получим требуемое. ◄

Пусть f – линейный оператор пространства V над полем P, A и B – его матрицы в базисах

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \dots,\ \mathbf{v}_n \tag{2}$$

и

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \dots,\ \mathbf{u}_n \tag{3}$$

соответственно, M – матрица перехода от базиса (2) к базису (3). Найдем связь между матрицами A и B.

Пусть X и Y – координатные столбцы произвольного вектора $\mathbf{x}$ в базисах (2) и (3) соответственно. Тогда координатные столбцы вектора $f(\mathbf{x})$ в базисах (2) и (3) равны AX и BY соответственно. Согласно формулам преобразования координат вектора при переходе от базиса (2) к базису (3), имеем: $AX = M(BY) = (MB)Y$, $X = MY$, откуда

$$(AM)Y = (MB)Y. \tag{4}$$

Так как Y – произвольный координатный столбец, то, согласно лемме 19.2, из равенства (4) следует $AM = MB$, откуда

$$B = M^{-1}AM. \tag{5}$$

Обратно, пусть A – матрица линейного оператора f пространства V в базисе (2), M – произвольная невырожденная матрица порядка n над полем P, B – матрица, удовлетворяющая условию (5). Если (3) – базис пространства V, такой, что M – матрица перехода от базиса (2) к базису (3), то B – матрица оператора f в базисе (3).

Определение 19.6. *Матрица B называется подобной матрице A над полем P, если существует невы-*

рожденная матрица M над этим полем, удовлетворяющая равенству (5).

Из равенства (5) следует

$$A = MBM^{-1} = (M^{-1})^{-1}B(M^{-1}).$$

Итак, *если матрица B подобна матрице A, то и матрица A подобна матрице B.* Поэтому можно просто говорить, что *матрицы A и B подобны.*

Таким образом, доказана следующая

Теорема 19.7. *Две квадратные матрицы порядка n над полем P являются матрицами одного линейного оператора n-мерного линейного пространства над P тогда и только тогда, когда они подобны над P.*

Отметим еще два свойства подобных матриц.

1. *Всякая матрица подобна себе.*

➤ В самом деле, $A = E^{-1}AE$. ◄

2. *Если матрица C подобна матрице B, а матрица B подобна матрице A, то матрица C подобна матрице A.*

➤ Из $C = N^{-1}BN$, $B = M^{-1}AM$ следует

$$C = N^{-1}(M^{-1}AM)N = (N^{-1}M^{-1})A(MN) = (MN)^{-1}A(MN). \blacktriangleleft$$

Указанные выше свойства в совокупности с утверждением о том, что если матрица A подобна матрице B, то и B подобна A, означают, что отношение подобия матриц является отношением эквивалентности на множестве всех квадратных матриц порядка n над полем P. Следовательно, это множество матриц разбивается на попарно непересекающиеся классы подобных матриц. Матрицы входят в один класс тогда и только тогда, когда они являются матрицами одного линейного оператора (в разных базисах). Поэтому очень важной является классификация матриц с точностью до подобия, заключающаяся в распознавании подобия матриц и приведении матрицы с помощью выбора подходящего базиса к наиболее простой форме. По виду этой простой формы можно судить о геометрических свойствах соответствующего линейного оператора. Эта ситуация аналогична случаю, когда уравнение фигуры второго порядка с помощью удачного выбора системы координат приводят к каноническому виду, а затем по этому уравнению судят о форме фигуры. Такая задача решается в гл. 20 и 21.

Упражнения

1. Пусть $A = \operatorname{diag}[A_1, \ldots, A_m]$, $B = \operatorname{diag}[B_1, \ldots, B_m]$, причем для каждого $i = 1, \ldots, m$ клетки A_i и B_i подобны. Докажите, что матрицы A и B тоже подобны.

2. Докажите, что матрица αE, где α – число, подобна только себе.

19.8. Инвариантное подпространство

Определение 19.7. *Пусть f – линейный оператор линейного пространства V над полем P. Если U – подпространство пространства V, такое, что $f(U) \subset U$, то U называют инвариантным относительно f подпространством.*

Пример 19.7. Тривиальные подпространства инвариантны относительно любого линейного оператора.

Пример 19.8. Всякое подпространство пространства V инвариантно относительно произведения λe тождественного оператора e на число λ.

Предложение 19.9. *Для любого линейного оператора f пространства V $f(V)$ и $\operatorname{Ker} f$ – инвариантные относительно f подпространства.*

➤ Очевидно, что $f(f(\mathbf{a})) \in f(V)$ для $\mathbf{a} \in V$, так как $f(\mathbf{a}) \in V$. Далее, $f(\mathbf{b}) = \mathbf{0} \in \operatorname{Ker} f$ для $\mathbf{b} \in \operatorname{Ker} f$. ◄

Предложение 19.10. *Сумма и пересечение подпространств пространства V, инвариантных относительно линейного оператора f, также инвариантны относительно f.*

➤ Докажем утверждение теоремы о сумме подпространств. Пусть U_i, $i = 1, 2, \ldots, k$, – подпространства пространства V, инвариантные относительно линейного оператора f, $U = U_1 + U_2 + \ldots + U_k$. Для $\mathbf{a} \in U$ имеем $\mathbf{a} = \mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_k$, $\mathbf{a}_i \in U_i$. Так как $f(\mathbf{a}_i) \in U_i$, то

$$f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}_1) + f(\mathbf{a}_2) + \ldots + f(\mathbf{a}_k) \in U.$$

Утверждение теоремы о пересечении подпространств читатель легко докажет самостоятельно. ◄

Предложение 19.11. *Пусть f и g – линейные операторы пространства V, U – инвариантное относительно каждого из них подпространство, α – число. Тогда подпространство U инвариантно относительно $f + g$, fg, αf.*

➤ Для $\mathbf{a} \in U$ $f(\mathbf{a})$ и $g(\mathbf{a})$ принадлежат U, поэтому

$$(f+g)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a}) + g(\mathbf{a}) \in U.$$

Инвариантность подпространства U относительно линейного оператора $f+g$ доказана. Доказательство инвариантности подпространства U относительно произведений fg и αf читателю предлагается провести самостоятельно. ◄

Очевидно

Следствие 19.5. *Если подпространство U инвариантно относительно линейного оператора f, а $g(x)$ — многочлен, то U инвариантно и относительно $g(f)$.*

Если подпространство U инвариантно относительно линейного оператора f, то можно определить отображение $f|U\colon U \to U$, такое, что $(f|U)(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$ для $\mathbf{a} \in U$. Ясно, что $f|U$ — линейный оператор пространства U. Назовем $f|U$ *индуцированным на подпространстве U оператором* или *ограничением оператора f на подпространство U.*

19.9. Линейный оператор с клеточно-диагональной матрицей

Посмотрим, как влияет на матрицу линейного оператора f пространства V наличие нетривиального инвариантного относительно f подпространства U. Пусть базис пространства V

$$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{1}$$

такой, что

$$\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_k \tag{2}$$

является базисом подпространства U. Рассмотрим матрицу линейного оператора f в базисе (1). Так как подпространство U инвариантно относительно f, то вектор $f(\mathbf{u}_i)$ является линейной комбинацией векторов (2), поэтому можно записать:

$$f(\mathbf{v}_i) = \sum_{l=1}^{m} \alpha_{li}\mathbf{v}_l + \sum_{j=1}^{k} \beta_{ji}\mathbf{u}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$f(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ji}\mathbf{u}_j, \quad i = 1, 2, \ldots, k. \tag{3}$$

Согласно формулам (3), матрица линейного оператора f в базисе (1) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{m1} & \dots & \alpha_{mm} & 0 & \dots & 0 \\ \beta_{11} & \dots & \beta_{1m} & \gamma_{11} & \dots & \gamma_{1k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \beta_{k1} & \dots & \beta_{km} & \gamma_{k1} & \dots & \gamma_{kk} \end{bmatrix}, \tag{4}$$

т. е. ее правый верхний угол − нулевой. Матрица

$$[\gamma_{ij}],\ i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ k, \tag{5}$$

расположенная в правом нижнем углу матрицы (4), является, согласно формулам (3), матрицей индуцированного на подпространстве U оператора в базисе (2).

Обратно, пусть система (1) − произвольный базис пространства V, а f − линейный оператор этого пространства, имеющий в базисе (1) матрицу (4) с нулевым углом. Тогда очевидно, что верны формулы (3), а следовательно, подпространство $U = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ инвариантно относительно оператора f и матрица (5) есть матрица индуцированного на подпространстве U оператора в базисе (2).

Пусть теперь пространство V есть прямая сумма инвариантных относительно оператора f подпространств W и U: $V = W \oplus U$. Запишем матрицу оператора f в базисе (1), где

$$\mathbf{v}_1,\ \dots,\ \mathbf{v}_m \tag{6}$$

является базисом подпространства W, а система (2) − базисом подпространства U. Очевидно, что

$$f(\mathbf{v}_i) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_{ji}\mathbf{v}_j,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ m,$$

$$f(\mathbf{u}_i) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_{ji}\mathbf{u}_j,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ k, \tag{7}$$

поэтому матрицей оператора f в базисе (1) является клеточно-диагональная матрица

$$\operatorname{diag}[[\alpha_{ij}],\ [\gamma_{ij}]], \tag{8}$$

где матрицы (5) и

$$[\alpha_{ij}],\ i,\ j = 1,\ \dots,\ m, \tag{9}$$

являются матрицами индуцированных на подпространствах U и W операторов в базисах (2) и (6) соответственно.

Обратно, пусть оператор f в базисе (1) имеет клеточно-диагональную матрицу (8). Тогда верны формулы (7) и, следовательно, подпространства $W = L(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m)$ и $U = L(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_k)$ инвариантны относительно f, (5) – матрица индуцированного на подпространстве U оператора $f|U$ в базисе (2), а (9) – матрица индуцированного на подпространстве W оператора $f|W$ в базисе (6). Очевидно, что $W \oplus U = V$.

Итак, доказана

Теорема 19.8. *Пусть f – линейный оператор пространства V. Пространство V есть прямая сумма двух своих инвариантных относительно оператора f подпространств тогда и лишь тогда, когда в каком-либо базисе матрицей этого оператора является клеточно-диагональная матрица вида (8).*

Очевидно, что аналогичное утверждение верно и в том случае, когда пространство V является прямой суммой трех и более инвариантных относительно оператора f подпространств. В частности, если $\dim V = n$ и в этой сумме n слагаемых (прямых), то каждое из них одномерно, и верна

Теорема 19.9. *Линейное пространство является прямой суммой одномерных инвариантных относительно линейного оператора подпространств тогда и лишь тогда, когда в каком-либо базисе матрица этого оператора диагональна.*

19.10. Характеристический многочлен

Определение 19.8. *Пусть $A = [a_{ij}]$ – квадратная матрица порядка n над полем P, а x – переменная. Матрицу*

$$xE - A = \begin{bmatrix} x - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & x - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & x - a_{nn} \end{bmatrix}$$

называют характеристической матрицей матрицы A, *а ее определитель* $\det(xE - A)$ – *характеристическим многочленом матрицы* A.

Очевидно, что $\det(xE - A)$ – *многочлен от* x n*-й степени, старший коэффициент которого равен* 1. Свободный член многочлена $\det(xE - A)$ совпадает с его значением при $x = 0$ и поэтому равен

$$\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{bmatrix} = (-1)^n \det A.$$

Так как произведение всех корней многочлена может отличаться от его свободного члена лишь знаком, то верно

Предложение 19.12. *Квадратная матрица невырождена тогда и только тогда, когда нуль не является корнем ее характеристического многочлена.*

Сумма всех элементов главной диагонали квадратной матрицы A называется ее *следом* и обозначается $\operatorname{tr} A$.

Очевидно, что коэффициент многочлена $\det(xE - A)$ при x^{n-1} равен следу матрицы A, взятому с противоположным знаком.

Предложение 19.13. *Характеристические многочлены подобных матриц равны.*

➤ Пусть $B = M^{-1}AM$. Тогда

$$xE - B = xE - M^{-1}AM = M^{-1}(xE)M - M^{-1}AM = \\ = M^{-1}(xE - A)M.$$

Поэтому

$$\det(xE - B) = (\det M)^{-1}\det(xE - A)\det M = \det(xE - A). \;◄$$

Обратное утверждение: если характеристические многочлены матриц равны, то эти матрицы подобны, – неверно. Например, матрицы

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

имеют один и тот же характеристический многочлен $(x - 1)^2$, однако матрица E_2 подобна лишь себе.

С л е д с т в и е 19.6. *Следы подобных матриц равны. Определители подобных матриц равны.*

Характеристическим многочленом линейного оператора называют характеристический многочлен его матрицы. Поскольку матрицы линейного оператора пространства в разных базисах подобны, *характеристический многочлен линейного оператора не зависит от выбора базиса пространства.*

Следом $\mathrm{tr}\, f$ линейного оператора f называется след его матрицы, а *определителем* $\det f$ линейного оператора f — определитель его матрицы. Как и характеристический многочлен, *след и определитель линейного оператора не зависят от выбора базиса пространства.*

Упражнения

1. Если номера строк и столбцов матрицы, в которых расположен минор, совпадают, то такой минор называется *главным*. Докажите, что коэффициент при x^k характеристического многочлена матрицы порядка n равен сумме всех главных миноров порядка $n - k$ этой матрицы, умноженной на $(-1)^{n-k}$.

2. Докажите, что характеристический многочлен клеточно-диагональной матрицы равен произведению характеристических многочленов ее диагональных клеток.

3. Докажите, что для линейных операторов f и g

$$\mathrm{tr}(f + g) = \mathrm{tr}\, f + \mathrm{tr}\, g, \quad \mathrm{tr}(fg) = \mathrm{tr}(gf).$$

19.11. Собственные векторы линейного оператора

О п р е д е л е н и е 19.9. *Пусть f — линейный оператор линейного пространства V над полем P,* **a** *— ненулевой вектор пространства V. Если*

$$f(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}, \ \lambda \in P, \tag{1}$$

то число λ называется собственным значением оператора f, а вектор **a** *— собственным вектором, относящимся к собственному значению λ.*

Пример 19.9. Все ненулевые векторы пространства $\mathrm{Ker}\, f$ — собственные векторы оператора f, относящиеся к нулевому собственному значению.

Пример 19.10. При тождественном автоморфизме все ненулевые векторы пространства — собственные, с собственным значением, равным единице.

Пример 19.11. Оператор поворота плоскости на угол α не имеет собственных векторов при $\alpha \neq k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$.

Сформулируем условие существования собственных векторов и найдем эти векторы.

Ненулевой вектор $\mathbf{a} \in V$ является собственным вектором линейного оператора f, если он удовлетворяет условию (1). Поскольку $\lambda\mathbf{a} = \lambda e(\mathbf{a})$, то условия (1) и

$$(\lambda e - f)(\mathbf{a}) = \mathbf{0} \tag{2}$$

равносильны. Множество всех векторов, удовлетворяющих условию (2), является инвариантным относительно линейного оператора $\lambda e - f$ подпространством $\mathrm{Ker}\,(\lambda e - f)$. Так как $f = \lambda e - (\lambda e - f)$, то это подпространство инвариантно и относительно оператора f. Далее, $\mathrm{Ker}\,(\lambda e - f) \neq \{\mathbf{0}\}$ тогда и лишь тогда, когда $\det\,(\lambda e - f) = 0$.

В пространстве V фиксируем какой-либо базис. Если в этом базисе оператор f имеет матрицу A, то матрицей оператора $\lambda e - f$ в этом же базисе служит $\lambda E - A$. Поэтому необходимым и достаточным условием существования собственных векторов оператора f, относящихся к собственному значению λ, является равенство $\det(\lambda E - A) = 0$. Это равенство верно тогда, когда λ – корень характеристического многочлена матрицы A.

Итак, доказана

Теорема 19.10. *Собственными значениями линейного оператора являются все принадлежащие основному полю корни характеристического многочлена этого оператора, и только они. Если λ – собственное значение оператора f, то все относящиеся к нему собственные векторы и нулевой вектор составляют подпространство* $\mathrm{Ker}\,(\lambda e - f)$, *инвариантное относительно f.*

Как отмечалось выше, вектор $\mathbf{a}$ с координатами β_1, β_2, ..., β_n в заданном базисе принадлежит подпространству $\mathrm{Ker}\,(\lambda e - f)$ тогда и только тогда, когда $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ – решение системы уравнений

$$\left.\begin{array}{rcl}
(\lambda - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1n}x_n & = & 0,\\
-a_{21}x_1 + (\lambda - a_{22})x_2 - \ldots - a_{2n}x_n & = & 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & & \\
-a_{n1}x_1 - a_{2n}x_2 - \ldots + (\lambda - a_{nn})x_n & = & 0,
\end{array}\right\}$$

где $[a_{ij}] = A$ – матрица оператора f в том же базисе. Следовательно, *собственными векторами оператора f, относящимися к собственному значению λ, являются все ненулевые решения этой системы, и только они.*

Рассмотрим следующие три задачи. Для каких линейных операторов f пространства V существуют инвариантные относительно f одномерные подпространства? Если такие подпространства существуют, то как их все найти? В каких случаях пространство V есть прямая сумма одномерных подпространств, инвариантных относительно f?

Пусть U – одномерное подпространство пространства V над полем P. Если $\mathbf{a}$ – ненулевой вектор из U, то очевидно, что U есть множество $L(\mathbf{a})$ всех векторов вида $\alpha\mathbf{a}$, $\alpha \in P$. Если U – инвариантное относительно оператора f подпространство, то $f(\mathbf{a}) = \lambda\mathbf{a}$, $\lambda \in P$, $f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a}) = \alpha(\lambda\mathbf{a}) = \lambda(\alpha\mathbf{a})$, так что все ненулевые векторы подпространства U являются собственными векторами оператора f, относящимися к собственному значению λ.

Обратно, если $\mathbf{a}$ – собственный вектор оператора f, относящийся к собственному значению λ, а $\alpha \in P$, то $f(\alpha\mathbf{a}) = \lambda(\alpha\mathbf{a})$, и, значит, $L(\mathbf{a})$ – инвариантное относительно f подпространство.

Таким образом, *в пространстве V тогда и лишь тогда существуют одномерные инвариантные относительно оператора f подпространства, когда f имеет собственные векторы. Если* $\mathbf{a}$ *– произвольный собственный вектор оператора f, то $L(\mathbf{a})$ – инвариантное относительно f одномерное подпространство и все одномерные инвариантные относительно f подпространства пространства V имеют такую структуру.*

В частности, если V – комплексное линейное пространство, то, согласно основной теореме алгебры комплексных чисел, характеристический многочлен любого линейного оператора пространства V имеет комплексные корни, поэтому *в комплексном пространстве всегда есть одномерное инвариантное относительно оператора f подпространство.*

Обратимся снова к случаю линейного пространства V над произвольным полем P. Пространство V является прямой суммой подпространств $L(\mathbf{a}_i)$, $i = 1, \ldots, n$, т. е.

$$V = L(\mathbf{a}_1) \oplus L(\mathbf{a}_2) \oplus \ldots \oplus L(\mathbf{a}_n), \ \mathbf{a}_i \neq \mathbf{0},$$

тогда и лишь тогда, когда $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ – базис пространства V. Поэтому верна следующая

Теорема 19.11. *Линейное n-мерное пространство V является прямой суммой своих одномерных инвариантных относительно линейного оператора f подпространств тогда и только тогда, когда в V есть n линейно независимых собственных векторов оператора f.*

Предложение 19.14. *Собственные векторы линейного оператора, относящиеся к попарно различным собственным значениям, линейно независимы.*

➤ Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ – попарно различные собственные значения линейного оператора f, а соответствующие им собственные векторы

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k. \tag{3}$$

Возьмем какой-нибудь базис системы (3). Для определенности пусть это будет

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_l. \tag{4}$$

Если системы (3) и (4) не совпадают, то вектор $\mathbf{a}_{l+1}$ линейно выражается через векторы (4):

$$\mathbf{a}_{l+1} = \alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_l\mathbf{a}_l. \tag{5}$$

Поэтому

$$\lambda_{l+1}\mathbf{a}_{l+1} = \lambda_{l+1}\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{l+1}\alpha_l\mathbf{a}_l. \tag{6}$$

Применяя к обеим частям равенства (5) оператор f, получаем

$$f(\mathbf{a}_{l+1}) = \lambda_{l+1}\mathbf{a}_{l+1} = \alpha_1\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_l\lambda_l\mathbf{a}_l.$$

Сопоставляя последнее равенство и равенство (6), имеем:

$$\lambda_{l+1}\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_{l+1}\alpha_l\mathbf{a}_l = \alpha_1\lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_l\lambda_l\mathbf{a}_l,$$

$$(\lambda_{l+1} - \lambda_1)\alpha_l\mathbf{a}_l + \ldots + (\lambda_{l+1} - \lambda_l)\alpha_l\mathbf{a}_l = \mathbf{0}.$$

Так как система (4) линейно независима, то в последнем равенстве все коэффициенты – нули:

$$(\lambda_{l+1} - \lambda_i)\alpha_i = 0, \ i = 1, 2, \ldots, l. \tag{7}$$

Но $\lambda_{l+1} \neq \lambda_i$, поэтому из формул (7) следует $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, l$. Тогда из равенства (5) получаем $\mathbf{a}_{l+1} = \mathbf{0}$, что противоречит определению собственного вектора. Значит, системы векторов (3) и (4) совпадают. ◀

Следствие 19.7. *Если линейный оператор f n-мерного линейного пространства имеет n различных собственных значений, то это пространство есть прямая сумма одномерных инвариантных относительно f подпространств. Если все корни характеристического многочлена принадлежат основному полю P (например, P — поле комплексных чисел), то для этого достаточно, чтобы характеристический многочлен не имел кратных корней.*

Упражнения

1. Найдите все линейные операторы линейного пространства, для которых каждый ненулевой вектор этого пространства является собственным.

2. Найдите все собственные значения и собственные векторы оператора дифференцирования пространства многочленов $\mathbf{R}[x]$.

20. МАТРИЦЫ НАД КОЛЬЦОМ МНОГОЧЛЕНОВ

Как отмечалось выше, квадратные матрицы являются матрицами одного и того же линейного оператора в различных базисах, если они подобны над основным полем. Поэтому очень важной является проблема классификации матриц с точностью до подобия. Суть этой проблемы заключается в следующем. Требуется, с одной стороны, установить критерий подобия матриц, позволяющий определить, подобны ли данные матрицы. С другой стороны, нужно в каждом классе подобных матриц выбрать одну, имеющую наиболее простой вид. Решение этих важных вопросов связано с исследованием свойств характеристической матрицы, элементами которой являются многочлены. В связи с этим мы вначале изучим некоторые свойства матриц над кольцом многочленов $P[x]$ (т. е. матриц, элементами которых являются произвольные многочлены).

Мы будем рассматривать квадратные матрицы над $P[x]$. В кольце многочленов операции сложения и умножения имеют те же формальные свойства (ассоциативность, коммутативность, дистрибутивность), что и соответствующие операции в поле. Это обстоятельство приводит к тому, что многие свойства матриц над полем сохраняются для матриц над кольцом многочленов $P[x]$, где P – поле, в частности теория определителей, алгебра матриц. При этом речь идет не только о результатах, но и об их доказательствах. (Уточнения требуют только факты, связанные с понятием линейной зависимости, но этого мы не будем касаться.)

20.1. Каноническая форма матрицы над кольцом многочленов

Модифицируем определение элементарных преобразований применительно к рассматриваемой ситуации.

Определение 20.1. *Элементарными преобразованиями строк матрицы над $P[x]$ называются следующие две операции:*

1) *умножение строки матрицы на произвольный отличный от нуля элемент поля P;*

2) *прибавление к одной строке матрицы другой ее строки, умноженной на произвольный многочлен $f(x) \in P[x]$.*

Элементарные преобразования столбцов определяются аналогично.

Если матрица $A(x)$ получается из матрицы $B(x)$ в результате применения одного или нескольких элементарных преобразований, то будем писать $A(x) \sim B(x)$. Очевидно следующее:

1) $A(x) \sim A(x)$;

2) *если* $A(x) \sim B(x)$, *то* $B(x) \sim A(x)$;

3) *если* $A(x) \sim B(x)$ *и* $B(x) \sim C(x)$, *то* $A(x) \sim C(x)$.

Таким образом, на множестве всех квадратных матриц одного и того же порядка над $P[x]$ определено отношение эквивалентности $\sim$. Если $A(x) \sim B(x)$, то будем называть матрицы $A(x)$ и $B(x)$ *эквивалентными*.

Предложение 20.1. *Если две матрицы различаются лишь порядком строк и (или) столбцов, то они эквивалентны.*

Доказательство этого предложения мы оставляем читателю (см. предложение 2.1).

О п р е д е л е н и е 20.2. *Диагональная матрица*

$$K(x) = \operatorname{diag}[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$$

над $P[x]$ *называется канонической, если она удовлетворяет следующим условиям:*

1) *каждый диагональный элемент* $f_i(x)$, *где* $i < n$, *является делителем следующего диагонального элемента* $f_{i+1}(x)$;

2) *старший коэффициент каждого из ненулевых многочленов* $f_i(x)$ *равен* 1.

Многочлены

$$f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$$

называются инвариантными множителями канонической матрицы $K(x)$.

Если среди ненулевых инвариантных множителей есть элементы поля P, то, согласно условию 2, они равны единице и по условию 1 расположены на диагонали матрицы первыми. Нули, если они есть среди инвариантных множителей, стоят на диагонали последними.

О п р е д е л е н и е 20.3. *Пусть* $A(x)$ *— произвольная матрица над* $P[x]$. *Любая каноническая матрица, эквивалентная матрице* $A(x)$, *называется канонической формой матрицы* $A(x)$. *Инвариантными множителями матрицы* $A(x)$ *называются инвариантные множители ее канонической формы.*

Теорема 20.1. *Для любой квадратной матрицы над* $P[x]$ *существует единственная каноническая форма.*

➤ Здесь мы докажем только существование канонической формы. Доказательство единственности проведем в следующем параграфе.

Пусть $A(x)$ — квадратная матрица порядка n над $P[x]$. Если $A(x)$ — нулевая матрица, то она является канонической. Пусть матрица $A(x)$ — ненулевая. При $n = 1$ теорема очевидна. В этом случае $A(x) = f(x) \neq 0$. Умножив $f(x)$ на подходящий ненулевой элемент поля P, получим многочлен со старшим коэффициентом 1.

Пусть теперь $n > 1$. Сделаем следующее индуктивное предположение: для любой матрицы порядка $n - 1$ над

$P[x]$ существует каноническая форма. Обозначим буквой S класс матриц, эквивалентных матрице $A(x)$, а буквой T – множество всех ненулевых элементов матриц из S. Если $f(x) \in T$, $\alpha \in P$ и $\alpha \neq 0$, то $\alpha f(x) \in T$ (почему?). Следовательно, в множестве T есть многочлен $f_1(x)$, отличный от нуля и удовлетворяющий следующим двум условиям: 1) $f_1(x)$ имеет минимальную степень среди всех ненулевых элементов множества T; 2) старший коэффициент $f_1(x)$ равен 1.

Упорядочив соответствующим образом строки и столбцы матрицы из S, элементом которой является $f_1(x)$, можно поместить этот многочлен на позицию (1,1). Итак, в классе S есть матрица $B(x)$ вида

$$B(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

Легко доказать, что все элементы первых строки и столбца матрицы $B(x)$ делятся на $f_1(x)$. В самом деле, пусть, например, $f_{1i}(x) = f_1(x)q(x) + r(x)$, где $r(x) = 0$ или $\deg r(x) < < \deg f_1(x)$. К i-му столбцу матрицы $B(x)$ прибавим ее первый столбец, умноженный на $-q(x)$. Тогда первым элементом i-го столбца станет $r(x)$, следовательно, $r(x) \in T$. Согласно выбору многочлена $f_1(x)$, имеем $r(x) = 0$, т. е. $f_{1i}(x)$ делится на $f_1(x)$.

Все элементы первой строки матрицы $B(x)$, кроме первого, заменим нулями, прибавив к каждому столбцу подходящее кратное первого столбца. Аналогично поступим со строками. Поэтому в классе S найдется матрица $C(x)$ вида

$$C(x) = \begin{bmatrix} f_1(x) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & g_{22}(x) & \dots & g_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & g_{n2}(x) & \dots & g_{nn}(x) \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Рассмотрим теперь матрицу

$$\begin{bmatrix} g_{22}(x) & \dots & g_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n2}(x) & \dots & g_{nn}(x) \end{bmatrix}. \qquad (2)$$

порядка $n-1$. По индуктивному предположению, эта матрица с помощью элементарных преобразований строк и столбцов может быть приведена к каноническому виду

$$\operatorname{diag}\,[f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)].$$

Если те же элементарные преобразования применить к матрице $C(x)$, не затрагивая ее первые строку и столбец, получится матрица

$$D(x) = \operatorname{diag}[f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x)].$$

Заметим, что каждый из многочленов $f_i(x)$ делится на $f_1(x)$. Действительно, прибавив к первой строке матрицы $D(x)$ ее i-ю строку, мы получим $f_i(x)$ в первой строке. Но выше было показано, что в этом случае (матрица вида $B(x)$) $f_i(x)$ делится на $f_1(x)$. Итак, $D(x) \sim A(x)$ и $D(x)$ – каноническая матрица. Существование канонической формы матрицы доказано. ◄

Процесс, описанный в доказательстве теоремы 20.1, можно осуществить практически. Пусть $A(x)$ – ненулевая матрица порядка n над $P[x]$. Среди ее ненулевых элементов найдем многочлен минимальной степени m, пусть это будет $f(x)$. Если не каждый элемент матрицы $A(x)$ делится на $f(x)$, то с помощью подходящих элементарных преобразований получим матрицу $B(x)$, среди ненулевых элементов которой есть многочлен степени, меньшей m. Аналогично поступим с матрицей $B(x)$. Этот процесс будем повторять до тех пор, пока не получим матрицу, все элементы которой делятся на какой-либо один из них. Умножив последний элемент (т. е. содержащую его строку) на подходящий элемент поля P, получим многочлен $f_1(x)$ со старшим коэффициентом 1, делящий все элементы последней матрицы. Упорядочив соответствующим образом строки и столбцы, поставим $f_1(x)$ на позицию (1.1). Теперь можно привести полученную матрицу к виду (1) и применить описанное построение к матрице (2).

Пример 20.1. Привести к канонической форме матрицу

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вычитая из первого и второго столбцов третий, получаем матрицу

$$B(x) = \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ 2 & -1 & x \\ -1 & -1 & x \end{bmatrix}.$$

Переставим первую и третью строки и затем умножим новую первую строку на -1:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -x \\ 2 & -1 & x \\ x & x+1 & 0 \end{bmatrix}, \ f_1(x) = 1.$$

Далее, очевидно, что

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -x \\ 0 & -3 & 3x \\ 0 & 1 & x^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3x \\ 0 & 1 & x^2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 1 & x^2 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -x \\ 0 & 0 & x^2+x \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+x \end{bmatrix}.$$

Итак, $\mathrm{diag}[1, 1, x^2 + x]$ – каноническая форма матрицы $A(x)$.

Упражнения

1. Каноническую форму можно определить и для случая, когда число строк матрицы не равно числу столбцов. Например, в случае 2×3-матриц каноническая форма имеет вид

$$\begin{bmatrix} f_1(x) & 0 & 0 \\ 0 & f_2(x) & 0 \end{bmatrix}.$$

Дайте определение канонической формы матрицы в общем случае и докажите теорему о существовании канонической формы.

2. Вы знаете о замечательной аналогии между кольцами $P[x]$ и $\mathbf{Z}$, первопричиной которой является теорема о делении с остатком. Оказывается, эту аналогию можно распространить на матрицы, т. е. определить инвариантные множители и каноническую форму матрицы над $\mathbf{Z}$. При этом вместо равенства единице старшего коэффициента ненулевого инвариантного множителя требуется, чтобы этот множитель был положительным. Полученная каноническая форма называется *нормальной формой Смита целочисленной матрицы*. Дайте определение инвариантных множителей целочисленной матрицы и докажите теорему о существовании нормальной формы Смита.

3. Докажите, что система линейных уравнений, все коэффициенты и свободные члены которых – целые числа, разрешима в целых числах тогда и только тогда, когда нормальная форма Смита ее расширенной матрицы получается из нормальной формы Смита основной матрицы приписыванием нулевого столбца.

20.2. Однозначность канонической формы

Пусть $A(x)$ – квадратная матрица порядка n над кольцом $P[x]$ и r – максимальный порядок ее отличных от нуля миноров. Тогда для любого $k = 1, 2, \ldots, r$ в матрице $A(x)$ есть минор порядка k, не равный нулю (почему?). Обозначим через $d_k(x)$ наибольший общий делитель всех миноров k-го порядка матрицы $A(x)$, $k = 1, 2, \ldots, r$, со старшим коэффициентом 1. При $r < n$ положим $d_l(x) = 0$, $l = r + 1, \ldots, n$. Систему многочленов

$$d_1(x), d_2(x), \ldots, d_n(x) \tag{1}$$

назовем *системой наибольших общих делителей миноров матрицы* $A(x)$.

Лемма 20.1. *Система наибольших общих делителей миноров матрицы над* $P[x]$ *не изменяется при элементарных преобразованиях.*

➤ Рассмотрим, например, элементарные преобразования строк. Пусть строка матрицы $A(x)$ умножается на отличный от нуля элемент α поля P. Тогда те миноры, через которые проходит эта строка, умножаются на α, а остальные не меняются. Но наибольший общий делитель системы многочленов не изменится, если некоторые из них умножить на отличное от нуля число.

Пусть теперь к первой, например, строке матрицы $A(x)$ прибавляется ее вторая строка, умноженная на многочлен $g(x)$. В результате могут измениться лишь те миноры, через которые проходит первая строка матрицы $A(x)$, но не проходит вторая. Именно: к каждому такому минору порядка k прибавится другой минор того же порядка (через который проходит вторая строка, но не проходит первая), умноженный на $g(x)$. Но наибольший общий делитель системы многочленов не изменится, если к одному из этих многочленов прибавить другой, умноженный на произвольный многочлен. ➤

Лемма 20.2. *Инвариантные множители матрицы над* $P[x]$ *однозначно определяются системой наибольших общих делителей миноров этой матрицы.*

➤ Пусть $A(x)$ – квадратная матрица над $P[x]$, (1) – система наибольших общих делителей ее миноров и $K(x) =$

$= \mathrm{diag}[f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)]$ – ее каноническая форма. Тогда, согласно предыдущей лемме, система многочленов (1) является системой наибольших общих делителей миноров и для матрицы $K(x)$. Но старший коэффициент многочлена $f_1(x)$ равен 1, и этот многочлен делит каждый из многочленов $f_i(x)$. Поэтому $d_1(x) = f_1(x)$. Аналогично $d_2(x) = f_1(x)f_2(x), \ldots, d_n(x) = f_1(x)f_2(x) \cdots f_n(x)$. Итак, инвариантные множители матрицы $A(x)$ однозначно определяются системой наибольших общих делителей ее миноров:

$$f_1(x) = d_1(x),\ f_i(x) = d_i(x)/d_{i-1}(x),\ i = 2, \ldots, r,$$
$$f_{r+1}(x) = \ldots = f_n(x) = 0. \blacktriangleleft \qquad (2)$$

Из лемм 20.1 и 20.2 следует единственность канонической формы матрицы, т. е. теорема 20.1 полностью доказана.

Пример 20.2. Привести к канонической форме матрицу

$$A(x) = \begin{bmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вначале вычислим систему наибольших общих делителей миноров матрицы $A(x)$. Начнем с ее определителя:

$$\begin{vmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ x-1 & x-1 & x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & x+1 & 0 \\ x+2 & x-1 & x \\ -3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3x(x+1).$$

Следовательно, $d_3(x) = x(x+1)$. Многочлен $d_2(x)$ является делителем многочлена $d_3(x)$, поэтому $d_2(x) = 1,\ x,\ x+1,\ x(x+1)$. Рассмотрим минор

$$M(x) = \begin{vmatrix} x & x+1 \\ x+2 & x-1 \end{vmatrix}.$$

Многочлен $M(x)$ не делится ни на x, ни на $x + 1$, поскольку $M(0) = -2 \neq 0$ и $M(-1) = 2 \neq 0$. Следовательно, $d_2(x) = 1$. Тогда и $d_1(x) = 1$. По формулам (2) получаем

$$f_1(x) = f_2(x) = 1,\ f_3(x) = x(x+1).$$

Следовательно, матрица $\mathrm{diag}[1, 1, x(x+1)]$ является канонической формой матрицы $A(x)$.

20.3. Матрицы, обратимые над кольцом многочленов

Пусть K – произвольное кольцо с единицей. Рассмотрим множество $K_{n,n}$ всех квадратных матриц над K. Будем складывать и умножать матрицы над K по тем же правилам, что и матрицы над полем.

Предложение 20.2. *Множество $K_{n,n}$ относительно сложения и умножения матриц является кольцом с единицей.*

➤ Приведенные ранее доказательства свойств сложения и умножения матриц над $\mathbf{R}$ (см. § 2.4) дословно переносятся на рассматриваемые матрицы. ◄

Нас интересует сейчас мультипликативная группа кольца $K_{n,n}$ – множество матриц, для которых существуют над K, обратные матрицы.

Лемма 20.3. *Квадратная матрица A над кольцом K с единицей имеет обратную над K тогда и только тогда, когда* $\det A$ *является обратимым элементом кольца K.*

➤ Приведенное в § 4.6 доказательство для случая матриц над $\mathbf{R}$ сохраняется и здесь. Надо только иметь в виду, что отличные от нуля числа и есть обратимые элементы $\mathbf{R}$. ◄

Ниже нам понадобится вспомогательное понятие элементарной матрицы. В § 4.8 мы уже имели с ним дело. Модифицируем это понятие применительно к матрицам над $P[x]$.

Определение 20.4. *Квадратная матрица $A(x)$ над $P[x]$ называется элементарной, если она является матрицей одного из следующих двух видов:*

1) $A(x)$ *– диагональная матрица, одним из диагональных элементов которой является произвольное, отличное от нуля число из поля P, а все другие диагональные элементы равны* 1;

2) *все диагональные элементы матрицы $A(x)$ равны* 1, *а все остальные ее элементы –* 0, *кроме одного, равного произвольному многочлену.*

Предложение 20.3. *Применение к строкам (столбцам) матрицы элементарного преобразования равносильно умножению ее слева (справа) на подходящую элементарную матрицу.*

➤ Доказательство аналогично доказательству предложения 4.2. ◄

Теорема 20.2 (критерий обратимости матрицы над кольцом многочленов). *Для квадратной матрицы $A(x)$ над $P[x]$ равносильны следующие утверждения:*

1) *существует матрица* $A(x)^{-1}$ *над* $P[x]$;

2) $\det A(x)$ – *ненулевой элемент поля* P;

3) $A(x)$ *эквивалентна единичной матрице*;

4) $A(x)$ *есть произведение элементарных матриц*.

➤ Непосредственно из определения умножения многочленов следует, что обратимыми элементами кольца $P[x]$ являются все отличные от нуля элементы поля P, и только они. Поэтому равносильность утверждений 1 и 2 теоремы вытекает из леммы 20.3.

Далее, пусть $A(x)$ – квадратная матрица порядка n над $P[x]$. Условие

$$\det A(x) \in P, \quad \det A(x) \neq 0 \tag{1}$$

равносильно условию $d_n(x) = 1$. Но

$$d_n(x) = f_1(x) f_2(x) \cdots f_n(x),$$

где $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ – инвариантные множители матрицы $A(x)$. Следовательно, условие (1) равносильно условию $f_i(x) = 1$, $i = 1, 2, ..., n$, т. е. $E = \mathrm{diag}[1, ..., 1]$ – каноническая форма матрицы $A(x)$. Доказана равносильность утверждений 2 и 3.

Эквивалентность $A(x) \sim E$ означает, что матрица $A(x)$ получается из E с помощью элементарных преобразований строк и столбцов. С учетом предложения 20.3 имеем:

$$A(x) = P_l \cdots P_2 P_1 E Q_1 Q_2 \cdots Q_m = P_l \cdots P_1 Q_1 \cdots Q_m,$$

где P_i, Q_j – подходящие элементарные матрицы. Доказана эквивалентность утверждений 3 и 4. ➤

Следствие 20.1 (критерий эквивалентности матриц). *Пусть* $A(x)$ *и* $B(x)$ – *квадратные матрицы порядка* n *над* $P[x]$. *Для того чтобы матрицы* $A(x)$ *и* $B(x)$ *были эквивалентны, необходимо и достаточно существование двух матриц* $C(x)$ *и* $D(x)$ *порядка* n, *обратимых над* $P[x]$ *и удовлетворяющих равенству*

$$B(x) = C(x) A(x) D(x). \tag{2}$$

➤ По определению $B(x) \sim A(x)$ означает, что матрица $B(x)$ получается из матрицы $A(x)$ в результате применения подходящих элементарных преобразований, т. е. умножения на элементарные матрицы:

$$B(x) = P_l \cdots P_1 A(x) Q_1 \cdots Q_m. \qquad (3)$$

Но матрица обратима над $P[x]$ тогда и только тогда, когда она является произведением элементарных матриц. Поэтому существование элементарных матриц P_i, Q_j, удовлетворяющих равенству (3), как раз и означает существование обратимых над $P[x]$ матриц $C(x)$ и $D(x)$, удовлетворяющих равенству (2):

$$P_l \cdots P_2 P_1 = C(x),\ Q_1 Q_2 \cdots Q_m = D(x). \blacktriangleleft$$

20.4. Элементарные делители матрицы

Определение 20.5. *Пусть $f(x)$ – многочлен ненулевой степени над полем P, $f(x) = ap_1(x)^{k_1} p_2(x)^{k_2} \cdots p_t(x)^{k_t}$ – каноническое разложение. Многочлены $p_i(x)^{k_i}$, $i = 1, 2, ..., t$, называются элементарными делителями многочлена $f(x)$. Пусть $A(x)$ – квадратная матрица над $P[x]$. Системой элементарных делителей матрицы $A(x)$ называется набор элементарных делителей всех инвариантных множителей этой матрицы. Каждый элементарный делитель включается в этот набор столько раз, во сколько инвариантных множителей он входит.*

Напомним, что многочлены $p_i(x)$ неприводимы над P, их старшие коэффициенты равны 1 и $p_i(x) \neq p_j(x)$ при $i \neq j$.

Замечание 1. Только непостоянные инвариантные множители (т. е. отличные от 0 и 1) имеют элементарные делители.

Замечание 2. Инвариантные множители матрицы не изменяются при расширении основного поля (почему?), а система ее элементарных делителей может при этом измениться.

Пример 20.3. Найти системы элементарных делителей над **Q** и **R** матрицы

$$A(x) = \begin{bmatrix} x^2 - 1 & x + 1 \\ x + 1 & x^2 + 2x + 1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Вначале вычисляем наибольшие делители миноров матрицы $A(x)$:

$$d_1(x) = x + 1,\ d_2(x) = \begin{vmatrix} x^2 - 1 & x + 1 \\ x + 1 & x^2 + 2x + 1 \end{vmatrix} = (x + 1)^2(x^2 - 2).$$

Теперь находим инвариантные множители:

$$f_1(x) = d_1(x) = x + 1,\ f_2(x) = d_2(x)/d_1(x) = (x+1)(x^2-2).$$

Многочлен $x^2 - 2$ неприводим над $\mathbf{Q}$, следовательно, матрица $A(x)$ имеет над $\mathbf{Q}$ три элементарных делителя: $x + 1$, $x + 1$, $x^2 - 2$. Над $\mathbf{R}$ многочлен $x^2 - 2$ приводим: $x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$, значит, матрица $A(x)$ над $\mathbf{R}$ имеет четыре элементарных делителя: $x + 1$, $x + 1$, $x - \sqrt{2}$, $x + \sqrt{2}$.

Эквивалентные матрицы имеют совпадающие системы элементарных делителей (почему?). Верно утверждение, в определенном смысле обратное.

Предложение 20.4. *Пусть заданы порядок квадратной матрицы над $P[x]$, максимальный порядок ее отличных от нуля миноров и система ее элементарных делителей. Тогда однозначно определяются инвариантные множители этой матрицы и, следовательно, сама она определяется с точностью до эквивалентности.*

➤ Пусть известны n — порядок некоторой матрицы $A(x)$ над $P[x]$, r — максимальный порядок ее не равных нулю миноров и S — система элементарных делителей. Обозначим

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_n(x) \tag{1}$$

инвариантные множители этой матрицы. При $r < n$ имеем $f_i(x) = 0$, $i = r + 1, \ldots, n$. Нам известны элементарные делители матрицы $A(x)$. Это степени неприводимых над P многочленов

$$p_1(x),\ p_2(x),\ \ldots,\ p_m(x). \tag{2}$$

Так как многочлен $f_r(x)$ делится на каждый из предыдущих многочленов $f_i(x)$, то в каноническое разложение $f_r(x)$ каждый из многочленов (2) входит в максимальной степени среди имеющихся в системе S. Итак, $f_r(x)$ определен.

Удалив из системы 5 (только по одному разу) элементарные делители, вошедшие в $f_r(x)$, получим систему S_1. Инвариантный множитель $f_{r-1}(x)$ восстанавливается с помощью S_1 так же, как $f_r(x)$, исходя из S, и т. д. Так как произведение $f_1(x)f_2(x)\cdots f_r(x)$ совпадает с произведением всех элементарных делителей, входящих в S, то возможно одно из двух: либо мы определим $f_1(x)$, одновременно исчерпав всю систему S, либо S исчерпывается ранее, при определении, скажем, многочлена $f_l(x)$ с $l > 1$. Тогда $f_1(x) = \ldots = f_{l-1}(x) = 1$. ➤

В следующей главе используется определенная связь, существующая между системами элементарных делителей клеточно-диагональных матриц.

Предложение 20.5. *Система элементарных делителей диагональной матрицы над $P[x]$ есть объединение систем элементарных делителей ее диагональных элементов. При этом каждый элементарный делитель учитывается столько раз, во сколько диагональных элементов он входит.*

➤ Пусть $A(x)$ – диагональная матрица порядка n над $P[x]$, ненулевые диагональные элементы которой

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \dots,\ g_r(x). \tag{3}$$

Пусть, далее, (1) – система инвариантных множителей матрицы $A(x)$. Очевидно, что максимальный порядок отличных от нуля миноров этой матрицы равен r, поэтому $f_i(x) = 0$ при $i > r$. Далее имеем:

$$f_1(x)f_2(x)\cdots f_r(x) = d_r(x),$$

где $d_r(x)$ – наибольший общий делитель миноров r-го порядка матрицы $A(x)$, и

$$g_1(x)g_2(x)\cdots g_r(x) = \alpha d_r(x),\ \ \alpha \in P, \alpha \neq 0.$$

Пусть $p_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, s$, – все различные неприводимые над полем P делители многочленов (3) со старшим коэффициентом 1. Из последних двух равенств следует, что эти же многочлены, и только они, являются неприводимыми над полем P делителями многочленов (1) со старшим коэффициентом 1. Поэтому элементарные делители матрицы $A(x)$ имеют вид $p_i(x)^b$. Для каждого из многочленов (3) выделим максимальную степень многочлена $p_1(x)$, на которую он делится, т. е. представим $g_k(r)$ в виде

$$g_k(x) = p_1(x)^{a_k} q_k(x),$$

где $q_k(x)$ не делится на $p_1(x)$. Мы получим систему многочленов

$$p_1(x)^{a_k},\ i = 1, 2, \dots, r. \tag{4}$$

Если не считать тех значений k, при которых $a_k = 0$, система (4) по построению есть система всех элементарных делителей многочленов (3), относящихся к многочлену $p_1(x)$, т. е. имеющих вид $p_1(x)^b$. Будем считать многочлены (3) занумерованными таким образом, что $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_r$. Рассмотрим максимальную степень многочлена $p_1(x)$, на которую делится $d_k(x)$ – наибольший общий делитель миноров k-го порядка матрицы $A(x)$. Очевидно, что при $k \leqslant r$ она равна $p_1(x)^{a_1+a_2+\ldots+a_k}$. Так как

$$f_1(x) = d_1(x),\ f_k(x) = d_k(x)/d_{k-1}(x),\ k = 2, \ldots, r,$$

то $p_1(x)^{a_k}$ есть максимальная степень многочлена $p_1(x)$, делящая $d_k(x)$. Если $a_k \neq 0$, то многочлен $p_1(x)^{a_k}$ – единственный элементарный делитель многочлена $f_k(x)$, делящийся на $p_1(x)$. При $a_k = 0$ $f_k(x)$ не имеет элементарных делителей, делящихся на $p_1(x)$. Таким образом, многочлены (4) с $a_k \neq 0$, и только они, составляют систему элементарных делителей матрицы $A(x)$ вида $p_1(x)^b$. Аналогично разбираются случаи $i = 2, \ldots, r$. Доказано, что системы элементарных делителей многочленов (3) и матрицы $A(x)$ совпадают. ◄

Следствие 20.2. *Система элементарных делителей клеточно-диагональной матрицы есть объединение систем элементарных делителей ее диагональных клеток.*

➤ Пусть $A(x) = \mathrm{diag}[A_1(x), A_2(x), \ldots, A_m(x)]$ – клеточно-диагональная матрица, где $A_i(x)$ – квадратная матрица над $P[x]$. Элементарными преобразованиями приведем каждую клетку $A_i(x)$ к канонической форме:

$$A_i(x) \sim \mathrm{diag}[f_{i1}(x),\ f_{i2}(x),\ \ldots,\ f_{in_i}(x)].$$

Элементарные делители клетки $A_i(x)$ есть по определению элементарные делители многочленов $f_{i1}(x), f_{i2}(x), \ldots, f_{in_i}(x)$. Элементарные преобразования клетки $A_i(x)$ можно рассматривать как элементарные преобразования матрицы $A(x)$, не затрагивающие строк и столбцов, которые не проходят через клетку $A_i(x)$. Поэтому матрица $A(x)$ эквивалентна диагональной матрице

$$B(x) = \mathrm{diag}[f_{11}(x),\ \ldots,\ f_{1n_1}(x),\ \ldots,\ f_{m1}(x)\ \ldots,\ f_{mn_m}(x)].$$

Система элементарных делителей матрицы $B(x)$ есть, согласно предложению 20.5, объединение систем элементарных делителей ее диагональных элементов. Следовательно, она совпадает с объединением систем элементарных делителей клеток $A_i(x)$. Матрица $A(x)$ как эквивалентная матрице $B(x)$ имеет те же элементарные делители. ◄

Упражнения

1. Докажите, что одного только совпадения размерностей матриц и систем элементарных делителей недостаточно для их эквивалентности.

2. Докажите, что утверждение следствия 20.2 перестанет быть верным, если вместо элементарных делителей взять инвариантные множители.

20.5. Матричные многочлены

Матрицу над $P[x]$ можно представить в виде многочлена от x, коэффициенты которого – матрицы над P. В самом деле, пусть $A(x)$ – ненулевая матрица порядка n над $P[x]$, m – максимальная степень ее элементов. Тогда очевидно, что матрицу $A(x)$ можно однозначно представить в виде суммы

$$A(x) = B_m(x) + B_{m-1}(x) + \ldots + B_1(x) + B_0,$$

где для $i = 0, 1, \ldots, m$ каждый элемент матрицы $B_i(x)$ имеет вид $\alpha_i x^i$, $\alpha_i \in P$ $(x^0 = 1)$. Представив каждую из матриц $B_i(x)$ в виде произведения

$$B_i(x) = x^i A_i,$$

где A_i – *постоянная матрица*, т. е. $A_i \in P_{n,n}$, получим

$$A(x) = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0.$$

Определение 20.6. *Матрица*

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_1 x + A_0,\ A_i \in P_{n,n}, \qquad (1)$$

называется матричным многочленом от x порядка n. Матрицы A_i, $i = 0, 1, \ldots, m$, называются коэффициентами этого многочлена. Если A_m – ненулевая матрица, то m называется степенью многочлена (1), $A_m x^m$ – его старшим членом.

Пример 20.4.

$$\begin{bmatrix} x^3 & 2x^4-1 & x \\ 0 & 2x+2 & x^3+x \\ x^2 & 2x^3-2 & x+1 \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^4 + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix} x^3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} x^2 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Это матричный многочлен четвертой степени.

Из определения равенства матриц следует условие равенства матричных многочленов одинаковых порядков: *матричные многочлены равны, если их степени одинаковы и коэффициенты при равных степенях x равны.*

Существует теория делимости матричных многочленов, аналогичная теории делимости в кольце $P[x]$. Конечно, в этом случае возникают дополнительные трудности, связанные с наличием в кольце матриц делителей нуля и некоммутативностью умножения матриц. Мы не станем развивать эту теорию, но получим утверждение, необходимое для доказательства критерия эквивалентности характеристических матриц.

Теорема 20.3. *Пусть $A(x)$ и $B(x)$ – матричные многочлены порядка n над полем P, $A(x)$ – произвольный, $B(x) = xE - C$, где C – постоянная матрица. Тогда существует единственная пара $Q_1(x)$, R_1 матриц порядка n над $P[x]$, таких, что*

$$A(x) = B(x)Q_1(x) + R_1 \qquad (2)$$

и R_1 – постоянная матрица. Аналогично существует единственная пара $Q_2(x)$, R_2 матриц порядка n над $P[x]$, таких, что

$$A(x) = Q_2(x)B(x) + R_2$$

и R_2 – постоянная матрица.

Матрицы $Q_1(x)$ ($Q_2(x)$) и R_1 (R_2) называются соответственно *частным* и *остатком при делении матрицы $A(x)$ на $B(x)$ слева (справа).*

➤ Докажем существование и единственность только левых частного и остатка, так как второе утверждение теоремы (для правых частного и остатка) получается аналогично. Прежде всего заметим, что если

$$Q(x) = Q_p x^p + Q_{p-1}x^{p-1} + \ldots + Q_0.$$

является произвольным матричным многочленом степени p (т. е. $Q_p \neq 0$) и порядка n, то произведение $B(x)Q(x)$ имеет степень $p + 1$.

Пусть теперь существуют нужные нам матрицы $Q_1(x)$ и R_1. Из сказанного выше следует, что если $A(x) = A$ – постоянная матрица, то $Q_1(x) = 0$ и $R_1 = A$. Если же

$$A(x) = A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_0,\ A_m \neq 0\,,\ m > 0,$$

то матричный многочлен $Q_1(x)$ степени $m - 1$ имеет вид

$$Q_1(x) = D_{m-1}x^{m-1} + D_{m-2}x^{m-2} + \ldots + D_0. \qquad (3)$$

Перепишем условие (2):

$$A_m x^m + A_{m-1}x^{m-1} + \ldots + A_0 =$$
$$= (xE - C)(D_{m-1}x^{m-1} + D_{m-2}x^{m-2} + \ldots + D_0) + R_1.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем:

$$\left.\begin{array}{lll} A_m & = D_{m-1}, & \\ A_{m-1} & = D_{m-2} & - CD_{m-1}, \\ A_{m-2} & = D_{m-3} & - CD_{m-2}, \\ \multicolumn{3}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots} \\ A_1 & = D_0 & - CD_1, \\ A_0 & = R_1 & - CD_0. \end{array}\right\} \qquad (4)$$

Из последней системы равенств однозначно определяются коэффициенты многочлена $Q_1(x)$ и остаток R_1 (сравните со схемой Горнера в § 9.4). Итак, доказано, что существует не более одной пары $Q_1(x)$, R_1, удовлетворяющей равенству (2). С другой стороны, если $m > 0$ и коэффициенты D_i матричного многочлена (3) определяются из системы (4), то верно условие (2). Если же $A(x) = A$ $(m = 0)$, то $Q_1(x) = O$ и $R_1 = A$ удовлетворяют условию (2). ◄

20.6. Критерий подобия матриц над полем

Мы приступаем к формулированию и доказательству основной теоремы этой главы – критерия подобия матриц над полем. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 20.4. *Пусть A и B – квадратные матрицы порядка n над полем P. Их характеристические матрицы $xE - A$ и $xE - B$ эквивалентны над $P[x]$ тогда и только тогда, когда над полем P есть невырожденная матрица Q порядка n, удовлетворяющая равенству*

$$xE - B = Q^{-1}(xE - A)Q. \tag{1}$$

➤ Достаточность условия леммы вытекает непосредственно из следствия 20.1, поскольку матрицы Q и Q^{-1} обратимы над $P[x]$.

Докажем необходимость условия леммы. Пусть $xE - A \sim xE - B$. Согласно следствию 20.1, существуют обратимые над $P[x]$ матрицы $C(x)$ и $D(x)$, удовлетворяющие равенству

$$xE - B = C(x)(xE - A)D(x). \tag{2}$$

Положив $C(x)^{-1} = F(x)$, из равенства (2) получим

$$F(x)(xE - B) = (xE - A)D(x). \tag{3}$$

Разделим $F[x]$ слева на $xE - A$, а $D(x)$ справа на $xE - B$:

$$F(x) = (xE - A)Q_1(x) + R_1,\ D(x) = Q_2(x)(xE - B) + R_2. \tag{4}$$

Здесь R_1 и R_2 – постоянные матрицы. Из равенств (3) и (4) получим

$$\begin{aligned}((xE - A)Q_1(x) + R_1)(xE - B) &= \\ = (xE - A)(Q_2(x)(xE - B) + R_2),&\end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned}(xE - A)(Q_1(x) - Q_2(x))(xE - B) &= \\ = (xE - A)R_2 - R_1(xE - B).&\end{aligned} \tag{5}$$

Если

$$Q_1(x) - Q_2(x) \neq 0, \tag{6}$$

то левая часть равенства (5) – матричный многочлен степени не меньше второй. Правая же часть этого равенства – многочлен степени не больше первой. Поэтому неравенство (6) невозможно, $Q_1(x) - Q_2(x) = 0$, и из формулы (5) следует

$$(xE - A)R_2 = R_1(xE - B). \tag{7}$$

Сравнивая коэффициенты при x в обеих частях равенства (7), получаем $R_2 = R_1$.

Докажем, что R_1 – невырожденная матрица. Для этого матрицу $C(x)$ разделим слева на $xE - B$:

$$C(x) = (xE - B)Q_3(x) + R_3,$$

где R_3 – постоянная матрица. Теперь имеем:

$$E_n = F(x)C(x) = F(x)((xE - B)Q_3(x) + R_3) = \\ = F(x)(xE - B)Q_3(x) + F(x)R_3. \qquad (8)$$

С учетом равенств (3) и (4), из формулы (8) получаем

$$E_n = (xE - A)D(x)Q_3(x) + ((xE - A)(Q_1(x) + R_1)R_3 = \\ = (xE - A)(D(x)Q_3(x) + Q_1(x)) + R_1R_3.$$

Итак,

$$E_n = (xE - A)(D(x)Q_3(x) + Q_1(x)) + R_1R_3. \qquad (9)$$

Если $D(x)Q_3(x) + Q_1(x) \neq 0$, то правая часть равенства (9) – матричный многочлен степени не меньше первой. Последнее невозможно, ибо левая часть равенства (9) – постоянная матрица. Следовательно,

$$D(x)Q_3(x) + Q_1(x) = 0,\ E_n = R_1R_3,\ R_3 = R_1^{-1}.$$

Умножая обе части равенства (7) слева на R_3, получаем

$$R_3(xE - A)R_2 = xE - B.$$

Сравнивая коэффициенты при x в обеих частях последнего равенства, получаем $R_3R_2 = E_n$, $R_3 = R_2^{-1}$. Тогда матрица $Q = R_2$ искомая. ◄

Теорема 20.4 (критерий подобия матриц над полем). *Матрицы одного и того же порядка подобны над полем P тогда и только тогда, когда их характеристические матрицы эквивалентны над $P[x]$.*

► Пусть A и B – подобные матрицы. Тогда

$$B = Q^{-1}AQ,\ xE - B = xE - Q^{-1}AQ.$$

Но $Q^{-1}(xE)Q = xE$, поэтому

$$xE - B = Q^{-1}xEQ - Q^{-1}AQ = Q^{-1}(xE - A)Q,$$

и характеристические матрицы $xE - A$ и $xE - B$ эквивалентны.

Обратно, пусть $xE - A \sim xE - B$. Тогда, согласно лемме 20.4, верно равенство (1), из которого следует

$$B = Q^{-1}AQ. \blacktriangleleft \tag{10}$$

Следствие 20.3. *Пусть A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка над полем P. Тогда равносильны следующие утверждения:*

1) *A и B подобны над P;*

2) *системы наибольших общих делителей миноров матриц $xE - A$ и $xE - B$ совпадают;*

3) *системы инвариантных множителей матриц $xE - A$ и $xE - B$ совпадают;*

4) *системы элементарных делителей матриц $xE - A$ и $xE - B$ совпадают.*

➤ Пусть A и B подобны. Тогда их характеристические матрицы эквивалентны. Поскольку наибольшие общие делители миноров матрицы не изменяются при элементарных преобразованиях, то утверждение 2 верно. Инвариантные множители однозначно определяются системами наибольших общих делителей миноров, поэтому утверждение 3 справедливо. Элементарные делители матрицы определяются ее инвариантными множителями, следовательно, утверждение 4 верно.

Обратно, пусть системы элементарных делителей матриц $xE - A$ и $xE - B$ совпадают. Определитель характеристической матрицы отличен от нуля, следовательно, максимальные порядки не равных нулю миноров матриц $xE - A$ и $xE - B$ равны. Но тогда совпадают их системы инвариантных множителей, следовательно, эти матрицы имеют одну и ту же каноническую форму. Две матрицы, эквивалентные третьей, эквивалентны друг другу. Итак, $xE - A \sim xE - B$, а тогда A и B подобны, т. е. утверждение 1 верно. ◄

Если матрицы A и B подобны и верно равенство (10), говорят, что *матрица Q трансформирует A в B*, и называют ее *трансформирующей матрицей*. Часто важно не только установить подобие матриц A и B, но и найти трансформирующую матрицу Q. Это можно сделать следующим образом. Пусть $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$, $Q = [x_{ij}]$. Перепишем равенство (10) в виде

$$[x_{ij}][b_{ij}] = [a_{ij}][x_{ij}].$$

Перемножив соответствующие матрицы и сравнив затем элементы, занимающие одну и ту же позицию в левой и правой частях равенства, получим систему линейных уравнений с неизвестными x_{ij}. Найдя одно из ее решений, составим матрицу Q. Если $\det Q \neq 0$, то матрица Q – трансформирующая.

Приведем еще один способ построения трансформирующей матрицы. Пусть A и B подобны. Тогда их характеристические матрицы эквивалентны и имеют, следовательно, одну и ту же каноническую форму $K(x)$. Далее,

$$K(x) = C_1(x)(xE - A)D_1(x) = C_2(x)(xE - B)D_2(x), \quad (11)$$

где $C_i(x)$, $D_i(x)$, $i = 1, 2$, – обратимые над кольцом $P[x]$ матрицы, способ построения которых известен (они являются произведениями элементарных матриц, соответствующих элементарным преобразованиям). Из формул (11), положив $C(x) = C_2(x)^{-1}C_1(x)$, $D(x) = D_1(x)D_2(x)^{-1}$, получим равенство (2). Как доказано выше, из равенства (2) следует равенство (10), где Q^{-1} – остаток при делении матрицы $C(x)$ слева на $xE - B$, Q – остаток при делении матрицы $D(x)$ справа на $xE - B$.

Упражнения

1. Пусть A и B – квадратные матрицы над полем P. Докажите, что если A и B подобны над каким-либо расширением поля P, то они подобны и над P.

2. Докажите, что если две диагональные матрицы различаются лишь порядком расположения элементов на диагонали, то они подобны.

21. НОРМАЛЬНЫЕ ФОРМЫ МАТРИЦЫ НАД ПОЛЕМ

В этой главе рассматривается следующая задача: в классе подобных матриц выбрать матрицу, имеющую по возможности более простой вид. Самым простым видом представляется диагональный, однако не каждая матрица подобна диагональной. Существует несколько вариантов решения этой задачи. Мы рассмотрим два из них: жорданову и фробениусову нормальные формы.

21.1. Определение и построение жордановой нормальной формы

Определение 21.1. *Пусть P – произвольное поле, $a \in P$. Квадратная матрица*

$$\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a \end{bmatrix}$$

порядка n называется клеткой Жордана $J_n(a)$, соответствующей собственному значению a.

Все диагональные элементы клетки $J_n(a)$ равны a, выше диагонали параллельно ей расположена полоса 1, ..., 1, все другие элементы клетки равны 0. Например,

$$J_1(2) = 2,\ J_2(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ J_3(2) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Определение 21.2. *Клеточно-диагональная матрица*

$$J = \mathrm{diag}[A_1, A_2, \dots, A_m],$$

где для $i = 1, 2, \dots, m$ A_i – произвольная клетка Жордана, называется матрицей Жордана. Если A – произвольная квадратная матрица и J – подобная ей матрица Жордана, то J называется жордановой нормальной формой матрицы A.

Теорема 21.1. *Для существования жордановой нормальной формы квадратной матрицы порядка n над полем P необходимо и достаточно, чтобы характеристический многочлен этой матрицы имел в поле P n корней (с учетом их кратностей), т. е. был разложим над этим полем в произведение многочленов первой* *степени. Жорданова нормальная форма матрицы определена однозначно с точностью до порядка следования клеток Жордана на главной «диагонали».*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 21.1. *Пусть*

$$J = diag[J_{n_1}(a_1),\ J_{n_2}(a_2),\ \dots,\ J_{n_m}(a_m)]. \qquad (1)$$

Тогда элементарными делителями характеристической матрицы являются многочлены

$$(x - a_i)^{n_i},\ i = 1, 2, \dots, m, \qquad (2)$$

и только они. При этом учитываются все повторения многочленов (2).

➤ Поскольку система элементарных делителей клеточно-диагональной матрицы является объединением систем элементарных делителей ее диагональных клеток и при этом учитываются все повторения элементарных делителей, то достаточно доказать лемму для случая $m = 1$. Итак, пусть $J = J_n(a)$, тогда

$$xE_n - J = \begin{bmatrix} x-a & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x-a & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x-a & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x-a & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x-a \end{bmatrix}. \qquad (3)$$

Вначале найдем систему $d_i(x)$, $i = 1, 2, \dots, n$, наибольших общих делителей миноров. Очевидно, что $d_n(x) = (x - a)^n$. Далее рассмотрим минор M порядка $n - 1$ матрицы (3), остающийся после удаления первого столбца и последней строки: $M = (-1)^{n-1}$. Поэтому $d_{n-1}(x) = 1$, откуда $d_i(x) = 1$, $i = 1, 2, \dots, n - 1$. По формулам

$$f_1(x) = d_1(x),\ f_i(x) = d_i(x)/d_{i-1}(x),\ i = 2, \dots, n,$$

находим инвариантные множители матрицы (3):

$$f_1(x) = \dots = f_{n-1}(x) = 1,\ f_n(x) = (x - a)^n. \qquad (4)$$

Из равенств (4) следует, что матрица (3) имеет единственный элементарный делитель $(x - a)^n$. ➤

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 21.1.

➤ Вначале рассмотрим условия существования жордановой нормальной формы. Пусть A – квадратная матрица порядка n, для которой существует жорданова нормальная форма J над полем P. На диагонали матрицы J расположены корни ее характеристического многочлена $c(x)$, и только они. Следовательно, $c(x)$ имеет n корней в поле P. Матрица A, будучи подобной матрице J, имеет тот же характеристический многочлен.

Пусть, обратно, характеристический многочлен $c(x)$ матрицы A имеет n корней в поле P и, следовательно, разложим над P на множители первой степени. Каждый элементарный делитель матрицы $xE - A$ делит многочлен $c(x)$ и является степенью неприводимого над P многочлена. Значит, этот делитель имеет вид $(x - a)^k$. Пусть (2) – система элементарных делителей матрицы $xE - A$, J – матрица Жордана (1), соответствующая системе (2). Порядок матрицы J равен сумме степеней элементарных делителей (2), т. е. степени их произведения. Но это произведение равно произведению всех инвариантных множителей матрицы $xE - A$, т. е. многочлену $c(x)$. Следовательно, J – матрица порядка n. Системы элементарных делителей матриц $xE - A$ и $xE - J$ совпадают. Значит, матрицы A и J подобны, J – жорданова нормальная форма матрицы A.

Теперь обсудим вопрос об однозначности жордановой нормальной формы. Последовательность расположения клеток Жордана на диагонали матрицы (1) произвольная, так что жорданова нормальная форма матрицы, вообще говоря, определена неоднозначно. Дело только в расположении диагональных клеток. Действительно, пусть матрицы Жордана подобны. Тогда их характеристические матрицы эквивалентны и, следовательно, имеют совпадающие системы элементарных делителей. Но система элементарных делителей определяет матрицу Жордана с точностью до последовательности расположения «диагональных клеток»: число этих клеток равно числу элементарных делителей, каждому элементарному делителю вида $(x - a)^m$ соответствует клетка $J_m(a)$. ➤

С л е д с т в и е 21.1. *Для любой квадратной матрицы над полем комплексных чисел существует жорданова нормальная форма.*

➤ Доказательство вытекает из предыдущей теоремы и основной теоремы алгебры комплексных чисел (см. § 6.4).

В доказательстве теоремы 21.1 содержится алгоритм построения жордановой нормальной формы произвольной матрицы A. Нужно найти систему элементарных делителей матрицы $xE - A$. Если хотя бы один из них не является многочленом вида $(x - a)^k$, то жордановой нормальной формы не существует (над фиксированным полем). В противном случае для каждого элементарного делителя вида $(x - a)^k$ нужно записать клетку Жордана $J_k(a)$. Клеточно-диагональная матрица, составленная из этих клеток (расположенных на «диагонали» в произвольной последовательности), является жордановой нормальной формой матрицы A.

Пример 21.1. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Вычислим систему наибольших общих делителей миноров характеристической матрицы

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -6 & x+3 & -2 \\ -8 & 6 & x-5 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, что $d_1(x) = d_2(x) = 1$. Вычислим $d_3(x)$:

$$d_3(x) = \begin{vmatrix} x-3 & 1 & 0 \\ -6 & x+3 & -2 \\ -8 & 6 & x-5 \end{vmatrix} = x^3 - 5x^2 + 9x - 5.$$

Далее,

$$f_1(x) = d_1(x) = 1,\ f_2(x) = d_2(x)/d_1(x) = 1,$$

$$f_3(x) = d_3(x)/d_2(x) = x^3 - 5x^2 + 9x - 5 = (x - 1)(x^2 - 4x + 5).$$

В поле $\mathbf{R}$ многочлен $x^2 - 4x + 5$ корней не имеет. Следовательно, над $\mathbf{R}$ не существует жордановой нормальной формы матрицы A. Если же основным полем служит поле $\mathbf{C}$ комплексных чисел, то жорданова нормальная форма существует. В этом случае

$$f_3(x) = (x - 1)(x - 2 - i)(x - 2 + i).$$

Итак, $xE - A$ имеет три элементарных делителя: $x - 1$, $x - (2 + i)$, $x - (2 - i)$. Следовательно, $\mathrm{diag}[1, 2 + i, 2 - i]$ — жорданова нормальная форма матрицы A.

21.2. Еще один способ построения жордановой нормальной формы

Жорданова нормальная форма матрицы часто используется как в самой алгебре, так и в ее приложениях. Идея способа построения жордановой нормальной формы, изложенного в § 21.1, проста, но его реализация связана с трудностями вычислительного характера. Одно только нахождение системы инвариантных множителей требует большого объема вычислений, а дальнейшее построение канонического разложения инвариантных множителей, как правило, крайне трудно.

Здесь мы рассмотрим другой способ построения жордановой нормальной формы, не требующий предварительного вычисления инвариантных множителей и элементарных делителей. Если известны все корни характеристического многочлена матрицы, то для построения ее жордановой нормальной формы этим способом нужно вычислить ранги еще нескольких матриц. При таком способе построения жордановой нормальной формы часто требуется меньший объем вычислений, чем при предыдущем. Однако он связан с другими трудностями, обсуждение которых не входит в задачи нашей книги.

Теорема 21.2. *Пусть A — квадратная матрица порядка n над произвольным полем P, J — ее жорданова нормальная форма, $c(x)$ — характеристический многочлен матрицы A. Тогда:*

1) *диагональными элементами матрицы J служат все корни многочлена $c(x)$ (с учетом их кратностей), и только они;*

2) *если a — корень многочлена $c(x)$ кратности k и $J_r(a)$ — одна из клеток Жордана, составляющих матрицу J, то $r \leqslant k$;*

3) *если $l_r(a)$ — число клеток $J_r(a)$, $1 \leqslant r \leqslant k$, среди составляющих матрицу J клеток Жордана, $B = A - aE_n$, то*

$$l_r(a) = \operatorname{rank} B^{r+1} - 2\operatorname{rank} B^r + \operatorname{rank} B^{r-1} \qquad (1)$$

(по определению $B^0 = E_n$);

4) *если* $l(a)$ *– общее число всех клеток* $J_r(a)$, $r = 1, 2, \ldots, k$, *то*

$$l(a) = n - \operatorname{rank} B. \qquad (2)$$

При доказательстве теоремы нам понадобится следующая

Лемма 21.2. *Пусть* J *– матрица Жордана порядка* n, *составленная из клеток Жордана, соответствующих собственному значению* 0, l *– число составляющих ее клеток,* l_r *– число клеток порядка* r, $r = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда:*

1) $l = n - \operatorname{rank} J$;

2) $l_r = \operatorname{rank} J^{r+1} - 2\operatorname{rank} J^r + \operatorname{rank} J^{r-1}$.

➤ Ранг клеточно-диагональной матрицы J равен сумме рангов составляющих ее клеток Жордана. Ранг каждой из этих клеток на единицу меньше ее порядка. Поэтому $\operatorname{rank} J = n - l$ и, следовательно, верно утверждение 1.

Теперь вычислим $\operatorname{rank} J^r$. Если

$$J = \operatorname{diag}[A_1, A_2, \ldots, A_s],$$

то

$$J^r = \operatorname{diag}[A_1^r, A_2^r, \ldots, A_s^r],$$

поэтому ранг матрицы J^r равен сумме рангов r-х степеней жордановых клеток, составляющих J. Как показывают непосредственные вычисления,

$$J_m(0)^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}^2 =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$J_m(0)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

При увеличении показателя степени на единицу полоса 1, ..., 1 становится на единицу короче и перемещается вправо вверх, на m-м шаге получается нулевая матрица: $J_m(0)^m = O$. Теперь очевидно, что

$$\operatorname{rank} J_m(0)^r = \begin{cases} m - r, & \text{если } O \leqslant r < m, \\ 0, & \text{если } \quad r \geqslant m. \end{cases}$$

Следовательно,

$$\operatorname{rank} J^r = (n - r)l_n + \ldots + 2l_{r+2} + l_{r+1},$$

и поэтому

$$\operatorname{rank} J^{r+1} - 2\operatorname{rank} J^r + \operatorname{rank} J^{r-1} = (n - r - 1)l_n + \ldots + 2l_{r+3} + \\ + l_{r+2} - 2((n - r)l_n + \ldots + 2l_{r+2} + l_{r+1}) + \\ + (n - r + 1)l_n + \ldots + 2l_{r+1} + l_r = l_r,$$

т. е. верно утверждение 2. ≺

Перейдем к доказательству теоремы 21.2.

➤ Поскольку матрицы A и J подобны, а характеристические многочлены подобных матриц равны, то $c(x)$ является характеристическим многочленом матрицы J. Но тогда утверждения 1 и 2 теоремы очевидны.

Перейдем к доказательству утверждений 3 и 4. Матрицы B и $J - aE_n = C$ подобны (почему?), следовательно, подобны матрицы B^r и C^r (почему?). Ранги подобных матриц равны. Поэтому достаточно доказать утверждения 3 и 4 для случая, когда $A = J$, $B = C$.

Сравним матрицы J и С. Вторая матрица получается из первой в результате вычитания числа a из каждого собственного значения, так что клеткам матрицы J с собственным значением a соответствуют клетки матрицы C с собственным значением 0. Числа $l(a)$ и $l_r(a)$, связанные с матрицей J, совпадают с соответствующими числами, связанными с матрицей C. Итак, нужные нам равенства (1) и (2) можно теперь переписать в виде:

$$l_r(0) = \operatorname{rank} C^{r+1} - 2 \operatorname{rank} C^r + \operatorname{rank} C^{r-1}, \tag{3}$$

$$l(0) = n - \operatorname{rank} C. \tag{4}$$

Если все собственные значения матрицы C равны 0, то эти равенства верны согласно лемме 21.2. Пусть среди собственных значений матрицы C есть ненулевые. Представим C в виде $C = \operatorname{diag}[C_1, C_2]$, где C_1 – матрица Жордана, составленная из клеток Жордана матрицы C с нулевым собственным значением; C_2 – матрица Жордана, составленная из всех оставшихся клеток. Матрица C_2 не имеет нулевых собственных значений, поэтому числа $l_r(0)$ и $l(0)$ для матрицы C совпадают с аналогичными числами для матрицы C_1. Но тогда равенства

$$l_r(0) = \operatorname{rank} C_1^{r+1} - 2\operatorname{rank} C_1^r + \operatorname{rank} C_1^{r-1} \tag{5}$$

и

$$l(0) = n - m - \operatorname{rank} C_1, \tag{6}$$

где m – порядок матрицы C_2, верны согласно лемме 21.2. Очевидно, что C_2 – невырожденная матрица, и поэтому $\operatorname{rank} C_2^s = m$ при любом натуральном s. Далее имеем $\operatorname{rank} C^s = \operatorname{rank} C_1^s + m$, поэтому из равенств (5) и (6) следуют соответственно равенства (3) и (4). ◄

Для построения жордановой нормальной формы J матрицы A на основании теоремы 21.2 необходимо выполнить следующие действия.

1. Найти все корни характеристического многочлена $c(x)$ матрицы A. Если не все они принадлежат основному полю, то жордановой нормальной формы матрицы A над этим полем не существует.

2. Пусть все корни многочлена $c(x)$ принадлежат основному полю и a – один из них. С помощью формул (1) и (2) найти все клетки Жордана, соответствующие собственному значению a. Выполнить это для всех корней многочлена $c(x)$.

3. Из всех полученных клеток Жордана, расположив их в произвольной последовательности, составить матрицу Жордана J.

Пример 21.2. Найти жорданову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Запишем характеристическую матрицу:

$$xE - A = \begin{bmatrix} x-2 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & x-2 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & x-2 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x-1 & -2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x+1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x-1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x+1 \end{bmatrix}.$$

Теперь вычислим характеристический многочлен $c(x)$ матрицы A:

$$c(x) = \det(xE - A) = (x - 2)^3(x^2 + 1)^2.$$

Так как многочлен $x^2 + 1$ неприводим над $\mathbf{R}$, то над $\mathbf{R}$ не существует жордановой нормальной формы матрицы A.

Рассмотрим каноническое разложение многочлена $c(x)$ над полем комплексных чисел $\mathbf{C}$:

$$c(x) = (x - 2)^3(x + i)^2(x - i)^2.$$

Теперь последовательно определим число клеток Жордана, соответствующих собственным значениям 2, i и $-i$.

1. Если собственное значение равно 2, то

$$B_1 = A - 2E_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} B_1 = 5.$$

По формуле (2) определяем общее число $l(2)$ клеток Жордана, соответствующих собственному значению 2:

$$l(2) = 7 - \operatorname{rank} B_1 = 7 - 5 = 2.$$

Так как кратность корня 2 многочлена $c(x)$ равна трем, то очевидно, что одной из этих клеток является $J_1(2)$, другой служит $J_2(2)$.

2. Если собственное значение равно i, то

$$B_2 = A - iE_7 =$$

$$= \begin{bmatrix} 2-i & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-i & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2-i & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-i & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1-i & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1-i & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1-i \end{bmatrix}, \quad \operatorname{rank} B_2 = 5,$$

$l(i) = 7 - 5 = 2$.

Искомыми являются две клетки $J_1(i)$.

3. Если собственное значение равно $-i$, то имеем две клетки $J_1(-i)$.

Итак,

$$\operatorname{diag}[2,\ J_2(2),\ i,\ i,\ -i,\ -i] = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -i \end{bmatrix}$$

является жордановой нормальной формой матрицы A.

21.3. Минимальный многочлен

Определение 21.3. *Пусть A – квадратная матрица над полем P, $f(x) \in P[x]$. Если $f(A) = O$ – нулевая матрица, то $f(x)$ называется аннулирующим матрицу A многочленом.*

Предложение 21.1. *Для любой квадратной матрицы существует аннулирующий ее ненулевой многочлен.*

➤ Пусть A – матрица порядка n над полем P. Множество $P_{n,n}$ всех матриц порядка n над полем P является n^2-мерным линейным пространством. Следовательно, $n^2 + 1$ степеней матрицы A

$$A^0 = E,\ A,\ A^2,\ \ldots,\ A^{n^2}$$

составляют линейно зависимую систему. Поэтому в поле P есть такие числа $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \ldots,\ \alpha_{n^2}$, не все равные нулю, что

$$\alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ \ldots + \alpha_{n^2} A^{n^2} = O.$$

Положим

$$f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ \ldots + \alpha_{n^2} x^{n^2}.$$

Итак, $f(x)$ – аннулирующий матрицу A ненулевой многочлен. ➤

Определение 21.4. *Пусть A – квадратная матрица над полем P. Ненулевой многочлен $m(x)$, аннулирующий матрицу A, называется минимальным многочленом этой матрицы, если он удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *степень многочлена $m(x)$ минимальна среди степеней всех аннулирующих матрицу A ненулевых многочленов;*

2) *старший коэффициент многочлена* $m(x)$ *равен* 1.

Отметим простейшие свойства минимального многочлена.

1. *Минимальный многочлен матрицы определен однозначно.*

➤ Пусть $m(x)$ и $l(x)$ – минимальные многочлены матрицы A, $k(x) = m(x) - l(x)$. Так как $k(A) = m(A) - l(A) = 0 - 0 = 0$, то $k(x)$ – аннулирующий матрицу A многочлен. Если многочлен $k(x)$ – ненулевой, то его степень ниже степени $m(x)$, поскольку старшие члены многочленов $m(x)$ и $l(x)$ равны. Но это противоречит определению минимального многочлена, следовательно, $k(x) = 0$, $m(x) = l(x)$. ◄

2. *Если матрицы A и B подобны, то множество многочленов, аннулирующих матрицу A, совпадает с множеством многочленов, аннулирующих матрицу B. В частности, минимальные многочлены подобных матриц равны.*

➤ Пусть

$$B = C^{-1}AC,\ f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \ \dots + \alpha_m x^m,\ f(A) = 0.$$

Тогда

$$f(B) = \alpha_0 E + \alpha_1 B + \alpha_2 B^2 + \ \dots + \alpha_m B^m = \alpha_0 E +$$
$$+ \alpha_1 C^{-1}AC + \alpha_2 C^{-1}ACC^{-1}AC + \dots + \alpha_m C^{-1}AC \cdots C^{-1}AC =$$
$$= C^{-1}\alpha_0 EC + C^{-1}\alpha_1 AC + C^{-1}\alpha_2 A^2 C + \ \dots + C^{-1}\alpha_m A^m C =$$
$$= C^{-1}(\alpha_0 E + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \ \dots + \alpha_m A^m)C =$$
$$= C^{-1}f(A)C = C^{-1}OC = 0. \ ◄$$

3. *Произвольный многочлен является аннулирующим для некоторой матрицы, если и только если он делится на минимальный многочлен этой матрицы.*

➤ Пусть A – квадратная матрица над полем P, $m(x)$ – ее минимальный многочлен, $f(x) \in P[x]$. Представив $f(x)$ в виде $f(x) = m(x)q(x) + r(x)$, где $r(x)$ – остаток от деления на $m(x)$, получим

$$f(A) = m(A)q(A) + r(A) = Oq(A) + r(A) = r(A).$$

Итак, равенства $f(A) = O$ и $r(A) = O$ равносильны. Поэтому $f(A) = O$, если и только если $r(x) = 0$, т. е. $f(x)$ делится на $m(x)$.

4. *Минимальный многочлен клеточно-диагональной матрицы равен наименьшему общему кратному* минимальных многочленов ее диагональных клеток.*

➤ Если

$$A = \operatorname{diag}[A_1, A_2, \ldots, A_k],$$

а $f(x)$ – многочлен, то

$$f(A) = \operatorname{diag}[f(A_1), f(A_2), \ldots, f(A_k)].$$

Следовательно, $f(x)$ – аннулирующий матрицу A многочлен, если и только если он является аннулирующим для каждой из клеток A_i, т. е. делится на ее минимальный многочлен. ➤

Теорема 21.3. *Минимальный многочлен матрицы равен последнему инвариантному множителю ее характеристической матрицы.*

Докажем вначале следующую лемму.

Лемма 21.3. *Минимальный многочлен клетки Жордана $J_n(a)$ равен $(x - a)^n$.*

➤ Если $J = J_n(a) - E_n$, то $J = J_n(0)$ и, как показано в § 21.1, $J^n = O$. Следовательно, $(x - a)^n$ – аннулирующий матрицу $J_n(a)$ многочлен. Минимальный многочлен $m(x)$ матрицы $J_n(a)$ делит $(x - a)^n$ и поэтому имеет вид $(x - a)^k$, $k \leqslant n$. Но $J^k \neq O$ при $k < n$ (см. доказательство теоремы 21.2), т. е. $(x - a)^k$ не является аннулирующим клетку $J_n(a)$ многочленом при $k < n$. Итак, $m(x) = (x - a)^n$. ➤

Перейдем к доказательству теоремы 21.3.

➤ Пусть A – квадратная матрица над полем P. Вначале предположим, что ее характеристический многочлен $c(x)$ имеет в P столько корней, какова его степень. Как известно, над этим полем существует жорданова матрица J, подобная матрице A. Минимальные многочлены подобных матриц равны. Остается найти минимальный многочлен матрицы J.

Если

$$J = \operatorname{diag}\left[J_{n_1}(a_1), J_{n_2}(a_2), \ldots, J_{n_k}(a_k)\right],$$

---

* *Наименьшим общим кратным* системы ненулевых многочленов называется многочлен минимальной степени со старшим коэффициентом 1, делящийся на каждый из данных многочленов.

то ее минимальный многочлен $m(x)$ равен наименьшему общему кратному минимальных многочленов клеток, т. е. многочленов

$$(x-a_1)^{n_1},\ (x-a_2)^{n_2},\ \ldots,\ (x-a_k)^{n_k}. \qquad (1)$$

Согласно лемме 21.1, многочлены (1), и только они, являются элементарными делителями характеристической матрицы $xE - J$. Но тогда их наименьшее общее кратное — последний инвариантный множитель матрицы $xE - J$. Он также является последним инвариантным множителем матрицы $xE - A$, поскольку эти две матрицы эквивалентны.

Теперь перейдем к общему случаю. Пусть A — квадратная матрица над произвольным полем P, P' — расширение поля P, содержащее все корни характеристического многочлена матрицы A. Матрица A является матрицей над полем P'. Как уже доказано, ее минимальный многочлен над P' равен последнему инвариантному множителю характеристической матрицы $xE - A$. Следовательно, все его коэффициенты принадлежат полю P. С другой стороны, всякий многочлен над P является и многочленом над P'. Поэтому минимальный многочлен матрицы A не зависит от того, рассматривается ли она над полем P или над полем P'. ◄

Следствие 21.2 (теорема Гамильтона — Кэли). *Характеристический многочлен матрицы является аннулирующим эту матрицу многочленом.*

► Характеристический многочлен матрицы A равен произведению всех инвариантных множителей характеристической матрицы $xE - A$ и поэтому делится на минимальный многочлен матрицы A. ◄

Очевидно

Следствие 21.3. *Всякий корень характеристического многочлена матрицы является корнем ее минимального многочлена (возможно, другой кратности).*

Упражнения

1. Пусть характеристические многочлены матриц A и B равны и минимальные многочлены этих матриц равны. Могут ли матрицы A и B не быть подобными?

2. Пусть A — квадратная матрица над полем P, $f(x)$, $g(x) \in P[x]$. Докажите, что $f(A) = g(A)$, если и только если разность $f(x) - g(x)$ делится на минимальный многочлен матрицы A.

3. Пусть A — квадратная матрица порядка n над полем P. Докажите, что множество $P[A]$ всех многочленов от A является подпространством пространства $P_{n,n}$ всех матриц и размерность подпространства $P[A]$ равна степени минимального многочлена матрицы A.

4. Докажите, что множество $P[A]$ относительно сложения и умножения матриц является полем, если и только если минимальный многочлен матрицы A неприводим над полем P.

21.4. Критерий диагонализируемости матрицы над полем

Квадратная матрица A называется *диагонализируемой над полем P*, если над этим полем существует диагональная матрица, подобная A. Отметим, что диагонализируемость матрицы A над полем P означает, что в линейном пространстве соответствующей размерности над этим полем существует базис, составленный из собственных векторов линейного оператора с матрицей A.

Теорема 21.4. *Для диагонализируемости квадратной матрицы над полем P необходимо и достаточно, чтобы минимальный многочлен этой матрицы имел в поле P столько корней, какова его степень, и среди них не было кратных.*

➤ Пусть матрица A подобна над полем P диагональной матрице

$$D = \operatorname{diag}[d_1, d_2, \ldots, d_n].$$

Минимальный многочлен клетки d_i, совпадает с многочленом $x - d_i$. Минимальный многочлен матрицы D равен наименьшему общему кратному многочленов

$$x - d_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{1}$$

т. е. произведению всех попарно различных многочленов (1). Следовательно, он имеет в поле P столько корней, какова его степень, и среди них нет кратных. Поскольку матрицы A и D подобны, минимальный многочлен матрицы A совпадает с минимальным многочленом матрицы D.

Пусть, обратно, минимальный многочлен $m(x)$ матрицы A удовлетворяет условию теоремы. Тогда все его элементарные делители имеют первую степень. Но $m(x)$ совпадает с последним инвариантным множителем $f_n(x)$ характеристической матрицы $xE - A$, а любой другой ее инвариантный множитель делит $m(x)$. Следовательно, все элементарные делители матрицы $xE - A$ имеют первую степень, все клетки Жордана матрицы A первого порядка, жорданова нормальная форма матрицы A диагональна. ≺

21.5. Фробениусова нормальная форма

Жордановой нормальной формой очень удобно пользоваться, однако она не всегда существует. Здесь мы определим еще одну нормальную форму матрицы, существующую при любом основном поле.

Определение 21.5. *Пусть P – произвольное поле, а $g(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + x^n$ – многочлен ненулевой степени n над полем P, старший коэффициент которого равен 1. Матрица*

$$F = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & -a_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & -a_{n-1} \end{bmatrix}$$

называется клеткой Фробениуса, сопровождающей многочлен $g(x)$.

В последнем столбце клетки Фробениуса расположены коэффициенты многочлена $g(x)$, взятые с противоположным знаком. Ниже главной диагонали параллельно ей идет полоса 1, ..., 1. Все остальные элементы равны 0. Например, матрицы

$$1,\ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

являются клетками Фробениуса, сопровождающими соответственно многочлены $x - 1$, $x^2 - 1$, x^3.

О п р е д е л е н и е 21.6. *Пусть*

$$g_1(x),\ g_2(x),\ \dots,\ g_m(x) \tag{1}$$

есть система многочленов ненулевых степеней над полем P, такая, что для $i = 1, 2, \dots, m-1$ многочлен $g_i(x)$ является делителем следующего многочлена $g_{i+1}(x)$ и старший коэффициент каждого из них равен 1. Пусть, далее, для $k = 1, 2, \dots, m$ F_k – клетка Фробениуса, сопровождающая многочлен $g_k(x)$. Клеточно-диагональная матрица

$$F = \mathrm{diag}[F_1,\ F_2,\ \dots,\ F_k] \tag{2}$$

называется матрицей Фробениуса, сопровождающей систему многочленов (1). Если A – произвольная матрица, P – подобная ей матрица Фробениуса, то P называется фробениусовой нормальной формой матрицы A.

Теорема 21.5. *Для любой квадратной матрицы над произвольным полем существует единственная фробениусова нормальная форма.*

Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма 21.4. *Если (2) – матрица Фробениуса порядка n, сопровождающая систему многочленов (1), то*

$$1,\ \dots,\ 1,\ g_1(x),\ g_2(x),\ \dots,\ g_m(x), \tag{3}$$

где число единиц равно $n - m$, – система инвариантных множителей характеристической матрицы $xE - F$.

➤ Пусть $m = 1$. Рассмотрим систему

$$d_1(x),\ d_2(x),\ \dots,\ d_n(x)$$

наибольших общих делителей миноров характеристической матрицы

$$xE - F = \begin{bmatrix} x & 0 & \dots & 0 & a_0 \\ -1 & x & \dots & 0 & a_1 \\ 0 & -1 & \dots & 0 & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & x & a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & -1 & x + a_{n-1} \end{bmatrix},$$

где $a_0 + a_1x + a_1x^2 + \dots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = g_1(x)$; $d_n(x) = |xE - F|$. Разложив этот определитель по элементам последнего столбца, получим

$$\begin{aligned} d_n(x) &= (-1)^{n+1}a_0(-1)^{n-1} + (-1)^{n+2}a_1x(-1)^{n-2} + \ldots + \\ &+ (-1)^{2n-1}a_{n-2}x^{n-2}(-1) + (x + a_{n-1})x^{n-1} = \\ &= a_0 + a_1x + \ldots + a_{n-2}x^{n-2} + a_{n-1}x^{n-1} + x^n = g_1(x). \end{aligned}$$

Минор порядка $n - 1$, остающийся после вычеркивания первой строки и последнего столбца матрицы $xE - F$, равен $(-1)^{n-1}$, поэтому $d_{n-1}(x) = 1$. Следовательно, $d_i(x) = 1$, $i = 1, \ldots, n - 1$. Теперь по формулам

$$f_1(x) = d_1(x),\ f_i(x) = d_i(x)/d_{i-1}(x),\ i = 2, \ldots, n,$$

получаем инвариантные множители матрицы $xE - F$:

$$f_1(x) = \ldots = f_{n-1}(x) = 1,\ f_n(x) = g_1(x).$$

Итак, для случая $m = 1$ лемма доказана.

Пусть теперь $m > 1$. Рассмотрим характеристическую матрицу

$$xE - F = \mathrm{diag}\left[xE_{n_1} - F_1,\ xE_{n_2} - F_2,\ \ldots,\ xE_{n_m} - F_m\right],$$

где n_i степень многочлена $g_i(x)$. С помощью элементарных преобразований строк и столбцов приведем каждую из клеток $xE_{n_i} - F_i$ к канонической форме K_i. Из доказанного выше следует, что $K_i = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1, g_i(x)]$. Но элементарные преобразования каждой клетки $xE_{n_i} - F_i$ можно рассматривать как элементарные преобразования матрицы $xE - F$, которые не затрагивают строк и столбцов, не проходящих через эту клетку. Поэтому матрица $xE - F$ эквивалентна матрице

$$\begin{gathered} \mathrm{diag}[K_1, K_2, \ldots, K_m] = \\ = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1, g_1(x), 1, \ldots, 1, g_2(x), \ldots, 1, \ldots, 1, g_m(x)] = L. \end{gathered}$$

Изменив порядок строк и столбцов матрицы L, приведем ее к виду

$$K = \mathrm{diag}[1, \ldots, 1, g_1(x), g_2(x), \ldots, g_m(x)].$$

Итак, K — каноническая форма матрицы $xE - F$ с многочленами (3) на диагонали. ◀

Перейдем непосредственно к доказательству теоремы 21.5.

➤ Докажем сначала существование фробениусовой нормальной формы. Пусть A – квадратная матрица порядка n над полем P, система инвариантных множителей ее характеристической матрицы

$$1, \ldots, 1, f_l(x), \ldots, f_n(x), \tag{4}$$

где $f_l(x) \neq 1$. Так как определитель характеристической матрицы отличен от нуля, то $f_n(x) \neq 0$, $f_i(x)$ – делитель многочлена $f_{i+1}(x)$, $l \leqslant i < n$. Следовательно, существует матрица Фробениуса F, сопровождающая систему многочленов

$$f_l(x), \ldots, f_n(x). \tag{5}$$

Порядок матрицы F равен сумме степеней многочленов (5), т. е. степени их произведения, которое, в свою очередь, равно произведению всех многочленов (4). Последнее представляет собой $|xE - A|$, т. е. характеристический многочлен матрицы A, и имеет степень n. Следовательно, F – матрица порядка n. Согласно предыдущей лемме, (4) – система инвариантных множителей матрицы $xE - F$. Таким образом, $xE - A \sim xE - F$, матрицы A и F подобны, F – фробениусова нормальная форма матрицы A.

Теперь докажем единственность фробениусовой нормальной формы. Пусть F_1 и F_2 – подобные матрицы Фробениуса. Тогда характеристические матрицы $xE - F_1$ и $xE - F_2$ эквивалентны и, следовательно, имеют совпадающие системы инвариантных множителей. Но тогда F_1 и F_2 сопровождают одну и ту же систему многочленов и поэтому совпадают. ➤

Пример 21.3. Найти фробениусову нормальную форму матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{bmatrix}.$$

Р е ш е н и е. В § 21.1 вычислены инвариантные множители матрицы $xE - A$: $f_1(x) = f_2(x) = 1$, $f_3(x) = -5 + 9x - 5x^2 + x^3$. Клетка Фробениуса, сопровождающая многочлен $-5 + 9x - 5x^2 + x^3$, т. е. матрица

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & -9 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix},$$

является фробениусовой нормальной формой матрицы A.

22. БИЛИНЕЙНЫЕ И КВАДРАТИЧНЫЕ ФОРМЫ

В этой главе вводятся фундаментальные понятия квадратичной и билинейной форм, которые понадобятся нам в дальнейшем.

22.1. Линейные преобразования переменных

Определение 22.1. *Пусть даны произвольное поле P и переменные*

$$x_1, x_2, \dots, x_n. \tag{1}$$

Переход от переменных (1) к переменным

$$y_1, y_2, \dots, y_n \tag{2}$$

с помощью формул

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \dots + a_{1n}y_n, \\ x_2 &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{2n}y_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \dots + a_{nn}y_n, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

где a_{ij} – произвольные элементы поля P, называется линейным преобразованием переменных над полем P. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей преобразования (3).

Очевидно, что если

$$X = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T,\ Y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T,$$

то система равенств (3) равносильна матричному равенству

$$X = AY. \tag{4}$$

Рассмотрим последовательное применение двух линейных преобразований переменных. Преобразуем переменные (1) в переменные (2) по формуле (4), а переменные (2) в переменные

$$z_1, z_2, \dots, z_n \tag{5}$$

по формуле
$$Y = BZ, \tag{6}$$
где B – квадратная матрица порядка n,
$$Z = [z_1\ z_2\ \dots\ z_n]^T.$$

Из формул (4) и (6) получим
$$X = A(BZ) = (AB)Z. \tag{7}$$

Итак, если переменные (1) линейно выражаются через переменные (2), а последние линейно выражаются через переменные (5), то существует линейное преобразование, выражающее переменные (1) через (5). Это преобразование задается формулой (7) и называется *произведением преобразований (4) и (6)*.

Очевидно, что матрица произведения линейных преобразований переменных есть произведение матриц сомножителей.

Так как линейное преобразование переменных определяется своей матрицей, то из ассоциативности умножения матриц следует ассоциативность умножения линейных преобразований переменных.

Линейное преобразование переменных с невырожденной матрицей называется *невырожденным*.

Если (4) – невырожденное преобразование, то можно выразить переменные (2) через переменные (1). В самом деле, умножая слева обе части равенства (4) на матрицу A^{-1} получаем
$$Y = A^{-1}X. \tag{8}$$
Преобразование (8) называется *обратным* преобразованию (4).

Так как определитель произведения квадратных матриц равен произведению их определителей, а матрица произведения линейных преобразований переменных есть произведение матриц сомножителей, то произведение невырожденных линейных преобразований переменных также является невырожденным.

С учетом связи, существующей между координатами одного и того же вектора в разных базисах (см. § 17.8, формула (3)), становится очевидным следующее. При переходе к новому базису с матрицей перехода A координаты всех векторов пространства подвергаются невырожденному линейному преобразованию переменных с той же матрицей A, т. е. изменяются по формуле (3) (или (4)). Здесь X и Y – координатные столбцы произвольного вектора $\mathbf{x}$ в старом и новом базисах соответственно.

22.2. Квадратичные формы

Здесь и далее мы будем полагать, что характеристика поля P отлична от 2. Читатель, не знакомый с понятием характеристики поля, может считать, что основное поле является числовым, т. е. подполем поля комплексных чисел.

Определение 22.2. *Квадратичной формой от n переменных*

$$x_1, x_2, \dots, x_n \tag{1}$$

над полем P называется многочлен от этих переменных с коэффициентами из поля P, каждое слагаемое которого второй степени.

Каждая квадратичная форма от переменных (1) может быть записана в следующем симметричном виде:

$$\begin{aligned} F(x) = F(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j = \\ = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \dots + a_{1n}x_1x_n + \\ + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{2n}x_2x_n + \dots + \\ + a_{n1}x_nx_1 + a_{n2}x_nx_2 + \dots + a_{nn}x_n^2, \end{aligned} \tag{2}$$

где все коэффициенты удовлетворяют условию

$$a_{ij} = a_{ji}. \tag{3}$$

Если в первоначальной записи квадратичной формы коэффициенты при x_ix_j и x_jx_i различны, то можно сложить их и, разделив сумму на 2, получить равные.

Пример 22.1. Квадратичная форма

$$F(x_1,\ x_2) = x_1^2 + 5x_1x_2 - 3x_2x_1$$

записывается в симметричном виде так:

$$x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_1.$$

Определение 22.3. *Матрица $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, называется матрицей квадратичной формы (2), а ранг матрицы A — рангом формы (2).*

В силу равенства (3) матрица квадратичной формы всегда симметрическая.

Если $X^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n]$ — строка переменных, то

$$X^TAX = F(x), \tag{4}$$

в чем просто убедиться, перемножив соответствующие матрицы.

Применим к переменным (1), входящим в квадратичную форму (4), невырожденное линейное преобразование

$$X = CY, \tag{5}$$

где C — квадратная матрица с ненулевым определителем; $Y^T = [y_1\ y_2\ \ldots\ y_n]$ — строка новых переменных

$$y_1, y_2, \ldots, y_n, \tag{6}$$

т. е. подставим в формулу (4) вместо столбца X выражение (5):

$$F(x) = X^TAX = (CY)^TA(CY) = Y^T(C^TAC)Y = G(y).$$

Мы получили новую квадратичную форму $G(y)$. Это приводит к следующему определению.

Определение 22.4. *Две квадратичные формы от одного и того же числа переменных называются эквивалентными, если одна из них превращается в другую в результате применения к входящим в нее переменным невырожденного линейного преобразования над основным полем.*

Очевидно, что две квадратичные формы, эквивалентные третьей, эквивалентны друг другу.

Для установления связи между матрицами эквивалентных квадратичных форм нам потребуются следующие две леммы.

Лемма 22.1. *Пусть даны квадратные матрицы*

$$A = [a_{ij}],\ B = [b_{ij}] \tag{7}$$

порядка n над полем P. Если для любых n-членных столбцов X и Y над P

$$X^TAY = X^TBY, \tag{8}$$

то $A = B$.

➤ В качестве X возьмем столбец, k-й элемент которого равен единице, а остальные – нулю, в качестве Y – столбец, l-й элемент которого равен единице, остальные – нулю. Тогда $X^TAY = a_{kl}$, $X^TBY = b_{kl}$. Следовательно, $a_{kl} = b_{kl}$, k, $l = 1, 2, ..., n$, $A = B$. ⮜

Лемма 22.2. *Пусть (7) – симметрические квадратные матрицы порядка n над полем P. Если для любого n-членного столбца X над P*

$$X^TAX = X^TBX, \tag{9}$$

то $A = B$.

➤ Пусть X и Y – произвольные n-членные столбцы над P. Тогда

$$(X + Y)^TA(X + Y) = X^TAX + X^TAY + Y^TAX + Y^TAY.$$

Но A – симметрическая матрица, и поэтому

$$Y^TAX = (Y^TAX)^T = X^TAY.$$

Следовательно,

$$(X + Y)^TA(X + Y) = X^TAX + Y^TAY + 2X^TAY.$$

С учетом равенства (9) теперь имеем равенство (8). Согласно предыдущей лемме, $A = B$. ⮜

Пусть теперь квадратичная форма $G(y) = Y^TBY$ с матрицей B эквивалентна квадратичной форме (4), т. е. получается из нее в результате применения невырожденного линейного преобразования (5) с матрицей C. Мы видели, что

$$F(x) = X^TAX = Y^T(C^TAC)Y.$$

Так как преобразование (5) переводит форму $F(x)$ в форму $G(y)$, то

$$Y^T(C^TAC)Y = Y^TBY,$$

и, согласно предыдущей лемме, $C^TAC = B$.

Итак, если переменные (1) квадратичной формы с матрицей A подвергнуть невырожденному линейному преобразованию (5), то эта форма превратится в квадратичную форму от переменных (6) с матрицей $C^T AC$.

Обратно, пусть

$$F(x) = X^T AX,\ G(y) = Y^T BY$$

суть квадратичные формы от переменных (1) и (6) соответственно. Пусть, далее,

$$B = C^T AC, \tag{10}$$

где C – невырожденная матрица порядка n над основным полем. Тогда квадратичные формы $F(x)$ и $G(y)$ эквивалентны.

Действительно, применив к переменным (1) невырожденное линейное преобразование (5), переведем первую из рассматриваемых квадратичных форм во вторую. Итак, доказана

Теорема 22.1. *Квадратичные формы $F(x)$, $G(y)$ эквивалентны тогда и лишь тогда, когда их матрицы A и B связаны соотношением вида (10), где C – невырожденная матрица над основным полем.*

Так как ранг матрицы не меняется от умножения ее на невырожденную матрицу, то верно

Следствие 22.1. *Ранги эквивалентных квадратичных форм равны.*

22.3. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Определение 22.5. *Квадратичная форма называется канонической, если ее матрица диагональна. Каноническим видом квадратичной формы называется любая эквивалентная ей каноническая форма.*

Теорема 22.2. *Всякая квадратичная форма эквивалентна над основным полем некоторой канонической квадратичной форме. Иными словами, всякую квадратичную форму можно с помощью невырожденного линейного преобразования переменных над основным полем привести к каноническому виду.*

➤ Пусть

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \ a_{ij} = a_{ji}, \tag{1}$$

есть квадратичная форма над полем P. Если $n = 1$, то форма (1) является канонической.

Пусть $n > 1$. Будем считать утверждение теоремы верным для квадратичных форм от меньшего, чем n, количества переменных. Рассмотрим три случая:

1) все коэффициенты формы (1) равны нулю;

2) среди коэффициентов a_{ii} есть отличный от нуля;

3) среди коэффициентов формы есть отличный от нуля, но все $a_{ii} = 0$.

В первом случае форма (1) – нулевая, значит, она является канонической.

Рассмотрим второй случай. Пусть, например, $a_{11} \neq 0$. Тогда

$$a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 = a_{11}x_1^2 + 2\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_1x_i + A, \tag{2}$$

где буквой A обозначается сумма слагаемых, не зависящих от x_1. Сравнивая равенства (1) и (2), получаем

$$F(x) = a_{11}^{-1}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 + G(x_2, \ \ldots, \ x_n),$$

где $G(x_2, \ldots, x_n)$ – квадратичная форма от $n - 1$ переменных $x_2, \ldots, x_n$. По индуктивному предположению существует невырожденное линейное преобразование переменных

$$y_i = b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n, \ i = 2, \ldots, n,$$

приводящее форму $G(x_2, \ldots, x_n)$ к каноническому виду. Преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_i &= \phantom{a_{11}x_1 + {}} b_{i2}x_2 + \ldots + b_{in}x_n, \ i = 2, \ldots, n, \end{aligned}$$

также является невырожденным, ибо определитель его матрицы

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & b_{n2} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}\det[b_{ij}] \neq 0.$$

Применив это преобразование к переменным формы $F(x)$, получим ее канонический вид: $a_{11}^{-1}y_1^2 + c_2y_2^2 + \ldots + c_ny_n^2$. Для второго случая теорема доказана.

Рассмотрим третий случай. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Возьмем линейное преобразование переменных

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_i &= y_i,\ i = 3,\ \ldots,\ n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Определитель матрицы преобразования (3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0.$$

Применяя это преобразование к переменным формы $F(x)$, получаем

$$F(x) = 2a_{12}y_1^2 + \ldots \tag{4}$$

Правая часть равенства (4) – квадратичная форма, рассмотренная во втором случае. С помощью некоторого невырожденного линейного преобразования переменных эта форма приводится к каноническому виду. Так как произведение невырожденных линейных преобразований переменных есть невырожденное линейное преобразование переменных, то аналогичное утверждение верно для формы (1). ◄

Описанный в доказательстве теоремы алгоритм приведения квадратичной формы к каноническому виду носит название *алгоритма Лагранжа*.

Пример 22.2. Найти канонический вид квадратичной формы $F(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1$ над полем действительных чисел.

Р е ш е н и е. Положим

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_3 &= y_3. \end{aligned}\right\}$$

Тогда

$$F(x) = y_1^2 - y_2^2 + 2y_1y_3 = (y_1 + y_3)^2 - y_2^2 - y_3^2 = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2,$$

где

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= y_1 + y_3 = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3,\\ z_2 &= y_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2,\\ z_3 &= y_3 = x_3. \end{aligned}\right|$$

Итак, $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$ – канонический вид формы $F(x)$.

22.4. Нормальный вид квадратичной формы над полями действительных и комплексных чисел

Очевидно, что канонический вид квадратичной формы не определен однозначно, т. е. различные канонические квадратичные формы могут оказаться эквивалентными. Например, квадратичные формы $x_1^2 + x_2^2$ и $y_1^2 - y_2^2$ эквивалентны над полем комплексных чисел, поскольку невырожденное линейное преобразование переменных

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1,\\ x_2 &= iy_2 \end{aligned}\right\}$$

переводит первую из этих форм во вторую. Иногда удается среди канонических видов квадратичной формы выбрать наиболее простой. В частности, это всегда возможно, если основным полем является поле комплексных или действительных чисел. Квадратичную форму над полем комплексных чисел называют также *комплексной квадратичной формой,* а над полем действительных – *действительной.*

Пусть $F(x)$ – квадратичная форма над полем $\mathbf{C}$, ее канонический вид

$$a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \ldots + a_ny_n^2. \tag{1}$$

Рассмотрим линейное преобразование переменных:

$$z_k = \begin{cases} \sqrt{a_k}\,y_k, & \text{если } a_k \neq 0;\\ y_k, & \text{если } a_k = 0. \end{cases}$$

Очевидно, что оно невырождено. Применив его к форме (1), получим $\varepsilon_1 z_1^2 + \varepsilon_2 z_2^2 + \ldots + \varepsilon_n z_n^2$, где $\varepsilon_k = 1$ или $\varepsilon_k = 0$.

Определение 22.6. *Канонический вид комплексной квадратичной формы называется нормальным, если все его ненулевые коэффициенты равны* 1.

Итак, нами доказано

Предложение 22.1. *Всякая комплексная квадратичная форма эквивалентна некоторой нормальной квадратичной форме. При этом число единиц среди коэффициентов соответствующей нормальной формы равно рангу исходной формы, так что нормальный вид комплексной квадратичной формы определен однозначно с точностью до наименования переменных.*

Из следствия 22.1 и предложения 22.1 вытекает

Следствие 22.2 (критерий эквивалентности комплексных квадратичных форм). *Комплексные квадратичные формы эквивалентны тогда и лишь тогда, когда равны их ранги.*

➤ Необходимость этого условия доказана в § 22.2 (см. следствие 22.1), достаточность следует из того, что в данном случае обе формы приводятся к одному и тому же нормальному виду. ◄

Перейдем к квадратичным формам над полем действительных чисел. Пусть $F(x)$ — действительная квадратичная форма, ее канонический вид

$$a_1y_1^2 + a_2y_2^2 + \ldots + a_ny_n^2. \tag{2}$$

Применив к форме (2) действительное невырожденное линейное преобразование переменных

$$z_k = \begin{cases} \sqrt{|a_k|}y_k, & \text{если } a_k \neq 0; \\ y_k, & \text{если } a_k = 0, \end{cases}$$

приведем ее к виду $\varepsilon_1z_1^2 + \varepsilon_2z_2^2 + \ldots + \varepsilon_nz_n^2$, где $\varepsilon_k = 0; 1; -1$.

Определение 22.7. *Канонический вид действительной квадратичной формы, каждый ненулевой коэффициент которого равен* 1 *или* -1, *называется нормальным.*

Итак, нами доказано

Предложение 22.2. *Всякая действительная квадратичная форма с помощью невырожденного линейного преобразования переменных над полем действительных чисел может быть приведена к нормальному виду.*

Число ненулевых коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависит от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего ее к нормальному виду; оно равно рангу этой формы. Оказывается, что число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы также являются инвариантами формы, т. е. ее нормальный вид определен однозначно с точностью до наименования переменных.

Теорема 22.3 (закон инерции действительных квадратичных форм). *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде действительной квадратичной формы не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.*

➤ Пусть невырожденное линейное преобразование переменных

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n,\ i = 1, 2, \dots, n,$$

приводит квадратичную форму $F(x)$ к нормальному виду

$$y_1^2 + \dots + y_s^2 - y_{s+1}^2 - \dots - y_r^2. \tag{3}$$

а невырожденное линейное преобразование переменных

$$z_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \dots + b_{in}x_n,\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{4}$$

приводит ее к виду

$$z_1^2 + \dots + z_t^2 - z_{t+1}^2 - \dots - z_r^2. \tag{5}$$

Нужно доказать равенство $s = t$, и тем самым теорема будет доказана. Предположим, что $s < t$, и рассмотрим систему линейных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \dots + a_{sn}x_n = 0, \\ b_{t+1\,1}x_1 + b_{t+1\,2}x_2 + \dots + b_{t+1\,n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n = 0. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Это однородная система $n - t + s < n$ линейных уравнений с n неизвестными, поэтому она имеет ненулевые решения. Пусть одно из них

$$(c_1, c_2, \dots, c_n),\ c_i \in \mathbf{R}. \tag{7}$$

Вычислим $F(c_1, c_2, \ldots, c_n)$. Из нормального вида (5) с учетом того, что (7) – решение системы (6), получим

$$z_j(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} c_i = 0,\ j = t + 1, \ldots, n,$$

откуда

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} b_{1i} c_i\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{i=1}^{n} b_{ti} c_i\right)^2. \quad (8)$$

В правой части равенства (8) каждое слагаемое неотрицательно, поэтому

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_n) \geqslant 0. \quad (9)$$

Аналогично из нормального вида (3), учитывая, что

$$y_i(c_1, c_2, \ldots, c_n) = \sum_{i=1}^{n} a_{ji} c_i = 0,\ j = 1, 2, \ldots, s,$$

получаем

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_n) \leqslant 0. \quad (10)$$

Сопоставляя неравенства (9) и (10), имеем

$$F(c_1, c_2, \ldots, c_n) = 0.$$

Теперь из равенства (8) следует, что каждая, отдельно взятая сумма равна нулю. Итак,

$$b_{j1} c_1 + b_{j2} c_2 + \ldots + b_{jn} c_n = 0,\ j = 1, 2, \ldots, t. \quad (11)$$

Для $j = t + 1, \ldots, n$ равенство (11) также верно, ибо (7) – решение системы (6). Итак, (7) – ненулевое решение системы уравнений:

$$b_{i1} x_1 + b_{i2} x_2 + \ldots + b_{in} x_n = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Матрицей этой системы является невырожденная матрица линейного преобразования (4), так что система не имеет ненулевых решений. Полученное противоречие доказывает, что неравенство $s < t$ не выполняется. По аналогичным причинам невозможно и неравенство $t < s$. Следовательно, равенство $s = t$ верно. ◄

Определение 22.8. *Число положительных коэффициентов в нормальном виде действительной квад-*

ратичной формы называется положительным индексом инерции этой формы, а число отрицательных коэффициентов — ее отрицательным индексом инерции.

Если заданы ранг и положительный индекс инерции квадратичной формы, можно найти ее отрицательный индекс. Поэтому из закона инерции вытекает

Следствие 22.3 (критерий эквивалентности действительных квадратичных форм). *Совпадение рангов и равенство положительных индексов инерции является необходимым и достаточным условием эквивалентности действительных квадратичных форм.*

Доказательство мы оставляем читателю.

Упражнения

1. Докажите, что множество классов эквивалентных квадратичных форм (от n переменных) над **C** и **R** конечно, а над **Q** — бесконечно.

2. Найдите число классов эквивалентных квадратичных форм (от n переменных) над **R**, имеющих заданную разность между положительным и отрицательным индексами инерции.

3. Найдите необходимое и достаточное условие для того, чтобы действительные квадратичные формы $F(x)$ и $-F(x)$ были эквивалентными.

22.5. Знакоопределенные действительные квадратичные формы

Пусть задана действительная квадратичная форма

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

и переменные

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{2}$$

принимают лишь действительные значения. Тогда при любом наборе значений переменных (2) значение формы (1) — действительное число.

Определение 22.9. *Квадратичную форму (1) называют положительно-определенной, если для любых значений*

$$b_1, b_2, \ldots, b_n \tag{3}$$

входящих в нее переменных (2), среди которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$F(b_1, b_2, \ldots, b_n) > 0,$$

отрицательно-определенной, если для любых значений (3) входящих в нее переменных, среди которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$F(b_1, b_2, ..., b_n) < 0.$$

Пример 22.3. Очевидно, что квадратичная форма $F(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ является положительно-определенной. Квадратичные формы $G(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$ и $H(x_1, x_2) = x_1^2$ не являются положительно-определенными, так как $G(0, 1) = -1$, $H(0, 1) = 0$.

Предложение 22.3. *Если квадратичная форма является положительно-определенной, то и любая эквивалентная ей квадратичная форма также положительно-определенная.*

➤ Пусть (1) и

$$G(y_1, y_2, ..., y_n) \tag{4}$$

есть эквивалентные квадратичные формы. Это значит, что

$$F(x_1, x_2, ..., x_n) = G(y_1, y_2, ..., y_n), \tag{5}$$

где $y_i = c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + ... + c_{in}x_n$, $i = 1, 2, ..., n$, $\det[c_{i1}] \neq 0$.

Если форма (4) не является положительно-определенной, то существует такой набор (3) действительных чисел, что хотя бы одно из них не равно нулю и $G(b_1, b_2, ..., b_n) \leqslant 0$. Система уравнений

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + ... + c_{in}x_n = b_i,\ i = 1, 2, ..., n,$$

имеет ненулевое решение $\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n$. Согласно равенству (5),

$$F(\delta_1, \delta_2, ..., \delta_n) = G(b_1, b_2, ..., b_n) \leqslant 0,$$

т. е. форма (1) не является положительно-определенной. ➤

Найдем нормальный вид знакоопределенных квадратичных форм. Если квадратичная форма (1) имеет нормальный вид

$$y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2, \tag{6}$$

то она является положительно-определенной, так как (6) – положительно-определенная квадратичная форма. Если же нормальный вид

$$G(y) = \varepsilon_1 y_1^2 + \varepsilon_2 y_2^2 + ... + \varepsilon_n y_n^2 \tag{7}$$

квадратичной формы (1) отличен от нормального вида (6), то она не является положительно-определенной, так как в этом случае форма (7) не является положительно-определенной. Действительно, пусть, для определенности, $\varepsilon_1 \neq 1$ (т. е. $\varepsilon_1 = -1$ или $\varepsilon_1 = 0$). Положим $b_1 = 1$, $b_2 = \ldots = b_n = 0$. Тогда $G(b_1, b_2, \ldots, b_n) \leqslant 0$. Итак, доказана

Теорема 22.4. *Квадратичная форма является положительно-определенной, если и только если ее нормальный вид имеет единичную матрицу.*

Опишем теперь эффективный способ распознавания положительной определенности квадратичной формы, не требующий приведения ее к нормальному виду.

Лемма 22.3. *Знак определителя матрицы действительной квадратичной формы не меняется при применении к этой форме невырожденного действительного линейного преобразования переменных.*

➤ Если A и B – матрицы эквивалентных квадратичных форм, то $B = C^T AC$, $\det C \neq 0$. Далее,

$$\det B = (\det C^T)(\det A)(\det C) =$$
$$= (\det C)^2 (\det A), \ (\det C)^2 > 0. \ ◄$$

Следствие 22.4. *Определитель матрицы положительно-определенной квадратичной формы – положительное число.*

➤ Нормальный вид такой формы имеет единичную матрицу. ◄

Определение 22.10. *Пусть* $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, – *квадратная матрица. Угловыми минорами матрицы A называются все ее миноры, расположенные в левом верхнем углу:*

$$a_{11}, \ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \ \ldots, \ \det A.$$

Теорема 22.5 (критерий положительной определенности действительной квадратичной формы). *Действительная квадратичная форма является положительно-определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы строго положительны.*

➤ Пусть задана действительная квадратичная форма

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j. \tag{8}$$

Обозначим через A ее матрицу. Воспользуемся индукцией по n. Если $n = 1$, то форма (8) имеет вид $F(x) = a_{11}x_1^2$ и является положительно-определенной только при условии $a_{11} > 0$, где a_{11} – единственный угловой минор ее матрицы. Следовательно, при $n = 1$ теорема верна. Положим $n > 1$ и будем считать утверждение теоремы верным для квадратичных форм от меньшего, чем n, количества переменных. Квадратичную форму (8) запишем в виде

$$F(x) = \sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n-1} a_{in} x_i x_n + a_{nn} x_n^2. \tag{9}$$

Положим

$$\sum_{i,j=1}^{n-1} a_{ij} x_i x_j = G(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{n-1}). \tag{10}$$

Это квадратичная форма от $n - 1$ переменных, матрица B которой получается из матрицы A в результате вычеркивания ее последних строки и столбца.

Докажем сейчас необходимость условия теоремы. Пусть (8) – положительно-определенная квадратичная форма. Легко видеть, что тогда и форма (10) является положительно-определенной. Если бы это было не так, существовал бы набор b_1, b_2, ..., b_{n-1} действительных чисел, среди которых не все равны нулю, такой, что $G(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \leqslant 0$. Тогда из формулы (9) следовало бы

$$F(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, 0) = G(b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}) \leqslant 0,$$

что противоречит положительной определенности формы (8). Итак, по индуктивному предположению все угловые миноры матрицы B положительны и по предыдущему следствию $\det A > 0$, т. е. доказана положительность всех угловых миноров матрицы A.

Перейдем к доказательству достаточности. Пусть все угловые миноры матрицы A положительны. Следовательно, положительны все угловые миноры матрицы B и по индуктивному предположению (10) – положительно-определенная квадратичная форма. Существует линейное невырожденное преобразование переменных

$$y_i = b_{i1}x_1 + b_{i2}x_2 + \ldots + b_{i\,n-1}x_{n-1},\ i = 1, 2, \ldots, n-1,$$

приводящее эту форму к нормальному виду $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_{n-1}^2$. Преобразование

$$\left.\begin{aligned} y_i &= b_{i1}x_1 + \ldots + b_{i\,n-1}x_{n-1},\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \\ y_n &= x_n \end{aligned}\right\}$$

также является невырожденным. Применив его к форме (9), получим

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n-1} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1} c_{in}y_iy_n + c_{nn}y_n^2. \tag{11}$$

Рассмотрим линейное преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} z_i &= y_i + c_{in}y_n,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1, \\ z_n &= y_n. \end{aligned}\right\}$$

Очевидно, что оно невырожденное. Применив его к квадратичной форме (11), получим ее канонический вид:

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n-1} z_i^2 + \delta z_n^2. \tag{12}$$

Определитель матрицы квадратичной формы, стоящей в правой части равенства (12), равен δ. Согласно лемме 22.3, он отличается от $\det A$ лишь положительным множителем. Так как $\det A > 0$, то и $\delta > 0$, и (12) – положительно-определенная квадратичная форма. ≺

Квадратичная форма $F(x)$ – отрицательно-определенная тогда и лишь тогда, когда $-F(x)$ является положительно-определенной квадратичной формой. Матрицы этих двух форм отличаются друг от друга только множителем -1. Следовательно, их угловые миноры одинакового и четного порядка равны и различаются лишь знаком, если этот порядок нечетный.

Итак, имеет место

Следствие 22.5 (критерий отрицательной определенности действительной квадратичной формы). *Дейст-*

вительная квадратичная форма является отрицательно-определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры нечетного порядка ее матрицы отрицательны, а все угловые миноры четного порядка положительны.

22.6. Условия разложимости действительной и комплексной квадратичных форм

Определение 22.11. *Пусть задана квадратичная форма*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{1}$$

над полем P. Будем говорить, что эта форма разложима над P, если ее можно представить в виде следующего произведения:

$$F(x) = (a_1x_1 + \ldots + a_nx_n)(b_1x_1 + \ldots + b_nx_n), \tag{2}$$

где $a_i, b_j \in P$.

Найдем необходимые и достаточные условия разложимости квадратичной формы над полями действительных и комплексных чисел.

Пусть форма (1) представима в виде (2). Рассмотрим матрицу

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Ранг этой матрицы не больше, чем 2. Если он равен нулю, то это нулевая матрица и форма (1) – нулевая, следовательно, ранг ее равен нулю.

Пусть (1) – ненулевая форма, ранг матрицы (3) равен 1 и, для определенности, $a_1 \neq 0$. Тогда $b_i = ca_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$ и из разложения (2) имеем

$$F(x) = c(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2, \ c \neq 0. \tag{4}$$

Рассмотрим линейное преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \\ y_i &= x_i, \ i = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Определитель его матрицы

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = a_1 \neq 0,$$

так что (5) — невырожденное преобразование. Применив его к форме (1), получим в силу формулы (4) $F(x) = cy_1^2$. Значит, ранг формы (1) равен 1.

Пусть, наконец, ранг матрицы (3) равен 2 и пусть, для определенности,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Рассмотрим линейное преобразование переменных:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n, \\ y_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 + \dots + b_nx_n, \\ y_i &= x_i, \ i = 3, \ \dots, \ n. \end{aligned}\right\}$$

Это невырожденное преобразование, так как

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Применив его к форме (1), мы, согласно формуле (2), получим

$$F(x) = y_1y_2. \tag{6}$$

Ранг формы (6) равен 2.

Если P — поле действительных чисел, то, положив

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= z_1 + z_2, \\ y_2 &= z_1 - z_2, \\ y_i &= z_i, \ i = 3, \ \dots, \ n, \end{aligned}\right\}$$

из равенства (6) получим $F(x) = z_1^2 - z_2^2$. Значит, положительный индекс инерции этой формы равен 1.

Таким образом, мы доказали, что если квадратичная форма разложима над полем P, то ее ранг не больше, чем 2. Если при этом P — поле действительных чисел, а ранг формы равен 2, то ее положительный индекс инерции равен 1.

Пусть, обратно, ранг квадратичной формы (1) равен 1. С помощью подходящего невырожденного линейного преобразования переменных

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n,\ i = 1, 2, \ldots, n, \quad (7)$$

приведем эту форму к каноническому виду

$$F(x) = by_1^2 = b(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2.$$

Итак, (1) – разложимая квадратичная форма.

Пусть сейчас P – поле комплексных или действительных чисел, (1) – квадратичная форма над P, ранг которой равен 2, и, если P – поле действительных чисел, положительный индекс инерции равен 1. С помощью невырожденного линейного преобразования переменных (7) приведем форму (1) к виду

$$F(x) = y_1^2 - y_2^2 = (y_1 + y_2)(y_1 - y_2) =$$
$$= (c_1x_1 + c_2y_2 + \ldots + c_nx_n)(\delta_1x_1 + \delta_2x_2 + \ldots + \delta_nx_n).$$

Значит, (1) – разложимая квадратичная форма.

Очевидно, что если ранг формы $F(x)$ равен 0, то она также разложима:

$$F(x) = 0(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)^2.$$

Итак, доказана

Теорема 22.6. *Комплексная квадратичная форма разложима над полем комплексных чисел тогда и лишь тогда, когда ее ранг не больше, чем 2. Действительная квадратичная форма разложима над полем действительных чисел тогда и лишь тогда, когда ее ранг не больше, чем 2, и, если он равен 2, положительный индекс инерции должен быть равен 1.*

22.7. Билинейные формы

Определение 22.12. *Многочлен*

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n; y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (1)$$

от двух систем переменных

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \tag{2}$$

и

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n \tag{3}$$

называется билинейной формой порядка n, если каждое его слагаемое имеет первую степень относительно переменных (2) и переменных (3) в отдельности.

Краткая запись билинейной формы (1): $F(x;\ y)$.

Итак, билинейная форма $F(x;\ y)$ над полем P от систем переменных (2) и (3) имеет вид

$$F(x;\ y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j,\ a_{ij} \in P. \tag{4}$$

Определение 22.13. *Матрица*

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

называется матрицей билинейной формы (4), а ранг этой матрицы — рангом формы (4).

Легко проверить, перемножив соответствующие матрицы, что $F(x;\ y) = x^T AY$, где X и Y — столбцы, составленные из переменных (2) и (3) соответственно.

Пусть $G(u,\ v)$ — еще одна билинейная форма порядка n. Если она может быть получена из формы (4) в результате применения к каждой из систем переменных (2) и (3) одного и того же невырожденного линейного преобразования над основным полем, то форма $G(u,\ v)$ называется *эквивалентной* форме $F(x;\ y)$.

Пример 22.4. Билинейная форма

$$G(u_1,\ u_2;\ v_1,\ v_2) = u_1 v_1 + 4u_2 v_2$$

эквивалентна билинейной форме

$$F(x_1,\ x_2;\ y_1,\ y_2) = x_1 y_1 + x_2 y_2 \tag{5}$$

над полем $\mathbf{Q}$, ибо, положив в равенстве (5)

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= u_1 \\ x_2 &= 2u_2, \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} y_1 &= v_1 \\ y_2 &= 2v_2, \end{aligned}\right\}$$

получим $F(x;\ y) = G(u;\ v)$.

Очевидны следующие утверждения.

1. *Каждая билинейная форма эквивалентна сама себе.*

2. *Если билинейная форма $F(x;\ y)$ эквивалентна билинейной форме $G(u;\ v)$, то и $G(u;\ v)$ эквивалентна $F(x;\ y)$.*

3. *Две билинейные формы, эквивалентные третьей, эквивалентны друг другу.*

Следовательно, эквивалентность билинейных форм есть отношение эквивалентности на множестве всех билинейных форм порядка n над полем P.

Рассмотрим, как связаны матрицы билинейных форм, эквивалентных друг другу.

Теорема 22.7. *Билинейные формы порядка n с матрицами A и B эквивалентны, если и только если над основным полем существует такая невырожденная матрица C порядка n, что $B = C^TAC$.*

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы 22.1, поэтому мы предлагаем его читателю в качестве упражнения.

Определение 22.14. *Билинейная форма называется симметрической, если ее матрица A – симметрическая, т. е. $A^T = A$.*

Предложение 22.4. *Если билинейная форма F является симметрической, то и всякая эквивалентная ей билинейная форма также симметрическая.*

➤ Пусть A – матрица билинейной формы F. Тогда $A^T = A$. Матрица любой эквивалентной билинейной формы G имеет вид C^TAC. Далее,

$$(C^TAC)^T = C^TA^T(C^T)^T = C^TAC.$$

Следовательно, форма G является симметрической. ◀

Ниже рассматриваются только симметрические билинейные формы. При этом характеристика основного поля предполагается отличной от 2.

Пусть

$$F(x;\ y) = X^TAY \tag{6}$$

есть симметрическая билинейная форма порядка n. Положив в *равенстве* (6) $X = Y$, получим квадратичную форму $F(x) = F(x;\ x) = X^TAX$ с той же матрицей A. Эти две формы называются *полярными* по отношению друг к другу.

Предложение 22.5. Для каждой квадратичной формы существует единственная симметрическая билинейная полярная форма.

➤ Пусть две билинейные формы – (6) и $G(x;\ y) = X^TBY$ – порождают одну и ту же квадратичную форму $F(x)$. Тогда

$$F(x) = F(x;\ x) = X^TAX = G(x;\ x) = X^TBX,$$

откуда, согласно лемме 22.2, $A = B$, значит, $F(x; y) = G(x; y)$. ◄

Итак, соответствие между квадратичными и полярными им симметрическими билинейными формами является взаимно однозначным. При этом матрицы полярных квадратичной и билинейной форм совпадают и при невырожденных линейных преобразованиях переменных изменяются одинаково. Это дает возможность определить канонический и нормальный виды симметрической билинейной формы и сформулировать теоремы, аналогичные соответствующим теоремам для квадратичных форм.

Определение 22.15. *Симметрическая билинейная форма называется канонической, если ее матрица диагональна. Каноническим видом симметрической билинейной формы называется любая эквивалентная ей каноническая форма.*

Теорема 22.8. *Всякая симметрическая билинейная форма эквивалентна над основным полем некоторой канонической билинейной форме.*

Определение 22.16. *Канонический вид симметрической билинейной формы над полем* **C** *называется нормальным, если все его ненулевые коэффициенты равны* 1. *Канонический вид симметрической билинейной формы над полем* **R** *называется нормальным, если каждый его ненулевой коэффициент равен* 1 *или* −1.

Предложение 22.6. Всякая симметрическая билинейная форма над **C**(**R**) *с помощью невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к нормальному виду. Число ненулевых коэффициентов в нормальном виде симметрической билинейной формы над* **C**, *а также число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде* *симметрической билинейной формы над* **R** *не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего эту форму к нормальному виду.*

Теорема 22.8 и предложение 22.6 верны по той же причине, что и аналогичные утверждения для квадратичных форм.

Пример 22.5. Привести к каноническому виду с помощью невырожденного линейного преобразования переменных над полем **R** билинейную форму

$$F(x_1, x_2, x_3; y_1, y_2, y_3) = \frac{1}{2}x_1y_2 + \frac{1}{2}x_2y_3 + \frac{1}{2}x_3y_2 + \frac{1}{2}x_1y_3 + \frac{1}{2}x_3y_1.$$

Р е ш е н и е. Рассмотрим полярную квадратичную форму

$$F(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Как было показано выше (см. пример 22.1), невырожденное линейное преобразование переменных

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \\ z_2 &= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \\ z_3 &= x_3 \end{aligned}\right\}$$

приводит эту форму к каноническому виду

$$F(x) = z_1^2 - z_2^2 - z_3^2.$$

Следовательно, невырожденное линейное преобразование двух систем переменных:

$$\left.\begin{aligned} z_1 &= \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3, \\ z_2 &= \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2, \\ z_3 &= x_3, \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} v_1 &= \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + y_3, \\ v_2 &= \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2, \\ v_3 &= y_3 \end{aligned}\right\}$$

приводит билинейную форму $F(x; y)$ к каноническому виду

$$F(x; y) = z_1v_1 - z_2v_2 - z_3v_3.$$

О п р е д е л е н и е 22.17. *Симметрическая билинейная форма над* **R** *называется положительно-определенной, если положительно-определенна полярная ей квадратичная форма.*

Предложение 22.7. *Нормальным видом положительно-определенной симметрической билинейной формы порядка n является*

$$F(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n) = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

22.8. Эрмитово-сопряженная матрица

Если имеется $m \times n$-матрица над $\mathbf{C}$:

$$A = [a_{jk}],\ j = 1, 2, \ldots, m,\ k = 1, 2, \ldots, n, \qquad (1)$$

то наряду с транспонированной матрицей A^T рассматривают еще *эрмитово-транспонированную* матрицу A^*. По определению

$$A^* = [b_{jk}],\ j = 1, 2, \ldots, n,\ k = 1, 2, \ldots, m,\ b_{jk} = \overline{a}_{kj},$$

где черта означает замену комплексного числа сопряженным:

$$\overline{a + bi} = a - bi,\ a,\ b \in \mathbf{R}.$$

Верны следующие утверждения.

1. *Если A и B — такие матрицы, что определено произведение AB, то определено также произведение B^*A^* и верно равенство*

$$(AB)^* = B^*A^*.$$

2. *Если A и B — матрицы одинаковых размеров, то*

$$(A + B)^* = A^* + B^*.$$

3. *Если A — матрица, а λ — комплексное число, то*

$$(\lambda A)^* = \overline{\lambda} A^*.$$

Доказательства этих утверждений аналогичны приведенным в § 2.4 доказательствам свойств операции транспонирования, поэтому мы предлагаем их читателю в качестве упражнения.

Определение 22.18. *Квадратная матрица A над полем комплексных чисел называется эрмитовой, если $A^* = A$.*

Очевидно, что для эрмитовой матрицы A вида (1) $a_{jk} = \overline{a}_{kj}$, поэтому все диагональные элементы эрмитовой матрицы действительны.

Заметим еще, что *определитель эрмитовой матрицы — действительное число.*

➤ В самом деле, пусть A — матрица вида (1). Перейти к матрице A^* можно, последовательно выполнив две операции – транспонирование и замену каждого элемента матрицы сопряженным числом. Следовательно, $\det(A^*) = \overline{\det A}$. Если $A^* = A$, то $\det A^* = \det A$, поэтому для эрмитовой матрицы $\overline{\det A} = \det A$, т. е. $\det A$ – действительное число. ◄

22.9. Эрмитовы билинейные и квадратичные формы

Если основное поле совпадает с полем комплексных чисел, то наряду с билинейными и квадратичными формами рассматривают эрмитовы билинейные и квадратичные формы.

Определение 22.19. *Эрмитовой билинейной формой $F(x;\ y)$ порядка n от систем переменных*

$$x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n \tag{1}$$

и

$$y_1,\ y_2,\ \dots,\ y_n \tag{2}$$

называется билинейная форма от систем переменных

$$\overline{x}_1,\ \overline{x}_2,\ \dots,\ \overline{x}_n \tag{3}$$

и (2):

$$F(x;\ y) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i y_j,\quad a_{ij} \in \mathbf{C}. \tag{4}$$

Черта означает переход к комплексному сопряженному числу: если переменным (1) придаются значения $b_1, b_2, \dots, b_n$, то переменные (3) принимают значения $\overline{b}_1,\ \overline{b}_2,\ \dots,\ \overline{b}_n$.

Аналогично *эрмитовой квадратичной формой $F(x)$ от переменных (1)* называется билинейная форма от систем переменных (3) и (1), матрица которой – эрмитова. Иными словами, эрмитова квадратичная форма F от переменных (1) – это многочлен вида

$$F(x) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i x_j =$$
$$= a_{11}\overline{x}_1 x_1 + a_{12}\overline{x}_1 x_2 + \dots + a_{1n}\overline{x}_1 x_n +$$
$$+ a_{21}\overline{x}_2 x_1 + a_{22}\overline{x}_2 x_2 + \dots + a_{2n}\overline{x}_2 x_n + \dots +$$
$$+ a_{n1}\overline{x}_n x_1 + a_{n2}\overline{x}_n x_2 + \dots + a_{nn}\overline{x}_n x_n,$$

где все коэффициенты a_{ij} являются комплексными числами и удовлетворяют условию $\overline{a}_{ij} = a_{ji}$. Матрицы и ранги эрмитовых билинейной и квадратичной форм определяются так же, как в случае обычных (не эрмитовых) форм.

Если A – матрица формы, то:

для эрмитовых билинейных форм

$$F(x;\ y) = X^*AY; \tag{5}$$

для эрмитовых квадратичных форм

$$F(x) = X^*AX. \tag{6}$$

Равенства (5) и (6) проверяются прямыми вычислениями.

Эрмитова билинейная форма называется *симметрической,* если ее матрица A эрмитова, т. е. $A^* = A$.

В этой книге рассматриваются только симметрические эрмитовы билинейные формы.

Так же, как и в случае обычных (не эрмитовых) билинейных и квадратичных форм, определяются *эквивалентные* эрмитовы билинейные и квадратичные формы и *полярные* формы. Остается верным все, что было сказано выше об эквивалентности форм. Необходимо только, учитывая равенства (5) и (6), во всех формулах заменять операцию транспонирования матрицы операцией перехода к эрмитово-транспонированной матрице. В частности, матрицы A и B эквивалентных эрмитовых билинейных или квадратичных форм связаны соотношением $B = C^*AC$, где C – матрица соответствующего преобразования переменных.

Все доказательства аналогичны приведенным выше, поэтому мы оставляем их читателю.

Эрмитова билинейная или квадратичная форма называется *канонической,* если ее матрица диагональна.

Теорема 22.9. *Всякая эрмитова квадратичная форма эквивалентна некоторой канонической эрмитовой форме. Аналогичное утверждение верно и для симметрических эрмитовых билинейных форм.*

➤ Основная часть доказательства теоремы такая же, как и для случая обычных (не эрмитовых) форм.

Пусть дана эрмитова квадратичная форма

$$F(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i x_j. \tag{7}$$

Вместо трех случаев, приведенных в § 22.3, здесь рассмотрим следующие четыре:

1) все коэффициенты формы (7) равны нулю;

2) среди коэффициентов a_{ii} хотя бы один отличен от нуля;

3) все коэффициенты a_{ii} равны нулю, среди других коэффициентов есть не равный нулю и не являющийся чисто мнимым числом;

4) все коэффициенты a_{ii} равны нулю, и все ненулевые коэффициенты формы (7) – чисто мнимые числа.

Для первых трех случаев рассуждения те же, что и в § 22.3. Рассмотрим четвертый случай. Пусть, например, $a_{12} \neq 0$. Запишем квадратичную форму (1) в виде

$$F(x) = \bar{x}_1 \sum_{i=2}^{n} a_{1i} x_i + \left(\sum_{i=2}^{n} a_{i1} \bar{x}_i \right) x_1 + G(x_2, \ \ldots, \ x_n)$$

и рассмотрим линейное преобразование переменных

$$\left. \begin{array}{l} y_i = x_i, \ i = 1, \ 3, \ \ldots, \ n, \\ y_2 = a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1n} x_n . \end{array} \right\}$$

Очевидно, что оно невырожденное. Применив его к форме (7), получим

$$F(x) = \bar{y}_1 y_2 + \bar{y}_2 y_1 + H(y_2, \ \ldots, \ y_n),$$

где $H(y_2, ..., y_n)$ не зависит от y_1. Мы привели форму (7) к уже рассмотренному виду. ➤

Эрмитова квадратичная форма от n переменных, имеющая вид $\varepsilon_1 \bar{y}_1 y_1 + \varepsilon_2 \bar{y}_2 y_2 + \ldots + \varepsilon_n \bar{y}_n y_n$, где $\varepsilon_i = 1; -1; 0$, а также полярная ей билинейная форма называются *нормальными эрмитовыми формами*.

Следующие две теоремы доказываются точно так же, как и в случае действительных квадратичных форм.

Теорема 22.10. *Всякая эрмитова квадратичная (симметрическая билинейная) форма эквивалентна некоторой нормальной форме.*

Теорема 22.11. *Число положительных и число отрицательных коэффициентов в нормальном виде эрмитовой квадратичной формы не зависят от выбора невырожденного линейного преобразования переменных, приводящего ее к нормальному виду.*

Лемма 22.4. *Пусть (1) – эрмитова квадратичная форма, а $b_1, b_2, \ldots, b_n$ – комплексные числа. Тогда $F(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ – действительное число.*

➤ Нужно доказать, что

$\overline{F(b_1, b_2, \ldots, b_n)} = F(b_1, b_2, \ldots, b_n)$.

В самом деле,

$$\overline{F(b_1, b_2, \ldots, b_n)} = \overline{\left(\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}\bar{b}_i b_j\right)} =$$

$$= \sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ji}\bar{b}_j b_i = F(b_1, b_2, \ldots, b_n). \ ◄$$

Доказанная лемма позволяет сформулировать определение знакоопределенных эрмитовых форм.

Определение 22.20. *Эрмитова квадратичная форма (7) называется положительно-определенной, если для любых значений*

$$b_1, b_2, \ldots, b_n \tag{8}$$

входящих в нее переменных, среди которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$F(b_1, b_2, \ldots, b_n) > 0,$$

и отрицательно-определенной, если для любых значений (8) входящих в нее переменных, среди которых хотя бы одно отлично от нуля,

$$F(b_1, b_2, \ldots, b_n) < 0.$$

Симметрическую эрмитову билинейную форму, полярную положительно-определенной эрмитовой квадратичной форме, также называют положительно-определенной.

Так же, как и в случае квадратичных форм, доказываются следующие две теоремы.

Теорема 22.12. *Эрмитова квадратичная форма (1) является положительно-определенной тогда и только тогда, когда*

$$\bar{y}_1 y_1 + \bar{y}_2 y_2 + \ldots + \bar{y}_n y_n$$

является ее нормальным видом.

Теорема 22.13. Эрмитова квадратичная форма является положительно-определенной тогда и только тогда, когда все угловые миноры ее матрицы положительны.

23. ЕВКЛИДОВЫ И УНИТАРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В элементарной геометрии длина $|\mathbf{a}|$ вектора $\mathbf{a}$ и условие ортогональности векторов выражаются в терминах скалярного произведения:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}};$$

векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное произведение равно нулю:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0.$$

В этой главе мы введем понятие скалярного произведения в произвольном действительном или комплексном линейном пространстве, а затем определим длину вектора $\mathbf{a}$ с помощью формулы $|\mathbf{a}| = \sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$, а ортогональность векторов – с помощью равенства $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

23.1. Линейные функции

Определение 23.1. *Пусть V – линейное пространство над полем P. Отображение $f\colon V \to P$ называется линейной функцией на пространстве V, если оно удовлетворяет следующим двум условиям:*

1) *для любых векторов* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in V$

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b});$$

2) *для любого вектора* $\mathbf{a} \in V$ *и любого числа* $\alpha \in P$

$$f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a}).$$

Другими словами, линейный оператор пространства V в поле P (которое рассматривается как линейное пространство над самим собой) называется линейной функцией на пространстве V.

Пример 23.1. Отображение $o\colon V \to P$, определяемое равенством $o(\mathbf{v}) = 0$ для любого $\mathbf{v} \in V$, является, очевидно, линейной функцией на пространстве V. Эта функция называется *нулевой*.

Пример 23.2. Скалярное умножение каждого вектора $\mathbf{x}$ на фиксированный вектор $\mathbf{a}$ задает линейную функцию $\mathbf{x} \to \mathbf{x} \cdot \mathbf{a}$ на пространстве V_3 свободных векторов.

Пример 23.3. На пространстве $C[\alpha, \beta]$ функций, непрерывных на отрезке $[\alpha, \beta]$, линейной функцией является отображение

$$f\colon C[\alpha, \beta] \to \mathbf{R},\ x(t) \to \int_{\alpha}^{\beta} x(t)l(t)dt,$$

где $l(t)$ – фиксированная функция из $C[\alpha, \beta]$.

Пример 23.4. Пусть V – линейное пространство над полем P, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, ..., $\mathbf{v}_n$ – базис пространства V, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$.

Тогда отображение

$$f\colon V \to P,\ f(\mathbf{x}) = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n,$$

где $x_1, \ldots, x_n$ – координаты вектора $\mathbf{x}$, является линейной функцией.

Читателю рекомендуется доказать самостоятельно, что в каждом из приведенных примеров мы действительно имеем дело с линейной функцией.

Пример 23.4 является самым общим. Действительно, если f – произвольная линейная функция на n-мерном пространстве V, базис которого

$$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \tag{1}$$

и

$$f(\mathbf{v}_k) = \alpha_k,\ k = 1, 2, \ldots, n,$$

то для любого вектора $\mathbf{x}$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ имеем

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + x_n f(\mathbf{v}_n) = \\ = \alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_n x_n.$$

Как было отмечено в § 19.2, множество всех линейных функций на n-мерном линейном пространстве над полем P само является линейным пространством над этим полем. Это пространство называется *сопряженным* пространству V и обозначается V^*.

В § 19.4 доказано, что пространство V^* изоморфно пространству $P_{1,n}$ матриц. Следовательно, $\dim V^* = \dim V = n$.

Пусть (1) – базис пространства V, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ в этом базисе. Рассмотрим n линейных функций

$$f_1, f_2, \ldots, f_n, \qquad (2)$$

определяемых равенствами

$$f_j(\mathbf{x}) = x_j,\ j = 1, 2, \ldots, n.$$

***Теорема 23.1**. Система (2) – базис пространства V^*. Для произвольной линейной функции f ее i-я координата в базисе (2) равна $f(\mathbf{v}_i)$.*

➤ Пусть $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_n f_n = 0$ – нулевая функция, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in P$. Тогда для $i = 1, 2, \ldots, n$ имеем:

$$(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n)(\mathbf{v}_i) = \alpha_1 f_1(\mathbf{v}_i) + \ldots + \alpha_n f_n(\mathbf{v}_i) = 0.$$

Но

$$f_j(\mathbf{v}_i) = \begin{cases} 1, & \text{если } j = i, \\ 0, & \text{если } j \neq i, \end{cases}$$

поэтому $(\alpha_1 f_1 + \ldots + \alpha_n f_n)(\mathbf{v}_i) = \alpha_i$, $\alpha_i = 0$. Доказано, что система функций (2) линейно независима. Так как число этих функций равно размерности пространства V^*, то они составляют базис.

Далее, для любой линейной функции f и вектора $\mathbf{x}$, имеющего в базисе (1) координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$,

$$f(\mathbf{x}) = f(x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + x_n f(\mathbf{v}_n) =$$
$$= f(\mathbf{v}_1) f_1(\mathbf{x}) + \ldots + f(\mathbf{v}_n) f_n(\mathbf{x}) = (f(\mathbf{v}_1) f_1 + \ldots + f(\mathbf{v}_n) f_n)(\mathbf{x}),$$

т. е. $f = f(\mathbf{v}_1) f_1 + \ldots + f(\mathbf{v}_n) f_n$. ◄

Базис (2) называется *дуальным относительно базиса (1)*.

23.2. Билинейные функции

Пусть V – линейное пространство над полем P, характеристика которого отлична от 2. Будем рассматривать числовые функции двух переменных, определенные в пространстве V, т. е. отображения вида $V^2 \to P$.

Определение 23.2. *Функция f двух переменных называется:*

1) *линейной относительно первой переменной, если для любых векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}$ *и чисел* α_1, α_2 *из основного поля*

$$f(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}) = \alpha_1 f(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}) + \alpha_2 f(\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}); \qquad (1)$$

2) *линейной относительно второй переменной, если для любых векторов* $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$ *и чисел* β_1, β_2 *из основного поля*

$$f(\mathbf{a},\ \beta_1\mathbf{b}_1 + \beta_2\mathbf{b}_2) = \beta_1 f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}_1) + \beta_2 f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}_2); \qquad (2)$$

3) *билинейной, если она линейна относительно каждой переменной в отдельности.*

Очевидно, что совокупность условий (1) и (2) равносильна следующему условию:

$$f(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m,\ \beta_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{b}_n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_i\beta_j f(\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_j) \qquad (3)$$

для любых векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_j$ и чисел α_i, β_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$, из основного поля.

Если основное поле P является полем комплексных чисел, то наряду с билинейными функциями рассматриваются еще эрмитовы билинейные функции.

Определение 23.3. *Функция f двух переменных называется:*

1) *косолинейной относительно первой переменной, если для любых векторов* $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{b}$ *и комплексных чисел* α_1, α_2

$$f(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}) = \overline{\alpha}_1 f(\mathbf{a}_1,\ \mathbf{b}) + \overline{\alpha}_2 f(\mathbf{a}_2,\ \mathbf{b}), \qquad (4)$$

где черта означает замену комплексного числа сопряженным;

2) *эрмитовой билинейной, если она косолинейна относительно первой переменной и линейна относительно второй.*

Совокупность условий (2) и (4) равносильна условию

$$f(\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m,\ \beta_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{b}_n) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\overline{\alpha}_i\beta_j f(\mathbf{a}_i,\ \mathbf{b}_j) \qquad (5)$$

для любых векторов $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_j$ и чисел α_i, β_j, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Очевидно, что *для любой билинейной (эрмитовой билинейной) функции* f *и каждого вектора* $\mathbf{a}$

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{0}) = f(\mathbf{0},\ \mathbf{a}) = 0.$$

➤ В самом деле, $f(\mathbf{a},\ \mathbf{0}) = f(\mathbf{a},\ 0\mathbf{a}) = 0f(\mathbf{a},\ \mathbf{a}) = 0$. ◄

Далее будем считать пространство V конечномерным. Пусть в базисе

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n, \tag{6}$$

пространства V векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ записываются в виде:

$$\mathbf{a} = x_1\mathbf{u}_1 + x_2\mathbf{u}_2 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n,\ \mathbf{b} = y_1\mathbf{u}_1 + y_2\mathbf{u}_2 + \ldots + y_n\mathbf{u}_n.$$

Тогда

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = f(x_1\mathbf{u}_1 + \ldots + x_n\mathbf{u}_n,\ y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_n\mathbf{u}_n).$$

Отсюда с учетом равенств (3) и (5), получаем:

для билинейной функции

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \sum_{i,\ j=1}^{n} x_i y_j f(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{u}_j); \tag{7}$$

для эрмитовой билинейной функции

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \sum_{i,\ j=1}^{n} \bar{x}_i y_j f(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{u}_j). \tag{8}$$

Положим

$$f(\mathbf{u}_i,\ \mathbf{u}_j) = a_{ij},\ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Матрица A называется *матрицей функции* f *в базисе (6). Зная матрицу* A*, можно, пользуясь формулой (7) (или (8)), вычислять значение* $f(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ *билинейной (эрмитовой билинейной) функции* f *для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$. *Очевидно, что, взяв в качестве* A *произвольную квадратную матрицу порядка* n *над основным полем, можно с помощью формулы (7) (или (8)) определить билинейную (эрмитову билинейную) функцию* f.

Из формул (7) и (8) получаем:

для билинейной функции

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = X^T A Y; \tag{9}$$

для эрмитовой билинейной функции

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} \overline{x}_i y_i = X^* A Y. \tag{10}$$

Здесь

$$X = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T,\ Y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T,\ X^* = [\overline{x}_1\ \overline{x}_2\ \dots\ \overline{x}_n].$$

Пусть C – матрица перехода от базиса (6) к новому базису

$$\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2,\ \dots,\ \mathbf{v}_n, \tag{11}$$

B и D – соответственно координатные столбцы векторов **a** и **b** в базисе (11). Тогда $X = CB$, $Y = CD$. Из формул (9) и (10) получаем:

в случае, когда f – билинейная функция,

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (CB)^T A(CD) = B^T(C^T AC)D;$$

в случае, когда f – эрмитова билинейная функция,

$$f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = (CB)^* A(CD) = B^*(C^* AC)D.$$

Итак, *при фиксированном базисе значение $f(\mathbf{a},\ \mathbf{b})$ билинейной (эрмитовой билинейной) функции f выражается билинейной (эрмитовой билинейной) формой от координат векторов* **a** *и* **b**, *имеющей ту же матрицу, что и матрица функции f в данном базисе. При этом переход к новому базису вызывает замену соответствующей билинейной формы эквивалентной ей формой, поэтому эквивалентные билинейные формы можно рассматривать как билинейные формы, соответствующие одной и той же билинейной функции в разных базисах.*

23.3. Симметрические билинейные функции

Определение 23.4. *Билинейная функция f называется симметрической, если $f(\mathbf{a},\ \mathbf{b}) = f(\mathbf{b},\ \mathbf{a})$ для любых векторов* **a** *и* **b**. *Эрмитова билинейная функция f*

называется симметрической, если $f(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \overline{f(\mathbf{b}, \mathbf{a})}$ *для любых векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

Пример 23.5. В пространстве $C[\alpha, \beta]$ функций, непрерывных на отрезке $[\alpha, \beta]$, определим функцию f двух переменных с помощью формулы

$$f(g, h) = \int_{\alpha}^{\beta} g(x)h(x)dx.$$

Так как интеграл суммы функций равен сумме интегралов этих функций, а постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, то f – билинейная функция. Очевидно, что она является симметрической.

Для конечномерных пространств очевидно, что *билинейная (эрмитова билинейная) функция является симметрической тогда и только тогда, когда соответствующая билинейная (эрмитова билинейная) форма – симметрическая.* Поэтому, *зафиксировав в пространстве некоторый базис и взяв произвольную симметрическую (эрмитову) матрицу в качестве матрицы билинейной (эрмитовой билинейной) функции в этом базисе, мы получим симметрическую функцию, причем все симметрические билинейные (эрмитовы билинейные) функции получаются таким образом.*

Так как в разных базисах значения билинейной (эрмитовой билинейной) функции выражаются эквивалентными билинейными (эрмитовыми билинейными) формами и всякая симметрическая билинейная (эрмитова билинейная) форма эквивалентна некоторой канонической форме, причем и в случае эрмитовых форм диагональные элементы матрицы формы – действительные числа, то верна

Теорема 23.2. *Для любой симметрической билинейной функции, определенной в конечномерном пространстве, существует такой базис пространства, в котором матрица этой функции диагональна. Для любой симметрической эрмитовой билинейной функции, определенной в конечномерном пространстве, существует такой базис пространства, в котором матрица этой функции диагональна и действительна.*

Очевидно, что *для любой симметрической эрмитовой билинейной функции все значения* $f(\mathbf{a}, \mathbf{a})$ *– действительные.*

23.4. Скалярное произведение

Определение 23.5. *Пусть V — действительное линейное пространство, в котором задана функция двух переменных. Образ пары векторов* **a** *и* **b** *будем обозначать* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. *Эта функция называется скалярным произведением, если она удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ для *любых векторов* **a**, **b**, **c** *и действительных чисел* α *и* β;

2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ *для любых векторов* **a** и **b**;

3) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} > 0$ *для любого ненулевого вектора* **a**.

Очевидно, что из условий 1 и 2 следует условие

4) $\mathbf{c} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})$ *для любых векторов* **a**, **b**, **c** *и действительных чисел* α *и* β, поэтому можно сказать, что *скалярным произведением в линейном пространстве V над полем действительных чисел называется билинейная симметрическая функция, удовлетворяющая условию 3.*

Легко проверить, что из условий 1 — 3 следует условие

5) $\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathbf{a}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \beta_j \mathbf{b}_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \alpha_i \beta_j (\mathbf{a}_i \mathbf{b}_j)$ *для любых векторов* $\mathbf{a}_i$, $\mathbf{b}_j$ *и чисел* α_i, β_j, $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$.

Пример 23.6. Скалярное произведение векторов, введенное в § 12.11, удовлетворяет, как уже отмечалось, условиям 1 — 3.

Пример 23.7. В пространстве n-членных действительных столбцов можно определить скалярное произведение столбцов с помощью формулы

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i,$$

где $A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n]^T$; $B = [\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_n]^T$.

Доказательство мы оставляем читателю.

Пример 23.8. В пространстве $C[\alpha, \beta]$ функций, непрерывных на отрезке $[\alpha, \beta]$, определим скалярное произведение функций f и g с помощью формулы

$$fg = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx. \qquad (1)$$

Читателю предлагается убедиться самостоятельно в том, что формула (1) определяет скалярное произведение.

О п р е д е л е н и е 23.6. *Пусть V – комплексное линейное пространство, на котором задана функция двух переменных. Образ пары векторов* **a** *и* **b** *будем обозначать* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$. *Эта функция называется скалярным произведением, если она удовлетворяет следующим трем условиям:*

1) $(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \overline{\alpha}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \overline{\beta}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ *для любых векторов* **a**, **b**, **c** *и комплексных чисел* α, β;

2) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \overline{(\mathbf{b} \cdot \mathbf{a})}$ *для любых векторов* **a** *и* **b**;

3) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ – *положительное действительное число для любого ненулевого вектора* **a**.

Очевидно, что из условий 1 и 2 следует условие

4) $\mathbf{c} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})$ *для любых векторов* **a**, **b**, **c** и *комплексных чисел* α, β, поэтому можно сказать, что *скалярным произведением в линейном пространстве V над полем комплексных чисел называется симметрическая эрмитова билинейная функция, удовлетворяющая условию 3.*

Пример 23.9. В пространстве n-членных столбцов над полем комплексных чисел скалярное произведение столбцов можно определить с помощью формулы

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i \beta_i,$$

где $A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \dots\ \alpha_n]^T$; $B = [\beta_1\ \beta_2\ \dots\ \beta_n]^T$.

О п р е д е л е н и е 23.7. *Действительное линейное пространство с определенным в нем скалярным произведением называется евклидовым линейным пространством. Комплексное линейное пространство с определенным в нем скалярным произведением называется унитарным линейным пространством.*

Очевидно, что *любое подпространство U евклидова (унитарного) пространства V также евклидово (унитарно), причем скалярное произведение в нем – сужение скалярного произведения, определенного в V, т.е. скалярное произведение векторов подпространства U определяется так же, как и скалярное произведение этих векторов в V.*

Теорема 23.3. Всякое конечномерное действительное (комплексное) линейное пространство может быть превращено в евклидово (унитарное).

➤ Пусть V – n-мерное действительное пространство, а $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ – его базис. Для произвольных векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in V$ положим

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \tag{2}$$

где $\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$; $\mathbf{b} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \mathbf{v}_i$.

Покажем, что равенство (2) определяет скалярное произведение. Если $\mathbf{c} = \sum\limits_{i=1}^{n} z_i \mathbf{v}_i$, α, β – действительные числа, то

$$(\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha x_i + \beta y_i) z_i = \alpha \sum_{i=1}^{n} x_i z_i + \beta \sum_{i=1}^{n} y_i z_i =$$
$$= \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}).$$

Далее,

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}.$$

Наконец, если $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $x_i \neq 0$ для некоторого i, и, следовательно, $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$.

Доказательство теоремы для случая комплексного пространства мы оставляем читателю. ➤

23.5. Длина вектора

Определение 23.8. *Длиной вектора* $\mathbf{a}$ *евклидова (унитарного) пространства называется число* $\sqrt{\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}}$.

Длину вектора $\mathbf{a}$ будем обозначать $|\mathbf{a}|$.

Отметим некоторые свойства длины вектора:

1) $|\mathbf{a}| \geqslant 0$, $|\mathbf{a}| = 0$ *только при* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;

2) $|\alpha\mathbf{a}| = |\alpha||\mathbf{a}|$ ($|\alpha|$ – *модуль числа* α) *для любого комплексного (в случае евклидова пространства – действительного) числа* α.

➤ В самом деле,

$$|\alpha\mathbf{a}| = \sqrt{(\alpha\mathbf{a})\cdot(\alpha\mathbf{a})} = \sqrt{\bar{\alpha}\alpha(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})} = \sqrt{\bar{\alpha}\alpha}\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}} = |\alpha||\mathbf{a}|. \text{ ➤}$$

Теорема 23.4 (неравенство Коши – Буняковского). *Для любых векторов* **a** *и* **b** *евклидова (унитарного) пространства*

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}||\mathbf{b}|, \tag{1}$$

причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы **a** *и* **b** *линейно зависимы.*

➤ При $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ неравенство (1) очевидно. Если же $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, рассмотрим квадрат длины вектора $\mathbf{a} + x\mathbf{b}$, где x – произвольное число из основного поля:

$$(\mathbf{a} + x\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a} + x\mathbf{b}) =$$
$$= \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \bar{x}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) + x(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \bar{x}x(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) \geqslant 0. \tag{2}$$

Положив в неравенстве (2) $x = -\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}/(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b})$, получим

$$\mathbf{a}\cdot\mathbf{a} - \frac{\overline{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}) - \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) + \frac{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a})}{\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}} \geqslant 0$$

или

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{a})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{b}) \geqslant (\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})(\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}), \tag{3}$$

так как $\mathbf{b}\cdot\mathbf{b} > 0$. Перепишем неравенство (3) в виде

$$|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 \geqslant |\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}|^2. \tag{4}$$

Остается извлечь из обеих частей неравенства (4) положительные квадратные корни, после чего мы получим неравенство (1).

Если векторы **a** и **b** линейно независимы, то $\mathbf{a} + x\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ при любом значении x, значит, (4) – строгое неравенство.

Если же **a** и **b** – линейно зависимые векторы, то положим для определенности $\mathbf{b} = \alpha\mathbf{a}$. Тогда

$$|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| = |\mathbf{a}\cdot(\alpha\mathbf{a})| = |\alpha||\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|. \text{ ➤}$$

Пусть **a**, **b** – ненулевые векторы евклидова пространства. В силу неравенства Коши – Буняковского

$$-1 \leqslant \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} \leqslant 1,$$

поэтому существует единственный угол φ, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi$, такой, что

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|}.$$

Этот угол называется *углом между векторами* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$.

Рассмотрим равенство

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{b}\cdot\mathbf{b}. \quad (5)$$

Отметим, что $\mathbf{b}\cdot\mathbf{a} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \overline{(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})} = 2\mathrm{Re}(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$, где $\mathrm{Re}\,\alpha$ – действительная часть числа α. Очевидно, что $\mathrm{Re}\,\alpha \leqslant |\alpha|$, поэтому из равенства (5) следует

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2$$

или в силу неравенства Коши – Буняковского

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 \leqslant |\mathbf{a}|^2 + 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| + |\mathbf{b}|^2 = (|\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|)^2,$$

т. е. $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leqslant |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$.

Итак, доказана

Теорема 23.5 (неравенство треугольника). *Длина суммы двух векторов евклидова (унитарного) пространства не превосходит суммы длин слагаемых.*

Пример 23.10. Для пространства V_3 свободных векторов теорема 23.5 означает, что длина стороны треугольника меньше суммы длин двух других его сторон.

Пример 23.11. В комплексном линейном пространстве n-членных столбцов мы определили скалярное произведение с помощью равенства

$$AB = \sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i\beta_i,$$

где $A = [\alpha_1\ \alpha_2\ \ldots\ \alpha_n]^T$; $B = [\beta_1\ \beta_2\ \ldots\ \beta_n]^T$.

В силу неравенства Коши – Буняковского

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \overline{\alpha}_i\beta_i\right|^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2\right). \quad (6)$$

Неравенство (6) верно для любых наборов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ комплексных чисел. Из неравенства треугольника следует

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i + \beta_i|^2 \leqslant \left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\beta_i|^2}\right)^2. \quad (7)$$

Пример 23.12. В пространстве $C[\alpha, \beta]$ мы определили скалярное произведение с помощью равенства

$$fg = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx.$$

Следовательно, неравенства

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} f(x)g(x)dx\right)^2 \leqslant \int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx \int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx,$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))^2 dx \leqslant \left(\sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)^2 dx} + \sqrt{\int_{\alpha}^{\beta} g(x)^2 dx}\right)^2$$

верны для любых функций f и g из $C[\alpha, \beta]$.

23.6. Ортогональные векторы

В § 12.11 приведено необходимое и достаточное условие ортогональности двух векторов — равенство нулю их скалярного произведения. Аналогично определим ортогональность векторов в произвольном евклидовом (унитарном) пространстве.

Определение 23.9. *Будем говорить, что вектор* $\mathbf{a}$ *ортогонален вектору* $\mathbf{b}$, *и писать* $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, *если* $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$.

Очевидно, что если $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, то и $\mathbf{b} \perp \mathbf{a}$. Следовательно, можно сказать, что *векторы* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$ *ортогональны*.

Укажем некоторые свойства ортогональных векторов.

1. $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}$ *тогда и только тогда, когда* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$; $\mathbf{0} \perp \mathbf{a}$ *для любого вектора* $\mathbf{a}$.

2. *Если вектор* $\mathbf{a}$ *ортогонален каждому вектору пространства, то* $\mathbf{a} = \mathbf{0}$, *ибо в этом случае* $\mathbf{a} \perp \mathbf{a}$.

3. Очевидно, что верна «теорема Пифагора»: *если* $\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$ *и* $\mathbf{b} \perp \mathbf{c}$, *то* $|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$.

➤ В самом деле, $|\mathbf{a}|^2 = (\mathbf{b} + \mathbf{c}) \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2$. ◄

4. *Если*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m \tag{1}$$

есть конечная система векторов евклидова (унитарного) пространства, а $\mathbf{b}$ *— вектор этого пространства,* *ортогональный каждому вектору* $\mathbf{a}_i$, *то* $\mathbf{b}$ *ортогонален и любой их линейной комбинации, так как*

$$\mathbf{b}\left(\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\mathbf{a}_i\right) = \sum_{i=1}^{m}\alpha_i(\mathbf{b}\mathbf{a}_i) = 0.$$

Предложение 23.1. *Ортогональное множество (множество попарно ортогональных векторов), не содержащее нулевых векторов, линейно независимо.*

➤ Пусть (1) – конечное ортогональное множество, не содержащее нулевых векторов. Если

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m = \mathbf{0}, \tag{2}$$

где α_i, $i = 1, 2, \ldots, m$, – комплексные (действительные) числа, то, умножив обе части равенства (2) слева на вектор $\mathbf{a}_i$, получим в силу ортогональности множества (1) $\alpha_i(\mathbf{a}_i\mathbf{a}_i) = 0$, $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Таким образом, система векторов (1) линейно незазисима.

Бесконечное ортогональное множество, не содержащее нулевых векторов, также линейно независимо, поскольку линейно независимо каждое его конечное подмножество. ◄

Теорема 23.6. *Пусть (1) – конечная система векторов евклидова или унитарного пространства. Тогда в этом пространстве существует ортогональная система векторов*

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_m, \tag{3}$$

такая, что для $k = 1, 2, \ldots, m$ *системы*

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k \tag{4}$$

и

$$\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \ldots, \mathbf{b}_k. \tag{5}$$

эквивалентны.

➤ Систему (3) будем строить последовательно, с помощью так называемого *процесса ортогонализации*. Положим $\mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_1$. Далее воспользуемся индукцией. Если ортогональная система (5), эквивалентная системе (4), уже построена и $k < m$, то положим

$$\mathbf{b}_{k+1} = \mathbf{a}_{k+1} + \alpha_1\mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_k\mathbf{b}_k, \tag{6}$$

где α_i, $i = 1, 2, ..., k$, – неизвестные пока числа из основного поля. Легко видеть, что системы векторов

$$\mathbf{a}_i,\ i = 1, 2, ..., k + 1, \tag{7}$$

и

$$\mathbf{b}_i,\ i = 1, 2, ..., k + 1, \tag{8}$$

эквивалентны при любом наборе коэффициентов α_i, $i = 1, 2, ..., k$. В самом деле, система (5) линейно выражается через систему (4), а вектор $\mathbf{b}_{k+1}$ – через систему (7), значит, система (8) линейно выражается через систему (7). В свою очередь система (4) линейно выражается через систему (5), а вектор $\mathbf{a}_{k+1}$, согласно равенству (6), – через систему (8). Значит, система (7) линейно выражается через систему (8), следовательно, эти системы эквивалентны.

Попытаемся теперь подобрать коэффициенты α_i в равенстве (6) таким образом, чтобы система (8) была ортогональной. Так как (5) – ортогональная система, то нужно только, чтобы равенства

$$\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_{k+1} = 0 \tag{9}$$

выполнялись при $i = 1, 2, ..., k$. С учетом формулы (6) из равенств (9) получим систему уравнений для определения коэффициентов α_i:

$$\mathbf{a}_{k+1} \cdot \mathbf{b}_i + \alpha_i(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i) = 0,\ i = 1,\ 2,\ \dots,\ k. \tag{10}$$

Если $\mathbf{b}_i \neq \mathbf{0}$, то α_i однозначно определяется из системы (10). Если же $\mathbf{b}_i = \mathbf{0}$, то система (10) имеет место при любом α_i и выбор α_i в равенстве (6) несуществен. ◄

Следствие 23.1. *Если система векторов (1) линейно независима, то и построенная с помощью процесса ортогонализации система (3) также линейно независима.*

➤ Ранги эквивалентных систем векторов равны. Поэтому в системе (3) нет нулевого вектора. Если же (1) – линейно зависимая система, то $\mathbf{0}$ входит в систему (3), в противном случае она была бы линейно независимой, согласно предложению 23.1. ◄

Следствие 23.2. *Если в системе* (1) $\mathbf{a}_i$, $i = 1, 2, ..., k$, $k \leqslant m$, *– ненулевые попарно ортогональные векторы,* *то в системе* (3), *полученной из системы* (1) *с помощью процесса ортогонализации,*

$$\mathbf{b}_i = \mathbf{a}_i. \tag{11}$$

➤ В самом деле, при $m = 1$ равенство (11) верно. Воспользуемся индукцией по m. Пусть $m > 1$ и равенство (11) верно для всех $i \leqslant m - 1$. Согласно формуле (6),

$$\mathbf{b}_m = \mathbf{a}_m + \alpha_1 \mathbf{b}_1 + \ldots + \alpha_{m-1} \mathbf{b}_{m-1}.$$

Из равенства $\mathbf{b}_m \cdot \mathbf{b}_i = 0$, $1 \leqslant i \leqslant m - 1$, следует $\alpha_i(\mathbf{b}_i \cdot \mathbf{b}_i) = 0$, $\alpha_i = 0$.

Итак, равенство (11) доказано. ➤

Очевидно, что из следствий 23.1 и 23.2 вытекает

Теорема 23.7. *Любая ортогональная система ненулевых векторов конечномерного евклидова (унитарного) пространства либо является базисом, либо может быть дополнена до ортогонального базиса.*

Определение 23.10. *Система векторов называется ортонормированной, если любые два ее вектора ортогональны друг другу и длина каждого из них равна* 1.

Из предыдущей теоремы вытекает

Следствие 23.3. *В ненулевом конечномерном евклидовом (унитарном) пространстве V существует ортонормированный базис. Любая ортонормированная система векторов пространства V либо является базисом, либо может быть дополнена до ортонормированного базиса.*

Ортогональный базис можно построить, применяя процесс ортогонализации к любому базису пространства. Умножая затем каждый вектор ортогонального базиса на число, обратное его длине, получаем ортонормированный базис.

Пусть

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n \tag{12}$$

есть базис евклидова (унитарного) пространства V, $A = [a_{ij}]$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ — матрица скалярного произведения в этом базисе. Так как $a_{ij} = \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_j$, то *базис* (12) *является ортонормированным тогда и лишь тогда, когда* $A = E$.

Если (12) – ортонормированный базис пространства V, а координатные столбцы векторов **a** *и* **b** *соответственно:*

$$X = [x_1\ x_2\ \dots\ x_n]^T,\ Y = [y_1\ y_2\ \dots\ y_n]^T,$$

то

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = X^*EY = X^*Y = \sum_{i=1}^{n} \overline{x}_i y_i$$

(в случае евклидова пространства $\overline{x}_i = x_i$). Условие ортогональности векторов **a** *и* **b** *в ортонормированном базисе принимает вид*

$$\overline{x}_1 y_1 + \overline{x}_2 y_2 + \dots + \overline{x}_n y_n = 0.$$

Таким образом, в ортонормированном базисе упрощаются многие вычисления.

23.7. Связь между ортонормированными базисами

Пусть заданы два базиса евклидова (унитарного) пространства:

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \dots,\ \mathbf{e}_n \tag{1}$$

и

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \dots,\ \mathbf{u}_n, \tag{2}$$

причем система (1) – ортонормированный базис. Пусть, далее, C – матрица перехода от базиса (1) к базису (2). Тогда, как было показано в § 23.4, в базисе (2) скалярное произведение имеет матрицу $C^*EC = C^*C$ (в случае евклидова пространства $C^* = C^T$). Для того чтобы базис (2) был ортонормирован, необходимо и достаточно, чтобы в этом базисе скалярное произведение имело единичную матрицу. Следовательно, верна

Теорема 23.8. *Пусть (1) – ортонормированный базис евклидова (унитарного) пространства, C – матрица перехода от базиса (1) к базису (2). Базис (2) ортонормирован тогда и лишь тогда, когда матрица C удовлетворяет условиям:*

$$C^TC = E \tag{3}$$

в случае евклидова пространства и

$$C^*C = E \tag{4}$$

в случае унитарного пространства.

Определение 23.11. *Действительная матрица C, удовлетворяющая равенству (3), называется ортогональной. Комплексная матрица C, удовлетворяющая условию (4), называется унитарной.* Из равенства (3) вытекает *условие ортогональности действительной матрицы: действительная матрица*

$$C = [a_{ij}],\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{5}$$

ортогональна тогда и только тогда, когда имеют место следующие равенства:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}a_{ik} = \delta_{ik},\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

где $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, & \text{если } i = k, \\ 0, & \text{если } i \neq k. \end{cases}$

Пример 23.13. Матрицы

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ортогональны.

Аналогично формулируется *условие унитарности комплексной матрицы: комплексная матрица (5) унитарна тогда и только тогда, когда верны следующие равенства:*

$$\sum_{i=1}^{n} \bar{a}_{ij}a_{ik} = \delta_{ik},\ j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n.$$

Доказательства этих утверждений мы предлагаем читателю в качестве упражнения.

Упражнения

1. Докажите, что множество ортогональных (унитарных) матриц фиксированного порядка является группой относительно умножения матриц.

2. Найдите все ортогональные матрицы четвертого порядка с первой строкой $\left(\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\right)$.

23.8. Ортогональное дополнение подпространства

О п р е д е л е н и е 23.12. *Пусть U – подпространство евклидова (унитарного) пространства V. Множество $U^{\perp}$ всех векторов пространства V, ортогональных каждому вектору из подпространства U, называется ортогональным дополнением подпространства U.*

Теорема 23.9. *Для любого подпространства U пространства V множество $U^{\perp}$ также является подпространством. Если U – нетривиальное подпространство и V – конечномерное, то*

$$V = U \oplus U^{\perp}. \tag{1}$$

➤ Множество $U^{\perp}$ – непустое, так как $\mathbf{0} \in U^{\perp}$. Далее, пусть $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in U^{\perp}$, α, β – числа из основного поля. Для любого вектора $\mathbf{u}$ из U $\mathbf{u} \cdot (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{u} \cdot \mathbf{a}) + \beta(\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}) = 0$. Следовательно, $\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b} \in U^{\perp}$. Доказано, что $U^{\perp}$ – подпространство пространства V.

Пусть теперь U – нетривиальное подпространство пространства V и V конечномерно. В подпространстве U выберем ортогональный базис $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_m$ и дополним его до ортогонального базиса $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$, ..., $\mathbf{u}_m$, $\mathbf{v}_{m+1}$, ..., $\mathbf{v}_n$ пространства V. Ясно, что $V = U \oplus L(\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Остается доказать равенство

$$L(\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n) = U^{\perp}. \tag{2}$$

Очевидно, что каждый вектор линейной оболочки (2) ортогонален любому вектору подпространства U. Пусть теперь

$$\mathbf{v} = \alpha_1\mathbf{u}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{u}_m + \beta_{m+1}\mathbf{v}_{m+1} + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n \in U^{\perp}.$$

Тогда

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{v} = 0, \ i = 1, \ 2, \ \ldots, \ m, \tag{3}$$

Из равенства (3) следует $\alpha_i(\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{u}_i) = 0$, $\alpha_i = 0$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $\mathbf{v} \in L(\mathbf{v}_{m+1}, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Равенство (2) доказано. ◄

С л е д с т в и е 23.4. $\dim(U^{\perp}) = \dim V - \dim U$.

О п р е д е л е н и е 23.13. *Каждый вектор $\mathbf{a} \in V$, согласно формуле (1), однозначно представляется в виде*

$\mathbf{a} = \mathbf{b} + \mathbf{c}$, $\mathbf{b} \in U$, $\mathbf{c} \in U^{\perp}$. *Вектор* **b** *называется ортогональной проекцией вектора* **a** *на подпространство* U.

Упражнения

1. Пусть U_1, U_2 – подпространства n-мерного евклидова (унитарного) пространства V. Докажите, что: а) $(U_1^{\perp})^{\perp} = U_1$; б) $(U_1 + U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} \cap U_2^{\perp}$; в) $(U_1 \cap U_2)^{\perp} = U_1^{\perp} + U_2^{\perp}$; г) $V^{\perp} = \{\mathbf{0}\}$; д) $\{\mathbf{0}\}^{\perp} = V$.

2. Подпространство U задано системой линейных уравнений

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 &= 0, \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad\quad - 2x_4 &= 0, \\ 3x_1 + x_2 + 9x_3 - x_4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Найдите систему линейных уравнений, задающую ортогональное дополнение $U^{\perp}$.

24. ЛИНЕЙНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЕВКЛИДОВЫХ И УНИТАРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В этой главе изучаются некоторые важные классы линейных операторов евклидова и унитарного пространств.

24.1. Изоморфизмы евклидовых пространств

В § 19.4 было введено понятие изоморфизма линейных пространств над одним и тем же полем. Пусть V и V' – два таких пространства. Биективное отображение $f\colon V \to V'$ называется изоморфизмом линейного пространства V на линейное пространство V', если f сохраняет операции сложения векторов и умножения вектора на число. Это означает, что для любых векторов **a** и **b** пространства V и любого числа α из основного поля

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = f(\mathbf{a}) + f(\mathbf{b}),\ f(\alpha\mathbf{a}) = \alpha f(\mathbf{a}).$$

Пусть теперь V и V' – евклидовы пространства, т. е. линейные пространства над полем действительных чисел $\mathbf{R}$, на каждом из которых определено соответствующее скалярное произведение.

Определение 24.1. *Изоморфизм линейных пространств $f\colon V \to V'$ называется изоморфизмом евклидова пространства V на евклидово пространство V',* *если он сохраняет скалярное произведение векторов, т. е. для любых* **a**, **b** $\in V$ *верно равенство* $f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$.

Легко проверить, что отношение изоморфизма евклидовых пространств есть отношение эквивалентности на множестве всех евклидовых пространств, а именно:

1) всякое евклидово пространство изоморфно самому себе;

2) если f: $V \to V'$ – изоморфизм евклидовых пространств, то и f^{-1}: $V' \to V$ – изоморфизм евклидовых пространств;

3) если f: $V \to V'$ и g: $V' \to V''$ – изоморфизмы евклидовых пространств, то и gf: $V \to V''$ – изоморфизм евклидовых пространств.

Понятие изоморфизма евклидовых пространств позволяет выделять «одинаково устроенные» евклидовы пространства. С точки зрения аксиоматической теории, изоморфные пространства различаются лишь обозначениями и названиями своих элементов.

Следующая принципиально важная теорема утверждает изоморфность любых двух евклидовых пространств одинаковой размерности.

Теорема 24.1. *Два евклидовых пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности совпадают.*

➤ Если V и V' – изоморфные евклидовы пространства, то они изоморфны и как линейные пространства. Поэтому, согласно следствию 19.2, их размерности совпадают.

Пусть, обратно, V и V' – евклидовы пространства одинаковой размерности n. Необходимо построить изоморфизм евклидовых пространств f: $V \to V'$. Для этого выберем в пространствах V и V' какие-либо ортонормированные базисы

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{1}$$

и

$$\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n' \tag{2}$$

Каждому вектору $\mathbf{a} \in V$ с координатами $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в базисе (1) поставим в соответствие вектор $\mathbf{a}' \in V'$ с такими же координатами в базисе (2). Полученное отображение f: $V \to V'$ является изоморфизмом линейных пространств, согласно теореме 19.1 и лемме 19.1. Итак, если

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n,$$

то

$$f(\mathbf{a}) = a_1\mathbf{e}_1' + a_2\mathbf{e}_2' + \ldots + a_n\mathbf{e}_n'.$$

Проверим, сохраняет ли f скалярное произведение векторов. Пусть

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n, \ \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \ldots + b_n\mathbf{e}_n.$$

Тогда

$$f(\mathbf{a}) = a_1\mathbf{e}_1' + a_2\mathbf{e}_2' + \ldots + a_n\mathbf{e}_n', \ f(\mathbf{b}) = b_1\mathbf{e}_1' + b_2\mathbf{e}_2' + \ldots + b_n\mathbf{e}_n',$$

и с учетом ортонормированности базисов (1) и (2) имеем:

$$f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \mathbf{ab}. \ ◄$$

Так как при изоморфизмах евклидовых пространств сохраняется скалярное произведение, то должны сохраняться длины векторов и их ортогональность. Поэтому *изоморфизм евклидовых пространств $f\colon V \to V'$ переводит любой ортонормированный базис пространства V в ортонормированный базис пространства V'.*

Обратно, справедлива

Теорема 24.2. *Пусть $f\colon V \to V'$ – линейный оператор евклидова пространства V в евклидово пространство V'. Если образы всех векторов какого-либо ортонормированного базиса пространства V составляют ортонормированный базис пространства V', то f – изоморфизм евклидовых пространств.*

► Пусть заданы ортонормированный базис пространства V

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{3}$$

и ортонормированный базис пространства V'

$$f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \ldots, f(\mathbf{e}_n). \tag{4}$$

Так как f – линейный оператор, переводящий базис V в базис V', то $f\colon V \to V'$ – изоморфизм линейных пространств. Остается проверить, что f сохраняет скалярное произведение.

Пусть $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ – произвольные векторы пространства V. Тогда если

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n, \ \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + \ldots + b_n\mathbf{e}_n,$$

то в силу линейности f

$$f(\mathbf{a}) = a_1 f(\mathbf{e}_1) + a_2 f(\mathbf{e}_2) + \ldots + a_n f(\mathbf{e}_n),$$
$$f(\mathbf{b}) = b_1 f(\mathbf{e}_1) + b_2 f(\mathbf{e}_2) + \ldots + b_n f(\mathbf{e}_n).$$

Из условия ортонормированности базисов (3) и (4) следует, что

$$f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n = \mathbf{ab}. \blacktriangleleft$$

Здесь и далее произвольное n-мерное евклидово пространство будем обозначать E^n.

Упражнения

1. Покажите, что если V и V' – евклидовы пространства и отображение $f\colon V \to V'$ сюръективно и сохраняет скалярное произведение, то оно является изоморфизмом линейных пространств, а следовательно, изоморфизмом евклидовых пространств.

2. Докажите, что если V и V' – евклидовы пространства и линейный оператор $f\colon V \to V'$ сюръективен и сохраняет длины векторов, то он является изоморфизмом евклидовых пространств. Покажите на примере, что в этом случае условием линейности f нельзя пренебречь.

24.2. Сопряженный оператор

Понятие сопряженного оператора играет важную роль при изучении линейных операторов евклидовых пространств.

Напомним некоторые сведения о линейных функциях на пространстве E^n, при этом будем рассматривать E^n как линейное пространство (см. § 23.1). Каждая такая функция α есть отображение $\alpha\colon E^n \to \mathbf{R}$, для которого $\alpha(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \alpha(\mathbf{a})+\alpha(\mathbf{b})$, $\alpha(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\alpha(\mathbf{a})$ при любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E^n$ и любом $\lambda \in \mathbf{R}$. Множество всех линейных функций на E^n превращается в линейное пространство над полем $\mathbf{R}$, если определить сумму функций с помощью формулы $(\alpha+\beta)(\mathbf{a}) = \alpha(\mathbf{a})+\beta(\mathbf{a})$, а умножение функции на число – с помощью формулы $(\lambda\alpha)(\mathbf{a}) = \lambda\alpha(\mathbf{a})$. Это линейное пространство также имеет размерность n. Оно называется *сопряженным* пространству E^n и обозначается $(E^n)^*$. Таким образом, $\dim(E^n)^* = \dim E^n$.

Наличие скалярного произведения на линейном пространстве позволяет сопоставить каждому вектору $\mathbf{a} \in E^n$ некоторую вполне определенную линейную функцию

$\alpha \in (E^n)^*$, а именно: $\alpha(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$ для любого $\mathbf{b} \in E^n$. Проверим линейность функции α, пользуясь свойствами скалярного произведения:

$$\alpha(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{a}(\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) = \mathbf{ab}_1 + \mathbf{ab}_2 = \alpha(\mathbf{b}_1) + \alpha(\mathbf{b}_2),$$
$$\alpha(\lambda\mathbf{b}) = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{ab}) = \lambda\alpha(\mathbf{b}).$$

Обратно, справедливо

Предложение 24.1. *Для всякой линейной функции $\alpha \in (E^n)^*$ существует единственный вектор $\mathbf{a} \in E^n$, такой, что $\alpha(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$ при любом $\mathbf{b} \in E^n$.*

➤ Рассмотрим отображение $\varphi: E^n \to (E^n)^*$, которое переводит любой вектор $\mathbf{a} \in E^n$ в соответствующую ему линейную функцию α, т. е. $\varphi(\mathbf{a})(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$ для любого $\mathbf{b} \in E^n$. Покажем, что φ – изоморфизм линейных пространств.

Проверим линейность φ. Для любого $\mathbf{b} \in E^n$

$$\varphi(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)(\mathbf{b}) = (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{b} = \mathbf{a}_1\mathbf{b} + \mathbf{a}_2\mathbf{b} =$$
$$= \varphi(\mathbf{a}_1)(\mathbf{b}) + \varphi(\mathbf{a}_2)(\mathbf{b}) = (\varphi(\mathbf{a}_1) + \varphi(\mathbf{a}_2))(\mathbf{b}).$$

Это означает, что $\varphi(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = \varphi(\mathbf{a}_1) + \varphi(\mathbf{a}_2)$. Далее, при любом $\mathbf{b} \in E^n$

$$\varphi(\lambda\mathbf{a})(\mathbf{b}) = (\lambda\mathbf{a})(\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{ab}) = \lambda\varphi(\mathbf{a})(\mathbf{b}) = (\lambda\varphi(\mathbf{a}))(\mathbf{b}),$$

так что $\varphi(\lambda\mathbf{a}) = \lambda\varphi(\mathbf{a})$.

Для проверки инъективности отображения φ достаточно показать, что $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Пусть $\mathbf{a} \in \operatorname{Ker}\varphi$, т. е. $\varphi(\mathbf{a})$ – нулевая линейная функция. Тогда $\varphi(\mathbf{a})(\mathbf{a}) = 0$. С другой стороны, $\varphi(\mathbf{a})(\mathbf{a}) = \mathbf{aa}$. Так как $\mathbf{aa} > 0$ при $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Это и означает, что $\operatorname{Ker}\varphi = \{\mathbf{0}\}$.

Мы видим, что $\varphi: E^n \to (E^n)^*$ – инъективный линейный оператор. Поэтому $\varphi(E^n)$ – n-мерное подпространство в $(E^n)^*$, следовательно, $\varphi(E^n) = (E^n)^*$. Это означает, что φ сюръективен и является изоморфизмом линейных пространств. Наше предложение вытекает теперь из биективности φ, так как в этом случае для линейной функции α существует единственный вектор $\mathbf{a} \in E^n$, такой, что $\varphi(\mathbf{a}) = \alpha$, и равенство $\varphi(\mathbf{a})(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$ записывается в виде $\alpha(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$. ◄

Пусть f – некоторый линейный оператор пространства E^n. Зафиксируем вектор $\mathbf{a} \in E^n$ и рассмотрим функцию

$\alpha\colon E^n \to \mathbf{R}$, такую, что $\alpha(\mathbf{b}) = \mathbf{a}f(\mathbf{b})$ для любого $\mathbf{b} \in E^n$. Ясно, что α зависит от выбора $\mathbf{a}$. Из линейности f и свойств скалярного произведения следует, что α — линейная функция (проверьте!). Поэтому, согласно предложению 24.1, существует единственный вектор $\mathbf{a}' \in E^n$, для которого $\alpha(\mathbf{b}) = \mathbf{a}'\mathbf{b}$ при любом $\mathbf{b} \in E^n$. Следовательно, каждому вектору $\mathbf{a} \in E^n$ соответствует единственный вектор $\mathbf{a}' \in E^n$, т. е. определено некоторое преобразование $f^*\colon E^n \to E^n$, такое, что $f^*(\mathbf{a}) = \mathbf{a}'$. Преобразования f и f^* связаны соотношением

$$f^*(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}f(\mathbf{b}). \tag{1}$$

Покажем, что f^* — линейный оператор. Для любого $\mathbf{b} \in E^n$

$$\begin{aligned} f^*(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)\mathbf{b} &= (\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)f(\mathbf{b}) = \mathbf{a}_1f(\mathbf{b}) + \mathbf{a}_2f(\mathbf{b}) = \\ &= f^*(\mathbf{a}_1)\mathbf{b} + f^*(\mathbf{a}_2)\mathbf{b} = (f^*(\mathbf{a}_1) + f^*(\mathbf{a}_2))\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Мы видим, что линейные функции, соответствующие векторам $f^*(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2)$ и $f^*(\mathbf{a}_1) + f^*(\mathbf{a}_2)$, совпадают. Поэтому, согласно предложению 24.1, $f^*(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2) = f^*(\mathbf{a}_1) + f^*(\mathbf{a}_2)$.

Аналогично

$$f^*(\lambda\mathbf{a})\mathbf{b} = (\lambda\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = \lambda(\mathbf{a}f(\mathbf{b})) = \lambda(f^*(\mathbf{a})\mathbf{b}) = (\lambda f^*(\mathbf{a}))\mathbf{b},$$

откуда $f^*(\lambda\mathbf{a}) = \lambda f^*(\mathbf{a})$.

Приведенные рассуждения доказывают

Предложение 24.2. *Для каждого линейного оператора $f\colon E^n \to E^n$ существует единственное преобразование $f^*\colon E^n \to E^n$, удовлетворяющее условию (1) при любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^n$. При этом f^* — тоже линейный оператор.*

Оператор f^* называется *сопряженным* оператору f.

Предложение 24.3. *Для любых линейных операторов f и g пространства E^n*

$$(fg)^* = g^*f^*, \ (f^*)^* = f.$$

➤ Для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^n$

$$\begin{aligned} (fg)^*(\mathbf{a})\mathbf{b} &= \mathbf{a}(fg)(\mathbf{b}) = \mathbf{a}f(g(\mathbf{b})) = f^*(\mathbf{a})g(\mathbf{b}) = \\ &= g^*(f^*(\mathbf{a}))\mathbf{b} = (g^*f^*)(\mathbf{a})\mathbf{b}. \end{aligned}$$

Это означает, что $(fg)^*(\mathbf{a}) = (g^*f^*)(\mathbf{a})$ для любого $\mathbf{a} \in E^n$, т. е. $(fg)^* = g^*f^*$. Аналогично

$$(f^*)^*(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}f^*(\mathbf{b}) = f^*(\mathbf{b})\mathbf{a} = \mathbf{b}f(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})\mathbf{b},$$

откуда $(f^*)^*(\mathbf{a}) = f(\mathbf{a})$ для любого $\mathbf{a} \in E^n$, т. е. $(f^*)^* = f$. ➤

Следующая теорема играет в дальнейшем важную роль.

***Теорема 24.3**. Пусть $f\colon E^n \to E^n$ – линейный оператор и W – подпространство пространства E^n. Если W инвариантно относительно f, то его ортогональное дополнение $W^\perp$ инвариантно относительно f^*.*

➤ Пусть W инвариантно относительно f. Покажем, что $f^*(W^\perp) \subset W^\perp$. Рассмотрим произвольный вектор $\mathbf{a} \in W^\perp$. При любом $\mathbf{b} \in W$ $f^*(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}f(\mathbf{b}) = 0$, так как $f(\mathbf{b}) \in W$. Это и означает, что $f^*(\mathbf{a}) \in W^\perp$. ➤

В заключение выясним, как связаны между собой матрицы операторов f и f^* в одном и том же ортонормированном базисе пространства E^n.

***Теорема 24.4**. Пусть A и B – матрицы линейных операторов f и f^* в произвольном ортонормированном базисе пространства E^n. Тогда B получается из A с помощью операции транспонирования, т. е. $B = A^T$.*

➤ Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ – ортонормированный базис E^n, в котором преобразования f и f^* имеют матрицы $A = [a_{ij}]$ и $B = [b_{ij}]$. Это означает, что $f(\mathbf{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij}\mathbf{e}_i$, $f^*(\mathbf{e}_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} b_{ij}\mathbf{e}_i$.

Заметим, что если $\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i\mathbf{e}_i$, то $a_i = \mathbf{a}\mathbf{e}_i$. Поэтому

$$b_{ij} = f^*(\mathbf{e}_j)\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_j f(\mathbf{e}_i) = f(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j = a_{ji},$$

т. е. $B = A^T$. ➤

Упражнения

1. Докажите предложение 24.3, пользуясь теоремой 24.4 и свойствами операции транспонирования.

2. Докажите, что $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$ для любого невырожденного линейного оператора f.

3. Пусть f и g – линейные операторы пространства E^n. Докажите, что $(f + g)^* = f^* + g^*$.

24.3. Ортогональные операторы

В этом параграфе изучается важнейший класс операторов евклидовых пространств – ортогональные операторы.

Понятие ортогонального оператора является частным случаем более общего понятия изоморфизма евклидовых пространств.

Определение 24.2. *Изоморфизм евклидова пространства E^n на себя называется ортогональным оператором пространства E^n.*

Ясно, что ортогональный оператор является линейным и сохраняет скалярное произведение. Верно и обратное.

Предложение 24.4. *Линейный оператор f: $E^n \to E^n$ является ортогональным оператором пространства E^n тогда и только тогда, когда f сохраняет скалярное произведение, т. е. $f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$ для любых векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^n$.*

➤ Пусть линейный оператор f: $E^n \to E^n$ сохраняет скалярное произведение. Покажем, что f имеет нулевое ядро. Действительно, если $f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$, то $\mathbf{aa} = f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}) = \mathbf{00} = 0$, откуда $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Это означает, что f – невырожденный линейный оператор. Так как он сохраняет скалярное произведение, то f – изоморфизм евклидова пространства E^n на себя, т. е. ортогональный оператор. ➤

Следующее предложение вытекает из свойств изоморфизмов евклидовых пространств (см. § 24.1).

Предложение 24.5. *Ортогональный оператор f: $E^n \to E^n$ переводит любой ортонормированный базис пространства E^n в ортонормированный базис. Обратно, если линейный оператор f: $E^n \to E^n$ переводит некоторый ортонормированный базис пространства E^n в ортонормированный базис, то f ортогонален.*

Теорема 24.5. *Линейный оператор f: $E^n \to E^n$ является ортогональным тогда и только тогда, когда $f^*f = e$,* где *e – тождественное преобразование.*

➤ Согласно предложению 24.4, ортогональность преобразования f равносильна сохранению им скалярного произведения: для любых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$

$$f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}. \qquad (1)$$

Так как $f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = f^*(f(\mathbf{a}))\mathbf{b} = (f^*f)(\mathbf{a})\mathbf{b}$, то равенство (1) равносильно условию $(f^*f)(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{ab}$ для любых $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Последнее условие в свою очередь выполняется тогда и лишь тогда, когда $(f^*f)(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{a} \in E^n$, т. е. $f^*f = e$. ◄

Из теоремы 24.5 в качестве простого следствия вытекает

Теорема 24.6. *Линейный оператор евклидова пространства является ортогональным тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе ортогональна.*

► По теореме 24.5 ортогональность линейного оператора f: $E^n \to E^n$ равносильна условию

$$f^*f = e. \tag{2}$$

Если A – матрица оператора f в ортонормированном базисе E^n, то f^* в этом же базисе имеет матрицу A^T (см. теорему 24.4). Условие (2) можно переписать в матричной форме:

$$A^TA = E. \tag{3}$$

Остается заметить, что равенство (3) означает ортогональность матрицы A. ◄

Теорема 24.7. *Множество всех ортогональных операторов евклидова пространства E^n образует группу, изоморфную группе всех ортогональных матриц порядка n.*

► Пусть f и g – произвольные ортогональные операторы пространства E^n. Тогда по определению f и g – изоморфизмы евклидова пространства E^n на себя, следовательно, gf, f^{-1} также являются изоморфизмами (см. § 24.1). Итак, gf и f^{-1} – ортогональные операторы пространства E^n. Это и означает, что мы имеем дело с группой преобразований.

Зафиксируем ортонормированный базис E^n и сопоставим с каждым ортогональным оператором E^n его матрицу в выбранном базисе. Из теоремы 24.6 следует, что тем самым установлено взаимно однозначное соответствие между группой ортогональных операторов E^n и группой ортогональных матриц порядка n. Так как произведению двух линейных операторов отвечает произведение их матриц, построенное отображение есть искомый изоморфизм. ◄

Установленная связь между ортогональными операторами и ортогональными матрицами позволяет детально исследовать произвольный ортогональный оператор n-мерного евклидова пространства. А это в свою очередь приводит к соответствующему утверждению для ортогональных матриц.

В основе дальнейших рассуждений лежит следующая

Теорема 24.8. *Если подпространство W инвариантно относительно ортогонального оператора f, то ортогональное дополнение $W^{\perp}$ также инвариантно относительно f.*

➤ По теореме 24.3 из инвариантности подпространства W относительно оператора f следует инвариантность $W^{\perp}$ относительно f^*. Так как f – ортогональный оператор, то $f^*f = e$, т. е. $f^* = f^{-1}$. Значит, $W^{\perp}$ инвариантно относительно оператора f^{-1}, а потому и относительно f. ◄

Лемма 24.1. *Для любого линейного оператора f действительного конечномерного ненулевого линейного пространства V существует инвариантное относительно f одномерное или двумерное подпространство.*

➤ Если в пространстве V существует собственный вектор $\mathbf{a}$ оператора f, то, как показано в § 19.11, линейная оболочка $L(\mathbf{a})$ – одномерное инвариантное относительно f подпространство.

Пусть оператор f не имеет собственных векторов. Тогда его характеристический многочлен не имеет действительных корней (см. § 19.11). Рассмотрим минимальный многочлен $m(x)$ оператора f. Поскольку $m(x)$ является делителем характеристического многочлена, то $m(x)$ не имеет действительных корней. Но многочлен степени выше второй приводим над $\mathbf{R}$, следовательно, $m(x)$ делится на некоторый многочлен второй степени. Итак, $m(x) = c(x)b(x)$, где $c(x) = x^2 + px + q$, $p, q \in \mathbf{R}$.

Так как $\deg b(x) < \deg m(x)$, то $b(f) \neq 0$ – ненулевой линейный оператор. Но тогда и $b(f)(V) = U$ – ненулевое подпространство. Возьмем в U произвольный ненулевой вектор $\mathbf{v}$ и положим $W = L(\mathbf{v}, f(\mathbf{v}))$. Вектор $\mathbf{v}$ не является собственным относительно f, поэтому подпространство W двумерно. Остается доказать его инвариантность относительно оператора f.

Вектор $\mathbf{v}$ можно представить в виде $\mathbf{v} = b(f)(\mathbf{a})$, где $\mathbf{a} \in V$, так что $c(f)(\mathbf{v}) = (c(f)b(f))(\mathbf{a}) = m(f)(\mathbf{a}) = 0(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$. С другой стороны, $c(f)(\mathbf{v}) = f^2(\mathbf{v}) + pf(\mathbf{v}) + q\mathbf{v}$. Итак,

$$f^2(\mathbf{v}) + pf(\mathbf{v}) + q\mathbf{v} = \mathbf{0},\ f^2(\mathbf{v}) = -pf(\mathbf{v}) - q\mathbf{v} \in W.$$

Теперь очевидно, что подпространство W инвариантно относительно f. ◀

Будем говорить, что подпространства W_1 и W_2 пространства E^n ортогональны, если всякий вектор из W_1 ортогонален любому вектору из W_2.

Из теоремы 24.8 и леммы 24.1 следует

Теорема 24.9. *Пусть f — ортогональный оператор евклидова пространства E^n. Тогда E^n — прямая сумма попарно ортогональных одномерных или двумерных подпространств, инвариантных относительно f.*

▶ Воспользуемся индукцией по n. При $n \leqslant 2$ теорема очевидна. Пусть $n > 2$ и теорема верна для евклидовых пространств, размерность которых меньше n.

Если W_1 — одномерное или двумерное инвариантное относительно f подпространство то

$$E^n = W_1 \oplus W_1^{\perp} \tag{4}$$

и подпространство $W_1^{\perp}$ также инвариантно относительно f. Ограничение f_1 оператора f на подпространство $W_1^{\perp}$ линейно и сохраняет скалярное произведение. Поэтому, согласно предложению 24.4, f_1 — ортогональный оператор пространства $W_1^{\perp}$. Так как $\dim W_1^{\perp} < \dim E^n = n$, то, по индуктивному предположению, подпространство $W_1^{\perp}$ является прямой суммой попарно ортогональных одномерных или двумерных подпространств $W_1^{\perp}$, инвариантных относительно f_1:

$$W_1^{\perp} = W_2 \oplus \ldots \oplus W_s. \tag{5}$$

Ясно, что все эти подпространства инвариантны и относительно преобразования f. Из разложений (4) и (5) следует, что

$$E^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s. \tag{6}$$

Очевидно, что (6) – искомое разложение пространства E^n на инвариантные относительно f подпространства, любые два из которых – ортогональны. ➤

Теорема 24.9 сводит описание ортогональных операторов n-мерного евклидова пространства к случаю $n \leqslant 2$.

Нам понадобятся следующие два предложения.

Предложение 24.6. *Собственные значения ортогонального оператора равны* ± 1.

➤ Пусть $\mathbf{a}$ – собственный вектор и λ – соответствующее ему собственное значение ортогонального оператора f. Тогда

$$\mathbf{aa} = f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}) = (\lambda\mathbf{a})(\lambda\mathbf{a}) = \lambda^2(\mathbf{aa}).$$

Так как $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{aa} > \mathbf{0}$, следовательно, $\lambda^2 = 1$, откуда $\lambda = \pm 1$. ➤

Предложение 24.7. *Определитель ортогональной матрицы равен* ± 1.

➤ Из равенства $A^T A = E$, где E – единичная матрица, следует, что $|A^T A| = 1$. Но $|A^T A| = |A^T|\,|A| = |A|\,|A| = |A|^2$. Значит, $|A|^2 = 1$, откуда $|A| = \pm 1$. ➤

Перейдем к описанию ортогональных операторов одномерных и двумерных евклидовых пространств.

Предложение 24.8. *Существуют только два ортогональных оператора евклидова пространства* E^1:

1) *тождественное преобразование*;

2) *преобразование, переводящее каждый вектор в противоположный.*

➤ Пусть f – произвольный ортогональный оператор пространства E^1. В силу одномерности пространства E^1 каждый его вектор является собственным вектором оператора f, соответствующим одному и тому же собственному значению λ. Согласно предложению 24.6, $\lambda = \pm 1$. Если $\lambda = 1$, то f – тождественное преобразование. Если же $\lambda = -1$, то $f(\mathbf{a}) = -\mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{a} \in E^1$. ➤

Предложение 24.9. *Любой ортогональный оператор евклидова пространства* E^2 *имеет в подходящем ортонормированном базисе либо матрицу*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \qquad (7)$$

либо матрицу вида

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \varphi \in \mathbf{R}. \tag{8}$$

➤ Выберем в пространстве E^2 какой-либо ортонормированный базис. Пусть A – матрица произвольного ортогонального оператора f: $E^2 \to E^2$ в этом базисе. Мы знаем, что матрица A ортогональна и $|A| = \pm 1$.

Рассмотрим сначала случай $|A| = -1$. Характеристический многочлен матрицы A имеет вид $x^2 + px - 1$ и различные действительные корни λ_1, λ_2. Это означает, что у оператора f есть ровно два собственных значения λ_1, λ_2. Поэтому на основании предложения 24.6 $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$.

Пусть $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ – собственные векторы оператора f, отвечающие собственным значениям λ_1 и λ_2. Можно считать, что $|\mathbf{e}_1| = |\mathbf{e}_2| = 1$. Покажем, что векторы $\mathbf{e}_1$ и $\mathbf{e}_2$ ортогональны. Действительно,

$$\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = f(\mathbf{e}_1)f(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1(-\mathbf{e}_2) = -\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2,$$

откуда $\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2 = 0$.

Итак, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ – ортонормированный базис пространства E^2 и очевидно, что f имеет в этом базисе матрицу (7).

Пусть теперь $|A| = 1$. Если

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

то

$$a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 1, \tag{9}$$

и из ортогональности матрицы A следует, что

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 = 1, \tag{10}$$

$$a_{11}a_{12} - a_{21}a_{22} = 0. \tag{11}$$

В силу равенства (10) a_{11} и a_{21} можно представить в виде $a_{11} = \cos\varphi$, $a_{21} = \sin\varphi$ для некоторого $\varphi \in \mathbf{R}$. Соотношения (9) и (11) приводят к системе линейных уравнений относительно неизвестных a_{12}, a_{22}:

$$\left.\begin{aligned} a_{22}\cos\varphi - a_{12}\sin\varphi = 1, \\ a_{22}\sin\varphi + a_{12}\cos\varphi = 0. \end{aligned}\right\}$$

Эта система имеет единственное решение: $a_{12} = -\sin\varphi$, $a_{22} = \cos\varphi$. Значит, A – матрица вида (8). ≺

Предложения 24.8 и 24.9 вместе с теоремой 24.9 позволяют описать произвольный ортогональный оператор n-мерного евклидова пространства.

Теорема 24.10. *Для любого ортогонального оператора f: $E^n \to E^n$ существует ортонормированный базис пространства E^n, в котором f имеет матрицу вида*

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & & & \\ & & & -1 & & & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & & & \\ & & & & & -1 & & & & & \\ & & & & & & \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1 & & & \\ & & & & & & \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1 & & & \\ & & & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & & \cos\varphi_k & -\sin\varphi_k \\ & & & & & & & & & \sin\varphi_k & \cos\varphi_k \end{bmatrix}. \quad (12)$$

≻ Согласно теореме 24.9, $E^n = W_1 \oplus W_2 \oplus \ldots \oplus W_s$ – прямая сумма попарно ортогональных одномерных или двумерных подпространств, инвариантных относительно f. Ограничение оператора f на каждое такое подпространство W_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, есть ортогональный оператор. Согласно предложениям 24.8 и 24.9, можно указать ортонормированный базис подпространства W_i, в котором это ограничение имеет матрицу A_i вида ± 1, если $\dim W_i = 1$, и вида (7) или (8), если $\dim W_i = 2$. Объединив такие базисы подпространств W_i, $i = 1, 2, \ldots, s$, получим ортонормированный базис пространства E^n, в котором оператор f имеет клеточно-диагональную матрицу $\operatorname{diag}[A_1, A_2, \ldots, A_s]$. Изменяя при необходимости порядок векторов этого базиса, получаем искомый ортонормированный базис пространства E^n. ≺

Теорема 24.10 позволяет получить соответствующий результат для ортогональных матриц.

Теорема 24.11. *Любая ортогональная матрица A порядка n ортогонально подобна некоторой ортогональной матрице B вида (12). Другими словами, для любой* *ортогональной матрицы A существует такая ортогональная матрица C, что $C^{-1}AC = B$ — матрица вида (12).*

➤ В n-мерном евклидовом пространстве E^n зафиксируем какой-либо ортонормированный базис и рассмотрим линейный оператор $f: E^n \to E^n$, который в этом базисе имеет матрицу A. Согласно теореме 24.6, f — ортогональный оператор. По теореме 24.10 найдется ортонормированный базис пространства E^n, в котором f имеет матрицу B вида (12). Если C — матрица перехода от первого базиса ко второму, то $C^{-1}AC = B$. Остается заметить, что матрица перехода, связывающая два ортонормированных базиса, является ортогональной. ◄

Упражнения

1. Докажите, что если два вектора **a**, **b** евклидова пространства имеют одинаковую длину, то существует ортогональный оператор f, переводящий **a** в **b**.

2. Покажите, что всякое преобразование $f: E^n \to E^n$, сохраняющее скалярное произведение, линейно и, следовательно, является ортогональным оператором пространства E^n.

3. Докажите теорему 24.6, пользуясь лишь предложением 24.5 и определением матрицы линейного оператора.

4. Докажите теорему 24.8, пользуясь лишь определением ортогонального оператора и простейшими свойствами линейных операторов.

5. Докажите, что всякая осевая симметрия плоскости определяет линейный оператор векторов этой плоскости, который в подходящем ортонормированном базисе имеет матрицу вида (7).

6. Докажите, что всякий поворот плоскости на угол φ определяет линейный оператор векторов этой плоскости, который в подходящем ортонормированном базисе имеет матрицу вида (8).

24.4. Самосопряженные операторы

Самосопряженные операторы образуют еще один важный класс операторов евклидова пространства.

Определение 24.3. *Линейный оператор f пространства E^n называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^*, т. е. если $f(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}f(\mathbf{b})$ для любой пары векторов $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E^n$.*

Теорема 24.12. *Линейный оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матри-*

ца A в ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A^T = A$, т. е. является симметрической.

➤ Пусть A – матрица линейного преобразования f в ортонормированном базисе. Тогда оператор f^* имеет в этом базисе матрицу A^T. Остается заметить, что равенства $f = f^*$ и $A = A^T$ равносильны. ◄

Теорема 24.13. *Если подпространство W инвариантно относительно самосопряженного оператора f, то ортогональное дополнение $W^\perp$ также инвариантно относительно f.*

➤ Согласно теореме 24.3, $W^\perp$ инвариантно относительно f^*, а $f^* = f$. ◄

Теорема 24.13 позволяет исследовать произвольный самосопряженный оператор с помощью метода, которым мы уже пользовались при изучении ортогональных операторов.

Теорема 24.14. *Для любого самосопряженного линейного оператора f пространства E^n существует одномерное инвариантное относительно f подпространство.*

➤ По лемме 24.1 существует инвариантное относительно f одномерное или двумерное подпространство $W \subset E^n$. Если $\dim W = 1$, теорема верна. Пусть $\dim W = 2$. Обозначим через f_1 ограничение оператора f на W. Очевидно, что f_1 – самосопряженный оператор подпространства W. Выберем произвольный ортонормированный базис подпространства W. Оператор f_1 имеет в этом базисе некоторую симметрическую матрицу

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$$

над полем $\mathbf{R}$. Ее характеристический многочлен $x^2 - (a_{11} + a_{22})x + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2)$ имеет действительные корни (проверьте!). Это означает, что существует собственный вектор оператора f_1, который будет собственным вектором и исходного оператора f.

Одномерное подпространство, натянутое на этот вектор, является искомым инвариантным относительно f подпространством. ◄

Следующая теорема вытекает из теорем 24.13 и 24.14. Ее доказательство аналогично доказательству теоремы 24.9

для ортогональных преобразований, и поэтому мы предлагаем его читателю в качестве упражнения.

Теорема 24.15. *Пусть f — самосопряженный линейный оператор евклидова пространства E^n. Тогда E^n есть прямая сумма попарно ортогональных одномерных подпространств, инвариантных относительно f.*

Так как каждый ненулевой вектор инвариантного относительно линейного оператора f одномерного подпространства является собственным вектором этого оператора, то справедлива

Теорема 24.16. *Для любого самосопряженного линейного оператора f пространства E^n существует ортонормированный базис пространства E^n, состоящий из собственных векторов оператора f. Очевидно, что в этом базисе оператор f имеет диагональную матрицу.*

Из теоремы 24.16 легко получается соответствующее утверждение для симметрических матриц.

Теорема 24.17. *Любая действительная симметрическая матрица ортогонально подобна некоторой диагональной матрице. Другими словами, для любой действительной симметрической матрицы A существует такая ортогональная матрица C, что $C^{-1}AC = B$ — диагональная матрица.*

Доказательство теоремы 24.17 почти дословно повторяет доказательство теоремы 24.11 для ортогональных матриц. В качестве следствия из теоремы 24.17 получаем следующее утверждение.

Теорема 24.18. *Все корни характеристического многочлена действительной симметрической матрицы действительны.*

Упражнения

1. Докажите ортогональность любых двух собственных векторов самосопряженного преобразования, относящихся к различным собственным значениям.

2. Докажите, что произведение fg самосопряженных операторов f и g является самосопряженным тогда и только тогда, когда $fg = gf$.

3. Докажите, что если f и g — самосопряженные операторы, то самосопряженным будет и оператор $fg + gf$.

4. Пусть f и g – самосопряженные операторы евклидова пространства E^n. Докажите, что перестановочность операторов f и g равносильна существованию ортонормированного базиса пространства E^n, каждый элемент которого является собственным вектором и для f, и для g.

24.5. Разложение линейного оператора в произведение ортогонального и самосопряженного операторов

Несмотря на то что ортогональные и самосопряженные операторы пространства E^n – это линейные операторы специального вида, всякий линейный оператор f: $E^n \to E^n$ можно представить в виде произведения двух подходящих операторов: ортогонального и самосопряженного.

Предположим, что искомое разложение существует:

$$f = hg, \tag{1}$$

где h – ортогональный оператор, g – самосопряженный оператор, т. е. $h^* = h^{-1}$, $g^* = g$. Тогда $f^* = (hg)^* = g^*h^* = gh^{-1}$ и $f^*f = (gh^{-1})(hg) = g^2$. Следовательно, из существования разложения (1) вытекает, что

$$g^2 = f^*f. \tag{2}$$

Рассмотрим более внимательно произведение f^*f.

Предложение 24.10. *Для произвольного линейного оператора f пространства E^n произведение f^*f – самосопряженный оператор, все собственные значения которого неотрицательны.*

➤ Так как $(f^*f)^* = f^*(f^*)^* = f^*f$, то f^*f – самосопряженный оператор. Пусть, далее, λ – собственное значение преобразования f^*f, $\mathbf{a}$ – соответствующий собственный вектор. Тогда

$$(f^*f)(\mathbf{a})\mathbf{a} = (\lambda\mathbf{a})\mathbf{a} = \lambda(\mathbf{a}\mathbf{a}).$$

С другой стороны,

$$(f^*f)(\mathbf{a})\mathbf{a} = f^*(f(\mathbf{a}))\mathbf{a} = f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}).$$

Следовательно, $\lambda(\mathbf{aa}) = f(\mathbf{a})f(\mathbf{a})$. Так как $\mathbf{aa} > 0$ и $f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}) \geqslant 0$, то $\lambda \geqslant 0$. ➤

Предложение 24.10 позволяет доказать существование самосопряженного оператора g, удовлетворяющего условию (2). В самом деле, так как оператор f^*f – самосопряженный, то существует ортонормированный базис пространства E^n, состоящий из собственных векторов оператора f^*f. В этом базисе f^*f имеет диагональную матрицу

$$A = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n],$$

где λ_i – действительные неотрицательные числа. Пусть

$$B = \mathrm{diag}[\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}].$$

Очевидно, что $B^2 = A$. Обозначим через g линейный оператор пространства E^n с матрицей B в рассматриваемом базисе. Тогда $g^2 = f^*f$, и так как B – симметрическая матрица, то оператор g – самосопряженный.

Поскольку можно указать несколько различных диагональных матриц, квадрат которых равен матрице A, оператор g не определяется однозначно условием (2).

Отметим, что если оператор f – невырожденный, то и любой оператор g, удовлетворяющий условию (2), будет невырожденным.

Вернемся к разложению (1) и предположим, что оператор f невырожден. В этом случае g тоже должен быть невырожденным оператором, так что можно говорить об обратном операторе g^{-1}. Тогда $h = fg^{-1}$, следовательно, h однозначно определяется преобразованием g.

Проверим, будет ли $h = fg^{-1}$ ортогональным преобразованием, если g – самосопряженное преобразование, удовлетворяющее условию (2):

$$h^*h = (fg^{-1})^* (fg^{-1}) = (g^{-1})^*(f^*f)g^{-1} =$$
$$= (g^*)^{-1}g^2g^{-1} = g^{-1}g^2g^{-1} = e.$$

Итак, $h = fg^{-1}$ – ортогональный оператор, откуда $f = hg$ – искомое разложение. Доказана

Теорема 24.19. *Для любого невырожденного линейного оператора f пространства E^n существуют ортогональный оператор h и самосопряженный оператор g, такие, что $f = hg$.*

Можно показать, что теорема 24.19 остается верной и для любого вырожденного линейного оператора.

Из доказанной теоремы вытекает неожиданное на первый взгляд следствие.

Предложение 24.11. *Для любого невырожденного линейного оператора f пространства E^n существует ортогональный базис пространства E^n, который переводится этим оператором в ортогональный базис.*

➤ Пусть $f = hg$, где h, g – соответственно ортогональный и самосопряженный операторы. Из невырожденности f следует невырожденность g. По теореме 24.16 существует ортонормированный базис пространства E^n

$$\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \dots,\ \mathbf{a}_n, \tag{3}$$

состоящий из собственных векторов оператора g. Так как g невырожден, он переводит базис (3) в некоторый базис

$$\mathbf{b}_1,\ \mathbf{b}_2,\ \dots,\ \mathbf{b}_n, \tag{4}$$

причем $\mathbf{b}_i = \lambda\mathbf{a}_i$. Хотя векторы $\mathbf{b}_i$ не обязательно единичной длины, они по-прежнему попарно ортогональны. Оператор h невырожден и сохраняет углы между векторами. Поэтому он переводит ортогональный базис (4) в некоторый ортогональный базис

$$\mathbf{c}_1,\ \mathbf{c}_2,\ \dots,\ \mathbf{c}_n. \tag{5}$$

Ясно, что f переводит базис (3) в базис (5) и оба эти базиса ортогональны. ◄

Теорема 24.19 приводит к соответствующему утверждению для матриц.

Теорема 24.20. *Всякая невырожденная действительная матрица A порядка n есть произведение ортогональной и симметрической матриц.*

➤ В n-мерном евклидовом пространстве E^n зафиксируем какой-либо ортонормированный базис и рассмотрим линейный оператор $f\colon E^n \to E^n$, который в этом базисе имеет матрицу A. Оператор f – невырожденный, и по теореме 24.19 $f = hg$, где h, g – соответственно ортогональный и самосопряженный операторы пространства E^n. Обозначим через B и C матрицы операторов h и g в выбранном базисе. Тогда матрица B – ортогональная, C – симметрическая. В этом же базисе произведение hg имеет матрицу BC. Так как $f = hg$, то $A = BC$. ◄

Можно показать, что теорема 24.20 остается справедливой и для любой вырожденной действительной матрицы A.

24.6. Приведение действительной квадратичной формы к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования переменных

Свойства симметрических матриц, полученные при изучении самосопряженных преобразований, находят применение в теории квадратичных форм.

В § 22.3 доказано, что всякая действительная квадратичная форма с помощью действительного невырожденного линейного преобразования переменных может быть приведена к каноническому виду. Покажем сейчас, что это преобразование можно выбрать так, чтобы его матрица была ортогональной.

Теорема 24.21. *Для всякой действительной квадратичной формы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ существует линейное преобразование переменных $X = CY$ с ортогональной матрицей C, приводящее эту форму к каноническому виду*

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2,$$

где λ_i – корни характеристического многочлена матрицы формы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

➤ Пусть A – матрица квадратичной формы $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Тогда A – действительная симметрическая матрица, и, согласно теореме 24.17, существует такая ортогональная матрица C, что $C^{-1}AC$ – диагональная матрица, на диагонали которой расположены корни характеристического многочлена матрицы A. Применив к квадратичной форме $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ линейное преобразование переменных $X = CY$, переведем ее в квадратичную форму $G(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с матрицей $B = C^TAC$ (см. § 22.2). Так как C – ортогональная матрица, то $C^T = C^{-1}$ и, следовательно, $B = C^{-1}AC$. Поэтому $G = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2$, где λ_i – корни характеристического многочлена матрицы A. ⮜

Теорему 24.21 используют при решении следующего вопроса. Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – пара действительных квадратичных форм от n переменных. Существует ли невырожденное линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, приводящее обе эти формы к каноническому виду? В общем случае ответ будет отрицательным. Однако ситуация меняется, если дополнительно потребовать, чтобы одна из двух данных квадратичных форм была положительно-определенной. Имеет место

Теорема 24.22. *Для любой пары действительных квадратичных форм от n переменных, одна из которых является положительно-определенной, существует невырожденное линейное преобразование переменных, приводящее каждую из этих форм к каноническому виду.*

➤ Пусть $F(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – положительно-определенная квадратичная форма. Тогда существует невырожденное линейное преобразование переменных $X = KY$, приводящее F к нормальному виду из n положительных квадратов:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2.$$

Это же преобразование переменных переводит квадратичную форму $G(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в некоторую форму $G'(y_1, y_2, \ldots, y_n)$.

Согласно теореме 24.21, G' можно привести к каноническому виду с помощью подходящего линейного преобразования переменных

$$Y = CZ \tag{1}$$

с ортогональной матрицей C.

Оказывается, если применить это преобразование к квадратичной форме $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$, получится квадратичная форма такого же вида от переменных $z_1, z_2, \ldots, z_n$, т. е.

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2 = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_n^2.$$

В самом деле, квадратичная форма $y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2$ имеет единичную матрицу E. После преобразования переменных (1) эта форма перейдет в новую квадратичную форму с матрицей $C^TEC = C^TC = E$, так как C – ортогональная матрица. Следовательно, линейное преобразование переменных $X = (KC)Z$ является искомым. ◄

24.7. Линейные операторы унитарных пространств

Изучение линейных операторов унитарных пространств аналогично проведенному выше исследованию линейных операторов евклидовых пространств. Некоторые утверждения получают даже более простую форму, так как переход к комплексному полю позволяет шире использовать собственные векторы линейных преобразований.

Пусть U и U' – унитарные пространства, т. е. линейные пространства над полем $\mathbf{C}$ комплексных чисел, на каждом из которых задано свое скалярное произведение (см. §23.4). Точно так же, как и в случае евклидовых пространств, определяется понятие *изоморфизма унитарного пространства U на унитарное пространство U'* и доказывается, что любые два унитарных пространства одинаковой размерности изоморфны.

Если $f\colon U \to U'$ – изоморфизм унитарных пространств, то любой ортонормированный базис пространства U переводится в ортонормированный базис пространства U'. Верно и обратное утверждение, аналогичное теореме 24.2.

Доказательства всех этих фактов дословно повторяют соответствующие доказательства для случая евклидова пространства. Исключение составляют лишь фрагменты доказательств, в которых используется формула, выражающая скалярное произведение векторов унитарного пространства в ортонормированном базисе:

$$\mathbf{ab} = \bar{x}_1 y_1 + \bar{x}_2 y_2 + \ldots + \bar{x}_n y_n,$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_n$ – координаты векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а черта означает переход к комплексно-сопряженному числу.

В дальнейшем произвольное n-мерное унитарное пространство будем обозначать U^n.

Для каждого линейного оператора f пространства U^n вводится понятие сопряженного оператора f^* (это удобно делать, имея в виду предложение 24.2).

Определение 24.4. *Линейный оператор $f^*\colon U^n \to U^n$ называется сопряженным линейному оператору $f\colon U^n \to U^n$, если для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U^n$*

$$f^*(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}f(\mathbf{b}). \qquad (1)$$

Для каждого линейного оператора f существует не более одного сопряженного ему оператора f^*. Действительно, пусть f_1^* и f_2^* – линейные операторы, сопряженные оператору f. Тогда $f_1^*(\mathbf{a})\mathbf{b} = f_2^*(\mathbf{a})\mathbf{b}$ для любых $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in U^n$, откуда $f_1^*(\mathbf{a})\mathbf{b} - f_2^*(\mathbf{a})\mathbf{b} = 0$, $(f_1^*(\mathbf{a}) - f_2^*(\mathbf{a}))\mathbf{b} = 0$. Полагая $\mathbf{b} = f_1^*(\mathbf{a}) - f_2^*(\mathbf{a})$, получаем, что $f_1^*(\mathbf{a}) - f_2^*(\mathbf{a}) = 0$, откуда $f_1^*(\mathbf{a}) = f_2^*(\mathbf{a})$ для любого $\mathbf{a} \in U^n$, т. е. $f_1^* = f_2^*$.

Докажем существование оператора f^*. Пусть $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n$ – произвольный ортонормированный базис пространства U^n. Пусть, далее, $A = [a_{ij}]$ – матрица оператора f в этом базисе, $A^* = [b_{ij}]$ – ее эрмитово-транспонированная матрица, т. е. $b_{ij} = \bar{a}_{ji}$. Обозначим через f^* линейный оператор U^n с матрицей A^* в выбранном базисе. Тогда

$$f^*(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j = (b_{1i}\mathbf{e}_1 + b_{2i}\mathbf{e}_2 + \dots + b_{ni}\mathbf{e}_n)\mathbf{e}_j = \bar{b}_{ji} = a_{ij}.$$

$$\mathbf{e}_i f(\mathbf{e}_j) = \mathbf{e}_i(a_{1j}\mathbf{e}_1 + a_{2j}\mathbf{e}_2 + \dots + a_{nj}\mathbf{e}_n) = a_{ij}.$$

Таким образом, $f^*(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j = \mathbf{e}_i f(\mathbf{e}_j)$для всех $i, j = 1, 2, \dots, n$. Теперь легко убедиться в справедливости условия (1).

Пусть $\mathbf{a} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i$, $\mathbf{b} = \sum\limits_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j$. Имеем:

$$f^*(\mathbf{a})\mathbf{b} = f^*\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i f^*(\mathbf{e}_i)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) =$$
$$= \sum_{i,\ j=1}^{n} \bar{x}_i y_j (f^*(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j);$$

$$\mathbf{a}f(\mathbf{b}) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right) f\left(\sum_{j=1}^{n} y_j\mathbf{e}_j\right) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} y_j f(\mathbf{e}_j)\right) =$$
$$= \sum_{i,\ j=1}^{n} \bar{x}_i y_j (\mathbf{e}_i f(\mathbf{e}_j)) = \sum_{i,\ j=1}^{n} \bar{x}_i y_j (f^*(\mathbf{e}_i)\mathbf{e}_j) = f^*(\mathbf{a})\mathbf{b},$$

т. е. оператор f^* является сопряженным к оператору f.

Доказана

Теорема 24.23. *Для каждого линейного оператора f пространства U^n существует единственный сопряженный к нему оператор f^*. Если A и B – матрицы* *операторов f и f^* в произвольном ортонормированном базисе пространства U^n, то $B = A^*$.*

Как и в действительном случае, $(fg)^* = g^*f^*$ для любых линейных операторов f и g. Если f – невырожденный оператор, то $(f^{-1})^* = (f^*)^{-1}$.

Важнейшее свойство, связанное с понятием сопряженного оператора, выражает

Теорема 24.24. *Пусть $f\colon U^n \to U^n$ – линейный оператор и W – подпространство пространства U^n. Если W инвариантно относительно f, то его ортогональное дополнение $W^{\perp}$ инвариантно относительно f^*.*

Доказательство этой теоремы ничем не отличается от доказательства теоремы 24.3.

Аналогом ортогональных операторов евклидова пространства служат унитарные операторы пространства U^n.

Определение 24.5. *Изоморфизм унитарного пространства U^n на себя называется унитарным оператором пространства U^n.*

Так же, как и в случае евклидовых пространств, доказывается

Предложение 24.12. *Линейный оператор $f\colon U^n \to U^n$ является унитарным оператором пространства U^n тогда и только тогда, когда f сохраняет скалярное произведение, т. е. $f(\mathbf{a})f(\mathbf{b}) = \mathbf{ab}$ для любых $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U^n$.*

Из определения унитарного оператора и свойств изоморфизмов унитарных пространств следует, что унитарный оператор переводит любой ортонормированный базис в ортонормированный. Верно и обратное: линейный оператор пространства U^n, переводящий хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный, унитарен.

Теорема 24.25. *Линейный оператор $f\colon U^n \to U^n$ является унитарным тогда и только тогда, когда*

$$f^*f = e. \tag{2}$$

Доказательство этой теоремы дословно повторяет доказательство теоремы 24.5. Из теоремы 24.25 следует

Теорема 24.26. *Линейный оператор пространства U^n является унитарным тогда и только тогда, когда его матрица в ортонормированном базисе унитарна.*

➤ Согласно теореме 24.25, унитарность линейного оператора $f\colon U^n \to U^n$ равносильна условию (2). Если A – матрица оператора f в ортонормированном базисе U^n, то в этом же базисе оператор f^* имеет матрицу A^* (см. теорему 24.23). Условие (2) можно переписать в матричной форме:

$$A^*A = E. \tag{3}$$

Остается заметить, что равенство (3) означает унитарность матрицы A. ◄

Теорема 24.27. *Множество всех унитарных операторов пространства U^n образует группу, изоморфную группе всех унитарных матриц порядка n.*

Доказательство теоремы 24.27 по существу не отличается от доказательства теоремы 24.7.

Изучение унитарных операторов основано на теореме, аналогичной теореме 24.8 для ортогональных операторов.

Теорема 24.28. *Если подпространство W инвариантно относительно унитарного оператора f, то ортогональное дополнение $W^\perp$ также инвариантно относительно f.*

Доказательство теоремы 24.28 дословно повторяет доказательство теоремы 24.8.

Поскольку в рассматриваемой ситуации основное поле совпадает с полем $\mathbf{C}$, то унитарный оператор всегда имеет собственный вектор, соответствующий некоторому комплексному собственному значению.

Предложение 24.13. *Если λ – собственное значение унитарного оператора, то $|\lambda| = 1$.*

➤ Пусть $\mathbf{a}$ – собственный вектор унитарного оператора f, соответствующий собственному значению λ. Тогда

$$\mathbf{aa} = f(\mathbf{a})f(\mathbf{a}) = (\lambda\mathbf{a})(\lambda\mathbf{a}) = (\bar{\lambda}\lambda)(\mathbf{aa}) = |\lambda|^2(\mathbf{aa}).$$

Так как $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, то $\mathbf{aa} > \mathbf{0}$, следовательно, $|\lambda|^2 = 1$, откуда $|\lambda| = 1$. ◄

Предложение 24.14. *Определитель унитарной матрицы есть комплексное число, модуль которого равен 1.*

➤ Из равенства $A^*A = E$ следует, что $|A^*A| = 1$. Пусть $|A| = z$. Тогда $|A^*| = \bar{z}$ (почему?) и $|A^*A| = |A^*||A| = \bar{z}z = |z|^2$. Значит, $|z|^2 = 1$, откуда $|z| = 1$. ◄

Теорема 24.28 и предложение 24.13 позволяют описать произвольный унитарный оператор n-мерного унитарного пространства.

***Теорема 24.29**. Для любого унитарного оператора $f: U^n \to U^n$ существует ортонормированный базис пространства U^n, в котором f имеет диагональную матрицу* $\operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, *где λ_i – комплексные числа, по модулю равные* 1.

➤ Воспользуемся индукцией по n. При $n = 1$ теорема следует из предложения 24.13. Пусть $n > 1$ и теорема верна для унитарных пространств, размерность которых меньше n. Пусть, далее, λ_1 – собственное значение оператора f и $\mathbf{a}_1$ – соответствующий собственный вектор. Согласно предложению 24.13, $|\lambda_1| = 1$. Очевидно, что единичный вектор $\mathbf{e}_1 = \frac{1}{|\mathbf{a}_1|}\mathbf{a}_1$ тоже будет собственным вектором оператора f с тем же собственным значением λ_1. Обозначим через W одномерное подпространство пространства U^n, натянутое на вектор $\mathbf{e}_1$. Ясно, что W инвариантно относительно f и, следовательно, тем же свойством обладает ортогональное дополнение $W^\perp$, которое можно рассматривать как $(n - 1)$-мерное унитарное пространство. Пусть f' – ограничение оператора f на подпространство $W^\perp$. Тогда f' – линейный оператор подпространства $W^\perp$, сохраняющий скалярное произведение, т. е. он является унитарным оператором $W^\perp$. По предположению индукции найдется ортонормированный базис $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ подпространства $W^\perp$, в котором f' имеет диагональную матрицу $\operatorname{diag}[\lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, $|\lambda_i| = 1$. Ясно, что $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ – собственные векторы, отвечающие собственным значениям $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$ оператора f'. Очевидно, что $\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ являются также собственными векторами оператора f с теми же собственными значениями. Следовательно, $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ – ортонормированный базис пространства U^n, в котором f имеет матрицу $\operatorname{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, $|\lambda_i| = 1$. ◄

Из теоремы 24.29 следует соответствующее утверждение для унитарных матриц.

***Теорема 24.30**. Всякая унитарная матрица A порядка n унитарно подобна диагональной матрице*

$B = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n]$, *где* $|\lambda_i| = 1$. *Иными словами, для всякой унитарной матрицы A существует такая унитарная матрица C, что* $C^{-1}AC = B$.

Доказательство теоремы 24.30 аналогично доказательству теоремы 24.11.

Как и в случае евклидовых пространств, вводится понятие самосопряженного оператора.

Определение 24.6. *Линейный оператор f пространства U^n называется самосопряженным, если он совпадает со своим сопряженным оператором f^*, т. е.* $f(\mathbf{a})\mathbf{b} = \mathbf{a}f(\mathbf{b})$ *для любых* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in U^n$.

Теорема 24.31. *Линейный оператор пространства U^n является самосопряженным тогда и только тогда, когда его матрица A в ортонормированном базисе удовлетворяет условию $A^* = A$, т. е. является эрмитовой.*

➤ Пусть A – матрица линейного оператора $f\colon U^n \to U^n$ в ортонормированном базисе. Тогда оператор f^* имеет в этом базисе матрицу A^*. Остается заметить, что равенства $f = f^*$ и $A = A^*$ равносильны. ◄

Без изменений переносится на случай унитарных пространств и теорема 24.13 (вместе с доказательством).

Теорема 24.32. *Если подпространство W пространства U^n инвариантно относительно самосопряженного оператора $f\colon U^n \to U^n$, то $W^\perp$ также инвариантно относительно f.*

Следующая теорема обобщает теорему 24.18 и играет далее существенную роль.

Теорема 24.33. *Все корни характеристического многочлена эрмитовой матрицы действительны.*

➤ Пусть A – эрмитова матрица порядка n, λ – корень ее характеристического многочлена. В унитарном пространстве U^n выберем ортонормированный базис и через f обозначим тот линейный оператор пространства U^n, который в данном базисе имеет матрицу A. Тогда λ – собственное значение оператора f. Пусть $\mathbf{a}$ – соответствующий собственный вектор оператора f. Так как A – эрмитова матрица, то f – самосопряженный оператор пространства U^n. Поэтому

$$f(\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{a}f(\mathbf{a}) \Rightarrow (\lambda\mathbf{a})\mathbf{a} = \mathbf{a}(\lambda\mathbf{a}) \Rightarrow \bar{\lambda}(\mathbf{aa}) = \lambda(\mathbf{aa}).$$

Учитывая, что $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, заключаем, что $\bar{\lambda} = \lambda$, т. е. λ — действительное число. ◄

Теоремы 24.32 и 24.33 позволяют получить аналог теоремы 24.16 для случая унитарных пространств.

Теорема 24.34. *Для любого самосопряженного оператора f пространства U^n существует ортонормированный базис пространства U^n, состоящий из собственных векторов оператора f. Во всяком таком базисе оператор f имеет действительную диагональную матрицу.*

Доказательство теоремы читателю предлагается провести самостоятельно.

Из теоремы 24.34 легко получить соответствующее утверждение для эрмитовых матриц.

Теорема 24.35. *Любая эрмитова матрица унитарно подобна некоторой действительной диагональной матрице.*

Следующая теорема является аналогом теоремы 24.19 с почти дословным повторением доказательства.

Теорема 24.36. *Для любого невырожденного линейного оператора f пространства U^n существует унитарный оператор h и самосопряженный оператор g, такие, что $f = hg$.*

Теорема 24.36 приводит к соответствующему утверждению о матрицах, которое доказывается аналогично теореме 24.20.

Теорема 24.37. *Любая невырожденная комплексная матрица есть произведение унитарной и эрмитовой матриц.*

Как и в случае евклидова пространства, последние две теоремы останутся справедливыми, если пренебречь требованием невырожденности.

Упражнения

1. Пусть f и g — линейные операторы пространства U^n. Докажите, что $(f + g)^* = f^* + g^*$.

2. Докажите, что если $\lambda \in \mathbf{C}$, $f\colon U^n \to U^n$ — линейный оператор, то $(\lambda f)^* = \bar{\lambda} f^*$.

3. Докажите, что если линейный оператор $f\colon U^n \to U^n$ имеет собственные значения $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, то собственными значениями сопряженного оператора f^* будут сопряженные числа $\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \ldots, \bar{\lambda}_n$.

4. Линейный оператор f унитарного пространства называется *нормальным*, если он перестановочен с сопряженным ему оператором f^*. Докажите, что невырожденный линейный оператор f является нормальным тогда и только тогда, когда $f = hg$, где h — унитарный оператор, g — самосопряженный оператор и $hg = gh$.

5. Докажите, что собственные векторы нормального оператора, принадлежащие двум различным собственным значениям, ортогональны.

6. Докажите, что для нормальности линейного оператора $f: U^n \to U^n$ необходимо и достаточно, чтобы каждый собственный вектор оператора f был собственным и для f^*.

④

Раздел

ГЕОМЕТРИЯ *n*-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

25. АФФИННОЕ ПРОСТРАНСТВО

Мы возвращаемся к изучению аналитической геометрии, но уже на более высоком уровне. Теперь мы можем использовать аппарат линейной алгебры, описанный в третьем разделе. Кроме того, объектом исследования будет не только пространство $\mathbf{E}^3$, которое рассматривалось в элементарной геометрии, но и некоторые его многомерные обобщения. В этой главе будет введено и изучено понятие n-мерного аффинного пространства.

25.1. Определение аффинного пространства

Линейное n-мерное пространство V^n над полем P является результатом обобщения множества V^3 всех векторов в пространстве $\mathbf{E}^3$. Теперь мы хотим построить обобщение самого пространства $\mathbf{E}^3$, рассматриваемого как множество точек. На первом этапе выделим только некоторые свойства пространства $\mathbf{E}^3$, а именно: каждой упорядоченной паре точек пространства $\mathbf{E}^3$ соответствует вектор, и множество всех таких векторов образует трехмерное действительное линейное пространство. Обобщая эту ситуацию, сформулируем следующее

Определение 25.1. *Пусть заданы n-мерное линейное пространство V^n над полем P и непустое множество A^n, элементы которого будем называть точками. Предположим, что каждой упорядоченной паре точек $M, N \in A^n$ поставлен в соответствие вектор пространства V^n, обозначаемый $\overrightarrow{MN}$, причем выполнены следующие аксиомы.*

1°. *Для любой точки $M \in A^n$ и любого вектора* $\mathbf{a} \in V^n$ *существует единственная точка $N \in A^n$, такая, что* $\overrightarrow{MN} = \mathbf{a}$.

2°. *Для любых трех точек $L, M, N \in A^n$ имеет место равенство*

$$\overrightarrow{LM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{LN}. \tag{1}$$

Тогда множество A^n называется n-мерным аффинным пространством, связанным с линейным пространством V^n.

Пространство $\mathbf{E}^3$ удовлетворяет определению 25.1 при $n = 3$ и $P = \mathbf{R}$. Произвольное n-мерное аффинное пространство A^n, связанное с линейным пространством V^n, и пространство $\mathbf{E}^3$ сходны лишь теми своими свойствами, которые задаются аксиомами 1°, 2° и следствиями, вытекающими из них. Рассмотрим некоторые из этих следствий.

1. *Для любой точки $M \in A^n$ вектор $\overrightarrow{MM}$ — нулевой вектор пространства V^n.*

➤ В самом деле, полагая в равенстве (1) $L = M$, получаем $\overrightarrow{MM} + \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MN}$, следовательно, $\overrightarrow{MM} = \mathbf{0}$. ➤

2. *Для любых точек $M, N \in A^n$ имеем $\overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN}$.*

➤ Это вытекает из равенства (1) при $L = N$ и предыдущего следствия. ➤

3. *Фиксируем в пространстве A^n какую-либо точку O. Тогда каждой точке $M \in A^n$ будет соответствовать вектор $\overrightarrow{OM} \in V^n$, называемый радиусом-вектором этой точки.* В силу аксиомы 1° *отображение*

$$f\colon A^n \to V^n,\ M \mapsto \overrightarrow{OM}$$

является биекцией.

Это позволяет аффинное пространство A^n, связанное с линейным пространством V^n, превратить в линейное пространство, изоморфное пространству V^n. В самом деле, назовем суммой точек $M, N \in A^n$ точку с радиусом-вектором $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON}$, а произведением точки M на число $\lambda \in P$ — точку с радиусом-вектором $\lambda\overrightarrow{OM}$. Тогда очевидно, что все аксиомы линейного пространства выполняются и f будет изоморфизмом линейных пространств.

Покажем теперь, что *для произвольного n-мерного линейного пространства V^n можно построить аффинное пространство A^n, связанное с V^n.*

Возьмем в качестве A^n множество V^n, т. е. элементы множества V^n будем называть и векторами, и точками. Двум произвольным точкам $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in A^n = V^n$ поставим в соответствие вектор $\overrightarrow{\mathbf{ab}} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$ и проверим, будут ли выполняться аксиомы 1° и 2°.

Пусть $\mathbf{a} \in A^n = V^n$ – произвольная точка и $\mathbf{b} \in V^n$ – произвольный вектор. Требуется доказать существование единственной точки $\mathbf{x} \in A^n = V^n$ такой, что $\overrightarrow{\mathbf{ax}} = \mathbf{b}$, т. е. $\mathbf{x} - \mathbf{a} = \mathbf{b}$. Очевидно, что искомой является точка $\mathbf{x} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, и только она.

Для трех произвольных точек $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c} \in A^n = V^n$ аксиома 2° выполняется, так как равенство $\overrightarrow{\mathbf{ab}} + \overrightarrow{\mathbf{bc}} = \overrightarrow{\mathbf{ac}}$ равносильно очевидному равенству $(\mathbf{b} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{b}) = \mathbf{c} - \mathbf{a}$.

В дальнейшем нас будут интересовать в основном два вида аффинных пространств A^n, а именно: пространства, связанные с действительным или комплексным линейным пространством V^n. В соответствующем случае и само пространство A^n называется *действительным* или *комплексным*. Для краткости мы часто не будем упоминать о линейном пространстве V^n, с котсрым связано аффинное пространство A^n.

Упражнения

1. Пусть P – произвольное поле. *Векторами* будем называть строки вида

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n, 0),\ a_i \in P, \tag{А}$$

а *точками* – строки вида

$$(b_1, b_2, \ldots, b_n, 1),\ b_i \in P. \tag{Б}$$

Сложение строк вида (А) и умножение такой строки на число $\lambda \in P$ определим покомпонентно (см. § 17.1). Паре точек $(b_1, b_2, \ldots, b_n, 1)$ и $(c_1, c_2, \ldots, c_n, 1)$ поставим в соответствие вектор $(c_1 - b_1, c_2 - b_2, \ldots, c_n - b_n, 0)$. Докажите, что множество всех строк вида (А) образует n-мерное линейное пространство V^n над полем P, а множество всех строк вида (Б) – n-мерное аффинное пространство A^n, связанное с пространством V^n.

2. Докажите, что приведенное ниже определение n-мерного аффинного пространства равносильно определению 25.1.

Пусть заданы n-мерное линейное пространство V^n над полем P и непустое множество A^n, элементы которого будем называть точками.

Предположим, что каждой упорядоченной паре $(M, \mathbf{a})$, где $M \in A^n$, $\mathbf{a} \in V^n$, сопоставлена точка, которая обозначается $M + \mathbf{a}$, причем выполнены следующие аксиомы.

1°. $M + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = (M + \mathbf{a}) + \mathbf{b}$, $\forall M \in A^n$, $\forall \mathbf{a}, \mathbf{b} \in V^n$.

2°. Для любых точек $M, N \in A^n$ существует единственный вектор $\mathbf{a} \in V^n$, такой, что $M + \mathbf{a} = N$.

Тогда множество A^n называется *n-мерным аффинным пространством, связанным с линейным пространством V^n.*

25.2. Координаты

Координаты в аффинном пространстве A^n вводятся точно так же, как это делалось в случаях аффинных координат на плоскости и в пространстве $\mathbf{E}^3$ (см. § 12.7, 12.8).

Определение 25.2. *Аффинной системой координат или репером в аффинном пространстве A^n называется упорядоченная система*

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n), \tag{1}$$

состоящая из некоторой точки $O \in A^n$ и базиса

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{2}$$

соответствующего линейного пространства V^n. Координатами точки $M \in A^n$ в репере (1) называются координаты

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{3}$$

ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM}$ в базисе (2), т. е. коэффициенты в разложении

$$\overrightarrow{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Согласно теореме 17.3, верна

Теорема 25.1. *Координаты точки в заданном репере определены однозначно.*

Пусть наряду с точкой M задана еще одна точка N с координатами

$$y_1, y_2, \ldots, y_n \tag{4}$$

в том же репере (1). Тогда

$$\overrightarrow{ON} = y_1\mathbf{e}_1 + y_2\mathbf{e}_2 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$$

и в силу равенства (1) из § 25.1

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} =$$
$$= (y_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + (y_2 - x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (y_n - x_n)\mathbf{e}_n.$$

Таким образом, *координаты* $X_1, X_2, \ldots, X_n$ *вектора* $\overrightarrow{MN}$ *в базисе (2) связаны с координатами (3) и (4) точек* M *и* N *в репере (1) формулами* $X_i = y_i - x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Рассмотрим наряду с репером (1) еще один репер

$$(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n). \tag{5}$$

Пусть заданы координаты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ точки O' в репере (1) и матрица $A = [a_{ij}]$ перехода от базиса (2) к базису

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n. \tag{6}$$

Пусть, далее, произвольная точка $M \in A^n$ имеет в репере (1) координаты (3) и в новом репере (5) координаты

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n. \tag{7}$$

Мы хотим выразить старые координаты (3) точки M через ее новые координаты (7). Для этого введем следующие обозначения:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix}, \quad A_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Так как координатный столбец вектора $\overrightarrow{O'M}$ в базисе (2) равен $X - A_1$, а в базисе (6) равен X', по формулам преобразования координат вектора (см. § 17.8) имеем: $X - A_1 = AX'$ или

$$X = AX' + A_1. \tag{9}$$

Запишем формулы (9) в развернутом виде

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \ldots + a_{1n}x'_n + a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x'_1 + a_{n2}x'_2 + \ldots + a_{nn}x'_n + a_n \end{array}\right\} \tag{10}$$

или в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + a_i, \; i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (11)$$

Формулы (9) – (11) называются *формулами преобразования аффинных координат*. Они выражают координаты произвольной точки в некотором репере (1) через координаты этой же точки в другом репере (5).

25.3. Плоскости

В § 14.5 было получено следующее уравнение прямой Π^1 в пространстве $\mathbf{E}^3$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{a}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{a}$ – направляющий вектор прямой; $\mathbf{r}_0$ – радиус-вектор некоторой фиксированной точки M_0 прямой; $\mathbf{r}$ – радиус-вектор произвольной точки M прямой (см. рис. 14.3). Векторы $t\mathbf{a}$ ($t \in \mathbf{R}$) образуют одномерное подпространство V^1 линейного пространства V^3 всех свободных векторов. Таким образом, прямую Π^1 можно рассматривать как множество всех точек M, таких, что $\overrightarrow{M_0M} \in V^1$.

Аналогично уравнение плоскости Π^2 в пространстве $\mathbf{E}^3$ можно записать в виде (см. § 14.6)

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2. \qquad (2)$$

Векторы $t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2$ образуют двумерное подпространство V^2 линейного пространства V^3, и плоскость Π^2 есть множество всех точек M, таких, что $\overrightarrow{M_0M} \in V^2$.

Обобщая эти два примера, получаем следующее

Определение 25.3. *Пусть M_0 – некоторая точка аффинного пространства A^n и V^k – k-мерное подпространство линейного пространства V^n, с которым связано A^n. Множество всех точек $M \in A^n$, таких, что $\overrightarrow{M_0M} \in V^k$, называется k-мерной плоскостью, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее пространство V^k. Одномерная плоскость называется также прямой, а $(n-1)$-мерная – гиперплоскостью.*

Как будет показано ниже, точка M_0, фигурирующая в определении плоскости, никакой особой роли не играет.

Предложение 25.1. В качестве начальной точки M_0 плоскости Π^k может быть выбрана любая точка этой плоскости.

➤ Пусть M_1 – некоторая фиксированная точка плоскости Π^k, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющее пространство V^k. Надо доказать, что точка M принадлежит плоскости Π^k тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{M_1M} \in V^k$. Пусть $\overrightarrow{M_1M} \in V^k$. Тогда $\overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M_1} + \overrightarrow{M_1M} \in V^k$, так как каждое слагаемое принадлежит V^k. Следовательно, $M \in \Pi^k$. Обратно, если $M \in \Pi^k$ то $\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{M_1M_0} + \overrightarrow{M_0M} = \overrightarrow{M_0M} - \overrightarrow{M_0M_1} \in V^k$. ➤

Теорема 25.2. *Всякая k-мерная плоскость в аффинном пространстве A^n является k-мерным аффинным пространством, связанным со своим направляющим пространством V^k.*

➤ Пусть A^n – аффинное пространство, связанное с линейным пространством V^n, и Π^k – k-мерная плоскость в A^n, проходящая через точку M_0 и имеющая направляющее пространство V^k. Возьмем в плоскости Π^k две произвольные точки M и N. Согласно определению 25.1, им соответствует вектор $\overrightarrow{MN} \in V^n$. Так как $M, N \in \Pi^k$, то $\overrightarrow{M_0M}, \overrightarrow{M_0N} \in V^k$ и $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M_0N} - \overrightarrow{M_0M} \in V^k$. Итак, каждой паре точек M, N плоскости Π^k поставлен в соответствие вектор $\overrightarrow{MN}$ из k-мерного линейного пространства V^k.

Пусть $M \in \Pi^k$, $\mathbf{a} \in V^k$. В силу аксиомы 1° (см. определение 25.1) для аффинного пространства A^n существует точка $N \in A^n$, такая, что $\overrightarrow{MN} = \mathbf{a}$. Из определения 25.3 следует, что $N \in \Pi^k$ т. е. аксиома 1° справедлива и для Π^k. Аксиома 2° выполняется для точек $L, M, N \in \Pi^k$ так как она справедлива для любых точек из A^n. ➤

Введем в аффинном пространстве A^n понятие, аналогичное понятию линейной зависимости в линейном пространстве V^n. Вначале докажем следующую теорему.

Теорема 25.3. *Для любого непустого подмножества $S \subset A^n$ существует плоскость Π^k, удовлетворяющая следующим условиям:*

1) $S \subset \Pi^k$;

2) *плоскость Π^k принадлежит любой плоскости, содержащей S.*

➤ Если Π^k и Π^l – две искомые плоскости, то $\Pi^k \subset \Pi^l$ и $\Pi^l \subset \Pi^k$, поэтому $\Pi^k = \Pi^l$. Итак, если искомая плоскость существует, то она единственна. Покажем теперь, что такая плоскость существует.

Возьмем в множестве S некоторую точку M_0 и рассмотрим множество векторов $U = \{\overrightarrow{M_0M} | M \in S\}$. Обобщая понятие линейной оболочки конечной системы векторов (см. § 17.9), построим подпространство $L(U)$ линейного пространства V^n, состоящее из всевозможных линейных комбинаций конечных систем векторов пространства U:

$$L(U) = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_l \mathbf{a}_l | \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_l \in U;\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_l \in P\}.$$

Покажем, что плоскость $A(S)$, проходящая через точку M_0 и имеющая направляющее пространство $L(U)$, является искомой. Очевидно, что плоскость $A(S)$ содержит все точки множества S, т. е. $S \subset A(S)$. С другой стороны, если некоторая плоскость Π содержит все точки множества S, то ее направляющее пространство включает в себя все векторы пространства U, а также любые их линейные комбинации, т. е. $\Pi \subset A(S)$. В силу единственности искомой плоскости рассмотренное построение не зависит от выбора начальной точки $M_0 \in S$. ⮜

Определение 25.4. *Плоскость $A(S)$, построенная при доказательстве теоремы 25.3, называется аффинной оболочкой множества S.*

Определение 25.5. *Точки M_0, M_1, ..., M_k аффинного пространства A^n называются аффинно независимыми, если их аффинная оболочка k-мерна.*

Замечание. Из доказательства теоремы 25.3 следует, что *точки M_0, M_1, ..., M_k аффинно независимы тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M_1}$, $\overrightarrow{M_0M_2}$, ..., $\overrightarrow{M_0M_k}$ линейно независимы.*

Теорема 25.4. *Через любые $k + 1$ аффинно независимые точки пространства A^n проходит единственная k-мерная плоскость. Во всякой k-мерной плоскости есть $k + 1$ и не существует больше $k + 1$ аффинно независи-*

мых точек. Любую систему аффинно независимых точек k-мерной плоскости можно дополнить до системы, состоящей из $k + 1$ аффинно независимых точек этой плоскости.

➤ Пусть $M_0, M_1, \ldots, M_k$ – аффинно независимые точки пространства A^n. Их аффинная оболочка $A(M_0, M_1, \ldots, M_k)$ является k-мерной плоскостью, содержащей эти точки, согласно сделанному выше замечанию. Пусть Π^k – также некоторая k-мерная плоскость с направляющим пространством V^k, и точки $M_0, M_1, \ldots, M_k$ принадлежат Π^k. Так как подпространство V^k содержит линейно независимые векторы $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}$, оно совпадает с их линейной оболочкой, т. е. с направляющим пространством плоскости $A(M_0, M_1, \ldots, M_k)$. Следовательно, $\Pi^k = A(M_0, M_1, \ldots, M_k)$, и первое утверждение теоремы доказано.

Пусть Π^k – произвольная k-мерная плоскость, проходящая через точку M_0 и имеющая направляющее пространство V^k. Возьмем какой-либо базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$ пространства V^k и рассмотрим точки $M_1, M_2, \ldots, M_k$, такие, что $\overrightarrow{M_0M_1} = \mathbf{a}_1, \overrightarrow{M_0M_2} = \mathbf{a}_2, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k} = \mathbf{a}_k$. Мы получили $k + 1$ аффинно независимых точек $M_0, M_1, \ldots, M_k$, принадлежащих плоскости Π^k. Предположим теперь, что в плоскости Π^k существует $k + 1 + l$ $(l > 0)$ аффинно независимых точек. Тогда аффинная оболочка Π^{k+l} этой системы точек есть плоскость размерности $k + l$, содержащаяся в k-мерной плоскости Π^k. Но это невозможно, так как направляющее пространство V^{k+l} плоскости Π^{k+l} не может содержаться в направляющем пространстве V^k плоскости Π^k. Полученное противоречие и доказывает второе утверждение теоремы.

Пусть теперь $M_0, M_1, \ldots, M_l$ – аффинно независимые точки, принадлежащие плоскости Π^k. Согласно теореме 17.2, система линейно независимых векторов $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_l}$ может быть дополнена векторами $\overrightarrow{M_0M_{l+1}}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}$ до базиса направляющего пространства V^k плоскости Π^k. Тогда $M_0, \ldots, M_l, M_{l+1}, \ldots, M_k$ есть система $k + 1$ аффинно независимых точек плоскости Π^k. ➤

Следствие 25.1. *Через любые две различные точки аффинного пространства A^n проходит единственная прямая.*

Зафиксируем в пространстве A^n некоторую точку O. Тогда произвольную точку M пространства A^n можно задать с помощью ее радиуса-вектора $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$.

Пусть в пространстве A^n задана плоскость Π^k, проходящая через точку M_0 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ и направляющим пространством V^k. Возьмем в линейном пространстве V^k какой-либо базис $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_k$. Тогда

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k, \tag{3}$$

где $t_1, t_2, \ldots, t_k$ принадлежит основному полю P. Когда эти числа принимают всевозможные значения из поля P, точка M с радиусом-вектором (3) описывает плоскость Π^k. Уравнение (3) называется *векторным параметрическим уравнением плоскости* Π^k, а числа $t_1, t_2, \ldots, t_k$ – *параметрами*. Заметим, что уравнения (1) и (2) являются частными случаями уравнения (3).

Если точка O принадлежит плоскости Π^k, то, взяв ее в качестве начальной точки, уравнение этой плоскости можно записать в виде

$$\mathbf{r} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k.$$

В этом случае множество всех радиусов-векторов точек плоскости Π^k совпадает с направляющим пространством V^k этой плоскости.

Упражнения

1. Дайте определение k-мерной плоскости в пространстве A^n, используя упражнение 2 из § 25.1.

2. Составьте уравнения прямой и гиперплоскости в пространстве A^n, аналогичные уравнениям (1) и (5) из § 14.6.

25.4. Плоскости и системы линейных уравнений

Пусть задана система линейных уравнений

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m, \tag{1}$$

где a_{ij}, b_i – числа из поля P. В § 18.3 систему линейных однородных уравнений с теми же коэффициентами a_{ij}

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n = 0,\ i = 1, 2, \ldots, m, \qquad (2)$$

мы назвали приведенной для системы (1). Там же была установлена связь между решениями систем (1) и (2). Дадим ей геометрическое истолкование. В аффинном пространстве A^n, связанном с линейным пространством V^n над полем P, зафиксируем некоторый репер

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n). \qquad (3)$$

Тогда произвольный вектор $\mathbf{c} \in V^n$ может быть задан своими координатами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. Будем называть вектор $\mathbf{c}$ решением системы (1) (или (2)), если его координаты образуют решение этой системы. Как показано в § 18.2, множество всех векторов, являющихся решениями системы (2), есть $(n - r)$-мерное подпространство V^{n-r} линейного пространства V^n, где r – ранг матрицы $[a_{ij}]$. Если $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_{n-r}$ – базис этого подпространства, то каждый вектор $\mathbf{r} \in V^{n-r}$ можно представить в виде

$$\mathbf{r} = t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \ldots + t_{n-r}\mathbf{a}_{n-r},\ t_i \in P. \qquad (4)$$

Если система (1) совместна и r_0 – одно из решений этой системы, то, согласно теореме 18.3, все ее решения задаются формулой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_{n-r}\mathbf{a}_{n-r},\ t_i \in P. \qquad (5)$$

Точка $M \in A^n$ называется решением системы (1) (или (2)), если ее радиус-вектор $\mathbf{r} = \overrightarrow{OM}$ является решением этой системы. Так как уравнение (5) задает $(n - r)$-мерную плоскость, направляющее пространство которой есть пространство решений системы (2), то справедлива

Теорема 25.5. *Пусть (1) – совместная система линейных уравнений, r – ранг ее матрицы. Множество точек аффинного пространства A^n, являющихся решениями этой системы, есть $(n - r)$-мерная плоскость, направляющее пространство которой совпадает с пространством решений приведенной системы (2).*

Заметим, что плоскость, заданная системой линейных уравнений, проходит через начало координат тогда и только тогда, когда эта система однородная. Верна и обратная

Теорема 25.6. *Пусть в аффинном пространстве A^n фиксирован репер (3). Тогда любая плоскость Π^k пространства A^n есть множество всех решений некоторой линейной системы.*

➤ Рассмотрим сначала случай, когда плоскость Π^k проходит через начало координат (точку O). Тогда направляющее пространство этой плоскости задается с помощью формулы $V^k = \{\overrightarrow{OM} | M \in \Pi^k\}$. Согласно теореме 18.2, существует однородная система линейных уравнений (2), векторы-решения которой образуют пространство V^k, причем можно считать, что $m = n - k$. Множество точек-решений этой системы совпадает с плоскостью Π^k.

Пусть теперь плоскость Π^k не проходит через начало координат и задается уравнением (5), где $n - r = k$. Рассмотрим плоскость Π_1^k, проходящую через начало координат и определяемую уравнением (4). Построим однородную систему вида (2), где $m = r = n - k$, задающую плоскость Π_1^k. Выберем в плоскости Π^k какую-либо точку, например M_0 с радиусом-вектором $\mathbf{r}_0$ и координатами $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, и подставим ее координаты в систему (1), где в качестве a_{ij} взяты соответствующие коэффициенты построенной выше однородной системы (2). В результате получим следующие значения для коэффициентов $b_1, b_2, \ldots, b_m$:

$$a_{i1}x_1^0 + a_{i2}x_2^0 + \ldots + a_{in}x_n^0 = b_i, \; i = 1, 2, \ldots, m. \quad (6)$$

Выбирая в системе (1) в качестве a_{ij} найденные выше коэффициенты системы (2), а в качестве $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – значения (6), получаем искомую систему. В самом деле, система (1), согласно теореме 25.5, задает k-мерную плоскость, направляющее пространство которой совпадает с множеством решений системы (2), т. е. с направляющим пространством плоскости Π^k. В силу равенств (6) плоскость, определяемая системой (1), проходит через точку M_0 и поэтому совпадает с плоскостью Π^k. ➤

Из теорем 25.5 и 25.6 следует, что *линейное уравнение*

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n = b \tag{7}$$

задает в пространстве A^n гиперплоскость, и обратно, *любая гиперплоскость в A^n может быть задана уравнением (7).* Частные случаи этого утверждения были рассмотрены в § 13.2 и § 14.1.

25.5. Взаимное расположение двух плоскостей

Рассмотрим в аффинном пространстве A^n, связанном с линейным пространством V^n, две плоскости: Π^k с направляющим пространством V^k, проходящую через точку M_0, и Π^l с направляющим пространством V^l, проходящую через точку N_0. Будем называть эти плоскости *пересекающимися,* если они имеют по крайней мере одну общую точку.

Теорема 25.7. *Плоскости Π^k и Π^l пересекаются тогда и только тогда, когда*

$$\overrightarrow{M_0N_0} \in V^k + V^l, \tag{1}$$

где $V^k + V^l$ – сумма подпространств V^k и V^l линейного пространства V^n. Если плоскости Π^k и Π^l пересекаются, то их пересечением является плоскость с направляющим пространством $V^k \cap V^l$.

➤ Зафиксируем в пространстве A^n точку O. Тогда плоскости Π^k и Π^l можно задать соответственно уравнениями:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k, \tag{2}$$
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + s_1\mathbf{b}_1 + \ldots + s_l\mathbf{b}_l. \tag{3}$$

где $\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}_1$ – радиусы-векторы точек M_0, N_0; $(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_k)$ – базис подпространства V^k; $(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_l)$ – базис подпространства V^l.

Пусть плоскости Π^k и Π^l пересекаются и M_2 – их общая точка. Тогда найдутся такие значения параметров в уравнениях (2) и (3), что

$$\overrightarrow{OM_2} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{r}_1 + s_1\mathbf{b}_1 + \ldots + s_l\mathbf{b}_l.$$

Отсюда получаем

$$\overrightarrow{M_0N_0} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0 = t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k - (s_1\mathbf{b}_1 + \ldots + s_l\mathbf{b}_l) \in V^k + V^l,$$

т. е. соотношение (1) имеет место.

Обозначив радиус-вектор точки M_2 через $\mathbf{r}_2$, перепишем уравнения плоскостей Π^k и Π^l в виде:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k, \quad (4)$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_2 + s_1\mathbf{b}_1 + \ldots + s_l\mathbf{b}_l. \quad (5)$$

Возьмем плоскость $\Pi^m \ni M_2$ с направляющим пространством $V^k \cap V^l$ и покажем, что она совпадает с плоскостью $\Pi^k \cap \Pi^l$. Если $M \in \Pi^m$, то очевидно, что $M \in \Pi^k$, $M \in \Pi^l$, т. е. $M \in \Pi^k \cap \Pi^l$. Пусть теперь $M \in \Pi^k \cap \Pi^l$. Тогда существуют такие значения параметров t_i, s_i в уравнениях (4) и (5), что

$$\mathbf{r}_2 + t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k = \mathbf{r}_2 + s_1\mathbf{b}_1 + \ldots + s_l\mathbf{b}_l,$$

Вектор

$$\mathbf{c} = t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_k\mathbf{a}_k = s_1\mathbf{b}_1 + \ldots + s_l\mathbf{b}_l$$

принадлежит подпространству $V^k \cap V^l$. Поэтому точка M, имеющая радиус-вектор $\mathbf{r}_2 + \mathbf{c}$, принадлежит плоскости Π^m. Итак, $\Pi^m = \Pi^k \cap \Pi^l$.

Обратно, пусть справедливо соотношение (1). Тогда

$$\overrightarrow{M_0N_0} = \mathbf{a} + \mathbf{b}, \quad (6)$$

где $\mathbf{a} \in V^k$, $\mathbf{b} \in V^l$. Равенство (6) можно переписать в виде $\overrightarrow{ON_0} - \overrightarrow{OM_0} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ или

$$\mathbf{r}_0 + \mathbf{a} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{b}. \quad (7)$$

Точка с радиусом-вектором (7) принадлежит плоскостям Π^k и Π^l, а следовательно, и их пересечению. Итак, из соотношения (1) следует, что плоскости Π^k и Π^l пересекаются. ◄

Согласно теореме 25.3, для любых двух плоскостей Π^k и Π^l существует их аффинная оболочка, т. е. минимальная плоскость, содержащая каждую из плоскостей Π^k и Π^l.

Теорема 25.8. *Пусть m – размерность пересечения $V^k \cap V^l$ направляющих пространств плоскостей Π^k и Π^l. Тогда размерность аффинной оболочки плоскостей Π^k и Π^l*

$$s = k + l - m, \quad (8)$$

если эти плоскости пересекаются, и

$$s = k + l - m + 1, \tag{9}$$

если они не пересекаются.

➤ Пусть плоскости Π^k и Π^l пересекаются и O – их общая точка. Если принять эту точку за начало отсчета радиусов-векторов, то множествами радиусов-векторов точек плоскостей Π^k, Π^l и $\Pi^k \cap \Pi^l$ являются соответственно V^k, V^l и $V^k \cap V^l$. Но тогда формула (8) следует из теоремы 17.8.

Пусть теперь плоскости Π^k и Π^l не пересекаются. Рассмотрим одномерное подпространство $T = \{\lambda \overrightarrow{M_0N_0} | \lambda \in P\}$ пространства V^n и подпространство $S = V^k + V^l + T$. Согласно теореме 25.7, $\overrightarrow{M_0N_0} \in V^k + V^l$, поэтому $\dim S = k + l - m + 1$. Очевидно, что плоскость Π с начальной точкой M_0 и направляющим пространством S содержит каждую из плоскостей Π^k и Π^l. С другой стороны, любая плоскость, которой принадлежат плоскости Π^k и Π^l, содержит плоскость Π. Итак, Π – аффинная оболочка плоскостей Π^k и Π^l, и, следовательно, формула (9) доказана. ◄

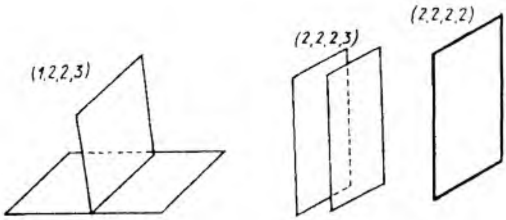
Определение 25.6. *Характеристикой пары плоскостей Π^k и Π^l аффинного пространства A^n называется упорядоченный набор чисел $(k, l, m; s)$, где s – размерность аффинной оболочки плоскостей Π^k и Π^l а m – размерность пересечения их направляющих пространств.*

Без ограничения общности можно считать, что $k \leqslant l$. Тогда

$$0 \leqslant m \leqslant k \leqslant l \leqslant s \leqslant n. \tag{10}$$

Определение 25.7. *Непересекающиеся плоскости Π^k и Π^l с характеристикой (k, l, m, s) называются:* 1) *параллельными, если $m = k$;* 2) *частично параллельными, если $0 < m < k$;* 3) *скрещивающимися, если $m = 0$.*

На рис. 25.1 изображены все возможные случаи взаимного расположения двух двумерных плоскостей в пространстве $\mathbf{E}^3$ и указаны соответствующие характеристики.



Р и с. 25.1

Упражнения

1. Перечислите все возможные случаи взаимного расположения двух двумерных плоскостей в четырехмерном аффинном пространстве A^4 и укажите соответствующие характеристики.

2. Какое минимальное число прямых в действительном пространстве A^n надо взять, чтобы их аффинная оболочка совпадала с A^n?

25.6. Аффинное отображение. Изоморфизм

Пусть A^n и A^m – аффинные пространства, связанные соответственно с линейными пространствами V^n и V^m над одним и тем же полем P.

Определение 25.8. *Отображение*

$$f\colon A^n \to A^m \tag{1}$$

называется аффинным, если существует линейный оператор

$$\varphi\colon V^n \to V^m, \tag{2}$$

такой, что

$$\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)} \tag{3}$$

для любых точек $M, N \in A^n$. Отображение φ называется однородной частью отображения f.

Теорема 25.9. *Для любого линейного оператора (2) и любых точек $M \in A^n$, $M_1 \in A^m$ существует единственное аффинное отображение (1), такое, что φ – его однородная часть и*

$$M_1 = f(M). \tag{3$'$}$$

➤ Предположим, что искомое отображение (1) существует. Возьмем произвольную точку $N \in A^n$. Тогда в силу равенства (3′) имеем

$$\overrightarrow{f(M)f(N)} = \overrightarrow{M_1 f(N)}.$$

В силу аксиомы 1° из определения 25.1 существует единственная точка N_1, такая, что $f(N) = N_1$.

Итак, если искомое отображение (1) существует, то оно единственно. Теперь докажем существование отображения, построив его следующим образом. Для произвольной точки $N \in A^n$ определим ее образ N_1 при искомом отображении f с помощью равенства $\varphi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{M_1N_1}$. Это возможно в силу аксиомы 1° из определения 25.1. Покажем теперь, что построенное отображение f удовлетворяет условию $\varphi(\overrightarrow{KL}) = \overrightarrow{f(K)f(L)}$ для любых точек $K, L \in A^n$. Имеем

$$\varphi(\overrightarrow{KL}) = \varphi(\overrightarrow{KM} + \overrightarrow{ML}) = \varphi(-\overrightarrow{MK} + \overrightarrow{ML}) = -\varphi(\overrightarrow{MK}) + \varphi(\overrightarrow{ML}) =$$
$$= -\overrightarrow{M_1K_1} + \overrightarrow{M_1L_1} = \overrightarrow{K_1M_1} + \overrightarrow{M_1L_1} = \overrightarrow{K_1L_1} = \overrightarrow{f(K)f(L)}.$$

Теорема 25.10. *Пусть $M_0, M_1, \ldots, M_n$ – система аффинно независимых точек пространства A^n, а $N_0, N_1, \ldots, N_n$ – произвольная система точек пространства A^m. Тогда существует единственное аффинное отображение (1), удовлетворяющее условиям:*

$$f(M_i) = N_i,\ i = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

➤ Если φ – однородная часть искомого аффинного отображения f, то условия (4) равносильны следующим условиям:

$$f(M_0) = N_0, \tag{5}$$
$$\varphi(\overrightarrow{M_0M_i}) = \overrightarrow{N_0N_i},\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{6}$$

Так как векторы $\overrightarrow{M_0M_1}, \ \ldots, \ \overrightarrow{M_0M_n}$ линейно независимы, то по теореме 19.1 существует единственный линейный оператор (2), удовлетворяющий условиям (6). Тогда, согласно теореме 25.9, существует единственное аффинное отображение (1), удовлетворяющее условиям (5) и (6), а следовательно, и условиям (4). ➤

Важным частным случаем аффинного отображения является изоморфизм аффинных пространств.

Определение 25.9. *Биективное аффинное отображение (1) называется изоморфизмом аффинного пространства A^n на аффинное пространство A^m. Если суще-*

ствует изоморфизм (1), то говорят, что аффинное пространство A^n изоморфно аффинному пространству A^m.

Теорема 25.11. *Аффинное отображение (1) является изоморфизмом аффинных пространств A^n и A^m тогда и только тогда, когда его однородная часть (2) есть изоморфизм линейных пространств V^n и V^m.*

➤ По определению 19.2 линейный оператор φ является изоморфизмом линейных пространств, когда этот оператор биективен. Возьмем некоторую точку $O \in A^n$. Согласно следствию 3 из § 25.1, отображения

$$g\colon A^n \to V^n,\ M \mapsto \overrightarrow{OM},\ h\colon A^m \to V^m,\ N \mapsto \overrightarrow{f(O)N}$$

являются биекциями.

Пусть φ – изоморфизм линейных пространств, т. е. биекция. Тогда отображение $f = h^{-1} \circ \varphi \circ g$ на основании теоремы 3.2 является биекцией и, следовательно, изоморфизмом аффинных пространств.

Обратно, пусть f – изоморфизм аффинных пространств, т. е. биекция. Тогда отображение $\varphi = h \circ f \circ g^{-1}$ есть биекция и, следовательно, является изоморфизмом линейных пространств. ➤

В следующей теореме сформулирован критерий изоморфизма аффинных пространств A^n и A^m, аналогичный соответствующему критерию в случае линейных пространств.

Теорема 25.12. *Аффинные пространства A^n и A^m, связанные с линейными пространствами V^n и V^m над одним и тем же полем P, изоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$.*

Доказательство теоремы вытекает из следствия 19.2 и теоремы 25.11.

25.7. Аффинные преобразования

Пусть A^n – аффинное пространство, связанное с линейным пространством V^n над полем P.

Определение 25.10. *Изоморфизм f аффинного пространства A^n на себя называется аффинным преобразованием или автоморфизмом этого пространства.*

Согласно теореме 25.11, однородная часть φ автоморфизма f аффинного пространства A^n является автоморфизмом линейного пространства V^n. Это позволяет вывести для аффинных преобразований ряд свойств, аналогичных основным свойствам автоморфизмов линейных пространств.

Теорема 25.13. *При аффинном преобразовании f пространства A^n всякий репер*

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \tag{1}$$

переходит в репер

$$(O', \mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'), \tag{2}$$

а любая точка $M \in A^n$, имеющая в репере (1) координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$, – в точку M', имеющую координатами в репере (2) те же числа.

➤ Так как однородная часть φ аффинного преобразования является автоморфизмом линейного пространства V^n, то по свойству 5 из § 19.4 базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ переходит в базис $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \ldots, \mathbf{e}_n'$ и, следовательно, репер (1) переходит в репер (2), где $O' = f(O)$. Координаты точки M в репере (1) определяются как коэффициенты в разложении

$$\overrightarrow{OM} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

Но при автоморфизме φ линейного пространства V^n линейные зависимости между векторами сохраняются (см. § 19.1). Поэтому

$$\overrightarrow{O'M'} = x_1\mathbf{e}_1' + x_2\mathbf{e}_2' + \ldots + x_n\mathbf{e}_n',$$

т. е. числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ являются координатами точки M' в репере (2). ➤

Теорема 25.14. *Для любых двух реперов (1) и (2) аффинного пространства A^n существует единственное аффинное преобразование пространства A^n, переводящее репер (1) в репер (2).*

➤ Репер (1) однозначно определяется упорядоченной системой точек $(O, M_1, M_2, \ldots, M_n)$, таких, что $\overrightarrow{OM_i} = \mathbf{e}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Аналогично репер (2) определяется упорядоченной системой точек $(O', M_1', M_2', \ldots, M_n')$, таких, что

$\overrightarrow{O'M'_i} = \mathbf{e}'_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Но тогда теорема 25.14 следует из теоремы 25.10. ◄

Теорема 25.15. *Для любых двух систем аффинно независимых точек*

$$M_0, M_1, \ldots, M_k, \tag{3}$$
$$M'_0, M'_1, \ldots, M'_k \tag{4}$$

пространства A^n существует аффинное преобразование, переводящее точки первой системы в соответствующие точки второй системы.

► Так как система векторов

$$\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}$$

линейно независима, ее можно дополнить векторами

$$\overrightarrow{M_0M_{k+1}}, \overrightarrow{M_0M_{k+2}}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n}$$

таким образом, чтобы получился репер в пространстве A^n:

$$(M_0, \overrightarrow{M_0M_1}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_k}, \overrightarrow{M_0M_{k+1}}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_n}) \tag{5}$$

(см. теорему 17.2). Аналогично построим еще один репер

$$(M'_0, \overrightarrow{M'_0M'_1}, \ldots, \overrightarrow{M'_0M'_k}, \overrightarrow{M'_0M'_{k+1}}, \ldots, \overrightarrow{M'_0M'_n}) \tag{6}$$

пространства A^n. Согласно теореме 25.14, существует аффинное преобразование f пространства A^n, переводящее репер (5) в репер (6). Это преобразование переводит точки (3) в точки (4). ◄

Найдем выражение произвольного аффинного преобразования f пространства A^n в координатах. Фиксируем в пространстве A^n некоторый репер (1). Рассмотрим репер (2), полученный из репера (1) с помощью преобразования f. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – координаты точки O' в репере (1) и $A = [a_{ij}]$ – матрица перехода от базиса

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{7}$$

пространства V^n к базису

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n \tag{8}$$

этого пространства. Возьмем произвольную точку M и ее образ $M' = f(M)$ при отображении f. Пусть заданы координаты

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \tag{9}$$

точки M в репере (1) и координаты

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n \tag{10}$$

точки M' в этом же репере. Согласно теореме 25.13, точка M' имеет в репере (2) координаты (9). Как известно из § 25.2, координаты (10) точки M' в репере (1) выражаются через координаты (9) этой же точки в репере (2) по формулам:

$$x'_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{11}$$

Использовав обозначения (8) из § 25.2, перепишем формулы (11) в матричном виде:

$$X' = AX + A_1. \tag{12}$$

Формулы (11) и (12) называются *выражением аффинного преобразования f в координатах*. Матрица $A = [a_{ij}]$ называется *матрицей аффинного преобразования f в репере (1)*. Отметим, что она совпадает с матрицей автоморфизма φ линейного пространства V^n в базисе (7), являющегося однородной частью преобразования f. Отсюда следует, что

$$\det[a_{ij}] \neq 0. \tag{13}$$

Покажем, что любые формулы вида (11) или (12) с условием (13) задают аффинное преобразование пространства A^n.

Теорема 25.16*. Пусть $A = [a_{ij}]$ – произвольная невырожденная матрица с элементами из поля P и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – произвольный набор чисел из P. Поставив в соответствие произвольной точке M с координатами (9) в репере (1) точку M' с координатами (10) в том же репере, вычисленными по формуле (11) или (12), получим аффинное преобразование f пространства A^n.*

➤ Рассмотрим наряду с точкой M еще одну точку – N. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ – координаты точки N в репере (1).

Тогда координаты точки $N' = f(N)$ в репере (1) можно задать с помощью формул

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{14}$$

Вычитая из равенств (14) соответствующие равенства (11), получаем

$$y_i' - x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(y_j - x_j),\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Итак, координаты $y_i' - x_i'$ вектора $\overrightarrow{f(M)f(N)}$ в базисе (7) выражаются через координаты $y_j - x_j$ вектора $\overrightarrow{MN}$ в том же базисе по формулам (15), причем выполняется условие (13). Как известно (см. предложение 19.3), формулы (15) являются координатным выражением автоморфизма φ линейного пространства V^n. Таким образом, указанное в теореме отображение $f\colon A^n \to A^n$ является аффинным преобразованием пространства A^n с однородной частью φ. ◀

В заключение докажем еще одну важную теорему.

Теорема 25.17. *Множество всех аффинных преобразований пространства A^n есть группа относительно композиции преобразований.*

▶ Пусть аффинное преобразование f пространства A^n переводит произвольную точку M с координатами (9) в репере (1) в точку M' с координатами (10) в том же репере, вычисляемыми по формулам (12). Пусть, далее, аффинное преобразование g пространства A^n переводит точку M' в точку M'' с координатами

$$x_1'', x_2'', \ldots, x_n'' \tag{16}$$

в репере (1). Тогда имеет место формула

$$X'' = BX' + B_1, \tag{17}$$

где B – невырожденная матрица; X'' – координатный столбец, составленный из чисел (16); B_1 – координатный столбец, составленный из некоторых чисел $b_1, b_2, \ldots, b_n \in P$. Подставляя выражение X' из формулы (12) в (17), получаем

$$X'' = (BA)X + (BA_1 + B_1). \tag{18}$$

Эти формулы выражают координаты точки M'' в репере (1) через координаты точки M в том же репере, т. е., другими словами, они являются координатным выражением отображения $g \circ f$: $A^n \to A^n$ в репере (1). Согласно теореме 25.16, это отображение является аффинным преобразованием пространства A^n. Итак, композиция двух аффинных преобразований пространства A^n есть аффинное преобразование пространства A^n. По теореме 3.1 композиция аффинных преобразований обладает свойством ассоциативности.

Тождественное отображение e: $A^n \to A^n$ задается формулой $X = EX$, где E — единичная матрица, и поэтому является аффинным преобразованием, играющим роль нейтрального элемента. Из формулы (12) получаем

$$X = A^{-1}X' - A^{-1}A_1.$$

Эта формула является координатным выражением преобразования f^{-1}: $A^n \to A^n$. Из нее видно, что f^{-1} — аффинное преобразование пространства A^n.

Упражнения

1. Докажите, что группа всех аффинных преобразований пространства A^n не является абелевой при $n > 1$.

2. Укажите какие-либо подгруппы в группе всех аффинных преобразований пространства A^n.

25.8. Геометрия аффинной группы

Пусть A^n — аффинное пространство, связанное с линейным пространством V^n над полем P.

Определение 25.11. *Фигурой в пространстве A^n называется произвольное множество точек этого пространства.*

Рассмотрим в качестве двумерного аффинного пространства плоскость, изучаемую в элементарной геометрии. Примерами фигур в плоскости будут: пустое множество, точка, прямая, треугольник, окружность, круг, пара параллельных прямых и др. В произвольном аффинном пространстве A^n фигурами являются: пустое множество, точка, прямая, k-мерная плоскость, пара плоскостей и т. д.

В этом параграфе будем обозначать группу всех аффинных преобразований пространства A^n буквой G.

Определение 25.12. *Фигура Φ_1 пространства A^n называется аффинно эквивалентной фигуре Φ_2 этого пространства, если существует аффинное преобразование $f \in G$, переводящее фигуру Φ_1 в фигуру Φ_2, т. е. $f(\Phi_1) = \Phi_2$.*

Теорема 25.18. *Аффинная эквивалентность фигур пространства A^n есть отношение эквивалентности на множестве всех фигур пространства A^n в смысле определения 3.2.*

➤ Произвольная фигура Φ пространства A^n аффинно эквивалентна самой себе, так как тождественное отображение переводит фигуру Φ в себя. Итак, аффинная эквивалентность фигур обладает свойством рефлексивности.

Пусть фигура Φ_1 аффинно эквивалентна фигуре Φ_2, т. е. существует аффинное преобразование f, такое, что $f(\Phi_1) = \Phi_2$. Очевидно, что $f^{-1}(\Phi_2) = \Phi_1$, причем f^{-1} – аффинное преобразование. Тем самым доказано свойство симметричности для аффинной эквивалентности фигур.

Предположим теперь, что фигура Φ_1 аффинно эквивалентна фигуре Φ_2, а фигура Φ_2 аффинно эквивалентна фигуре Φ_3. Это означает существование аффинных преобразований f и g, таких, что $f(\Phi_1) = \Phi_2$ и $g(\Phi_2) = \Phi_3$. Но тогда $(g \circ f)(\Phi_1) = \Phi_3$, и, так как $g \circ f$ есть аффинное преобразование, свойство транзитивности для аффинной эквивалентности фигур доказано. ➤

Множество всех фигур пространства A^n разбивается на непересекающиеся аффинные классы фигур. Любые две фигуры из одного класса аффинно эквивалентны друг другу. Любые две фигуры из разных классов не являются аффинно эквивалентными (см. § 3.2).

Ниже рассматриваются некоторые классы аффинно эквивалентных фигур.

Теорема 25.19. *Аффинное преобразование f пространства A^n переводит всякую k-мерную плоскость в k-мерную плоскость. Все плоскости данной размерности k в пространстве A^n аффинно эквивалентны друг другу и образуют один аффинный класс.*

➤ Пусть Π^k — k-мерная плоскость в пространстве A^n. Зафиксировав начало отсчета радиусов-векторов — точку O, мы можем сказать, что плоскость Π^k есть множество точек, радиусы-векторы которых задаются с помощью формулы

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t_1\mathbf{a}_1 + t_2\mathbf{a}_2 + \dots + t_k\mathbf{a}_k, \qquad (1)$$

где $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ — линейно независимые векторы. Пусть φ — однородная часть аффинного преобразования f. При преобразовании f точка O перейдет в точку $O' = f(O)$, а плоскость Π^k — в множество точек, определяемых радиусами-векторами

$$\mathbf{r}' = \varphi(\mathbf{r}) = \varphi(\mathbf{r}_0) + t_1\varphi(\mathbf{a}_1) + t_2\varphi(\mathbf{a}_2) + \dots + t_k\varphi(\mathbf{a}_k) \qquad (2)$$

с началом в точке O'. Так как φ — автоморфизм линейного пространства V^n, то векторы $\varphi(\mathbf{a}_1), \varphi(\mathbf{a}_2), \dots, \varphi(\mathbf{a}_k)$ линейно независимы и (2) есть векторное уравнение k-мерной плоскости.

Пусть теперь Π^k и Π_1^k — две произвольные k-мерные плоскости в пространстве A^n. Возьмем в плоскости Π^k какую-либо систему аффинно независимых точек

$$M_0, M_1, \dots, M_k. \qquad (3)$$

Плоскость Π^k есть аффинная оболочка множества точек (3). Аналогично и плоскость Π_1^k является аффинной оболочкой некоторой системы

$$M_0', M_1', \dots, M_k' \qquad (4)$$

аффинно независимых точек. Согласно теореме 25.15, существует аффинное преобразование f пространства A^n, переводящее точки (3) в точки (4). Это преобразование переведет плоскость Π^k в k-мерную плоскость $f(\Pi^k)$, содержащую точки (4). Отсюда следует, что плоскость $f(\Pi^k)$ — аффинная оболочка точек (4), т. е. $f(\Pi^k) = \Pi_1^k$. ➤

Теорема 25.20*. Множество всех пар плоскостей пространства A^n, имеющих одну и ту же характеристику, образует класс аффинно эквивалентных фигур.*

➤ Пусть задана пара плоскостей Π^k и Π^l с направляющими пространствами V^k и V^l соответственно и характеристикой (k, l, m, s). Рассмотрим произвольное аффинное преобразование f пространства A^n с однородной частью φ. Согласно теореме 25.19, плоскости $f(\Pi^k)$ и $f(\Pi^l)$ имеют размерности k и l соответственно. Третьим числом в характеристике плоскостей Π^k и Π^l является $m = \dim(V^k \cap V^l)$, а в характеристике плоскостей $f(\Pi^k)$ и $f(\Pi^l)$ – $m' = \dim(\varphi(V^k) \cap \varphi(V^l))$. Но так как φ – автоморфизм линейного пространства V^n, то

$$\dim(\varphi(V^k) \cap \varphi(V^l)) = \dim(V^k \cap V^l),$$

т. е. $m' = m$. Итак, характеристика пары плоскостей $f(\Pi^k)$ и $f(\Pi^l)$ имеет вид (k, l, m, s').

Предположим, что плоскости Π^k и Π^l пересекаются. Тогда будут пересекаться и плоскости $f(\Pi^k)$, $f(\Pi^l)$, и по теореме 25.8 $s = k + l - m = s'$. Следовательно, характеристики пар плоскостей (Π^k, Π^l) и $(f(\Pi^k), f(\Pi^l))$ совпадают. Если плоскости Π^k и Π^l не пересекаются, не будут пересекаться и плоскости $f(\Pi^k)$, $f(\Pi^l)$. Тогда по теореме 25.8 $s = k + l - m + 1 = s'$, т. е. снова приходим к совпадению характеристик пар плоскостей (Π^k, Π^l) и $(f(\Pi^k), f(\Pi^l))$.

Пусть теперь заданы две пары плоскостей (Π^k, Π^l) и (Π_1^k, Π_1^l), имеющие одну и ту же характеристику (k, l, m, s). Обозначим через A^s аффинную оболочку плоскостей Π^k и Π^l, а через A_1^s – аффинную оболочку плоскостей Π_1^k и Π_1^l. Предположим, что плоскости Π^k и Π^l пересекаются. Тогда, согласно теореме 25.8, будут пересекаться и плоскости Π_1^k, Π_1^l.

Положим $A^m = \Pi^k \cap \Pi^l$, $A_1^m = \Pi_1^k \cap \Pi_1^l$. Выберем систему аффинно независимых точек

$$M_0, M_1, \ldots, M_m \tag{5}$$

в плоскости A^m и систему аффинно независимых точек

$$M_0', M_1', \ldots, M_m' \tag{6}$$

в плоскости A_1^m. (Если плоскости Π^k и Π^l не пересекаются, то системы точек (5) и (6) – пустые множества.) Согласно теореме 25.4, существуют точки

$$M_{m+1}, M_{m+2}, \ldots, M_k; \; N_{m+1}, N_{m+2}, \ldots, N_l;$$

$$M'_{m+1},\ M'_{m+2},\ \ldots,\ M'_k;\ N'_{m+1},\ N'_{m+2},\ \ldots,\ N'_l,$$

такие, что

$$M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_m,\ M_{m+1},\ \ldots,\ M_k$$

есть система аффинно независимых точек плоскости Π^k,

$$M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_m,\ N_{m+1},\ \ldots,\ N_l$$

является системой аффинно независимых точек плоскости Π^l,

$$M_0,\ \ldots,\ M_m,\ M_{m+1},\ \ldots,\ M_k,\ N_{m+1},\ \ldots,\ N_l \qquad (7)$$

суть система аффинно независимых точек плоскости A^s,

$$M'_0,\ M'_1,\ \ldots,\ M'_m,\ M'_{m+1},\ \ldots,\ M'_k$$

есть система аффинно независимых точек плоскости Π_1^k,

$$M'_0,\ M'_1,\ \ldots,\ M'_m,\ N'_{m+1},\ \ldots,\ N'_l$$

является системой аффинно независимых точек плоскости Π_1^l,

$$M'_0,\ \ldots,\ M'_m,\ M'_{m+1},\ \ldots,\ M'_k,\ N'_{m+1},\ \ldots,\ N'_l \qquad (8)$$

суть система аффинно независимых точек плоскости A_1^s.

Согласно теореме 25.10, существует аффинное преобразование f пространства A^n, переводящее точки (7) в соответствующие точки (8). Очевидно, что $f(\Pi^k) = \Pi_1^k$, $f(\Pi^l) = \Pi_1^l$. ◄

Следствие 25.2. *Любое аффинное преобразование аффинного пространства A^3 переводит параллельные прямые в параллельные прямые, а параллельные плоскости в параллельные плоскости.*

Далее в этом параграфе будем предполагать, что основным полем является поле **R** или **C**.

Пусть M_1 и M_2 – две различные точки пространства A^n и Δ – прямая, содержащая эти точки. Пусть далее M – точка прямой Δ, отличная от точки M_2. Тогда, очевидно, найдется единственное число λ, такое, что

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\,\overrightarrow{MM_2}. \qquad (9)$$

Определение 25.13. *Число λ из равенства* (9) *называется простым отношением упорядоченной тройки точек* (M_1, M_2, M).

Определение 25.14. *Множество, состоящее из всех точек M прямой Δ, удовлетворяющих равенству* (9) *при* $0 \leqslant \lambda < +\infty$, *и точки* M_2, *называется отрезком* M_1M_2 *прямой* Δ. *Точки* M_1 *и* M_2 *называются концами этого отрезка, а точка* M, *соответствующая* $\lambda = 1$, *т. е. удовлетворяющая равенству*

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{MM_2}, \tag{10}$$

называется его серединой.

Подчеркнем, что каждый отрезок имеет единственную середину. Кроме того, будем считать, что две совпадающие точки $M_1 = M_2$ также определяют отрезок (нулевой) и середина этого отрезка совпадает с точкой $M_1 = M_2$.

Теорема 25.21. *Аффинное преобразование f пространства A^n сохраняет простое отношение тройки точек (M_1, M_2, M). Преобразование f переводит середину отрезка M_1M_2 в середину отрезка $f(M_1)f(M_2)$.*

➤ Пусть $f(M_1) = N_1$, $f(M_2) = N_2$, $f(M) = N$. Тогда $\overrightarrow{N_1N} = \varphi(\overrightarrow{M_1M})$, $\overrightarrow{NN_2} = \varphi(\overrightarrow{MM_2})$, где φ – однородная часть преобразования f. В силу линейности преобразования φ из равенства (9) получаем равенство

$$\overrightarrow{N_1N} = \lambda \overrightarrow{NN_2}.$$

В частности, из равенства (10) получаем равенство

$$N_1N = NN_2. \text{ ➤}$$

Выведем формулы для координат середины отрезка. Пусть в пространстве A^n выбран некоторый репер $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$. Тогда точки M_1, M_2, M будут иметь определенные координаты: $M_1(x_1', x_2', \ldots, x_n')$, $M_2(x_1'', x_2'', \ldots, x_n'')$, $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Равенство (10) примет вид

$$(x_1 - x_1')\mathbf{e}_1 + (x_2 - x_2')\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n - x_n')\mathbf{e}_n =$$
$$= (x_1'' - x_1)\mathbf{e}_1 + (x_2'' - x_2)\mathbf{e}_2 + \ldots + (x_n'' - x_n)\mathbf{e}_n.$$

В силу линейной независимости векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ имеем:

$$x_i - x_i' = x_i'' - x_i, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Отсюда получаем *формулы для координат середины отрезка:*

$$x_i = (x_i' + x_i'')/2, \; i = 1, 2, \ldots, n.$$

Используя понятие середины отрезка, можно определить центр фигуры.

Определение 25.15. *Точка $M \in A^n$ называется центром фигуры Φ, если для всякой точки $M_1 \in \Phi$ существует такая точка $M_2 \in \Phi$, что точка M является серединой отрезка M_1M_2.*

Понятие центра фигуры согласуется с тем понятием центра, которое мы ввели в § 15.1 и 15.2 для эллипса и гиперболы.

Заметим, что из определения центра фигуры вовсе не следует, что у любой фигуры есть центр. С другой стороны, фигура может иметь более чем один центр. Например, если Φ – прямая, то любая ее точка является ее центром.

Согласно теореме 25.21, *аффинное преобразование f пространства A^n переводит середину любого отрезка в середину преобразованного отрезка, а центр фигуры Φ – в центр преобразованной фигуры $f(\Phi)$.*

Упражнения

1. При каких значениях k фигура, состоящая из k точек плоскости $\mathbf{E}^2$, может иметь центр? Приведите примеры.

2. Укажите центры фигур второго порядка, перечисленных в § 15.7, 16.2–16.7, 16.9.

26. ЕВКЛИДОВО ТОЧЕЧНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В этой главе будет введено понятие n-мерного евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^n$ и рассмотрены некоторые его свойства. Отметим, что при $n = 3$ имеем пространство $\mathbf{E}^3$, которое изучается в элементарной геометрии.

26.1. Определение пространства $\mathbf{E}^n$

Евклидово пространство E^n получается из n-мерного действительного линейного пространства V^n путем введения в него скалярного произведения. Пусть задано n-мерное действительное аффинное пространство A^n, связанное с действительным линейным пространством V^n. Задавая на V^n скалярное произведение, т. е. превращая его в пространство E^n, мы преобразуем аффинное пространство A^n в евклидово точечное пространство $\mathbf{E}^n$. Итак, имеет место следующее

Определение 26.1. *Аффинное пространство, связанное с евклидовым пространством E^n, называется n-мерным евклидовым точечным пространством и обозначается $\mathbf{E}^n$.*

В n-мерном пространстве $\mathbf{E}^n$ можно ввести ряд понятий, обобщающих известные понятия в трехмерном пространстве $\mathbf{E}^3$.

Определение 26.2. *Репер*

$$(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n) \tag{1}$$

пространства $\mathbf{E}^n$ в случае ортонормированного базиса

$$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n \tag{2}$$

будем называть ортонормированным репером или прямоугольной системой координат, а координаты точек и векторов относительно такого репера — прямоугольными.

Так как в любом ненулевом n-мерном евклидовом пространстве E^n существуют ортонормированные базисы (см. § 23.6), то *в любом евклидовом точечном пространстве $\mathbf{E}^n$, $n \geqslant 1$, существуют прямоугольные системы координат.*

Пусть в пространстве $\mathbf{E}^n$ заданы две прямоугольные системы координат: (1) и

$$(O', \mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_n). \tag{3}$$

Если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — координаты точки $M \in \mathbf{E}^n$ в репере (1), $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ — координаты этой же точки в репере (3), $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — координаты точки O' в репере (1) и $A = [a_{ij}]$ — матрица перехода от базиса (2) к базису

$$\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_n, \tag{4}$$

то, как показано в § 25.2, старые координаты точки M связаны с новыми координатами этой точки формулами

$$\left.\begin{array}{l} x_1 = a_{11}x_1' + a_{12}x_2' + \ldots + a_{1n}x_n' + a_1, \\ x_2 = a_{21}x_1' + a_{22}x_2' + \ldots + a_{2n}x_n' + a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = a_{n1}x_1' + a_{n2}x_2' + \ldots + a_{nn}x_n' + a_n. \end{array}\right\} \qquad (5)$$

Использовав обозначения (8) из § 25.2, можно записать эти формулы в матричном виде:

$$X = AX' + A_1. \qquad (6)$$

Так как базисы (2) и (4) – ортонормированные, то матрица A в формуле (6) – ортогональная.

Определение 26.3. *Расстоянием между точками M и N пространства E^n называется длина вектора $\overrightarrow{MN}$.*

Итак, обозначая указанное расстояние через $\rho(M, N)$, имеем

$$\rho(M, N) = \sqrt{\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{MN}}.$$

Если заданы прямоугольные координаты точек M и N: $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, то

$$\rho(M, N) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i)^2}.$$

Упражнения

1. С помощью прямоугольных координат определите понятия $(n-1)$-мерной сферы, n-мерного шара и n-мерного куба в пространстве $\mathbf{E}^n$.

2. Перенесите на n-мерное пространство $\mathbf{E}^n$ основные утверждения, полученные в § 12.10 для пространства $\mathbf{E}^3$.

26.2. Плоскости

Так как пространство $\mathbf{E}^n$ удовлетворяет аксиомам аффинного пространства (см. определение 25.1), то в $\mathbf{E}^n$ существуют плоскости любой размерности k, где $0 \leqslant k \leqslant n$, причем нуль-мерные плоскости – это точки, а единственная n-мерная плоскость совпадает с пространством $\mathbf{E}^n$. Очевидно, что всякая плоскость Π^k пространства $\mathbf{E}^n$ является k-мерным евклидовым точечным пространством.

Возьмем в пространстве $\mathbf{E}^n$ две одномерные плоскости, т. е. прямые Δ, Δ_1. Пусть $\mathbf{a}$ – какой-либо направляющий вектор прямой Δ и $\mathbf{a}_1$ – направляющий вектор прямой Δ_1.

Определение 26.4. *Углом между прямыми Δ и Δ_1 называется угол между их направляющими векторами $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}_1$, т. е. число φ, определяемое формулой*

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}_1}{|\mathbf{a}||\mathbf{a}_1|},\quad 0 \leqslant \varphi < \pi$$

(см. § 23.5).

Легко видеть, что угол между прямыми Δ и Δ_1 не зависит от выбора направляющих векторов этих прямых.

Пусть в пространстве $\mathbf{E}^n$ заданы две плоскости – плоскость Π^k с начальной точкой M и направляющим пространством E^k и плоскость Π^l с начальной точкой N и направляющим пространством E^l.

Определение 26.5. *Плоскости Π^k и Π^l называются ортогональными, если они имеют общую точку и каждый вектор из пространства E^k ортогонален каждому вектору из пространства E^l.*

Покажем, что ортогональные плоскости Π^k и Π^l имеют всего только одну общую точку. В самом деле, пусть M', N' – две различные точки, принадлежащие и плоскости Π^k, и плоскости Π^l. Тогда вектор $\overrightarrow{M'N'}$ принадлежит и пространству E^k, и пространству E^l, поэтому $\overrightarrow{M'N'}\cdot\overrightarrow{M'N'} = \mathbf{0}$. Но это невозможно, так как $\overrightarrow{M'N'} \neq \mathbf{0}$.

В § 23.8 для произвольного k-мерного подпространства E^k евклидова пространства E^n мы построили ортогональное дополнение $(E^k)^\perp$. Оно является $(n-k)$-мерным подпространством и состоит из всех векторов, ортогональных каждому вектору пространства E^k. В связи с этим введем следующее

Определение 26.6. *Ортогональным дополнением плоскости Π^k пространства $\mathbf{E}^n$ называется $(n-k)$-мерная плоскость, ортогональная плоскости Π^k.*

Теорема 26.1. *Если в пространстве $\mathbf{E}^n$ задана плоскость Π^k, то через каждую точку N пространства $\mathbf{E}^n$*

проходит единственное ортогональное дополнение этой плоскости.

➤ Пусть плоскость Π^k задана начальной точкой M и направляющим пространством E^k. Рассмотрим ортогональное дополнение $(E^k)^\perp$ подпространства E^k в пространстве E^n. Пусть Π^{n-k} – плоскость в пространстве $\mathbf{E}^n$ с начальной точкой N и направляющим пространством $(E^k)^\perp$. Так как $\overrightarrow{MN} \in E^k \oplus (E^k)^\perp = E^n$, то, согласно теореме 25.7, плоскости Π^k и Π^{n-k} имеют общую точку. Итак, Π^{n-k} – искомое ортогональное дополнение плоскости Π^k.

Единственность ортогонального дополнения плоскости следует из того, что каждая плоскость однозначно определяется заданием какой-либо ее точки и направляющего пространства. ➤

Рассмотрим $(n-1)$-мерную плоскость, т. е. гиперплоскость Π^{n-1} и прямоугольную систему координат

$$(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n). \quad (1)$$

Пусть $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ – некоторая точка гиперплоскости Π^{n-1} и E^{n-1} – направляющее пространство для Π^{n-1}. Согласно теореме 26.1, через точку M_0 проходит одномерное ортогональное дополнение плоскости Π^{n-1}, т. е. прямая Δ. Пусть $\mathbf{n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ – какой-либо направляющий вектор прямой Δ и $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – произвольная точка пространства $\mathbf{E}^n$. Точка M принадлежит плоскости Π^{n-1} тогда и только тогда, когда векторы $\mathbf{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ ортогональны, т. е. $\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{M_0M} = 0$. Записывая это равенство в координатах, получаем

$$a_1(x_1 - x_1^0) + a_2(x_2 - x_2^0) + \ldots + a_n(x_n - x_n^0) = 0. \quad (2)$$

Этому уравнению относительно $x_1, x_2, \ldots, x_n$ удовлетворяют координаты любой точки плоскости Π^{n-1}, и только такой точки. Другими словами, уравнение (2) является уравнением плоскости Π^{n-1}. Отметим, что эта плоскость проходит через точку $M_0(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ и ортогональна вектору $\mathbf{n}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, т. е. прямой с направляющим вектором $\mathbf{n}$.

Запишем уравнение (2) гиперплоскости Π^{n-1} в виде

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0. \tag{3}$$

Пусть $N(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \ldots, \tilde{x}_n)$ – произвольная точка пространства $\mathbf{E}^n$. Рассмотрим прямую Δ_1, проходящую через точку N и являющуюся ортогональным дополнением гиперплоскости Π^{n-1}. Эта прямая пересекает гиперплоскость Π^{n-1} в некоторой точке $P(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. По аналогии с пространством $\mathbf{E}^3$ сформулируем

Определение 26.7. *Расстоянием от точки N до гиперплоскости Π^{n-1} называется длина вектора $\overrightarrow{NP}$.*

Теперь выведем формулу для указанного расстояния. Умножив обе части уравнения (3) на число

$$\lambda = \frac{1}{|\mathbf{n}|} = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}},$$

мы приведем его к виду

$$\sum_{i=1}^{n} b_i x_i - p = 0. \tag{4}$$

Заметим, что вектор $\mathbf{n}_0(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ имеет единичную длину. Прямая NP задается уравнением

$$\mathbf{r} = \tilde{\mathbf{r}} + t\mathbf{n}_0, \tag{5}$$

где $\tilde{\mathbf{r}}$ – радиус-вектор точки N. Запишем уравнение (5) в координатной форме:

$$x_i = \tilde{x}_i + tb_i. \tag{6}$$

Пусть t_0 – значение параметра t, соответствующее точке P. Тогда имеем

$$P(\tilde{x}_1 + t_0 b_1, \tilde{x}_2 + t_0 b_2, \ldots, \tilde{x}_n + t_0 b_n);$$
$$\overrightarrow{NP}(t_0 b_1, t_0 b_2, \ldots, t_0 b_n).$$

Поэтому

$$|\overrightarrow{NP}|^2 = t_0^2 |\mathbf{n}_0|^2 = t_0^2. \tag{7}$$

Подставляя выражение (6) в уравнение (4), получаем уравнение для t_0:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i(\bar{x}_i + t_0 b_i) - p = 0.$$

Отсюда

$$t_0 = p - \sum_{i=1}^{n} b_i \bar{x}_i. \tag{8}$$

Сопоставляя равенства (3), (7) и (8), получаем формулу

$$\rho(N,\ \Pi^{n-1}) = \frac{\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i \bar{x}_i + a\right|}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i^2}}$$

для расстояния от точки $N(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n)$ до гиперплоскости Π^{n-1}, заданной уравнением (3).

Упражнения

1. Приведите примеры пар ортогональных плоскостей в пространстве $\mathbf{E}^3$.

2. Сформулируйте определение угла между двумя гиперплоскостями пространства $\mathbf{E}^n$.

26.3. Объем параллелепипеда

В § 12.13 доказано, что объем параллелепипеда, построенного на трех линейно независимых векторах

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \mathbf{u}_3, \tag{1}$$

отложенных от некоторой точки M трехмерного евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^3$, равен модулю определителя, составленного из координат векторов (1) в каком-либо ортонормированном базисе. Теперь обобщим это утверждение для n-мерного евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^n$.

Определение 26.8. *Множество всех точек пространства $\mathbf{E}^n$, координаты которых в репере $(M,\ \mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n)$ удовлетворяют неравенствам $0 \leqslant x_i \leqslant 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, называется n-мерным параллелепипедом в пространстве $\mathbf{E}^n$, построенным на n линейно независимых векторах*

$$\mathbf{u}_1,\ \mathbf{u}_2,\ \ldots,\ \mathbf{u}_n, \tag{2}$$

отложенных от некоторой точки $M \in \mathbf{E}^n$.

Теперь каждому параллелепипеду поставим в соответствие некоторое положительное число, которое по аналогии с трехмерным случаем естественно было бы назвать *объемом параллелепипеда*.

Пусть параллелепипед построен на линейно независимых векторах (2). Зафиксируем в пространстве E^n какой-либо ортонормированный базис

$$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n \tag{3}$$

и разложим каждый из векторов (2) по векторам базиса (3). Пусть $A = [a_{ij}]$ – квадратная матрица n-го порядка, столбцами которой являются координатные столбцы соответствующих векторов (2) в базисе (3).

Определение 26.9. *Объемом n-мерного параллелепипеда, построенного на векторах (2), отложенных от некоторой точки M, называется число*

$$V(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n) = |\det A|. \tag{4}$$

Покажем, что *число V не зависит от выбора ортонормированного базиса (3)*. Зафиксируем наряду с базисом (3) еще один ортонормированный базис

$$\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_n. \tag{5}$$

Пусть $A' = [a'_{ij}]$ – матрица, столбцами которой являются координатные столбцы векторов (2) в базисе (5), а S – матрица перехода от базиса (2) к базису (5). Рассмотрим координатные столбцы

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix}, \quad A'_j = \begin{bmatrix} a'_{1j} \\ a'_{2j} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

векторов $\mathbf{u}_j$ в базисах (2) и (5). Как известно из § 17.8, имеют место равенства

$$A'_j = S^{-1}A_j, \ j = 1, 2, \ldots, n.$$

Эти равенства можно переписать в виде одного матричного равенства

$$A' = S^{-1}A.$$

Так как матрица S^{-1} – ортогональная и, следовательно, $|\det S^{-1}| = 1$, то

$$|\det A'| = |\det S^{-1}||\det A| = |\det A|,$$

что и требовалось доказать.

26.4. Движения

Определение 26.10. *Аффинное преобразование f точечного евклидова пространства $\mathbf{E}^n$ называется движением этого пространства, если оно не изменяет расстояний между точками, т. е. для любых точек M, $N \in \mathbf{E}^n$ имеем*

$$\rho(M,\ N) = \rho(f(M),\ f(N)). \tag{1}$$

Движения точечного евклидова пространства $\mathbf{E}^n$ тесно связаны с ортогональными операторами соответствующего линейного евклидова пространства E^n, а именно: имеет место следующая

Теорема 26.2. *Аффинное преобразование f пространства $\mathbf{E}^n$ является движением тогда и только тогда, когда его однородная часть φ – ортогональный оператор.*

➤ Пусть M и N – две произвольные точки пространства $\mathbf{E}^n$, $M' = f(M)$, $N' = f(N)$. Так как f – аффинное преобразование с однородной частью φ, то, согласно определению 25.8, $\overrightarrow{M'N'} = \varphi(\overrightarrow{MN})$. Отсюда следует, что равенство

$$|\overrightarrow{M'N'}| = |\overrightarrow{MN}| \tag{2}$$

равносильно равенству

$$|\varphi(\overrightarrow{MN})| = |\overrightarrow{MN}|. \tag{3}$$

Покажем теперь, что условие (3) для линейного оператора φ пространства E^n равносильно условию

$$\varphi(\mathbf{a}) \cdot \varphi(\mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \tag{4}$$

для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b} \in E^n$. То, что из равенства (4) следует равенство (3), очевидно. Займемся выводом равенства (4) из (3). Имеем:

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2, \qquad (5)$$

$$|\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b})|^2 = \varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = (\varphi(\mathbf{a})+\varphi(\mathbf{b}))\cdot(\varphi(\mathbf{a})+\varphi(\mathbf{b})) =$$
$$= |\varphi(\mathbf{a})|^2 + 2\varphi(\mathbf{a})\cdot\varphi(\mathbf{b}) + |\varphi(\mathbf{b})|^2. \qquad (6)$$

Так как условие (3) выполняется, то

$$|\mathbf{a}+\mathbf{b}|^2 = |\varphi(\mathbf{a}+\mathbf{b})|^2,\ |\mathbf{a}|^2 = |\varphi(\mathbf{a})|^2,\ |\mathbf{b}|^2 = |\varphi(\mathbf{b})|^2.$$

Поэтому из равенств (5) и (6) следует равенство (4).

Итак, равенство (2), выражающее условие сохранения расстояния между точками при движении f, равносильно условию ортогональности линейного оператора φ. ◄

Пусть в пространстве $\mathbf{E}^n$ задана прямоугольная система координат

$$(O,\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \ldots,\ \mathbf{i}_n). \qquad (7)$$

Так как движение f является аффинным преобразованием, его можно задать в координатах формулой (12) из § 25.7, а именно:

$$X' = AX + A_1, \qquad (8)$$

где X, X', A_1 – координатные столбцы соответственно точек M, $M' = f(M)$, $f(O)$; A – матрица линейного оператора φ в базисе

$$\mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \ldots,\ \mathbf{i}_n. \qquad (9)$$

Поскольку оператор φ – ортогональный, а базис (9) – ортонормированный, то по теореме 24.6 матрица A – ортогональная. Запишем формулы (8) движения f в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + a_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n + a_n. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Итак, всякое движение f пространства $\mathbf{E}^n$ выражается в прямоугольных координатах с помощью формул (8) или (10), где $A = [a_{ij}]$ – ортогональная матрица.

Обратно, пусть $A = [a_{ij}]$ – произвольная ортогональная матрица порядка n и $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – произвольные действительные числа. Рассмотрим отображение $f\colon \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$, которое произвольной точке $M \in \mathbf{E}^n$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в прямоугольной системе координат (7) ставит в соответствие точку $M' \in \mathbf{E}^n$ с координатами $x_1', x_2', \ldots, x_n'$ в той же системе координат, вычисленными по формулам (10). Согласно теоремам 25.16 и 24.6, это отображение является движением пространства $\mathbf{E}^n$. ◀

Теорема 26.3. *Множество всех движений пространства $\mathbf{E}^n$ есть подгруппа в группе всех аффинных преобразований этого пространства.*

▶ Пусть f и g – два движения пространства $\mathbf{E}^n$. По теореме 25.17 композиция $g \circ f$ есть аффинное преобразование пространства $\mathbf{E}^n$. Возьмем две произвольные точки $M, N \in \mathbf{E}^n$. Пусть $M' = f(M)$, $N' = f(N)$, $M'' = g(M') = (g \circ f)(M)$, $N'' = g(N') = (g \circ f)(N)$. Так как f и g сохраняют расстояние между точками, то $\rho(M, N) = \rho(M', N') = \rho(M'', N'')$. Но это означает, что аффинное преобразование $g \circ f$ сохраняет расстояние, т. е. является движением. Еще проще доказывается, что отображение $f^{-1}\colon \mathbf{E}^n \to \mathbf{E}^n$ также является движением. Теперь теорема 26.3 непосредственно следует из теоремы 5.1. ◀

Группу всех движений пространства $\mathbf{E}^n$ будем обозначать $G(\mathbf{E}^n)$. Как и в § 25.8, рассмотрим некоторые вопросы геометрии этой группы.

Определение 26.11. *Фигура Φ_1 пространства $\mathbf{E}^n$ называется метрически эквивалентной фигуре Φ_2 этого пространства, если существует движение $f \in G(\mathbf{E}^n)$, переводящее фигуру Φ_1 в фигуру Φ_2, т. е. $f(\Phi_1) = \Phi_2$.*

Как и в § 25.8, можно показать, что *множество всех фигур пространства $\mathbf{E}^n$ разбивается на непересекающиеся классы попарно метрически эквивалентных фигур.* Ниже в качестве примеров рассмотрены два таких класса.

Теорема 26.4. *Все ортонормированные реперы пространства $\mathbf{E}^n$ образуют один класс метрически эквивалентных фигур.*

▶ Заметим прежде всего, что ортонормированный репер (7) вполне определяется упорядоченным набором из $n + 1$ точек $O, M_1, M_2, \ldots, M_n$, таких, что $\overrightarrow{OM_k} = \mathbf{i}_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Поэтому репер можно считать фигурой.

Так как по теореме 26.2 однородная часть любого движения пространства $\mathbf{E}^n$ сохраняет скалярное произведение векторов, то f переводит всякий ортонормированный репер в ортонормированный. Пусть заданы два ортонормированных репера: (7) и

$$(O', \mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_n), \tag{11}$$

причем $a_1, a_2, \ldots, a_n$ – координаты точки O' в репере (7) и $A = [a_{ij}]$ – матрица перехода от ортонормированного базиса (9) к ортонормированному базису $\mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_n$. Как известно из § 23.7, матрица A является ортогональной. Рассмотрим теперь движение, заданное формулой (8). Оно переводит репер (7) в репер (11). Итак, любые два ортонормированных репера метрически эквивалентны. ◀

Теорема 26.5. *Все k-мерные плоскости пространства $\mathbf{E}^n$ при фиксированном k образуют один класс метрически эквивалентных фигур.*

➤ Всякое движение пространства $\mathbf{E}^n$, являясь аффинным преобразованием, переводит k-мерную плоскость в k-мерную плоскость (см. теорему 25.19). Пусть заданы две плоскости Π^k и Π_1^k соответственно с начальными точками M, M_1 и направляющими пространствами E^k, E_1^k. Возьмем в k-мерном точечном евклидовом пространстве Π^k какой-либо ортонормированный репер $(M, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_k)$. Согласно теореме 23.7, существуют векторы $\mathbf{i}_{k+1}, \mathbf{i}_{k+2}, \ldots, \mathbf{i}_n$, такие, что репер пространства $\mathbf{E}^n$

$$(M, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n) \tag{12}$$

является ортонормированным. Аналогично построим ортонормированный репер $(M_1, \mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_k)$ плоскости Π_1^k и дополним его до ортонормированного репера

$$(M_1, \mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_n) \tag{13}$$

пространства $\mathbf{E}^n$. Движение пространства $\mathbf{E}^n$, переводящее репер (12) в репер (13), переведет плоскость Π^k в плоскость Π_1^k. ◀

Упражнения

1. Докажите, что все пары ортогональных пересекающихся прямых в пространстве $\mathbf{E}^n$ образуют один класс метрически эквивалентных фигур.

2. Последовательность $\Pi^0 \subset \Pi^1 \subset \Pi^2 \subset \ldots \subset \Pi^k$ плоскостей в пространстве $\mathbf{E}^n$ называется *флагом длины* k. Докажите, что все флаги фиксированной длины k образуют один класс метрически эквивалентных фигур.

26.5. Движения евклидовой точечной плоскости

Евклидово точечное пространство $\mathbf{E}^2$ будем называть в этом параграфе плоскостью $\mathbf{E}^2$. Как показано в § 26.4, произвольное движение f плоскости $\mathbf{E}^2$ задается в прямоугольной системе координат $(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_2, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \qquad (2)$$

есть ортогональная матрица, являющаяся матрицей линейного оператора φ — однородной части движения f в ортонормированном базисе $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$.

С помощью подходящего выбора системы прямоугольных координат формулы (1) можно упростить. В соответствии с предложением 24.7 следует различать два случая: $\det \varphi = |A| = 1$ и $\det \varphi = |A| = -1$.

Определение 26.12. *Движения плоскости* $\mathbf{E}^2$ *в случае* $|A| = 1$ *называются собственными, а в случае* $|A| = -1$ — *несобственными.*

Как следует из §24.3, в любой прямоугольной системе координат собственное движение может быть задано формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha + a_1, \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha + a_2. \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

Рассмотрим два частных случая формул (3).

1. В случае, когда $\alpha = 0$,

$$x_1' = x_1 + a_1, \quad x_2' = x_2 + a_2. \qquad (4)$$

При движении, заданном формулами (4), все точки плоскости перемещаются по параллельным прямым, имеющим направляющий вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2)$. Величина смещения у всех точек одинакова и равна длине вектора $\mathbf{a}$. Как известно, такое движение называется *параллельным переносом плоскости* $\mathbf{E}^2$ *на вектор* $\mathbf{a}$.

В случае, когда $a_1 = a_2 = 0$, имеем:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha, \\ x_2' &= x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

При этом движении точка $O(0, 0)$ остается неподвижной. Рассмотрим произвольную точку $M(x_1, x_2)$ и ее радиус-вектор $\overrightarrow{OM}(x_1, x_2)$. Координаты точки M' – образа точки M при движении (5) – так же, как и координаты ее радиуса-вектора $\overrightarrow{OM'}$, задаются формулами (5). Найдем угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$. Имеем:

$$\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'} = x_1(x_1 \cos\alpha - x_2 \sin\alpha) + x_2(x_1 \sin\alpha + x_2 \cos\alpha) =$$
$$= (x_1^2 + x_2^2)\cos\alpha, \ |\overrightarrow{OM}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2},$$
$$|\overrightarrow{OM'}| = \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}.$$

Итак, для косинуса угла φ между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ получаем следующее выражение:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{OM'}}{|\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{OM'}|} = \frac{(x_1^2 + x_2^2)\cos\alpha}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} = \cos\alpha.$$

Следовательно, угол между векторами $\overrightarrow{OM}$ и $\overrightarrow{OM'}$ равен α. Таким образом, при движении (5) каждый отрезок OM поворачивается вокруг точки O на угол α. Как известно, такое движение называется *поворотом плоскости* $\mathbf{E}^2$ *вокруг точки O на угол* α.

Как видно из формул (3), произвольное собственное движение плоскости $\mathbf{E}^2$ является композицией поворота вокруг точки O и параллельного переноса. Однако ситуация упрощается благодаря следующему предложению.

Предложение 26.1. *Всякое собственное движение плоскости* $\mathbf{E}^2$, *заданное формулами (3) при* $\alpha \neq 2k\pi$, *есть поворот вокруг некоторой точки* O'.

➤ Покажем, что движение (3) при $\alpha \neq 2k\pi$ имеет единственную неподвижную точку. Координаты неподвижных точек движения (3) совпадают с решениями системы

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha + a_1,\\ x_2 &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha + a_2 \end{aligned}\right\}$$

относительно неизвестных x_1, x_2. Перепишем эту систему в виде

$$\left.\begin{aligned} x_1(1-\cos\alpha) + x_2\sin\alpha \qquad &= a_1,\\ -x_1\sin\alpha \qquad + x_2(1-\cos\alpha) &= a_2. \end{aligned}\right\}$$

Это система двух линейных уравнений с двумя неизвестными, определитель которой равен $2(1-\cos\alpha)$ и отличен от нуля. Как известно, такая система имеет единственное решение $O'(b_1, b_2)$. Запишем формулы рассматриваемого движения f в прямоугольной системе координат $(O', \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1' &= \bar{x}_1\cos\alpha - \bar{x}_2\sin\alpha + c_1,\\ \bar{x}_2' &= \bar{x}_1\sin\alpha + \bar{x}_2\cos\alpha + c_2. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Так как при движении f точка O' остается неподвижной, то, подставляя в систему (6) $\bar{x}_1 = 0$, $\bar{x}_2 = 0$, $\bar{x}_1' = 0$, $\bar{x}_2' = 0$, получаем $c_1 = c_2 = 0$. Формулы (6) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1' &= \bar{x}_1\cos\alpha - \bar{x}_2\sin\alpha,\\ \bar{x}_2' &= \bar{x}_1\sin\alpha + \bar{x}_2\cos\alpha \end{aligned}\right\}$$

и, следовательно, задают поворот вокруг точки O'. ➤

Рассмотрим несобственные движения плоскости $\mathbf{E}^2$. Как было показано в § 24.3, произвольное несобственное движение плоскости $\mathbf{E}^2$ может быть задано в некоторой прямоугольной системе координат $(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$ формулами:

$$x_1' = x_1 + a_1,\ x_2' = -x_2 + a_2. \tag{7}$$

Перейдем к новой прямоугольной системе координат $(\bar{O}, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2)$, где $\bar{O}(0, a_2/2)$. Формулы преобразования координат для произвольной точки M и ее образа при движении (7) имеют вид: $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2 + a_2/2$, $x_1' = \bar{x}_1'$, $x_2' = \bar{x}_2' + a_2/2$. Подставляя эти выражения в формулы (7), получаем:

$$\bar{x}_1' = \bar{x}_1 + a_1,\ \bar{x}_2' = -\bar{x}_2'. \tag{8}$$

Рассмотрим частный случай формул (8) при $a_1 = 0$:

$$\bar{x}_1' = \bar{x}_1, \ \bar{x}_2' = -\bar{x}_2. \qquad (9)$$

При движении, определяемом этими формулами, произвольная точка $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ плоскости $\mathbf{E}^2$ переходит в точку $M'(\bar{x}_1, -\bar{x}_2)$, симметричную точке M относительно координатной оси $O\bar{x}_1$. Как известно, такое движение называется *симметрией плоскости* $\mathbf{E}^2$ *относительно прямой* $O\bar{x}_1$. Движение, заданное формулами (8), является композицией симметрии (9) относительно прямой $O\bar{x}_1$ и параллельного переноса на вектор $\mathbf{a}(a_1, 0)$ вдоль оси $O\bar{x}_1$.

Определение 26.13. *Движение плоскости* $\mathbf{E}^2$, *заданное формулами (8), называется скользящей симметрией с осью* $O\bar{x}_1$.

Отметим, что симметрия (9) есть частный случай скользящей симметрии. Итак, доказана следующая

Теорема 26.6. *Собственные движения плоскости* $\mathbf{E}^2$ *исчерпываются поворотами вокруг любой точки и параллельными переносами. Несобственные движения плоскости* $\mathbf{E}^2$ *совпадают со скользящими симметриями.*

Упражнения

1. Докажите, что любой поворот плоскости $\mathbf{E}^2$ является композицией двух симметрий относительно прямых, проходящих через неподвижную точку поворота.

2. Докажите, что любой параллельный перенос плоскости $\mathbf{E}^2$ является композицией двух симметрий относительно параллельных прямых.

26.6. Движения трехмерного евклидова точечного пространства

Как показано в § 26.4, всякое движение трехмерного евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^3$ задается в прямоугольной системе координат $(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3)$ формулами:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_1, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_2, \\ x_3' &= a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_3, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

где $A = [a_{ij}]$ – ортогональная матрица. Согласно теореме 24.10, ортонормированный базис $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ можно выбрать так, что формулы (1) примут один из следующих видов:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha + a_1,\\ x_2' &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha + a_2,\\ x_3' &= x_3 + a_3;\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

$$x_1' = x_1 + a_1,\ x_2' = x_2 + a_2,\ x_3' = -x_3 + a_3; \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha + a_1,\\ x_2' &= x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha + a_2,\\ x_3' &= -x_3 + a_3.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Упростим формулы (2) – (4) с помощью перехода к новой прямоугольной системе координат. Начнем с формул (2). Сохранив базисные векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$, перенесем начало координат в точку $\tilde{O}(x_1^0,\ x_2^0,\ 0)$, где x_1^0, x_2^0 определяются из уравнений:

$$\left.\begin{aligned} x_1^0\cos\alpha - x_2^0\sin\alpha + a_1 &= x_1^0,\\ x_1^0\sin\alpha + x_2^0\cos\alpha + a_2 &= x_2^0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

которые мы перепишем в виде:

$$\left.\begin{aligned} x_1^0(\cos\alpha - 1) - x_2^0\sin\alpha \qquad &= -a_1,\\ x_1^0\sin\alpha \qquad + x_2^0(\cos\alpha - 1) &= -a_2.\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Определитель последней системы двух линейных уравнений относительно неизвестных x_1^0, x_2^0 равен $(\cos\alpha - 1)^2 + \sin^2\alpha$. Он равен нулю, если:

$$\cos\alpha = 1,\ \ \sin\alpha = 0. \tag{7}$$

В этом случае формулы (2) принимают вид:

$$x_1' = x_1 + a_1,\ x_2' = x_2 + a_2,\ x_3' = x_3 + a_3. \tag{8}$$

Очевидно, что формулы (8) задают параллельный перенос пространства $\mathbf{E}^3$ на вектор $\mathbf{a}(a_1,\ a_2,\ a_3)$.

Предположим теперь, что условия (7) не выполняются. Тогда найдется единственное решение x_1^0, x_2^0 системы (5), и мы перенесем начало координат в точку $\tilde{O}(x_1^0,\ x_2^0,\ 0)$. Обозначив новые координаты произвольной точки $M(x_1, x_2, x_3)$ через $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$, получим следующие формулы преобразования координат: $x_1 = \tilde{x}_1 + x_1^0$, $x_2 = \tilde{x}_2 + x_2^0$, $x_3 = \tilde{x}_3$. В новых координатах формулы движения (2) примут вид:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1' + x_1^0 &= \bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha + (x_1^0 \cos\alpha - x_2^0 \sin\alpha + a_1), \\ \bar{x}_2' + x_2^0 &= \bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha + (x_1^0 \sin\alpha + x_2^0 \cos\alpha + a_2), \\ x_3' &= x_3 + a_3 \end{aligned}\right\}$$

или в силу тождеств (5):

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1' &= \bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha, \\ \bar{x}_2' &= \bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha, \\ \bar{x}_3' &= \bar{x}_3 + a_3. \end{aligned}\right\} \quad (9)$$

Рассмотрим частный случай формул (9) при $a_3 = 0$:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1' &= \bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha, \\ \bar{x}_2' &= \bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha, \\ \bar{x}_3' &= \bar{x}_3. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

При движении, задаваемом формулами (10), в каждой плоскости Π, параллельной плоскости $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2$, и в самой этой плоскости происходит поворот на угол α вокруг точки пересечения плоскости Π с осью $\bar{O}\bar{x}_3$.

Определение 26.14. *Движение пространства* $\mathbf{E}^3$, *заданное формулами (10), называется поворотом пространства вокруг оси* $\bar{O}\bar{x}_3$ *на угол* α.

Движение пространства $\mathbf{E}^3$, заданное формулами (9), есть композиция поворота вокруг оси $\bar{O}\bar{x}_3$ на угол α и параллельного переноса на вектор $\mathbf{a}(0, 0, a_3)$.

Определение 26.15. *Движение пространства* $\mathbf{E}^3$, *заданное формулами (9), называется винтовым.*

Обратимся теперь к формулам (3). Перейдем к новой прямоугольной системе координат, сохранив базисные векторы $\mathbf{i}_1$, $\mathbf{i}_2$, $\mathbf{i}_3$ и перенеся начало координат в точку $\bar{O}(0, 0, a_3/2)$. Итак, выполним преобразование координат по формулам: $x_1 = \bar{x}_1$, $x_2 = \bar{x}_2$, $x_3 = \bar{x}_3 + a_3/2$. В новых координатах движение (3) задается формулами:

$$\bar{x}_1' = \bar{x}_1 + a_1, \ \bar{x}_2' = \bar{x}_2 + a_2, \ \bar{x}_3' = -\bar{x}_3. \quad (11)$$

При $a_1 = a_2 = 0$ формулы (11) принимают вид:

$$\bar{x}_1' = \bar{x}_1, \ \bar{x}_2' = \bar{x}_2, \ \bar{x}_3' = -\bar{x}_3. \quad (12)$$

При движении, заданном формулами (12), произвольная точка $M(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3)$ переходит в точку $M'(\bar{x}_1, \bar{x}_2, -\bar{x}_3)$, симметричную точке M относительно координатной плоскости $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2$. Как известно, такое движение называется *симметрией относительно плоскости* $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2$. Движение, заданное формулами (11), есть композиция симметрии относительно плоскости $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2$ и параллельного переноса пространства $\mathbf{E}^3$ на вектор $\mathbf{a}(a_1, a_2, 0)$, параллельный плоскости $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2$.

Определение 26.16. *Движение пространства* $\mathbf{E}^3$, *заданное формулами (11), называется скользящей симметрией.*

Рассмотрим теперь формулы (4). Перейдем к новой прямоугольной системе координат, сохранив базисные векторы и перенеся начало координат в точку $\bar{O}(x_1^0, x_2^0, a_3/2)$, где x_1^0, x_2^0 определяются из уравнений (6). Если условия (7) выполнены, то мы приходим к уже рассмотренному случаю (3). Пусть условия (7) не выполнены. Тогда система (6) имеет единственное решение относительно x_1^0, x_2^0, и мы приходим к следующим формулам преобразования координат: $x_1 = \bar{x}_1 + x_1^0$, $x_2 = \bar{x}_2 + x_2^0$, $x_3 = \bar{x}_3 + a_3/2$. В новых координатах движение (4) задается формулами:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_1' &= \bar{x}_1 \cos\alpha - \bar{x}_2 \sin\alpha, \\ \bar{x}_2' &= \bar{x}_1 \sin\alpha + \bar{x}_2 \cos\alpha, \\ \bar{x}_3' &= -\bar{x}_3. \end{aligned}\right\} \qquad (13)$$

Движение, заданное этими формулами, есть композиция симметрии относительно плоскости $\bar{O}\bar{x}_1\bar{x}_2$ и поворота вокруг оси $\bar{O}\bar{x}_3$ на угол α.

Определение 26.17. *Движение пространства* $\mathbf{E}^3$, *заданное формулами (13), называется поворотной симметрией.*

Заметим, что симметрию можно считать частным случаем как скользящей симметрии, так и поворотной.

Итак, доказана следующая

Теорема 26.7. *Всякое движение пространства* $\mathbf{E}^3$, *есть одно из следующих: параллельный перенос, поворот вокруг прямой, винтовое движение, скользящая симметрия и поворотная симметрия.*

Упражнения

1. Докажите, что любое движение пространства $\mathbf{E}^3$, оставляющее неподвижной некоторую точку O, есть поворот вокруг прямой, проходящей через точку O, или поворотная симметрия.

2. Поворот пространства $\mathbf{E}^3$ вокруг некоторой прямой на угол π называется *симметрией относительно этой прямой*. Докажите, что композиция двух симметрий относительно двух различных параллельных прямых есть параллельный перенос.

26.7. Аффинные преобразования пространства $\mathbf{E}^n$

До сих пор рассматривались только те аффинные преобразования евклидова точечного пространства $\mathbf{E}^n$, которые сохраняют расстояния между точками, т. е. являются движениями. Теперь мы изучим структуру произвольного аффинного преобразования пространства $\mathbf{E}^n$.

Пусть в пространстве $\mathbf{E}^n$ выбрана прямоугольная система координат

$$(O, \mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n). \tag{1}$$

Рассмотрим линейный оператор φ_1 евклидова линейного пространства E^n, заданный в ортонормированном базисе

$$\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \ldots, \mathbf{i}_n \tag{2}$$

матрицей

$$\begin{bmatrix} \lambda & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix},$$

где λ – отличное от нуля действительное число. В соответствии с теоремой 25.9 рассмотрим аффинное преобразование f_1 пространства $\mathbf{E}^n$, имеющее в качестве однородной части оператор φ_1 и удовлетворяющее условию

$$f_1(O) = O, \tag{3}$$

т. е. оставляющее точку O неподвижной. Преобразование f_1 задается в прямоугольной системе координат (1) формулами:

$$x_1' = \lambda x, \ \ x_i' = x_i, \ i = 2, 3, \ldots, n. \tag{4}$$

Определение 26.18. *Аффинное преобразование пространства* $\mathbf{E}^n$, *заданное в прямоугольной системе* *координат формулами (4), называется сжатием с коэффициентом λ к гиперплоскости с начальной точкой O и направляющим пространством $L(\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \ldots, \mathbf{i}_n)$ параллельно вектору* $\mathbf{i}_1$.

Заметим, что введенное здесь понятие сжатия согласуется с общепринятым понятием сжатия лишь при условии $0 < \lambda < 1$. При $\lambda > 1$ обычно говорят о *растяжении*, а при $\lambda < 0$ сжатие (или растяжение) сопровождается симметрией относительно плоскости. Аналогично определяются *сжатия параллельно векторам* $\mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3, \ldots, \mathbf{i}_n$.

Рассмотрим теперь линейный оператор φ пространства E^n, имеющий в базисе (2) матрицу

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{bmatrix},$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ – отличные от нуля действительные числа. Аффинное преобразование f_0, имеющее однородную часть φ и удовлетворяющее условию (3), задается формулами:

$$x_i' = \lambda_i x_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{5}$$

Это преобразование является композицией n сжатий параллельно векторам (2).

Основной в этом параграфе является

Теорема 26.8. *Всякое аффинное преобразование пространства* $\mathbf{E}^n$ *есть композиция n сжатий параллельно n попарно ортогональным векторам и движения.*

➤ В силу формул (11) из §25.7 произвольное аффинное преобразование f есть композиция аффинного преобразования, удовлетворяющего условию (3), т. е. заданного формулами:

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j,\quad \det[a_{ij}] \neq 0, \tag{6}$$

и аффинного преобразования, заданного формулами:

$$x_i' = x_i + a_i,\ i = 1, 2, \ldots, n. \tag{7}$$

Преобразование (7) – движение, так как его однородная часть имеет единичную матрицу. Это преобразование называется *параллельным переносом на вектор* $\mathbf{a}(a_1, a_2, ..., a_n)$.

Рассмотрим теперь аффинное преобразование $\bar{f}$, заданное формулами (6). Однородная часть φ этого преобразования определяется по тем же формулам. Согласно теореме 24.19, линейный оператор φ является композицией $\varphi_2\varphi_1$ самосопряженного оператора φ_1 и ортогонального оператора φ_2. Поэтому и аффинное преобразование $\bar{f}$ есть композиция двух аффинных преобразований: $\bar{f} = f_2 f_1$. Преобразование f_2 является движением, а преобразование f_1, согласно теореме 24.16, задается в подходящей прямоугольной системе координат формулами (5), т. е. представляет собой композицию n сжатий параллельно попарно ортогональным базисным векторам этой системы.

Итак, произвольное аффинное преобразование f пространства $\mathbf{E}^n$ есть композиция $f_3 f_2 f_1$, где f_1 – композиция n сжатий параллельно попарно ортогональным векторам (2); f_2 – движение, удовлетворяющее условию (3); f_3 – параллельный перенос. ◄

Как видно из примера сжатия пространства к плоскости, аффинное преобразование пространства $\mathbf{E}^n$ может сохранять длины одних отрезков и изменять длины других. Иначе ведут себя при аффинных преобразованиях объемы параллелепипедов, как показывает

Теорема 26.9. *При аффинном преобразовании пространства* $\mathbf{E}^n$ *любой* n*-мерный параллелепипед* Π *переходит в* n*-мерный параллелепипед* Π'. *Отношение объемов параллелепипедов* Π *и* Π' *не зависит от выбора параллелепипеда* Π.

► Пусть f – аффинное преобразование пространства $\mathbf{E}^n$ и φ – его однородная часть. По определению 26.8 n-мерный параллелепипед Π строится на n линейно независимых векторах

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n, \tag{8}$$

отложенных от некоторой точки M, и состоит из всех точек, координаты которых в репере $(M, \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_n)$ удовлетворяют неравенствам:

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1,\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (9)$$

Согласно теореме 25.13, образ $f(\Pi)$ параллелепипеда Π состоит из всех точек, координаты которых в репере $(f(M), \varphi(\mathbf{u}_1), \varphi(\mathbf{u}_2), \ldots, \varphi(\mathbf{u}_n))$ также удовлетворяют неравенствам (9), т. е. $\Pi' = f(\Pi)$ – параллелепипед, построенный на векторах

$$\varphi(\mathbf{u}_1),\ \varphi(\mathbf{u}_2),\ \ldots,\ \varphi(\mathbf{u}_n) \qquad (10)$$

отложенных от точки $f(M)$.

Возьмем прямоугольную систему координат (1). Пусть ψ – линейный оператор, переводящий базис (2) в базис (8), и χ – линейный оператор, переводящий базис (2) в базис (10). Тогда

$$\chi = \varphi\psi. \qquad (11)$$

Обозначим через A, B, C соответственно матрицы операторов ψ, χ, φ в базисе (2). Согласно определению 26.9, объем V параллелепипеда Π равен $|\det A|$, а объем V' параллелепипеда Π' – $|\det B|$. Из равенства (11) на основании теоремы 19.3 получаем $B = CA$. Отсюда по теореме 4.8 следует равенство $V' = |\det C|\, V$, доказывающее теорему. ◀

Упражнения

1. Докажите, что множество всех аффинных преобразований пространства $\mathbf{E}^n$, заданных в прямоугольных координатах с помощью формул вида $X' = kAX + B$, где A – ортогональная матрица; k – отличное от нуля действительное число, образует группу. Она называется *группой подобий*. Докажите, что все пары параллельных k-мерных (k фиксировано) плоскостей (см. определение 25.7) эквивалентны относительно преобразований подобия.

2. Укажите какие-либо подгруппы в группе подобий, рассмотренной в предыдущем упражнении.

27. КВАДРИКИ

В этой главе будет введено понятие квадрики, обобщающее понятие фигуры второго порядка, описанное во втором разделе учебника. Мы рассмотрим два варианта теории квадрик: в аффинном и евклидовом пространствах. При этом целесообразно будет расширить действительное пространство путем вложения его в комплексное.

27.1. Пространство $A^n(i)$

Пусть $A^n(\mathbf{C})$ – n-мерное комплексное аффинное пространство, связанное с комплексным линейным пространством $V^n(\mathbf{C})$. Выберем в пространстве $A^n(\mathbf{C})$ какой-либо репер

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n). \qquad (1)$$

Множество V^n всех векторов пространства $V^n(\mathbf{C})$, имеющих действительные координаты в базисе

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n,$$

является n-мерным действительным линейным пространством. Множество A^n всех точек пространства $A^n(\mathbf{C})$, имеющих действительные координаты в репере (1), является n-мерным действительным аффинным пространством, связанным с линейным пространством V^n.

Определение 27.1. *Пространство $A^n(\mathbf{C})$, в котором фиксирован репер (1), а следовательно, и действительное аффинное пространство A^n, будем обозначать $A^n(i)$. Точки пространства $A^n(i)$ называются действительными, если они принадлежат пространству A^n, и мнимыми в противном случае. Векторы пространства $V^n(\mathbf{C})$ называются действительными, если они принадлежат пространству V^n, и мнимыми в противном случае.*

В дальнейшем интерес для нас будут представлять действительные точки и векторы.

Рассмотрим формулы:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x'_j + a_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \qquad (2)$$

где $\det[a_{ij}] \neq 0$; a_{ij}, a_i – действительные числа. Можно считать, что эти формулы задают преобразование координат в пространстве $A^n(i)$: координаты $x_1, x_2, \ldots, x_n$ точки M в репере (1) выражаются через координаты $x'_1,\ x'_2,\ \ldots,\ x'_n$ этой же точки в новом репере

$$(O',\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n). \qquad (3)$$

Заметим, что действительные точки и векторы, и только они, в новой системе координат будут иметь действительные координаты. В этой главе мы будем рассматривать в пространстве только такие аффинные координаты, которые получаются с помощью формул вида (2).

С другой стороны, можно считать, что формулы (2) задают аффинное преобразование пространства $A^n(i)$. При этом преобразовании действительные точки и векторы переходят в действительные.

В этой главе будут рассматриваться только такие аффинные преобразования.

27.2. Определение квадрики

Пусть в пространстве $A^n(i)$ выбран некоторый репер

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \tag{1}$$

и задано уравнение

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0, \tag{2}$$

где a_{ij}, a_i, a — действительные числа, причем среди чисел a_{ij} есть отличные от нуля и $a_{ij} = a_{ji}$.

Определение 27.2. *Квадрикой в пространстве $A^n(i)$ называется множество всех точек этого пространства, координаты которых в репере (1) удовлетворяют уравнению вида (2). Уравнение (2) называется уравнением той квадрики, которую оно определяет.*

Понятие квадрики тесно связано с понятием фигуры второго порядка, введенным во втором разделе пособия, а именно: рассматриваемую там плоскость можно считать множеством действительных точек пространства $A^2(i)$. Тогда каждая плоская фигура второго порядка является множеством всех действительных точек некоторой квадрики. Рассмотрим, например, уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 = 0. \tag{3}$$

Плоская фигура второго порядка, заданная этим уравнением в аффинной системе координат Ox_1x_2 на плоскости, есть точка $O(0, 0)$. Рассмотрим теперь квадрику, заданную уравнением (3) в пространстве $A^2(i)$. Это уравнение можно представить в виде

$$(x_1 + ix_2)(x_1 - ix_2) = 0. \tag{4}$$

Квадрика, заданная уравнением (4), состоит из двух прямых, определяемых уравнениями:

$$x_1 + ix_2 = 0,\ x_1 - ix_2 = 0. \tag{5}$$

Она содержит одну действительную точку $O(0, 0)$, т. е. плоскую фигуру второго порядка с уравнением (3), и бесконечно много мнимых точек. В дальнейшем мы будем называть пространство $A^2(i)$ *плоскостью,* а квадрики на этой плоскости – *линиями второго порядка.*

Аналогично рассмотренное во втором разделе учебника пространство можно считать множеством действительных точек пространства $A^3(i)$. Тогда каждая фигура второго порядка является множеством действительных точек некоторой квадрики. Рассмотрим, например, уравнение (3). В аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ действительного трехмерного пространства оно задает прямую – ось Ox_3. Квадрика же, заданная этим уравнением в пространстве $A^3(i)$, состоит из двух плоскостей, определяемых уравнениями (5).

В дальнейшем мы будем называть квадрики пространства $A^3(i)$ *поверхностями второго порядка.*

Вернемся к общему случаю. Пусть в пространстве $A^n(i)$ задана квадрика K с уравнением (2). Если λ – произвольное, отличное от нуля действительное число, то уравнение

$$\lambda\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a\right) = 0$$

задает в пространстве $A^n(i)$ ту же самую квадрику K, что и уравнение (2). Оказывается, верно и обратное: если два уравнения вида (2) задают в выбранном репере пространства $A^n(i)$ одну и ту же квадрику, то левые части этих уравнений различаются лишь не равным нулю действительным числовым множителем. Однако доказательство этого утверждения не столь очевидно, и мы докажем вначале некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 27.1. *Если многочлен*

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a \tag{6}$$

от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *с комплексными коэффициентами обращается в нуль при любых значениях этих переменных, то все коэффициенты данного многочлена – нули.*

➤ Доказательство проведем индукцией по n. Пусть $n = 1$, т. е. многочлен имеет вид

$$a_{11}x_1^2 + 2a_1x_1 + a. \tag{7}$$

Придавая x_1 значения 0, 1, 2, получаем: $a = 0$, $a_{11} + 2a_1 = 0$, $a_{11} + a_1 = 0$, следовательно, $a_{11} = a_1 = a = 0$.

Предположим теперь, что лемма 27.1 справедлива для $n - 1$ $(n > 1)$ переменных, и докажем ее для многочлена (6). Перепишем этот многочлен в виде

$$a_{11}x_1^2 + 2x_1\left(\sum_{i=2}^{n} a_{i1}x_i + a_1\right) + \sum_{i,\,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=2}^{n} a_i x_i + a.$$

Придавая переменным $x_2, \ldots, x_n$ произвольные числовые значения, получаем многочлен от переменной x_1. По предположению индукции

$$a_{11} = 0, \quad \sum_{i=2}^{n} a_{i1}x_i + a_1 = 0, \quad \sum_{i,\,j=2}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=2}^{n} a_i x_i + a = 0.$$

Так как эти соотношения имеют место при любых значениях переменных $x_2, \ldots, x_n$, то в силу предположения индукции $a_{ij} = 0$, $a_i = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $a = 0$. ➤

Лемма 27.2. *Если два многочлена с комплексными коэффициентами: (6) и*

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_i x_i + b, \tag{8}$$

принимают равные значения при любых значениях переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, *то эти многочлены равны, т. е.*

$$a_{ij} = b_{ij},\ a_i = b_i,\ a = b,\ i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

➤ Для доказательства достаточно применить лемму 27.1 к разности многочленов (6) и (8). ➤

Лемма 27.3. *Пусть каждый из многочленов (6) и (8) имеет вторую степень, т. е. среди коэффициентов a_{ij} есть отличные от нуля и не все коэффициенты b_{ij} — нули. Если эти многочлены имеют одни и те же корни, т. е. обращаются в нуль только при одних и тех же значениях переменных, то*

$$b_{ij} = \lambda a_{ij}, \ b_i = \lambda a_i, \ b = \lambda a, \ i, j = 1, 2, \ldots, n, \tag{9}$$

где λ — отличное от нуля комплексное число.

➤ Пусть $n = 1$, т. е. мы рассматриваем многочлены вида (7) и

$$b_{11}x_1^2 + 2b_1x_1 + b, \tag{10}$$

причем $a_{11} \neq 0$, $b_{11} \neq 0$. Пусть, далее, α и β — корни многочленов (7) и (10):

$$a_{11}x_1^2 + 2a_1x_1 + a = a_{11}(x_1 - \alpha)(x_1 - \beta),$$

$$b_{11}x_1^2 + 2b_1x_1 + b = b_{11}(x_1 - \alpha)(x_1 - \beta).$$

Тогда соотношения (9) имеют место при $\lambda = b_{11}/a_{11}$.

Пусть теперь $n > 1$. Предположим вначале, что по крайней мере один из многочленов, например (6), содержит квадрат какой-либо переменной, например x_1. Тогда многочлены (6) и (8) представимы в виде:

$$F = a_{11}x_1^2 + 2\left(\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i + a_1\right)x_1 + {} + \sum_{i,\, j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=2}^{n} a_ix_i + a, \tag{11}$$

$$\Phi = b_{11}x_1^2 + 2\left(\sum_{i=2}^{n} b_{1i}x_i + b_1\right)x_1 + {} + \sum_{i,\, j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=2}^{n} b_ix_i + b, \tag{12}$$

где $a_{11} \neq 0$. Пусть также $b_{11} \neq 0$. Придавая переменным $x_2, \ldots, x_n$ какие-либо числовые значения, мы превратим многочлены (11) и (12) в многочлены от одной переменной x_1 По доказанному выше

$$b_{11} = \lambda a_{11}, \quad \sum_{i=2}^{n} b_{1i}x_i + b_1 = \lambda\left(\sum_{i=2}^{n} a_{1i}x_i + a_1\right),$$

$$\sum_{i,\,j=2}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=2}^{n} b_ix_i + b = \lambda\left(\sum_{i,\,j=2}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=2}^{n} a_ix_i + a\right),$$

где λ – отличное от нуля комплексное число. Отсюда, согласно лемме 27.2, с учетом произвольности значений $x_2, \ldots, x_n$ получаем равенства (9).

Пусть теперь $b_{11} = 0$. Тогда многочлен Φ относительно x_1 имеет первую степень, и так как у многочленов F и Φ одни и те же корни, то

$$F = \lambda\Phi^2, \tag{13}$$

где λ – функция от $x_2, \ldots, x_n$: $\lambda = \lambda(x_2, \ldots, x_n)$.

Сравнивая в обеих частях равенства (13) коэффициенты при x_1^2, получаем $a_{11} = 4\lambda b_1^2$. Отсюда следует, что $\lambda =$ $=$ const. Тогда из равенства (13) находим: $b_{1i} = 0$, $b_{ij} = 0$, $i, j = 2, \ldots, n$. Итак, вопреки предположению, многочлен Φ имеет первую степень.

Обратимся теперь к случаю, когда многочлены (6) и (8) не содержат квадратов переменных. Так как по крайней мере один из коэффициентов a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, отличен от нуля, положим, например, $a_{12} \neq 0$. Преобразуем переменные:

$$x_1 = y_1 + y_2,\ x_2 = y_1 - y_2,\ x_i = y_i,\ i = 3, \ldots, n.$$

Подставив эти выражения переменных в многочлены (6) и (8), получим:

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = \sum_{i,\,j=1}^{n} a'_{ij}y_iy_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_iy_i + a', \tag{14}$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + b = \sum_{i,\,j=1}^{n} b'_{ij}y_iy_j + 2\sum_{i=1}^{n} b'_iy_i + b', \tag{15}$$

причем $a'_{11} = 2a_{12} \neq 0$.

Многочлены (14) и (15) относительно переменных y_1, $y_2, \ldots, y_n$ удовлетворяют условию леммы, и для них справедливо доказательство, приведенное выше. Но тогда

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + b = \sum_{i,\,j=1}^{n} b'_{ij}y_iy_j + 2\sum_{i=1}^{n} b'_iy_i + b' =$$

$$= \lambda\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a'_{ij}y_iy_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_iy_i + a'\right) =$$

$$= \lambda\left(\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a\right).$$

Отсюда и следуют равенства (9). ≺

Теперь можно утверждать, что имеет место

Теорема 27.1. *Для того чтобы два уравнения:*

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0,$$

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} b_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} b_ix_i + b = 0$$

задавали в выбранном репере одну и ту же квадрику, необходимо и достаточно, чтобы коэффициенты этих уравнений были пропорциональны, т. е. выполнялись равенства (9).

➤ Достаточность указанного условия отмечалась выше, необходимость следует из леммы 27.3. ≺

Выясним теперь, как преобразуется уравнение квадрики при переходе к новым координатам. Введем следующие обозначения:

$$A = [a_{ij}],\ A_1 = [a_1\ a_2\ \ldots\ a_n],\ S = [\alpha_{ij}],$$

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix},\ X' = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix},$$

$$X^T = [x_1\ x_2\ \ldots\ x_n].$$

Тогда уравнение квадрики (2) можно записать в виде

$$X^TAX + 2A_1X + a = 0, \tag{16}$$

а формулы преобразования координат при переходе от репера (1) к реперу

$$(O', \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n) \tag{17}$$

в виде

$$X = SX' + A_2 \tag{18}$$

(здесь $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – координаты произвольной точки $M \in A^n(i)$ относительно репера (1), а $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ – координаты той же точки относительно репера (17)). Подставляя выражение X из равенства (18) в левую часть уравнения (16), получаем

$$X^T AX + 2A_1X + a = X'^T BX' + 2B_1X' + b, \tag{19}$$

где $B = S^T AS$; $B_1 = A_2^T AS + A_1 S$; $b = A_2^T AA_2 + 2A_1A_2 + a$. Здесь мы воспользовались равенствами:

$$A^T = A, \ X'^T S^T AA_2 = (X'^T S^T AA_2)^T = A_2^T ASX'.$$

Из равенства (19) следует, что уравнение квадрики (2) относительно репера (17) имеет вид

$$X'^T BX' + 2B_1X' + b = 0. \tag{20}$$

Заметим, что при переходе от уравнения (2) к уравнению (20), соответствующему преобразованию координат (18), квадратичная форма $X^T AX$ преобразуется в квадратичную форму $X'^T BX'$, так же как и в результате преобразования $X = SX'$.

Если рассматривать (18) как формулы аффинного преобразования пространства $A^n(i)$, мы получим следующую теорему.

Теорема 27.2. *При аффинном преобразовании пространства $A^n(i)$ любая квадрика преобразуется в квадрику.*

27.3. Пересечение квадрики с прямой

Выберем в пространстве $A^n(i)$ некоторый репер и рассмотрим квадрику, определяемую в этом репере уравнением

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0. \tag{1}$$

Найдем точки пересечения квадрики (1) с прямой

$$x_i = b_i + c_i t,\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

где b_i, c_i – действительные числа. Подставляя выражения x_i из формул (2) в уравнение (1) и приводя подобные члены, получаем уравнение относительно t:

$$\left(\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j\right)t^2 + 2pt + q = 0, \tag{3}$$

где

$$p = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}b_ic_j + \sum_{i=1}^{n} a_ic_i;$$

$$q = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}b_ib_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ib_i + a.$$

Подставляя корни уравнения (3) в качестве значений t в формулы (2), получаем координаты всех искомых точек пересечения. Рассмотрим следующие два случая:

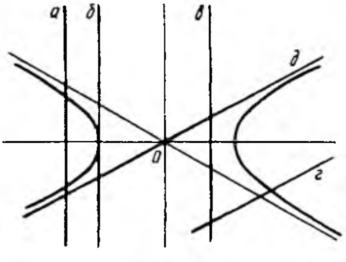
1) $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j \neq 0$; 2) $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}c_ic_j = 0$.

В первом случае уравнение (3) – квадратное, и в зависимости от значений его корней t_1 и t_2 имеются три возможности:

а) t_1, t_2 действительны и различны, прямая (2) пересекает квадрику (1) в двух различных действительных точках;

б) $t_1 = t_2$ – действительное число, прямая (2) имеет с квадрикой (1) одну общую действительную точку;

в) t_1 и t_2 не действительны, прямая (2) не пересекает квадрику (1) в действительных точках, но имеет с ней две общие мнимые точки.



Р и с. 27.1

Во втором случае имеем:

г) $p \neq 0$, уравнение (3) – линейное, и прямая (2) имеет с квадрикой (1) одну общую действительную точку;

д) $p = 0$, $q \neq 0$, равенство (3) не выполняется, прямая (2) не имеет с квадрикой (1) общих точек;

е) $p = 0$, $q = 0$, равенство (3) является тождеством, все точки прямой (2) принадлежат квадрике, т. е. сама прямая принадлежит квадрике.

На рис. 27.1 изображена гипербола и пять прямых различных типов.

27.4. Асимптотические направления

Выберем в пространстве $A^n(i)$ репер

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \tag{1}$$

и рассмотрим квадрику

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0. \tag{2}$$

Пусть задан ненулевой вектор

$$\mathbf{c}(c_1, c_2, \ldots, c_n), \tag{3}$$

действительный или мнимый. Будем говорить, что все векторы $\alpha\mathbf{c}$, где α – произвольное, отличное от нуля комплексное число, задают в пространстве $V^n(i)$ одно определенное направление, любой же другой ненулевой вектор задает другое направление.

Направление, определяемое вектором (3), будем называть *действительным,* если существует такое число α, что все координаты вектора $\alpha\mathbf{c}$ действительны, в противном случае – *мнимым.*

Определение 27.3. *Направление вектора (3) называется асимптотическим относительно квадрики (2), если*

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}c_i c_j = 0. \tag{4}$$

Поскольку левая часть уравнения квадрики (2) в репере (1) определена с точностью до числового множителя, отличного от нуля, определение асимптотического направления не зависит от выбора уравнения заданной квадрики в фиксированном репере. Кроме того, имеет место

Теорема 27.3. *Асимптотическое направление относительно квадрики (2) не зависит от выбора репера.*

➤ Запишем уравнение квадрики (2) в виде

$$X^T AX + 2A_1X + a = 0, \tag{5}$$

а равенство (4), определяющее асимптотическое направление, в виде

$$C^T AC = 0, \tag{6}$$

где $C^T = [c_1\ c_2\ \dots\ c_n]$.

Пусть переход к новому реперу задается формулами:

$$X = SX' + A_2, \tag{7}$$

$$C = SC', \tag{8}$$

где X' – столбец новых координат точки M; C' – столбец новых координат вектора (3). В новом репере уравнение квадрики (5) имеет вид

$$X'^T S^T ASX' + B_1X' + b = 0. \tag{9}$$

Используя формулу (8), получаем

$$C^T AC = C'^T S^T ASC'.$$

Но отсюда следует, что равенство (6) равносильно равенству

$$C'^T S^T ASC' = 0,$$

определяющему асимптотическое направление относительно квадрики (9). ◄

Проведенному сейчас рассуждению можно дать и другое истолкование, а именно: будем рассматривать равенства (7) как формулы аффинного преобразования пространства $A^n(i)$, выражающие координаты точки $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ (прообраза) в репере (1) через координаты точки $M'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ (образа) в том же репере. При этом преобразовании квадрика (5) перейдет в квадрику (9), а вектор (3) – в вектор $\mathbf{c}'(c_1', c_2', \dots, c_n')$. Тогда очевидно, что имеет место следующая

Теорема 27.4. *Пусть вектор* **c** *имеет асимптотическое (неасимптотическое) направление относительно квадрики K и f – аффинное преобразование простран-*

ства $A^n(i)$ с однородной частью φ. *Тогда вектор* $\varphi(\mathbf{c})$ *имеет асимптотическое (неасимптотическое) направление относительно квадрики $f(K)$.*

Теперь мы можем утверждать, что проведенное в § 27.3 разделение действительных прямых пространства $A^n(i)$ на шесть типов относительно данной квадрики имеет аффинный характер, а именно: справедлива

Теорема 27.5. *Пусть в пространстве $A^n(i)$ заданы квадрика K, прямая* Π *и аффинное преобразование f. Тогда прямая $f(\Pi)$ имеет относительно квадрики $f(K)$ тот же тип* (см. § 27.3), *что и прямая* Π *относительно квадрики K.*

➤ Доказательство вытекает из теоремы 27.4 и того факта, что при аффинном преобразовании пространства $A^n(i)$ действительные точки переходят в действительные, а мнимые – в мнимые. ◄

Докажем еще одну теорему, которая понадобится нам в дальнейшем.

Теорема 27.6. *Существует n линейно независимых векторов, имеющих неасимптотические относительно заданной квадрики (2) направления.*

➤ Как следует из § 22.4, существует преобразование координат

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j, \quad i = 1, 2, \ldots, n, \tag{10}$$

приводящее квадратичную форму $\sum\limits_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$ к нормальному виду

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (x'_i)^2, \quad \varepsilon_i = \pm 1, \quad 0 < r \leqslant n.$$

Запишем уравнение квадрики (2) в новом репере:

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (x'_i)^2 + 2\sum_{j=1}^{n} a'_j x'_j + a = 0. \tag{11}$$

На основании теоремы 27.3 мы можем искать векторы неасимптотических направлений исходя из уравнения (11), т. е. как векторы $\mathbf{c}'(c_1', c_2', \dots, c_n')$, удовлетворяющие неравенству

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i (c_i')^2 \neq 0.$$

Очевидно, что векторы:

$$\begin{array}{l}
\mathbf{c}_1(1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\
\mathbf{c}_2(0, 1, \dots, 0, 0, \dots, 0), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{c}_r(0, 0, \dots, 1, 0, \dots, 0), \\
\mathbf{c}_{r+1}(1, 0, \dots, 0, 1, \dots, 0), \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
\mathbf{c}_n(1, 0, \dots, 0, 0, \dots, 1)
\end{array}$$

удовлетворяют условию теоремы. ◄

27.5. Линии эллиптического, гиперболического и параболического типов

Пусть на плоскости $A^2(i)$ выбран некоторый репер и задано уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0. \quad (1)$$

Векторы, имеющие относительно линии (1) асимптотические направления, определяются равенством

$$a_{11}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_2^2 = 0. \quad (2)$$

Пусть вектор $\mathbf{c}$ имеет асимптотическое направление относительно линии (1). Так как любой вектор $\alpha\mathbf{c}$, где α – произвольное, отличное от нуля комплексное число, имеет то же направление, то направление вполне определяется заданием отношения $c_1:c_2$ координат вектора $\mathbf{c}$, если $c_2 \neq 0$. Мы будем употреблять запись $c_1:c_2$ и в том случае, когда $c_2 = 0$, а именно: символ $1:0$ задает направление базисного вектора $\mathbf{e}_1$.

Пусть $a_{11} \neq 0$. У вектора, имеющего асимптотическое направление, $c_2 \neq 0$, так как в противном случае из равенства (2) следует $a_{11}c_1^2 = 0$, а $a_{11} \neq 0$ и $c_1 \neq 0$. Запишем теперь равенство (2) в виде

$$a_{11}\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 + 2a_{12}\frac{c_1}{c_2} + a_{22} = 0.$$

Решая это квадратное уравнение относительно c_1/c_2, получаем

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

Возможны следующие случаи:

1) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$, поэтому не существует действительных асимптотических направлений относительно линии (1), иначе, существует два мнимых асимптотических направления;

2) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$, следовательно, существует два действительных асимптотических направления;

3) $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$, поэтому существует одно действительное асимптотическое направление.

Если $a_{11} = 0$, а $a_{22} \neq 0$, то, меняя ролями c_1 и c_2, приходим к тем же случаям.

Наконец, пусть $a_{11} = 0$ и $a_{22} = 0$. Тогда $a_{12} \neq 0$, и уравнение (2) принимает вид $a_{12}c_1c_2 = 0$. В этом случае существует два асимптотических направления, определяемые векторами $\mathbf{c}(1, 0)$ и $\mathbf{c}'(0, 1)$.

Определение 27.4. *Линия второго порядка на плоскости $A^2(i)$ называется линией эллиптического, гиперболического или параболического типа в соответствии с тем, к какому из трех указанных выше случаев она относится.*

При аффинных преобразованиях плоскости $A^2(i)$ линия второго порядка не может изменить свой тип, так как при этом действительные асимптотические направления переходят в действительные.

Пример 27.1. Найти асимптотические направления линии

$$x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 - 5x_1 + 2x_2 - 3 = 0. \qquad (3)$$

Решение. Координаты c_1 и c_2 вектора, имеющего асимптотические направление, находятся из уравнения

$$c_1^2 - 3c_1c_2 + 2c_2^2 = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\left(\frac{c_1}{c_2}\right)^2 - 3\frac{c_1}{c_2} + 2 = 0.$$

Оно имеет два решения: $c_1 : c_2 = 2:1$ и $c_1' : c_2' = 1:1$, и, следовательно, линия (3) – гиперболического типа.

Упражнения

1. Докажите, что на плоскости $\mathbf{E}^2$ эллипс является линией эллиптического типа; гипербола и пара пересекающихся прямых – линиями гиперболического типа; парабола, пара параллельных прямых и прямая – линиями параболического типа.

2. Прямая в пространстве $A^n(i)$ имеет асимптотическое направление, если ее направляющий вектор имеет асимптотическое направление относительно квадрики. Нарисуйте фигуры, образованные в пространстве $\mathbf{E}^3$ всеми прямыми, имеющими асимптотическое направление относительно однополостного и двуполостного гиперболоидов.

27.6. Центр квадрики

Пусть в пространстве $A^n(i)$ выбран некоторый репер и задана квадрика уравнением

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0. \qquad (1)$$

Предположим, что точка $B(b_1, b_2, ..., b_n)$ – *центр квадрики* (1) (см. § 25.8). Рассмотрим прямую

$$x_i = b_i + c_i t,\ i = 1, 2, ..., n,\ b_i, c_i \in \mathbf{R}, \qquad (2)$$

имеющую неасимптотическое направление. Как известно из § 27.3, прямая (2) имеет с квадрикой (1) две общие точки, различные или совпадающие. Для отыскания этих точек подставим значения x_i из формул (2) в уравнение (1) и приведем подобные члены. Получим

$$t^2 \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}c_i c_j + 2t\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j + a_i\right)c_i + q = 0, \qquad (3)$$

где

$$q = \sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}b_i b_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i b_i + a.$$

Если t_1 и t_2 – корни уравнения (3), то точками пересечения прямой (2) с квадрикой (1) будут:

$$M_1(b_1 + c_1t_1, b_2 + c_2t_1, ..., b_n + c_nt_1)$$

и

$$M_2(b_1 + c_1t_2, b_2 + c_2t_2, ..., b_n + c_nt_2).$$

Так как точка B является серединой отрезка M_1M_2, то (см. § 25.8)

$$b_i = \frac{(b_i + c_it_1) + (b_i + c_it_2)}{2} = b_i + \frac{c_i}{2}(t_1 + t_2),\ i = 1, 2, ..., n. \quad (4)$$

Поскольку среди чисел

$$c_1, c_2, ..., c_n \quad (5)$$

есть отличные от нуля, то из равенств (4) следует, что $t_1 + t_2 = 0$. Но тогда в квадратном уравнении (3) коэффициент при первой степени t должен быть равен нулю, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j + a_i\right)c_i = 0. \quad (6)$$

Рассмотрим (6) как систему линейных однородных уравнений относительно неизвестных (5) (система состоит из одного уравнения). Она должна удовлетворяться для любого неасимптотического направления. Как известно из § 27.4, существует n линейно независимых решений этой системы, и, следовательно, ее ранг равен нулю, т. е.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_j + a_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n. \quad (7)$$

Системе (7) должны удовлетворять координаты b_i любого центра квадрики (1). Верно и обратное: любая точка $B(b_1, b_2, ..., b_n)$, удовлетворяющая системе (7), является центром квадрики (1), так как из равенств (7) следуют равенства (4).

Перепишем систему (7) в виде

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i = 0,\ i = 1, 2, ..., n. \quad (8)$$

Итак, решения системы (8), и только они, являются координатами центров квадрики (1). Так как система (8) –

линейная, то множество центров квадрики (1), если оно непустое, является плоскостью пространства $A^n(i)$.

Определение 27.5. *Квадрика, имеющая единственный центр, называется центральной.*

Рассмотрим теперь плоскость $A^2(i)$. Пусть в некоторой аффинной системе координат задано уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0. \quad (9)$$

Система уравнений для определения координат центра имеет вид

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_1 &= 0, \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_2 &= 0. \end{aligned}\right\} \quad (10)$$

Так как для линий эллиптического и гиперболического типов определитель системы (10)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,$$

то каждая из этих линий имеет единственный центр, т. е. является центральной линией. Таким образом, линии эллиптического и гиперболического типов − центральные.

У параболы $x_1^2 - 2px_2 = 0$ нет центра, так как второе уравнение системы (10) дает $p = 0$, что противоречит определению параболы. Для пары параллельных прямых

$$x_1^2 - a^2 = 0 \quad (11)$$

система (10) сводится к одному уравнению $x_1 = 0$. Отсюда следует, что каждая точка прямой, задаваемой этим уравнением, является центром линии (11), т. е. линия (11) имеет прямую центров. Это же справедливо для линии $x_1^2 = 0$.

Упражнения

1. Пусть квадрика (1) имеет хотя бы один центр. Найдите размерность плоскости, состоящей из всех центров квадрики (1).

2. Докажите, что линия второго порядка (9), имеющая центр, принадлежащий этой линии, распадается на две прямые (различные или совпадающие).

27.7. Диаметральные плоскости

Пусть в пространстве $A^n(i)$ выбран некоторый репер и задана квадрика

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0. \tag{1}$$

Пусть, далее,

$$x_i = b_i + c_i t,\ i = 1, 2, \dots, n, \tag{2}$$

есть уравнения прямой, направляющий вектор которой

$$\mathbf{c}(c_1, c_2, \dots, c_n) \tag{3}$$

имеет неасимптотическое относительно квадрики (1) направление. Прямая (2) пересекает квадрику (1) в двух точках: $M'(x_1', x_2', \dots, x_n')$ и $M''(x_1'', x_2'', \dots, x_n'')$, быть может, совпадающих.

Определение 27.6. *Отрезок $M'M''$, определяемый двумя точками, принадлежащими квадрике (1), называется хордой этой квадрики.*

Если в качестве начальной точки $B(b_1, b_2, \dots, b_n)$ прямой (2) взять середину хорды $M'M''$, то должно выполняться равенство (6) из § 27.6:

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}c_i b_j + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = 0. \tag{4}$$

(Если $M' = M''$, то положим $B = M' = M''$.)

Рассмотрим теперь все прямые с заданным направляющим вектором (3). Середины хорд, отсекаемых на этих прямых квадрикой (1), образуют множество точек, определяемое уравнением

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}c_i x_j + \sum_{i=1}^{n} a_i c_i = 0, \tag{5}$$

которое получается из равенства (2) заменой обозначений b_j на x_j. Уравнение (5) – линейное. В самом деле, если в этом уравнении все коэффициенты при x_j – нули, т. е.

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_i = 0,\ j = 1, 2, \dots, n,$$

то, умножая каждое из этих равенств на соответствующее c_j и суммируя по j, получаем

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij} c_i c_j = 0,$$

т. е., вопреки предположению, вектор (3) имеет асимптотическое направление. Таким образом, верна

Теорема 27.7. *Множество середин хорд, отсекаемых квадрикой (1) на всех параллельных прямых с направляющим вектором (3), имеющим неасимптотическое направление, является гиперплоскостью с уравнением (5).*

Определение 27.7. *Гиперплоскость (5) называется диаметральной гиперплоскостью квадрики (1), сопряженной с направлением вектора (3).* Очевидно, что диаметральная плоскость — аффинное понятие.

Упражнения

1. Докажите, что если квадрика в $A^n(i)$ имеет хотя бы один центр, то всякая гиперплоскость, содержащая все центры данной квадрики, является ее диаметральной гиперплоскостью.

2. Докажите, что каждая диаметральная плоскость квадрики в пространстве $A^n(i)$ проходит через любой центр этой квадрики.

27.8. Диаметры линий второго порядка

Рассмотрим плоскость $A^2(i)$. Выберем некоторый репер и зададим линию второго порядка с уравнением

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a = 0. \qquad (1)$$

В этом случае диаметральная гиперплоскость является прямой и называется *диаметром*. Уравнение диаметра, сопряженного с неасимптотическим направлением вектора $\mathbf{c}(c_1, c_2)$, имеет вид

$$(a_{11}c_1 + a_{12}c_2)x_1 + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2)x_2 + a_1c_1 + a_2c_2 = 0. \quad (2)$$

Как отмечалось в предыдущем параграфе, каждый диаметр линии (1) проходит через любой ее центр. Для линии (1), имеющей прямую центров, вопрос о диаметрах решается теперь полностью: у такой линии имеется только один диаметр — прямая центров.

Рассмотрим теперь вопрос о диаметрах центральной линии (1). В этом случае

$$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0. \tag{3}$$

Определение 27.8. *Два направления $c_1:c_2$ и $c_1':c_2'$ называются сопряженными относительно центральной линии второго порядка (1), если они удовлетворяют соотношению*

$$a_{11}c_1c_1' + a_{12}(c_1c_2' + c_2c_1') + a_{22}c_2c_2' = 0. \tag{4}$$

Отметим основные свойства сопряженных направлений.

1. *Каждому направлению $c_1:c_2$ соответствует в качестве сопряженного одно вполне определенное направление $c_1':c_2'$.*

➤ В самом деле, перепишем равенство (4) в виде

$$(a_{11}c_1 + a_{12}c_2)c_1' + (a_{12}c_1 + a_{22}c_2)c_2' = 0. \tag{5}$$

Если предположить, что

$$\left.\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 &= 0, \\ a_{12}c_1 + a_{22}c_2 &= 0, \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

то в силу неравенства (3) мы получим, что система уравнений (6) относительно неизвестных c_1 и c_2 имеет только нулевое решение: $c_1 = 0$, $c_2 = 0$. Но это невозможно, так как вектор $\mathbf{c}(c_1, c_2)$ – ненулевой. Итак, оба коэффициента при c_1' и c_2' в уравнении (5) не могут одновременно обратиться в нуль, и, следовательно, из уравнения мы найдем вполне определенное отношение $c_1':c_2'$. ➤

2. *Асимптотическое направление, и только оно, сопряжено самому себе.*

➤ В самом деле, если для данного направления $c_1:c_2$ сопряженным является само это направление, то равенство (4) дает

$$a_{11}c_1^2 + 2a_{12}c_1c_2 + a_{22}c_2^2 = 0, \tag{7}$$

т. е. направление $c_1:c_2$ – асимптотическое.

Обратно, если направление $c_1:c_2$ – асимптотическое, т. е. удовлетворяет равенству (7), то равенство (4) выполняется, если $c_1' = c_1$ и $c_2' = c_2$. Следовательно, направление $c_1:c_2$ сопряжено самому себе. ➤

3. *Если направление $c_1:c_2$ – неасимптотическое, то сопряженное направление также неасимптотическое и является направлением диаметра, сопряженного с направлением $c_1:c_2$.*

➤ В самом деле, диаметр, сопряженный с неасимптотическим направлением $c_1:c_2$, – это прямая (2). Для направляющего вектора $\mathbf{c}'(c_1', c_2')$ этой прямой выполняется условие

$$c_1':c_2' = -(a_{12}c_1 + a_{22}c_2):(a_{11}c_1 + a_{12}c_2),$$

откуда и следует равенство (5). ◄

Определение 27.9. *Два диаметра линии второго порядка, имеющие взаимно сопряженные направления, называются сопряженными диаметрами.*

Из определения диаметра следует, что *каждый из двух сопряженных диаметров делит пополам все хорды, параллельные другому диаметру.*

На рис. 27.2 изображены эллипс, два его взаимно сопряженных диаметра и параллельные им хорды.

Мы знаем, что любой диаметр центральной линии второго порядка (1) проходит через ее центр. Покажем теперь, что любая прямая l неасимптотического направления, проходящая через центр центральной линии второго порядка, является диаметром этой линии. В самом деле, пусть $c_1:c_2$ определяет направление прямой l и $c_1':c_2'$ – сопряженное направление, причем оба этих направления являются неасимптотическими. Рассмотрим диаметр, сопряженный с направлением $c_1':c_2'$. Он имеет направление $c_1:c_2$ и, проходя через центр линии (1), совпадает с прямой l.

Теперь рассмотрим диаметры параболы. Пусть парабола в некоторой прямоугольной системе координат задается уравнением

$$2px_1 - x_2^2 = 0. \qquad (8)$$

Уравнение диаметра параболы (8), сопряженного с направлением $c_1:c_2$, имеет вид $pc_1 - c_2x_2 = 0$. Отсюда следует, что все диаметры параболы параллельны ее оси и любая прямая, параллельная оси параболы, является диаметром.

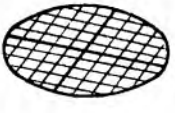


Рис. 27.2

Пример 27.2. Записать уравнение диаметра линии

$$5x_1^2 - 4x_1x_2 - 6x_1 - 2x_2 + 1 = 0, \tag{9}$$

проходящего через точку $M(2, -4)$.

Р е ш е н и е. Уравнение (2) для линии (9) имеет вид

$$(5x_1 - 2x_2 - 3)c_1 - (2x_1 + 1)c_2 = 0. \tag{10}$$

Координаты точки M должны удовлетворять этому уравнению, следовательно, $3c_1 = c_2$. Подставляя выражение c_2 через c_1 в уравнение (10), сокращая на c_1 и приводя подобные члены, получаем $x_1 + 2x_2 + 6 = 0$ – уравнение искомого диаметра.

27.9. Приведение уравнения квадрики к нормальному виду с помощью преобразования координат

Пусть в пространстве $A^n(i)$ выбран некоторый репер и задано уравнение квадрики

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0. \tag{1}$$

Постараемся за счет преобразования координат упростить это уравнение.

Как известно из § 22.4, существует преобразование координат

$$x_i = \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}x'_k,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\det[\alpha_{ik}] \neq 0$; α_{ik} – действительные числа, приводящее квадратичную форму $\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$ к нормальному виду $\sum\limits_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x'_i)^2$, где $\varepsilon_i = \pm1;\ 0$. Уравнение квадрики (1) в новых координатах имеет вид

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i(x'_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} a'_ix'_i + a = 0, \tag{3}$$

где $\varepsilon_i = \pm1;\ 0$.

Если $\varepsilon_i \neq 0$ для некоторого i, то с помощью преобразования координат можно исключить член с первой степенью x'_i. Пусть, например, $\varepsilon_1 \neq 0$. Имеем

$$\varepsilon_1 x_1^2 + 2a_1' x_1' = \varepsilon_1 (x_1' + a_1'/\varepsilon_1)^2 - (a_1')^2/\varepsilon_1.$$

Выполним теперь преобразование координат, заданное формулами:

$$\tilde{x}_1 = x_1' + a_1'/\varepsilon_1, \ \tilde{x}_i = x_i', \ i = 2, 3, \ldots, n.$$

Такое преобразование называется *параллельным переносом репера.*

При переходе к новым координатам в уравнении квадрики (3) коэффициент при квадрате первой координаты сохранится, первая степень первой координаты исчезнет, свободный член получит дополнительное слагаемое. Аналогичные преобразования мы произведем и с другими координатами, для которых $\varepsilon_i \neq 0$. Предположим, что в уравнении (3)

$$\varepsilon_1 \neq 0, \ \varepsilon_2 \neq 0, \ \ldots, \ \varepsilon_r \neq 0, \ \varepsilon_{r+1} = 0, \ \ldots, \ \varepsilon_n = 0. \quad (4)$$

Этого всегда можно добиться. В самом деле, если, например, $\varepsilon_1 = 0$, а $\varepsilon_{r+1} \neq 0$, то, совершив преобразование координат по формулам: $\tilde{x}_1 = x_{r+1}'$, $\tilde{x}_{r+1} = x_1'$, $\tilde{x}_i = x_i'$, $i \neq 1$, $r + 1$, мы придем к тому, что коэффициент при $\tilde{x}_1^2$ будет равен ± 1.

Итак, предполагая, что выполнены условия (4), и выполняя указанные выше параллельные переносы репера, мы приводим уравнение квадрики (4) к виду

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \tilde{x}_i^2 + 2 \sum_{j=r+1}^{n} a_j' \tilde{x}_j + b = 0. \quad (5)$$

Пусть $a_{r+1}' = a_{r+2}' = \ldots = a_n' = 0$, т. е. уравнение (5) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \tilde{x}_i^2 + b = 0. \quad (6)$$

Если $b \neq 0$, введем обозначения $\lambda_i = -\varepsilon_i/b$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда уравнение (6) примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \lambda_i \tilde{x}_i^2 = 1. \quad (7)$$

Преобразуя координаты по формулам:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \sqrt{\lambda_i}\,\bar{x}_i, \text{ если } \lambda_i > 0, \\ X_j &= \sqrt{-\lambda_j}\,\bar{x}_j, \text{ если } \lambda_j < 0, \\ X_k &= \bar{x}_k, \text{ для остальных } \bar{x}_k, \end{aligned}\right\}$$

приводим уравнение (7) к виду

$$\sum_{i=1}^{r} \mu_i X_i^2 = 1,\ \mu_i = \pm 1,\ 0 < r \leqslant n. \tag{8}$$

Если в уравнении (6) $b = 0$, то это уравнение имеет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i \bar{x}_i^2 = 0,\ \varepsilon_i = \pm 1,\ 0 < r \leqslant n. \tag{9}$$

Пусть теперь в уравнении (5) среди коэффициентов a'_j есть отличные от нуля, например $a'_{r+1} \neq 0$. Выполним преобразование координат:

$$\left.\begin{aligned} X_{r+1} &= -\sum_{j=r+1}^{n} a'_j \bar{x}_j - b/2, \\ X_i &= \bar{x}_i,\ i \neq r+1. \end{aligned}\right\}$$

Тогда уравнение (5) примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \varepsilon_i X_i^2 = 2X_{r+1},\ 0 < r \leqslant n. \tag{10}$$

Определение 27.10. *Уравнения (8)–(10) называются нормальными уравнениями квадрик в пространстве $A^n(i)$.*

Таким образом, имеет место

Теорема 27.8. *Любая квадрика пространства $A^n(i)$ в подходящем репере может быть задана нормальным уравнением.*

Выясним геометрический смысл системы координат, в которой квадрика задается нормальным уравнением (8), (9) или (10). Рассмотрим вектор $\mathbf{e}_i$, $i \leqslant r$. Диаметральная гиперплоскость, сопряженная с направлением этого вектора, имеет уравнение

$$X_i = 0. \tag{11}$$

Определение 27.11. *Гиперплоскость (11) называется координатной гиперплоскостью репера* $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n)$.

Таким образом, для вектора $\mathbf{e}_i$, $i \leqslant r$, сопряженная с ним диаметральная гиперплоскость является координатной. Если же $i > r$, то вектор $\mathbf{e}_i$ имеет относительно квадрики асимптотическое направление.

Заметим, что уравнения (8) и (9) в отличие от уравнения (10) не содержат первых степеней неизвестных. Это связано с тем, что у каждой из квадрик (8), (9) есть по крайней мере один центр — начало координат, а у квадрики (10) центра нет, что легко проверить. Имеет место

Теорема 27.9. *Для того чтобы в уравнении квадрики отсутствовали члены с первыми степенями неизвестных, необходимо и достаточно, чтобы начало координат являлось центром квадрики.*

➤ Если начало координат является центром квадрики, то уравнения центра:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + a_i = 0,\ i = 1, 2, \ldots, n,$$

имеют решение $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, ..., $x_n = 0$. Следовательно, $a_1 = 0$, $a_2 = 0$, ..., $a_n = 0$.

Обратно, если в уравнении (1) нет членов первой степени, то этому уравнению наряду с точкой $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ удовлетворяет и точка $M'(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$, и, следовательно, начало координат является центром квадрики. ◄

27.10. Аффинная классификация квадрик

Рассмотрим нормальные уравнения квадрик пространства $A^n(i)$, полученные в предыдущем параграфе:

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 1,\ 0 < r \leqslant n,\ 0 \leqslant k \leqslant r, \quad (1)$$

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 0,$$
$$0 < r \leqslant n,\ 0 \leqslant k \leqslant r/2, \quad (2)$$

$$-x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 2x_{r+1},$$
$$0 < r < n,\ 0 \leqslant k \leqslant r/2. \quad (3)$$

Пусть квадрика Ф задана в репере

$$(O,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n) \tag{4}$$

уравнением (1), а квадрика Φ' – в репере

$$(O',\ \mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n) \tag{5}$$

тем же уравнением (с теми же r и k). Рассмотрим аффинное преобразование пространства $A^n(i)$, переводящее репер (4) в репер (5). При этом преобразовании квадрика Φ как множество всех точек пространства, координаты которых в репере (4) удовлетворяют уравнению (1), перейдет в квадрику Φ', состоящую из всех точек, координаты которых в репере (5) удовлетворяют тому же уравнению. Приведенное рассуждение применимо к любым двум квадрикам, которые в подходящих реперах задаются одним и тем же из нормальных уравнений (1) – (3) (при одних и тех же r и k): для таких квадрик существует аффинное преобразование пространства $A^n(i)$, переводящее одну из них в другую.

Пусть теперь Φ и Φ' – две квадрики, которые в репере (4) задаются соответственно уравнениями:

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0, \tag{6}$$

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i + a' = 0. \tag{7}$$

(В последнем уравнении для удобства дальнейших рассуждений мы поставили штрихи у координат.) Пусть, далее, существует аффинное преобразование f пространства $A^n(i)$, переводящее квадрику (6) в квадрику (7). Запишем формулы этого преобразования в виде

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x'_j + \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

где $\det[\alpha_{ij}] \neq 0$; α_{ij}, α_i – действительные числа; x_1, x_2, ..., x_n – координаты произвольной точки M пространства $A^n(i)$ в репере (4); x'_1, x'_2, ..., x'_n – координаты точки $f(M)$ в том же репере.

Если в левую часть уравнения (6) подставить выражения x_i, x_j из формул (8), то получится выражение, отличающееся от левой части уравнения (7) лишь постоянным действительным множителем $b \neq 0$ (см. теорему 27.1). При этом квадратичная форма

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{9}$$

преобразуется в квадратичную форму

$$b \sum_{i,\ j=1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j, \tag{10}$$

причем коэффициенты a'_{ij} не зависят от α_i, т. е. переход от формы (9) к (10) совершается фактически с помощью преобразования координат:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{11}$$

где $\det[\alpha_{ij}] \neq 0$; α_{ij} – действительные числа, с последующим умножением на действительное число $b \neq 0$.

Покажем теперь, что от любого из нормальных уравнений (1) – (3) нельзя перейти к какому-либо другому нормальному уравнению с помощью преобразований (8). Иначе говоря, мы покажем, что квадрики пространства $A^n(i)$, задаваемые различными нормальными уравнениями, не переводятся друг в друга с помощью аффинных преобразований этого пространства.

Квадрика (3) отличается от квадрик (1) и (2) отсутствием центров. Далее, в отличие от квадрики (1) любой центр квадрики (2) принадлежит этой квадрике. Если теперь сравнить квадратичные формы двух нормальных уравнений одного и того же вида, например (2) при несовпадающих r или k, то мы увидим, что они различаются либо рангом r, либо величиной $s = |r - 2k|$. Но при преобразовании (11) ранг и величина s не меняются, а при умножении на действительное число $b \neq 0$ ранг не меняется, а число $r - 2k$ может изменить только знак. Проведенные выше рассуждения позволяют сформулировать следующую теорему.

Теорема 27.10. *Разобьем множество всех квадрик пространства $A^n(i)$ на классы, отнеся к одному классу все квадрики, которые в подходящих реперах задают-*

ся одним и тем же нормальным уравнением. Это разбиение на классы является отношением эквивалентности в множестве всех квадрик. Все квадрики, принадлежащие одному классу, аффинно эквивалентны. Квадрики, принадлежащие различным классам, аффинно различны, т. е. не могут переводиться друг в друга с помощью аффинных преобразований пространства $A^n(i)$.

27.11. Аффинная классификация линий второго порядка на плоскости $A^2(i)$

Изучим детальнее аффинную классификацию линий второго порядка на плоскости $A^2(i)$ и сопоставим ее с классификацией, полученной в гл. 15 для плоских фигур второго порядка.

Согласно теореме 27.8, любая линия второго порядка на плоскости $A^2(i)$ может быть задана в подходящем репере одним из следующих нормальных уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = -1, \tag{2}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \tag{3}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \tag{4}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{5}$$

$$x_1^2 = 2x_2, \tag{6}$$

$$x_1^2 - 1 = 0, \tag{7}$$

$$x_1^2 + 1 = 0, \tag{8}$$

$$x_1^2 = 0. \tag{9}$$

Множество всех линий второго порядка на плоскости $A^2(i)$ распадается на непересекающиеся классы. Линии, принадлежащие одному классу, задаются в подходящих реперах одним и тем же нормальным уравнением. Кроме того, каждая из этих линий может быть переведена в любую другую линию из того же класса с помощью некоторого аффинного преобразования. Для двух линий из разных классов не существует аффинного преобразования, переводящего одну линию в другую.

Рассмотрим плоскость $\mathbf{E}^2$, фигурирующую в гл. 15, как множество действительных точек плоскости $A^2(i)$ и выясним отношение различных плоских фигур второго порядка к аффинным классам линий второго порядка, определяемым уравнениями (1) – (9).

Начнем с уравнения (1). Покажем, что оно задает эллипсы. В самом деле, произвольный эллипс можно задать в подходящей прямоугольной системе координат Oxy с помощью уравнения

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{10}$$

Совершим переход к аффинной системе координат Ox_1x_2 по формулам: $x = ax_1$, $y = bx_2$. Подставляя эти выражения в левую часть уравнения (10), получаем $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Таким образом, эллипс (10) задается в подходящей аффинной системе координат нормальным уравнением (1). Линия второго порядка, заданная на плоскости $A^2(i)$ уравнением (1), кроме действительных точек, образующих эллипс (10), содержит еще и мнимые точки. В качестве примера укажем точку $M(i, \sqrt{2})$, координаты которой удовлетворяют уравнению (1).

Пусть теперь на плоскости $A^2(i)$ задана произвольная линия l второго порядка с уравнением (1) в некоторой аффинной системе координат. Рассмотрим множество l' всех действительных точек линии l и покажем, что l' – эллипс. Во-первых, отметим, что l' – фигура в плоскости $\mathbf{E}^2$, заданная в аффинной системе координат Ox_1x_2 уравнением (1). Перейдем к какой-либо прямоугольной системе координат Oxy. Как показано в § 27.2, уравнение (1) перейдет в уравнение второй степени относительно x, y, задающее фигуру l' в прямоугольной системе координат. Следовательно, l' есть плоская фигура второго порядка. В соответствии с § 27.5 находим, что l – линия эллиптического типа. Но тогда l' не может быть гиперболой, параболой, парой пересекающихся или параллельных прямых, прямой. С другой стороны, l' не является точкой и пустым множеством. Согласно теореме 15.1, получаем, что l' эллипс.

Итак, доказано, что класс линий второго порядка, определяемых каноническим уравнением (1), состоит из всех эллипсов, и только из них.

Перейдем к уравнению (2). Ему не удовлетворяет ни одна действительная точка. В плоскости $\mathbf{E}^2$ это уравнение задает пустое множество. Однако в плоскости $A^2(i)$ есть мнимые точки, удовлетворяющие уравнению (2), например точка $M(2i, \sqrt{3})$. Линия второго порядка, определяемая на плоскости $A^2(i)$ уравнением (2), называется *мнимым эллипсом*.

Уравнение (3) исследуется аналогично уравнению (1). Линия второго порядка, заданная на плоскости $A^2(i)$ уравнением (3), называется *гиперболой*. Она состоит из обычной гиперболы, изученной в § 15.2, 15.3, и некоторого множества мнимых точек.

Рассмотрим уравнение (4). На плоскости $\mathbf{E}^2$ оно задает пару обычных прямых:

$$x_1 - x_2 = 0, \; x_1 + x_2 = 0, \tag{11}$$

пересекающихся в начале координат. На плоскости $A^2(i)$ к действительным точкам прямых (11) добавляются мнимые точки этих прямых, заданных теми же уравнениями.

Уравнение (5) было рассмотрено в § 27.2. На плоскости $\mathbf{E}^2$ оно задает точку $O(0, 0)$, а на плоскости $A^2(i)$ – пару мнимых прямых: $x_1 - ix_2 = 0$, $x_1 + ix_2 = 0$, пересекающихся в действительной точке $O(0, 0)$.

Уравнение (6) задает на плоскости $\mathbf{E}^2$ параболу, которая на плоскости $A^2(i)$ дополняется мнимыми точками. Полученная линия второго порядка также называется *параболой*.

Уравнение (7) задает на плоскости $\mathbf{E}^2$ пару параллельных прямых:

$$x_1 = 1, \; x_1 = -1. \tag{12}$$

На плоскости $A^2(i)$ к действительным точкам прямых (12) добавляются мнимые точки прямых, заданных теми же уравнениями.

Уравнение (8) задает на плоскости $\mathbf{E}^2$ пустое множество. Рассматривая это уравнение на плоскости $A^2(i)$, удобно представить его в виде $(x_1 - i)(x_1 + i) = 0$. Очевидно, что это уравнение задает на плоскости $A^2(i)$ пару мнимых параллельных прямых: $x_1 - i = 0$, $x_1 + i = 0$.

Наконец, уравнение (9) задает на плоскости $\mathbf{E}^2$ прямую, а именно: координатную ось Ox_2. С учетом того, что (9) есть уравнение второй степени, говорят, что это уравнение задает *сдвоенную прямую* как на плоскости $\mathbf{E}^2$, так и на плоскости $A^2(i)$.

Упражнения

1. Проведите исследование уравнений (3) и (6), которое мы опустили в тексте параграфа.

2. Для каждой из линий второго порядка (1) – (9) укажите свойства, отличающие ее от других линий второго порядка (наличие центров, характер асимптотических направлений и т. д.).

27.12. Аффинная классификация поверхностей второго порядка в пространстве $A^3(i)$

В этом параграфе мы подробнее рассмотрим аффинную классификацию поверхностей второго порядка в пространстве $A^3(i)$ и сопоставим ее с результатами, полученными в гл. 16 для фигур второго порядка в пространстве $\mathbf{E}^3$.

Как показано в § 27.9, любая поверхность второго порядка в пространстве $A^3(i)$ может быть задана в подходящем репере одним из следующих нормальных уравнений:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \tag{1}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = -1, \tag{2}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1, \tag{3}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = -1, \tag{4}$$

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0, \tag{5}$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \tag{6}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 2x_3, \tag{7}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 2x_3, \tag{8}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 1, \tag{9}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = -1, \tag{10}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \tag{11}$$

$$x_1^2 = 2x_2, \tag{12}$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0, \tag{13}$$

$$x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{14}$$

$$x_1^2 - 1 = 0, \tag{15}$$

$$x_1^2 + 1 = 0, \tag{16}$$

$$x_1^2 = 0. \tag{17}$$

Множество всех поверхностей второго порядка в пространстве $A^3(i)$ распадается на непересекающиеся классы. Поверхности, принадлежащие одному классу, задаются в подходящих реперах одним и тем же нормальным уравнением. Далее, каждая из этих поверхностей может быть переведена в любую другую поверхность того же класса с помощью некоторого аффинного преобразования. С другой стороны, поверхность одного класса не может быть переведена в поверхность другого класса никаким аффинным преобразованием.

Рассмотрим точечное трехмерное евклидово пространство $\mathbf{E}^3$ как множество действительных точек пространства $A^3(i)$ и выясним отношение различных фигур второго порядка, рассмотренных в гл. 16, к аффинным классам поверхностей второго порядка, определяемым уравнениями (1) – (17).

Покажем, что класс поверхностей второго порядка, определяемых уравнением (1), включает все эллипсоиды. В самом деле, произвольный эллипсоид задается в подходящей прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{18}$$

Выполним переход к аффинной системе координат $Ox_1x_2x_3$ по формулам: $x = ax_1$, $y = bx_2$, $z = cx_3$. В новой системе координат эллипсоид (18) будет задаваться уравнением (1). Итак, рассматриваемая поверхность второго порядка, определяемая уравнением (1), включает эллипсоид в качестве множества действительных точек. Кроме того, эта поверхность содержит и мнимые точки. Поверхности второго порядка в пространстве $A^3(i)$, заданные в подходящих системах координат уравнением (1), называются *эллипсоидами*. Поверхность, заданная уравнением (2), называется *мнимым эллипсоидом*.

Уравнение (3) задает в пространстве $\mathbf{E}^3$ однополостный гиперболоид, а уравнение (4) – двуполостный гиперболоид. В пространстве $A^3(i)$ они дополняются мнимыми точками. Интересно отметить, что в пространстве $\mathbf{E}^3$ однополостный гиперболоид (3) содержит два семейства прямолинейных образующих, одно из них задается системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(x_1 - x_3) &= \mu(1 - x_2),\\ \mu(x_1 + x_3) &= \lambda(1 + x_2).\end{aligned}\right\}$$

Двуполостный гиперболоид (4) в пространстве $\mathbf{E}^3$ не содержит прямых, однако в пространстве $A^3(i)$ он имеет мнимые прямые:

$$\left.\begin{aligned}\lambda(x_1 - x_3) &= \mu(i - x_2),\\ \mu(x_1 + x_3) &= \lambda(i + x_2).\end{aligned}\right\}$$

Уравнение (5) задает конус. В пространстве $\mathbf{E}^3$ он образован действительными прямыми, содержащими только действительные точки и проходящими через начало координат. В пространстве $A^3(i)$ конус (5) состоит из тех же прямых, но расширенных за счет их мнимых точек. Похожее на (5) уравнение (6) определяет в пространстве $\mathbf{E}^3$ единственную точку $O(0, 0, 0)$. Поверхность, заданная уравнением (6) в пространстве $A^3(i)$, состоит из мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке $O(0, 0, 0)$. Она называется *мнимым конусом*.

Уравнения (7) и (8) задают соответственно эллиптический и гиперболический параболоиды. Относительно прямолинейных образующих можно сделать то же замечание, что и для поверхностей (3) и (4).

Уравнение (9) задает эллиптический цилиндр. В пространстве $\mathbf{E}^3$ он состоит из действительных прямых:

$$\left.\begin{aligned}\lambda x_1 &= \mu(1 - x_2),\\ \mu x_1 &= \lambda(1 + x_2),\end{aligned}\right\}$$

параллельных оси Ox_3 и проходящих через точки эллипса:

$$\left.\begin{aligned}x_1^2 + x_2^2 &= 1,\\ x_3 &= 0.\end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

В пространстве $A^3(i)$ эллиптический цилиндр (9) состоит из всех прямых, параллельных оси Ox_3 и проходящих через действительные и мнимые точки эллипса (19).

Поверхность (10) не содержит ни одной действительной точки. В пространстве $A^3(i)$ она состоит из мнимых прямых:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_1 &= \mu(i - x_2), \\ \mu x_1 &= \lambda(i + x_2), \end{aligned}\right\}$$

параллельных оси Ox_3 и проходящих через точки мнимого эллипса:

$$\left.\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= -1, \\ x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Поверхность (10) в пространстве $A^3(i)$ называется *мнимым эллиптическим цилиндром.*

Уравнения (11) и (12) задают соответственно гиперболический и параболический цилиндры. Первая из этих поверхностей имеет прямую (ось Ox_3), состоящую из центров цилиндра. Поверхность (12) центров не имеет.

Уравнение (13) задает в пространстве $\mathbf{E}^3$ пару плоскостей, $x_1 - x_2 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$, пересекающихся по оси Ox_3. В пространстве $A^3(i)$ эти плоскости пополняются мнимыми точками. Уравнение (14) задает в пространстве $\mathbf{E}^3$ прямую (ось Ox_3). В пространстве же $A^3(i)$ поверхность (14) состоит из двух мнимых плоскостей, $x_1 - ix_2 = 0$, $x_1 + ix_2 = 0$, пересекающихся по действительной прямой (оси Ox_3).

Уравнение (15) задает пару параллельных плоскостей: $x_1 - 1 = 0$, $x_1 + 1 = 0$, а уравнение (16) – пару мнимых параллельных плоскостей: $x_1 - i = 0$, $x_1 + i = 0$.

Наконец, уравнение (17) задает сдвоенную плоскость.

Пример 27.3. Определить аффинный класс поверхности второго порядка в пространстве $\mathbf{E}^3$, заданной в прямоугольной системе координат уравнением

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 10xz + 4yz + 2x + 16y - z + 2 = 0. \quad (20)$$

Р е ш е н и е. Преобразуем уравнение (20):

$$(x^2 + 4xy - 10xz + 2x) - 2y^2 + 4yz + 16y + z^2 - z + 2 = 0,$$

$$(x + 2y - 5z + 1)^2 - 6y^2 + 24yz + 12y - 24z^2 + 9z + 1 = 0,$$

$$(x + 2y - 5z + 1)^2 - 6(y - 2z + 1)^2 - 15z + 7 = 0. \quad (21)$$

Совершим преобразование координат по формулам:

$$x' = x + 2y - 5z + 1,\ y' = \sqrt{6}(y - 2z + 1),\ z' = (15z - 7)/2.$$

В новых координатах уравнение (21) примет вид $(x')^2 - (y')^2 = 2z'$. Таким образом, уравнение (20) задает гиперболический параболоид.

Упражнения

1. Для каждой из поверхностей (1) – (17) укажите свойства, отличающие ее от других поверхностей второго порядка (наличие и характер асимптотических направлений, наличие центров, действительных точек и прямых и т. д.).

2. Сколько аффинных классов квадрик имеется в пространстве $A^4(i)$?

27.13. Приведение уравнения квадрики в пространстве $\mathbf{E}^n(i)$ к каноническому виду

Пространство $A^n(i)$ было получено путем вложения действительного аффинного пространства A^n в комплексное аффинное пространство $A^n(\mathbf{C})$. Теперь мы модифицируем пространство $A^n(i)$, превратив аффинное пространство A^n в точечное евклидово пространство $\mathbf{E}^n$.

Определение 27.12. *Пространство $A^n(i)$, в котором действительная часть A^n превращена в евклидово точечное пространство $\mathbf{E}^n$, будем называть комплексной оболочкой пространства $\mathbf{E}^n$ и обозначать $\mathbf{E}^n(i)$.*

Пусть в пространстве $\mathbf{E}^n(i)$ в ортонормированном репере

$$(O,\ \mathbf{i}_1,\ \mathbf{i}_2,\ \ldots,\ \mathbf{i}_n) \tag{1}$$

задано уравнение квадрики Φ:

$$\sum_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i + a = 0. \tag{2}$$

Упростим уравнение квадрики (2) с помощью подходящего выбора ортонормированного репера. Согласно теореме 24.21, существует преобразование

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x'_j,\ i = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{3}$$

где $[\alpha_{ij}]$ – действительная ортогональная матрица, приводящее квадратичную форму $\sum\limits_{i,\ j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$, к виду $\sum\limits_{i=1}^{n} b_i (x'_i)^2$, где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — корни характеристического многочлена матрицы $[a_{ij}]$.

Будем рассматривать равенства (3) как формулы преобразования координат, соответствующего переходу от репера (1) к новому ортонормированному реперу

$$(O, \mathbf{i}'_1, \mathbf{i}'_2, \ldots, \mathbf{i}'_n). \tag{4}$$

Подставляя выражения x_i из формул (3) в уравнение (2) и приводя подобные члены, получаем уравнение квадрики (2) в новых координатах:

$$\sum_{i=1}^{n} b_i (x'_i)^2 + 2\sum_{i=1}^{n} c_i x'_i + a = 0. \tag{5}$$

Определение 27.13. *Ортонормированный репер, в котором квадрика задается уравнением (5), не содержащим произведений различных координат, называется репером главных направлений этой квадрики.*

Так же, как это делалось в § 27.9, с помощью параллельного переноса репера и изменения нумерации координат можно привести уравнение (5) к виду

$$\sum_{i=1}^{r} b_i \bar{x}_i^2 + 2 \sum_{j=r+1}^{n} c_j \bar{x}_j + b = 0, \ \ 0 < r \leqslant n, \ \ b_i \neq 0. \tag{6}$$

Пусть $c_{r+1} = c_{r+2} = \ldots = c_n = 0$, т. е. уравнение (6) имеет вид

$$\sum_{i=1}^{r} b_i \bar{x}_i^2 + b = 0, \ \ b_i \neq 0. \tag{7}$$

Если $b \neq 0$, введем обозначения $p_i = -b/b_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$. Тогда уравнение (7) примет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\bar{x}_i^2}{p_i} = 1. \tag{8}$$

Если в уравнении (7) $b = 0$, то уравнение можно представить в виде

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\bar{x}_i^2}{p_i} = 0. \tag{9}$$

Пусть теперь в уравнении (6) $r < n$, $c_{r+1} \neq 0, \ldots, c_{r+s} \neq 0$, $c_{r+s+1} = 0, \ldots, c_n = 0$. Тогда можно перейти к новому ортонормированному реперу так, чтобы в уравнении (6) избавиться от первых степеней всех координат, кроме одной. В самом деле, в пространстве всех действительных строк длины n со скалярным произведением

$$(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i$$

система строк

$$\mathbf{j}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{j}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{j}_r = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{r-1},$$

$$1, 0, \ldots, 0), \mathbf{j}_{r+1} = \frac{1}{m}(\underbrace{0, \ldots, 0}_{r}, c_{r+1}, \ldots, c_{r+s}, 0, \ldots, 0),$$

где $m = \sqrt{c_{r+1}^2 + \ldots + c_{r+s}^2}$, является ортонормированной. Следовательно, она может быть дополнена до ортонормированного базиса

$$\mathbf{j}_1, \mathbf{j}_2, \ldots, \mathbf{j}_n, \tag{10}$$

где $\mathbf{j}_i = (\gamma_{i1}, \gamma_{i2}, \ldots, \gamma_{in})$, $i = r + 2, \ldots, n$.

Рассмотрим теперь преобразование координат:

$$\left.\begin{aligned} X_i &= \bar{x}_i, \ i = 1, 2, \ldots, r, \\ X_{r+1} &= \frac{1}{m}\left(c_{r+1}\bar{x}_{r+1} + \ldots + c_{r+s}\bar{x}_{r+s} + \frac{b}{2}\right), \\ X_j &= \gamma_{j1}\bar{x}_1 + \gamma_{j2}\bar{x}_2 + \ldots + \gamma_{jn}\bar{x}_n, \ j = r+2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

Так как репер (10) ортонормирован, то матрица преобразования (11) ортогональна и это преобразование соответствует переходу к новому ортонормированному реперу. В этом репере уравнение квадрики имеет вид

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{X_i^2}{p_i} = 2X_{r+1}, \tag{12}$$

где $p_i = -m/b_i$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

О п р е д е л е н и е 27.14. *Уравнения (8), (9), (12) называются каноническими уравнениями квадрик в пространстве* $\mathbf{E}^n(i)$.

Таким образом, имеет место

Теорема 27.11. *Любая квадрика пространства* $\mathbf{E}^n(i)$ *может быть задана в подходящем ортонормированном репере каноническим уравнением.*

27.14. Исследование поверхности второго порядка в пространстве $\mathbf{E}^3(i)$ по общему уравнению

Пусть в пространстве $\mathbf{E}^3(i)$ поверхность П второго порядка задана с помощью уравнения

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_1x + 2a_2y + 2a_3z + a = 0 \qquad (1)$$

в прямоугольной системе координат

$$(O, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}). \qquad (2)$$

Мы укажем здесь способ отыскания такой прямоугольной системы координат, относительно которой уравнение поверхности П будет иметь простейший вид. Это позволит определить вид и размеры поверхности П, а также ее расположение относительно исходной системы координат (2). Как было отмечено в § 27.13, существует такая прямоугольная система координат (репер главных направлений), относительно которой уравнение поверхности П не содержит произведений различных координат.

Опишем способ построения репера главных направлений. Рассмотрим матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix} \qquad (3)$$

и линейный оператор f пространства $\mathbf{E}^3(i)$ с матрицей A в ортонормированном базисе

$$\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}. \qquad (4)$$

Так как матрица A – симметрическая, линейный оператор f является самосопряженным (см. § 24.4). Согласно теореме 24.16, существует ортонормированный базис

$$\mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}', \qquad (5)$$

состоящий из собственных векторов линейного оператора f. В этом базисе оператор f имеет диагональную матрицу $B = \mathrm{diag}[\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]$, где $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ – корни характеристического многочлена матрицы A. Координаты векторов (5) в базисе (4) являются решениями систем линейных однородных уравнений (см. § 19.11):

$$
\left.\begin{aligned}
(\lambda_i - a_{11})t_1 \quad - a_{12}t_2 \quad - a_{13}t_3 &= 0,\\
- a_{12}t_1 + (\lambda_i - a_{22})t_2 \quad - a_{23}t_3 &= 0,\\
- a_{13}t_1 \quad - a_{23}t_2 + (\lambda_i - a_{33})t_3 &= 0
\end{aligned}\right\} \qquad (6)
$$

относительно неизвестных t_1, t_2, t_3. При $i = 1$ получаем систему для вектора $\mathbf{i}'$, при $i = 2$ — систему для вектора $\mathbf{j}'$ и, наконец, при $i = 3$ — систему для вектора $\mathbf{k}'$. Найдя координатные столбцы векторов (5), объединим их в матрицу

$$
S = \begin{bmatrix} s_{11} & s_{12} & s_{13} \\ s_{21} & s_{22} & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33} \end{bmatrix}.
$$

Как показано в § 19.7,

$$
B = S^{-1}AS. \qquad (7)
$$

Так как матрица S ортогональна, т. е. $S^{-1} = S^T$, равенство (7) можно переписать в виде

$$
B = S^TAS. \qquad (8)
$$

Рассмотрим теперь переход от прямоугольной системы координат (2) к прямоугольной системе координат

$$
(O', \mathbf{i}', \mathbf{j}', \mathbf{k}'). \qquad (9)
$$

В координатах он задается с помощью формул:

$$
\left.\begin{aligned}
x &= s_{11}x' + s_{12}y' + s_{13}z',\\
y &= s_{21}x' + s_{22}y' + s_{23}z',\\
z &= s_{31}x' + s_{32}y' + s_{33}z'.
\end{aligned}\right\} \qquad (10)
$$

Как показано в § 22.2, в результате подстановки выражений для x, y, z из формул (10) в квадратичную форму

$$
a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz
$$

получим квадратичную форму с матрицей вида (8), т. е. $\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2$. Таким образом, в прямоугольной системе координат (9) поверхность П будет задаваться уравнением

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + \lambda_3 z'^2 + 2b_1 x' + 2b_2 y' + 2b_3 z' + a = 0, \quad (11)$$

т. е. репер (9) является репером главных направлений.

Дальнейшее упрощение уравнения (11) выполняется с помощью параллельного переноса координатных осей и поворота вокруг одной из них. В приведенных ниже примерах иллюстрируется указанный способ исследования поверхности П.

Пример 27.4. Исследовать поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной системе координат $Oxyz$ уравнением

$$5x^2 + 6y^2 + 7z^2 - 4xy + 4yz - 10x + 8y + 14z - 6 = 0. \quad (12)$$

Р е ш е н и е. Матрица (3) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}.$$

Корни ее характеристического многочлена

$$\begin{vmatrix} \lambda-5 & 2 & 0 \\ 2 & \lambda-6 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-7 \end{vmatrix}$$

равны 3, 6, 9.

Составим систему (6) для $\lambda_1 = 3$:

$$\left.\begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 \qquad &= 0, \\ 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 &= 0, \\ -2x_2 - 4x_3 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Решение этой системы – вектор $\mathbf{a}(2\alpha,\ 2\alpha,\ -\alpha)$, где α – произвольное действительное число. Нормируя вектор $\mathbf{a}$, получаем вектор

$$\mathbf{i}'\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{1}{3}\right). \quad (13)$$

Аналогично находятся векторы:

$$\mathbf{j}'\left(\frac{2}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right),\ \mathbf{k}'\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right). \quad (14)$$

Итак, точка O и векторы (13), (14) образуют репер $(O,\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')$ главных направлений поверхности (12).

Запишем формулы преобразования координат, соответствующие переходу от исходного репера к реперу $(O,\ \mathbf{i}',\ \mathbf{j}',\ \mathbf{k}')$, т. е. формулы вида (10):

$$x = \frac{2x' + 2y' - z'}{3},\quad y = \frac{2x' - y' + 2z'}{3},\quad z = \frac{-x' + 2y' + 2z'}{3}. \quad (15)$$

Подставляя выражения x, y, z из формул (15) в многочлен $-10x + 8y + 14z$ и приводя подобные члены, получаем: $-6x' + 18z'$. Итак, в системе координат $Ox'y'z'$ уравнение поверхности (12) имеет вид

$$3x'^2 + 6y'^2 + 9z'^2 - 6x' + 18z' - 6 = 0$$

или

$$x'^2 + 2y'^2 + 3z'^2 - 2x' + 6z' - 2 = 0.$$

Представим это уравнение в виде

$$(x' - 1)^2 + 2y'^2 + 3(z' + 1)^2 = 6.$$

Совершая параллельный перенос системы координат $Ox'y'z'$ по формулам: $X = x' - 1$, $Y = y'$, $Z = z' + 1$, мы приходим к каноническому уравнению поверхности (12):

$$\frac{X^2}{6} + \frac{Y^2}{3} + \frac{Z^2}{2} = 1.$$

Итак, поверхность (12) – эллипсоид с полуосями $a = \sqrt{6}$, $b = \sqrt{3}$, $c = \sqrt{2}$.

Пример 27.5. Исследовать поверхность второго порядка, заданную в прямоугольной системе координат уравнением

$$x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 2y + z = 0. \qquad (16)$$

Р е ш е н и е. Матрица (3) имеет вид

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Корни ее характеристического многочлена: 0 и 6.

Если $\lambda = 0$, то система (6) сводится к одному уравнению: $x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$. Этому уравнению удовлетворяют все векторы вида $\mathbf{a}(-\alpha - 2\beta, \alpha, \beta)$, где α, β – произвольные действительные числа. Фиксируем один из этих векторов, например $\mathbf{a}_1(-1, 1, 0)$. Второй вектор найдем из условия ортогональности векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{a}_1$: $\alpha + 2\beta + \alpha = 0$. Следовательно, можно взять вектор $\mathbf{a}_2(1, 1, -1)$. Нормируя векторы $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$, получаем два из искомых векторов главных направлений:

$$\mathbf{i}'\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \ \mathbf{j}'\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right). \qquad (17)$$

Для отыскания третьего главного направления можно воспользоваться тем обстоятельством, что искомый вектор $\mathbf{k}'$ ортогонален векторам $\mathbf{i}'$, $\mathbf{j}'$ и, значит, коллинеарен векторному произведению $\mathbf{i}' \times \mathbf{j}'$. Следовательно, имеем (см. § 12.12)

$$\mathbf{k}'\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right). \qquad (18)$$

Репер, образованный точкой O и векторами (17), (18), является репером главных направлений поверхности (16).

Запишем формулы вида (10):

$$x = -\frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \ y = \frac{x'}{\sqrt{2}} + \frac{y'}{\sqrt{3}} + \frac{z'}{\sqrt{6}}, \ z = -\frac{y'}{\sqrt{3}} + 2\frac{z'}{\sqrt{6}}.$$

В системе координат $Ox'y'z'$ уравнение поверхности (16) имеет вид

$$6x'^2 - \sqrt{2}x' - \sqrt{3}y' = 0. \tag{19}$$

Запишем формулы поворота системы координат $Ox'y'z'$ вокруг оси Oz':

$$x' = X\cos\alpha - Y\sin\alpha,\ y' = X\sin\alpha + Y\cos\alpha,\ z' = Z.$$

Подставив выражения x', y', z' из этих формул в уравнение (19), получим

$$6Z^2 - (\sqrt{2}\cos\alpha + \sqrt{3}\sin\alpha)X + (\sqrt{2}\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha)Y = 0. \tag{20}$$

Найдем значение α из условия $\sqrt{2}\sin\alpha - \sqrt{3}\cos\alpha = 0$. Имеем: $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3/2}$, $\sin\alpha = \sqrt{3/5}$, $\cos\alpha = \sqrt{2/5}$.

Уравнение (20) принимает канонический вид:

$$Z^2 = \frac{\sqrt{5}}{6}X. \tag{21}$$

Итак, поверхность (16) – параболический цилиндр с каноническим уравнением (21).

27.15. Метрические инварианты многочлена второй степени

Пусть в пространстве $\mathbf{E}^n(i)$ выбран ортонормированный репер и в этом репере задано уравнение квадрики

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a = 0. \tag{1}$$

Левая часть этого уравнения

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_ix_i + a \tag{2}$$

является многочленом второй степени относительно переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ с действительными коэффициентами. Совершим преобразование переменных:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij}x_j' + \alpha_i,\ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{3}$$

где $C = [\alpha_{ij}]$ – действительная ортогональная матрица; α_i – действительные числа. Можно считать, что формулы (3) задают преобразование координат точек при переходе к новому ортонормированному реперу.

Подставляя значения x_i из формул (3) в многочлен (2) и приводя подобные члены, получаем многочлен второй степени относительно переменных $x'_1, x'_2, \dots, x'_n$:

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i + a'. \tag{4}$$

Определение 27.15. *Метрическим инвариантом многочлена (2) называется такой многочлен $F(a_{ij}, a_k, a)$ относительно коэффициентов многочлена (2), который не изменяет своей числовой величины, если вместо коэффициентов a_{ij}, a_k, a подставить соответствующие коэффициенты a'_{ij}, a'_k, a' многочлена (4), получающегося из многочлена (2) в результате произвольного преобразования вида (3), т. е.*

$$F(a'_{ij},\ a'_k,\ a') = F(a_{ij},\ a_k,\ a).$$

Теорема 27.12. *Коэффициенты характеристического многочлена*

$$|\lambda E - A| = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{12} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

матрицы $A = [a_{ij}]$ и определитель

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a \end{vmatrix} \tag{6}$$

являются метрическими инвариантами многочлена (2).

➤ Перейдем к новому ортонормированному реперу по формулам (3). Как показано в § 27.2, уравнение квадрики (1) примет вид

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a'_{ij}x'_i x'_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i + a' = 0,$$

причем

$$B = [a'_{ij}] = C^T A C. \tag{7}$$

Так как матрица C ортогональна, т. е. $C^T = C^{-1}$, то из равенства (7) следует, что матрицы A и B подобны. Как известно (см. предложение 19.13), у подобных матриц характеристические многочлены равны:

$$\begin{vmatrix} \lambda - a'_{11} & -a'_{12} & \dots & -a'_{1n} \\ -a'_{12} & \lambda - a'_{22} & \dots & -a'_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a'_{1n} & -a'_{2n} & \dots & \lambda - a'_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{12} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_{1n} & -a_{2n} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}. \qquad (8)$$

Представим определитель $|\lambda E - A|$ в виде

$$|\lambda E - A| = \lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} - \dots + \\ + (-1)^{n-1} I_{n-1}\lambda + (-1)^n I_n,$$

где I_n — определитель матрицы A; I_k, $k = 1, 2, \dots, n$, — сумма диагональных миноров k-го порядка определителя I_n. Аналогично

$$|\lambda E - B| = \lambda^n - I'_1\lambda^{n-1} + I'_2\lambda^{n-2} - \dots + \\ + (-1)^{n-1} I'_{n-1}\lambda + (-1)^n I'_n.$$

Равенство (8) запишется теперь в виде

$$\lambda^n - I_1\lambda^{n-1} + I_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1}\lambda + (-1)^n I_n = \\ = \lambda^n - I'_1\lambda^{n-1} + I'_2\lambda^{n-2} - \dots + (-1)^{n-1} I'_{n-1}\lambda + (-1)^n I'_n.$$

Так как у равных многочленов коэффициенты при соответствующих степенях λ равны, то $I'_n = I_n$, $I'_{n-1} = I_{n-1}$, ..., $I'_1 = I_1$. Итак, величины I_n, I_{n-1}, ..., I_1 являются метрическими инвариантами многочлена (2).

Перейдем к исследованию определителя (6). Рассмотрим вместо многочлена (2) многочлен

$$\sum_{i,\, j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_{i=1}^{n} a_i x_i t + at^2, \qquad (9)$$

введя новую переменную t. Многочлен (9) является квадратичной формой относительно переменных x_1, x_2, ..., x_n, t. Многочлен (2) получается из многочлена (9) при $t = 1$.

Далее рассмотрим линейное преобразование переменных $x_1, x_2, \dots, x_n, t$ в переменные $x'_1, x'_2, \dots, x'_n, t'$:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x'_j, \\ t &= t', \ i = 1, 2, \dots, n, \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

где $[\alpha_{ij}]$ – ортогональная матрица. Определитель матрицы $\tilde{T}$ преобразования (10) равен определителю матрицы $T = [\alpha_{ij}]$ и, следовательно, равен 1 или -1.

Пусть квадратичная форма (9) в результате преобразования (10) принимает вид

$$\sum_{i,\,j=1}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j + 2\sum_{i=1}^{n} a'_i x'_i t' + a' t'^2. \tag{11}$$

Рассмотрим матрицы квадратичных форм (9) и (11):

$$\tilde{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} & a_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} & a_n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n & a \end{vmatrix},$$

$$\tilde{A}_1 = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \dots & a'_{1n} & a'_1 \\ a'_{12} & a'_{22} & \dots & a'_{2n} & a'_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a'_{1n} & a'_{2n} & \dots & a'_{nn} & a'_n \\ a'_1 & a'_2 & \dots & a'_n & a' \end{vmatrix}.$$

Как известно из § 22.2, $\tilde{A}_1 = \tilde{T}^T \tilde{A} \tilde{T}$. Применяя теорему об определителе произведения матриц, получаем

$$|\tilde{A}_1| = |\tilde{T}^T|\,|\tilde{A}|\,|\tilde{T}| = |\tilde{T}|^2\,|\tilde{A}| = |\tilde{A}|.$$

Тем самым показано, что определитель (6), состоящий из коэффициентов многочлена (2), является метрическим инвариантом, который обычно обозначается I_{n+1}. ◀

27.16. Исследование линий второго порядка с помощью инвариантов

Рассмотрим плоскость $\mathbf{E}^2(i)$. Пусть в некоторой прямоугольной системе координат Oxy задано уравнение линии второго порядка

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a = 0. \quad (1)$$

Как следует из § 27.13, с помощью подходящего выбора прямоугольной системы координат $O'x'y'$ уравнение линии (1) можно привести к одному из следующих видов:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + b = 0, \quad (2)$$

$$\lambda_1 x'^2 + 2cy' = 0, \quad (3)$$

$$\lambda_1 x'^2 + d = 0, \quad (4)$$

где λ_1, λ_2, b, c, d – действительные числа, причем λ_1, λ_2 и c отличны от нуля. Мы укажем сейчас, как с помощью инвариантов найти коэффициенты уравнений (2), (3) и исследовать линию (4).

Вычислим для левых частей уравнений (1) и (2) инварианты, введенные в предыдущем параграфе:

$$I_1 = a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2, \quad (5)$$

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2, \quad (6)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_1 \\ a_{12} & a_{22} & a_2 \\ a_1 & a_2 & a \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 b. \quad (7)$$

Из равенств (5) и (6) следует, что λ_1 и λ_2 являются корнями квадратного уравнения

$$\lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0. \quad (8)$$

Из равенств (6) и (7) получаем

$$b = I_3/I_2. \quad (9)$$

Вычислим инварианты левой части уравнения (3): $I_1 = \lambda_1$, $I_2 = 0$, $I_3 = -\lambda_1 c^2$. Следовательно,

$$c = \pm\sqrt{-I_3/I_1}. \quad (10)$$

Обратимся к уравнению (4). Имеем

$$I_3 = 0. \tag{11}$$

Покажем, что в этом случае левая часть уравнения (1) распадается на два линейных множителя (либо действительных, либо нет). Рассмотрим квадратичную форму

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1xt + 2a_2yt + at^2 \tag{12}$$

относительно переменных x, y, t. Согласно равенству (11), ранг квадратичной фирмы (12) меньше 3, и, следовательно, она разложима на два линейных множителя (см. § 22.6):

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_1xt + 2a_2yt + at^2 = \\ = (\alpha_1x + \beta_1y + \gamma_1t)(\alpha_2x + \beta_2y + \gamma_2t), \tag{13}$$

где α_1, β_1, γ_1, α_2, β_2, γ_2 – комплексные числа. Положив в равенстве (13) $t = 1$, получим разложение на линейные множители левой части уравнения (1). Для отыскания этих линейных множителей можно применить следующий прием. Если $a_{11} \neq 0$, то разложение должно иметь вид

$$a_{11}(x - (\lambda_1y + \mu_1))(x - (\lambda_2y + \mu_2)).$$

Но тогда величины $\lambda_1y + \mu_1$ и $\lambda_2y + \mu_2$ можно найти как корни квадратного относительно x уравнения (1). Если $a_{22} \neq 0$, уравнение (1) можно решить как квадратное относительно y. Наконец, если $a_{11} = a_{22} = 0$, то разложение должно иметь вид

$$2a_{12}xy + 2a_1x + 2a_2y + a = 2a_{12}(x + \alpha)(y + \beta) \tag{14}$$

и числа α, β можно найти путем сравнения соответствующих коэффициентов в обеих частях равенства (14).

Пример 27.6. С помощью инвариантов исследовать линии, заданные следующими уравнениями:

1) $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$;
2) $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$;
3) $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 2x + 3y - 2 = 0$. (15)

Р е ш е н и е. 1. Вычислим инварианты:

$$I_1 = 5,\ I_2 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36,\ I_3 = \begin{vmatrix} 5 & 6 & -11 \\ 6 & 0 & -6 \\ -11 & -6 & -19 \end{vmatrix} = 1296.$$

Решаем уравнение (8): $\lambda^2 - 5\lambda - 36 = 0$, $\lambda_1 = 9$, $\lambda_2 = -4$.

По формуле (9) находим $b = -36$. Итак, уравнение исследуемой линии можно записать в виде

$$9x'^2 - 4y'^2 - 36 = 0$$

или

$$\frac{x'^2}{4} - \frac{y'^2}{9} = 1,$$

т. е. искомая линия – гипербола.

2. Вычисление инвариантов дает: $I_1 = 2$, $I_2 = 0$, $I_3 = -64$. Следовательно, искомая линия может быть задана уравнением

$$2x'^2 - \sqrt{32}y' = 0 \text{ или } x'^2 = 4\sqrt{2}y',$$

т. е. она является параболой.

3. Имеем $I_3 = 0$. Запишем уравнение (15) в виде

$$4x^2 - 2(6y + 1)x + 9y^2 + 3y - 2 = 0.$$

и решим его как квадратное уравнение относительно x. Получим $x_1 = (3y + 2)/2$, $x_2 = (3y - 1)/2$. Следовательно, уравнение (15) можно представить в виде

$$4\left(x - \frac{3y+2}{2}\right)\left(x - \frac{3y-1}{2}\right) = 0$$

или

$$(2x - 3y - 2)(2x - 3y + 1) = 0.$$

Искомая линия распадается на пару параллельных прямых:

$$2x - 3y - 2 = 0 \text{ и } 2x - 3y + 1 = 0.$$

Упражнения

1. Докажите, что если $I_1 = 0$, то $I_2 < 0$.

2. С помощью инвариантов I_1, I_2, I_3 сформулируйте условие, необходимое и достаточное для того, чтобы линия второго порядка была парой взаимно перпендикулярных прямых.

28. ПРОЕКТИВНОЕ ПРОСТРАНСТВО

В этой главе будет рассмотрено еще одно пространство – проективное. Первоначально понятие проективного пространства возникло в связи с задачей проектирования одной плоскости на другую. Отсюда произошло и название «проективное пространство». Затем было установлено, что проективное пространство тесно связано с линейным и аффинным. В проективном пространстве теория квадрик приобретает завершенный вид. Проективное пространство может быть положено в основу классификации различных геометрий: евклидовой, псевдоевклидовых, неевклидовых.

В этой главе мы будем обозначать поле не буквой P, а буквой F.

28.1. Определение проективного пространства

Пусть V^{n+1} – $(n+1)$-мерное линейное пространство над полем F. Его элементы, как известно, называются векторами. Рассмотрим множество, элементами которого являются одномерные подпространства пространства V^{n+1}.

Определение 28.1. *Множество P^n одномерных подпространств линейного пространства V^{n+1} называется n-мерным проективным пространством, связанным с пространством V^{n+1}. Элементы пространства P^n будем называть точками.*

Как и в любом другом пространстве, в проективном вводятся подпространства, которые называются *плоскостями.*

Определение 28.2. *Множество одномерных подпространств $(k+1)$-мерного подпространства V^{k+1} пространства V^{n+1} называется k-мерной плоскостью пространства P^n. Одномерные плоскости называются также прямыми, а $(n-1)$-мерные – гиперплоскостями пространства P^n.*

Очевидно, что всякая k-мерная плоскость проективного пространства P^n является k-мерным проективным пространством, связанным с линейным пространством V^{k+1}.

Проективное пространство можно построить и с помощью аффинного пространства. Пусть A^{n+1} – $(n+1)$-мерное аффинное пространство, связанное с линейным пространством V^{n+1}. Если зафиксировать в пространстве A^{n+1} некоторую точку O, то множество векторов $\{\overrightarrow{OM} \mid M \in A^{n+1}\}$ будет совпадать с пространством V^{n+1}. Тогда точки пространства P^n будут изображаться прямыми пространства A^{n+1}, проходящими через точку O, а k-мерные плоскости пространства P^n – $(k+1)$-мерными плоскостями пространства A^{n+1}, проходящими через точку O.

Теперь попробуем установить соответствие между пространствами P^n и A^n. Будем представлять себе пространство P^n в виде множества прямых пространства A^{n+1}, проходящих через некоторую фиксированную точку O. Зафиксируем в пространстве P^n какую-либо гиперплоскость P^{n-1}. Пусть A^n – гиперплоскость пространства A^{n+1}, являющаяся изображением гиперплоскости P^{n-1}. Возьмем в пространстве A^{n+1} какую-либо гиперплоскость B, параллельную гиперплоскости A^n. Построим отображение множества $P^* = P^n \setminus P^{n-1}$ всех точек проективного пространства P^n, не принадлежащих гиперплоскости P^{n-1}, на n-мерное аффинное пространство B (рис. 28.1). Пусть произвольная точка $M \in P^*$ изображается прямой Δ пространства A^{n+1}, проходящей через точку O. Так как точка M не принадлежит гиперплоскости P^{n-1} пространства P^n, то изображающая ее прямая Δ не принадлежит гиперплоскости A^n пространства A^{n+1}. Поэтому прямая Δ пересекает гиперплоскость B в некоторой точке M'. Рассмотрим теперь отображение

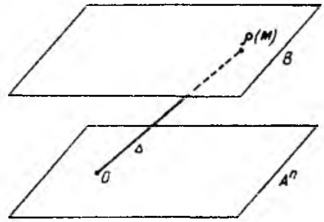


Рис. 28.1

$$\rho\colon P^* \to B, \tag{1}$$

ставящее в соответствие произвольной точке $M \in P^* = P^n \setminus P^{n-1}$ построенную выше точку $M' \in B$.

Определение 28.3. *Пара (B, ρ), состоящая из n-мерного аффинного пространства B и отображения ρ, называется аффинной картой проективного пространства P^n, а точка $M' = \rho(M)$ – изображением точки M на карте (B, ρ). Точки гиперплоскости P^{n-1} называются несобственными точками пространства P^n по отношению к карте (B, ρ), остальные точки пространства P^n – собственными, а сама эта гиперплоскость называется несобственной.*

Итак, мы построили отображение ρ множества всех собственных точек пространства P^n на n-мерное аффинное пространство B. Легко видеть, что это отображение есть биекция. В самом деле, пусть M' – произвольная точка гиперплоскости B пространства A^{n+1}. Так как гиперплоскости A^n и B параллельны, то $M' \neq 0$ и, следовательно, существует единственная прямая Δ, соединяющая точки O и M'. Эта прямая и является единственным прообразом точки M' при отображении ρ.

Посмотрим теперь, как отображение ρ действует на различные плоскости пространства P^n. Пусть P^k – некоторая k-мерная плоскость пространства P^n и A^{k+1} – соответствующая ей $(k + 1)$-мерная плоскость пространства A^{n+1}. Предположим сначала, что плоскость P^k полностью принадлежит гиперплоскости P^{n-1}. Тогда плоскость A^{k+1} полностью принадлежит гиперплоскости A^n и поэтому не имеет общих точек с гиперплоскостью B. В этом случае плоскость P^k не имеет изображения на карте B при отображении ρ. Пусть теперь плоскость P^k не принадлежит гиперплоскости P^{n-1}, а значит, и плоскость A^{k+1} не принадлежит гиперплоскости A^n. Тогда плоскость A^{k+1} пересекает гиперплоскость A^n по k-мерной плоскости (см. § 25.5), а следовательно, плоскость A^{k+1} пересекает и параллельную A^n гиперплоскость B по k-мерной плоскости A^k. Плоскость A^k является изображением плоскости P^k при отображении ρ.

Обратно, пусть A^k – произвольная k-мерная плоскость в n-мерном аффинном пространстве B, M_0 – некоторая точка из этой плоскости и V^k – ее направляющее пространство. Линейная оболочка $L(V^k, \overrightarrow{OM_0})$ есть $(k + 1)$-мерное подпространство V^{k+1} пространства V^{n+1}. Соответствующая V^{k+1} плоскость A^{k+1} пересекает гиперплоскость A^n, а значит, и параллельную ей гиперплоскость B по k-мерной плоскости, а именно: по плоскости A^k. Итак, любая k-мерная плоскость A^k из гиперплоскости B является изображением некоторой k-мерной плоскости пространства P^n.

Таким образом, отображение (1) индуцирует биективное отображение множества всех k-мерных плоскостей пространства P^n, не принадлежащих гиперплоскости P^{n-1}, на множество всех k-мерных плоскостей аффинного пространства B.

28.2. Координаты

Пусть P^n – n-мерное проективное пространство, связанное с линейным пространством V^{n+1} над полем F. Рассмотрим отображение

$$\pi\colon V^{n+1}\backslash\mathbf{0} \to P^n,$$

ставящее в соответствие произвольному ненулевому вектору $\mathbf{x} \in V^{n+1}$ одномерное подпространство $V = \{\lambda\mathbf{x} \mid \lambda \in F\}$. Возьмем в пространстве V^{n+1} какой-либо базис

$$\mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n. \tag{1}$$

Определение 28.4. *Однородными координатами точки $M \in P^n$ в базисе (1) называются координаты любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in V^{n+1}$, такого, что $\pi(\mathbf{x}) = M$. Другими словами, однородные координаты точки M в базисе (1) – это коэффициенты*

$$x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_n \tag{2}$$

в разложении $\mathbf{x} = \sum\limits_{i=0}^{n} x_i\mathbf{e}_i$.

Заметим, что однородные координаты фиксированной точки M в данном базисе (1) определены неоднозначно. В самом деле, пусть задан какой-либо набор (2) однородных координат точки M, являющийся набором координат вектора $\mathbf{x} \in V^{n+1}$, такого, что $\pi(\mathbf{x}) = M$. Тогда однородными координатами точки M будут также координаты

$$y_0,\ y_1,\ \ldots,\ y_n \tag{3}$$

любого вектора $\mathbf{y} \in V^{n+1}$, такого, что $\pi(\mathbf{y}) = \pi(\mathbf{x}) = M$. Это равносильно тому, что существует ненулевое число $\lambda \in F$, такое, что

$$y_i = \lambda x_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n. \tag{4}$$

Итак, при данном базисе (1) каждой точке M ставится в соответствие в качестве однородных координат некоторый ненулевой набор (2) чисел из поля F, а также любой пропорциональный ему набор, т. е. набор (3), удовлетворяющий условию (4). Обратно, для любого ненулевого набора (2) чисел из поля F существует ненулевой вектор $\mathbf{x} \in V^{n+1}$ с координатами (2), а значит, и точка $M \in P^n$ с однородными координатами (2).

Рассмотрим линейное пространство F^{n+1}, образованное строками, состоящими из чисел (2), взятых из поля F. Введем в этом пространстве отношение эквивалентности, считая эквивалентными пропорциональные строки, т. е. строки (2) и (3), удовлетворяющие условию (4). Множество классов ненулевых наборов (2) чисел из поля F обозначим PF^n.

Задание в проективном пространстве P^n, связанном с линейным пространством V^{n+1} над полем F, однородных координат с помощью базиса (1) позволяет рассмотреть биективное отображение

$$\psi: P^n \to PF^n,$$

ставящее в соответствие каждой точке $M \in P^n$ класс пропорциональных строк чисел, являющихся однородными координатами точки M. Теперь становится естественным

Определение 28.5. *Множество PF^n называется арифметической моделью проективного пространства P^n или n-мерным арифметическим проективным пространством над полем F.*

Пусть наряду с базисом (1) в пространстве V^{n+1} задан еще один базис

$$\mathbf{e}'_0,\ \mathbf{e}'_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n. \tag{5}$$

Как известно (см. § 17.8), координаты $x'_0,\ x'_1,\ \ldots,\ x'_n$ произвольного вектора $\mathbf{x} \in V^{n+1}$ в базисе (5) связаны с координатами (2) этого же вектора в базисе (1) формулами:

$$x_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x'_j,\ i = 0,\ 1, \ldots,\ n, \tag{6}$$

где $\det[\alpha_{ij}] \neq 0$. Следовательно, однородные координаты точки $M = \pi(\mathbf{x})$ в базисах (1) и (5) связаны формулами:

$$\lambda x_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x'_j,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n,$$

где λ – произвольное, отличное от нуля число из поля F.

Иногда два базиса (1) и (5) пространства V^{n+1} определяют в проективном пространстве P^n одну и ту же систему однородных координат. В самом деле, пусть базисы (1) и (5) связаны соотношениями:

$$\mathbf{e}_i' = \lambda \mathbf{e}_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{7}$$

где $\lambda \in F$. Тогда формулы (6) принимают вид $x_i = \lambda x_i'$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Но это означает, что произвольной точке $M \in P^n$ ставится в соответствие в качестве однородных координат относительно базисов (1) и (5) один и тот же класс пропорциональных строк чисел из поля F.

Пусть (B, ρ) – аффинная карта проективного пространства P^n, заданная несобственной гиперплоскостью P^{n-1} (см. § 28.1). Рассмотрим в аффинном пространстве B некоторый репер

$$(M_0,\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n). \tag{8}$$

Определение 28.6. *Неоднородными координатами точки $M \in P^n \setminus P^{n-1}$ относительно карты (B, ρ) и репера (8) называются координаты*

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n \tag{9}$$

точки $\rho(M) \in B$ в репере (8).

В отличие от однородных неоднородные координаты определены не на всем пространстве P^n, а лишь на множестве $P^n \setminus P^{n-1}$. Однако это множество биективно отображается на множество наборов координат (9), т. е. на линейное пространство F^n.

Установим связь между однородными и неоднородными координатами. Так как (8) – репер аффинного пространства B, то базис линейного пространства V^n, с которым связано пространство B, образуют векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, а базис пространства V^{n+1} – векторы

$$\mathbf{e}_0 = \overrightarrow{OM_0},\ \mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n \tag{10}$$

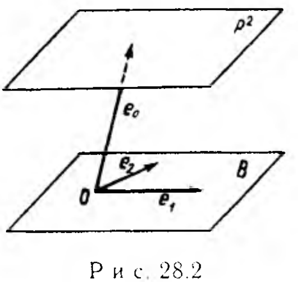


Рис. 28.2

(рис. 28.2, где $n = 2$). Пусть (9) – неоднородные координаты собственной точки $M \in P^n \setminus P^{n-1}$ в репере (8), а (2) – однородные координаты этой точки в базисе (10). Тогда

$$\overrightarrow{O\rho(M)} = \mathbf{e}_0 + \sum_{i=1}^{n} \xi_i \mathbf{e}_i = \lambda \sum_{j=1}^{n} x_j \mathbf{e}_j,$$

откуда

$$\xi_i = x_i / x_0,\ i = 1, 2, \dots, n. \tag{11}$$

Заметим, что $x_0 \neq 0$, так как $M \,\overline{\in}\, P^n$.

28.3. Плоскости

Рассмотрим проективное пространство P^n как множество прямых аффинного пространства A^{n+1}, проходящих через фиксированную точку $O \in A^{n+1}$. Как отмечено в § 28.1, k-мерная плоскость пространства P^n изображается в пространстве A^{n+1} $(k+1)$-мерной плоскостью, проходящей через точку O. Исходя из этого, каждому утверждению, относящемуся к плоскостям пространства A^{n+1}, проходящим через точку O, отвечает утверждение, относящееся к плоскостям пространства P^n. Рассмотрим некоторые из них.

Теорема 28.1. *Для любого непустого множества Ω точек пространства P^n существует единственная плоскость $P(\Omega)$, удовлетворяющая условиям:*

1) $\Omega \subset P(\Omega)$;

2) *любая плоскость, содержащая множество Ω, содержит плоскость $P(\Omega)$.*

➤ Рассмотрим отображение

$$\pi: (A^{n+1} \setminus O) \to P^n, \tag{1}$$

ставящее в соответствие каждой точке N пространства A^{n+1}, отличной от точки O, точку пространства P^n, изображаемую прямой ON. Это отображение каждую $(k+1)$-мерную аффинную плоскость A^{k+1}, проходящую через точку O, переводит в k-мерную проективную плоскость P^k (плоскость A^{k+1} состоит из всех точек прямых, образующих плоскость P^k, исключая точку O). Множество $\pi^{-1}(\Omega)$ состоит из всех отличных от O точек прямых ON, образующих множество Ω. Согласно теореме 25.2, множество $\pi^{-1}(\Omega)$

имеет единственную аффинную оболочку $A(\pi^{-1}(\Omega))$, т. е. аффинную плоскость, обладающую следующими свойствами: 1) $\pi^{-1}(\Omega) \subset A(\pi^{-1}(\Omega))$; 2) любая аффинная плоскость, содержащая $\pi^{-1}(\Omega)$, содержит $A(\pi^{-1}(\Omega))$.

Рассмотрим проективную плоскость $\pi(A(\pi^{-1}(\Omega)))$. Очевидно, что эта плоскость включает множество Ω. С другой стороны, пусть некоторая проективная плоскость P^k содержит плоскость $\pi(A(\pi^{-1}(\Omega)))$. Тогда плоскость $A(\pi^{-1}(\Omega))$ принадлежит аффинной плоскости A^{k+1}, изображающей P^k. Отсюда следует, что плоскость A^{k+1} содержит множество $\pi^{-1}(\Omega)$, а поэтому плоскость P^k включает множество Ω. Итак, мы доказали, что проективная плоскость $\pi(A(\pi^{-1}(\Omega)))$ обладает свойствами искомой плоскости $P(\Omega)$, т. е.

$$P(\Omega) = \pi(A(\pi^{-1}(\Omega))). \blacktriangleleft \qquad (2)$$

Доказанная теорема позволяет сформулировать следующее

Определение 28.7. *Проективной оболочкой непустого множества Ω точек пространства P^n называется плоскость $P(\Omega)$.*

Согласно теореме 28.1, для любого непустого множества Ω точек пространства P^n существует единственная проективная оболочка, и она задается формулой (2).

По аналогии с определением 25.5 введем следующее

Определение 28.8. *Точки*

$$M_0, M_1, \ldots, M_k \qquad (3)$$

проективного пространства P^n называются проективно независимыми, если их проективная оболочка является k-мерной плоскостью.

Теорема 28.2. *Точки (3) пространства P^n проективно независимы тогда и только тогда, когда в пространстве A^{n+1} существуют точки*

$$N_0, N_1, \ldots, N_k, \qquad (4)$$

такие, что $M_i = \pi(N_i)$, $i = 0, 1, \ldots, k$, и точки

$$O, N_0, N_1, \ldots, N_k \qquad (5)$$

аффинно независимы или, иначе (см. § 25.3), *векторы $\overrightarrow{ON_0}, \overrightarrow{ON_1}, \ldots, \overrightarrow{ON_k}$ линейно независимы.*

➤ Предположим, что существуют точки (4), удовлетворяющие условиям теоремы. Обозначая через Ω множество точек (3), имеем

$$A(\pi^{-1}(\Omega)) = A(O,\ N_0,\ N_1,\ \ldots,\ N_k). \tag{6}$$

Из равенств (6) и (2) находим

$$P(M_0,\ M_1,\ \ldots,\ M_k) = \pi(A(\pi^{-1}(\Omega))) = \\ = \pi(A(O,\ N_0,\ N_1,\ \ldots,\ N_k)). \tag{7}$$

По условию теоремы аффинная плоскость $A(O, N_0, N_1, \ldots, N_k)$ $(k + 1)$-мерная, поэтому в силу равенства (7) проективная плоскость $P(M_0, M_1, \ldots, M_k)$ является k-мерной и точки (3) проективно независимы.

Обратно, пусть точки (3) проективно независимы. Возьмем в качестве точек (4) произвольные, отличные от O точки, принадлежащие прямым OM_0, OM_1, ..., OM_k. Обозначив через Ω множество точек (3), снова получим равенства (6) и (7). Так как по условию проективная плоскость $P(M_0, M_1, \ldots, M_k)$ k-мерная, то в силу равенства (7) аффинная плоскость $A(O, N_0, N_1, \ldots, N_k)$ является $(k + 1)$-мерной. Это и означает, что точки (5) аффинно независимы. ➤

Из теорем 25.4 и 28.2 вытекает следующая

Теорема 28.3. *Через любые $k + 1$ проективно независимые точки пространства P^n проходит единственная k-мерная плоскость. Во всякой k-мерной плоскости есть $k + 1$ и нет более $k + 1$ проективно независимых точек. Любую систему проективно независимых точек пространства P^n, лежащих в k-мерной плоскости, можно дополнить до системы, состоящей из $k + 1$ проективно независимых точек, лежащих в этой плоскости.*

Пусть в пространстве A^{n+1} выбран репер

$$(O,\ \mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n). \tag{8}$$

Тогда каждая точка M пространства P^n имеет однородные координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ (см. § 28.2), которые определяются как коэффициенты разложения

$$\mathbf{x} = \sum_{i=0}^{n} x_i \mathbf{e}_i,$$

где $\mathbf{x}$ — любой вектор, такой, что $\pi(\mathbf{x}) = M$. Другими словами, однородными координатами точки $M \in P^n$ называются координаты любой точки из множества $\pi^{-1}(M)$ относительно репера (8), т. е. любой, отличной от O точки прямой OM пространства A^{n+1}.

Пусть теперь P^k — произвольная плоскость пространства P^n и A^{k+1} — изображающая ее плоскость пространства A^{n+1}. Тогда

$$A^{k+1} \setminus O = \pi^{-1}(P^k).$$

Как известно из § 25.4, плоскость A^{k+1} есть множество точек-решений системы уравнений

$$\left.\begin{array}{r} \alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \ldots + \alpha_{0n}x_n = 0, \\ \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-k\,0}x_0 + \alpha_{n-k\,1}x_1 + \ldots + \alpha_{n-k\,n}x_n = 0, \end{array}\right\} \qquad (9)$$

и обратно, любая система вида (9) задает плоскость в пространстве A^{n+1}. Будем говорить, что плоскость P^k задается в однородных координатах системой (9), если координаты любой точки этой плоскости образуют решение системы (9), и обратно, любое ненулевое решение системы (9) представляет координаты некоторой точки плоскости P^k. Согласно сказанному выше, имеет место

Теорема 28.4. *Любая плоскость пространства P^n задается в однородных координатах системой (9), и обратно, любая система (9) задает плоскость пространства P^n.*

Из теоремы 28.4 следует

Теорема 28.5. *Если две плоскости P^k и P^l проективного пространства P^n пересекаются, т. е. имеют по крайней мере одну общую точку, то их пересечением является плоскость.*

По аналогии с определением 25.6 введем следующее

Определение 28.9. *Характеристикой пары плоскостей P^k и P^l, $k \leqslant l$, проективного пространства P^n называется упорядоченный набор чисел (k, l, m, s), где s — размерность проективной оболочки множества $P^k \cup P^l$; m — размерность плоскости $P^k \cap P^l$, если это* *пересечение — непустое множество, и* $m = -1$, *если* $P^k \cap P^l = \varnothing$.

***Теорема 28.6**. Для любой характеристики* (k, l, m, s) *имеют место следующие соотношения:*

$$-1 \leqslant m \leqslant k \leqslant l \leqslant s \leqslant n, \ 0 \leqslant k; \tag{10}$$

$$s = k + l - m. \tag{11}$$

Для любого набора целых чисел (m, k, l, s, n), *удовлетворяющих соотношениям* (10), (11), *в пространстве* P^n *существует пара плоскостей* P^k, P^l *с характеристикой* (k, l, m, s).

➤ Для любой пары плоскостей неравенства (10) очевидны. Пусть плоскости P^k и P^l пересекаются по плоскости P^m и A^{k+1}, A^{l+1}, A^{m+1}, A^{s+1} – плоскости пространства A^{n+1}, проходящие через точку O и изображающие соответственно плоскости P^k, P^l, P^m и проективную оболочку плоскостей P^k и P^l. В силу формулы (8) из § 25.5 $s + 1 = (k + 1) + (l + 1) - (m + 1)$, откуда и следует формула (11). Если плоскости P^k и P^l не пересекаются, то изображающие их плоскости A^{k+1} и A^{l+1} имеют только одну общую точку и в силу той же формулы (8) из § 25.5 $s + 1 = (k + 1) + (l + 1)$. Так как в этом случае $m = -1$, снова получаем формулу (11).

Пусть теперь задан произвольный набор целых чисел m, k, l, s, n, удовлетворяющих соотношениям (10), (11). Возьмем в пространстве P^n любые $n + 1$ проективно независимые точки M_0, M_1, ..., M_n. Тогда искомыми плоскостями P^k и P^l будут проективные оболочки систем точек:

$$M_0, M_1, \ldots, M_m, M_{m+1}, \ldots, M_k;$$

$$M_0, M_1, \ldots, M_m, M_{k+1}, \ldots, M_{k+(l-m)}. \ ◄$$

В § 28.2 однородные координаты в проективном пространстве P^n были введены с помощью базиса линейного пространства V^{n+1}, с которым связано пространство P^n. Покажем, что однородные координаты в пространстве P^n можно задать с помощью определенной системы точек этого пространства.

Определение 28.10. *Репером проективного пространства* P^n *называется упорядоченная система точек*

$$M_0, M_1, \ldots, M_{n+1} \tag{12}$$

этого пространства, такая, что любые $n + 1$ из этих точек проективно независимы.

Теорема 28.7. *Любую систему*

$$M_0, M_1, \ldots, M_k \tag{13}$$

проективно независимых точек пространства P^n можно дополнить до репера этого пространства.

➤ Согласно теореме 28.3, систему (13) можно дополнить до системы

$$M_0, M_1, \ldots, M_n, \tag{14}$$

также состоящей из проективно независимых точек. Пусть $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ – ненулевые векторы пространства V^{n+1}, лежащие в одномерных подпространствах, определяемых соответственно точками (14). Введем вектор

$$\mathbf{e}_{n+1} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_n. \tag{15}$$

Пусть M_{n+1} – точка, определяющая одномерное подпространство $\{\lambda\mathbf{e}_{n+1} | \lambda \in F\}$. Тогда точки $M_0, M_1, \ldots, M_{n+1}$ образуют репер. В самом деле, предположим, например, что точки $M_1, \ldots, M_{n+1}$ содержатся в гиперплоскости P^{n-1}. Тогда из равенства (15) следует, что в этой гиперплоскости содержится и точка M_0, а это противоречит тому, что точки (14) проективно независимы. ➤

Теорема 28.8. *Пусть в пространстве P^n задан репер (12). Тогда найдется единственная система однородных координат, в которой точки (12) имеют следующие координаты:*

$$\left.\begin{array}{r} M_0(1,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 0), \\ M_1\,(0,\ 1,\ \ldots,\ 0,\ 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_n(0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ 1), \\ M_{n+1}(1,\ 1,\ \ldots,\ 1,\ 1). \end{array}\right\} \tag{16}$$

➤ В соответствии с теоремой 28.2 в каждом из одномерных подпространств пространства V^{n+1}, определяющих точки (12), можно выбрать вектор так, что любые $n + 1$ из этих векторов

$$\mathbf{a}_0,\ \mathbf{a}_1,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{n+1} \qquad (17)$$

будут линейно независимы. Поэтому существуют числа $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n \in F$, такие, что

$$\mathbf{a}_{n+1} = \lambda_0\mathbf{a}_0 + \lambda_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{a}_n.$$

Ни одно из чисел $\lambda_0,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ не равно нулю. В самом деле, если бы, например, $\lambda_0 = 0$, то векторы $\mathbf{a}_1,\ \mathbf{a}_2,\ \ldots,\ \mathbf{a}_{n+1}$ были бы линейно зависимы вопреки их выбору. В результате мы получим, что векторы

$$\mathbf{e}_i = \lambda_i\mathbf{a}_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \qquad (18)$$

образуют базис пространства V^{n+1} и

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_n. \qquad (19)$$

Очевидно, что базис (17) определяет искомые однородные координаты.

Пусть в пространстве V^{n+1} имеется еще один базис

$$\mathbf{e}_0',\ \mathbf{e}_1',\ \ldots,\ \mathbf{e}_n', \qquad (20)$$

такой, что в определяемой этим базисом системе координат выполняются условия (16). Тогда одномерные подпространства пространства V^{n+1}, заданные векторами (20), совпадают с одномерными подпространствами, определяемыми векторами (18), и, следовательно,

$$\mathbf{e}_i' = \mu_i\mathbf{e}_i,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \qquad (21)$$

причем все μ_i отличны от нуля.

В силу последнего условия (16) вектор

$$\mathbf{a}_{n+1}' = \mathbf{e}_0' + \mathbf{e}_1' + \ldots + \mathbf{e}_n' \qquad (22)$$

лежит в одномерном подпространстве пространства V^{n+1}, определяемом точкой M_{n+1}. В этом же подпространстве лежит и вектор (19), поэтому

$$\mathbf{a}_{n+1}' = \mu_{n+1}\mathbf{a}_{n+1}. \qquad (23)$$

Из равенств (19), (21) – (23) получаем

$$\mathbf{a}_{n+1}' = \mathbf{e}_0' + \mathbf{e}_1' + \ldots + \mathbf{e}_n' = \mu_0\mathbf{e}_0 + \mu_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \mu_n\mathbf{e}_n =$$
$$= \mu_{n+1}\mathbf{a}_{n+1} = \mu_{n+1}\mathbf{e}_0 + \mu_{n+1}\mathbf{e}_1 + \ldots + \mu_{n+1}\mathbf{e}_n.$$

В силу линейной независимости векторов (18) имеем: $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_n = \mu_{n+1}$, а значит, $\mathbf{e}_i' = \mu_0\mathbf{e}_i$, $i = 0, 1, \ldots, n$. Отсюда следует, что однородные координаты произвольной точки $M \in P^n$ в системе координат, определяемой базисом (18), пропорциональны однородным координатам этой точки в системе координат, определяемой базисом (20). ◄

Таким образом, *задание репера в проективном пространстве P^n приводит к однозначно определенной системе однородных координат. Однородные координаты точки $M \in P^n$ в этой системе координат будем называть также координатами относительно соответствующего репера.*

Упражнения

1. Покажите, что на проективной плоскости любые две прямые пересекаются.

2. Пусть дано уравнение

$$u_0x_0 + u_1x_1 + \ldots + u_nx_n = 0 \tag{A}$$

$(n - 1)$-мерной гиперплоскости в проективном пространстве P^n. Говорят, что точка с однородными координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$ и гиперплоскость (A) *инцидентны*, если они связаны соотношением (A). Докажите принцип двойственности для проективного пространства: если верна какая-либо теорема, касающаяся точек и гиперплоскостей проективного пространства и тех или иных соотношений инцидентности между ними, то, заменив в ней слово «точка» словом «гиперплоскость» и наоборот, мы получим теорему, которая также верна. Приведите примеры таких теорем.

3. Установите общий принцип двойственности в пространстве P^n для m-мерных и $(n - m - 1)$-мерных плоскостей.

28.4. Проективная группа

Рассмотрим проективное пространство P^n одномерных подпространств линейного пространства V^{n+1} над полем F. Пусть f — автоморфизм пространства V^{n+1}. Так как при автоморфизме f одномерные подпространства пространства V^{n+1} переходят в одномерные подпространства, то в пространстве P^n индуцируется преобразование $\bar{f}$.

Определение 28.11. *Преобразование $\bar{f}: P^n \to P^n$, индуцированное автоморфизмом f пространства V^{n+1}, называется проективным преобразованием, порожденным автоморфизмом f.*

Пусть задан базис

$$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{1}$$

пространства V^{n+1}. Как известно из § 19.3, координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ вектора $\mathbf{x} \in V^{n+1}$ связаны с координатами $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$ образа этого вектора при автоморфизме f формулами:

$$x'_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n,$$

где $\det[\alpha_{ij}] \neq 0$.

Рассмотрим в проективном пространстве P^n точку $M = \pi(\mathbf{x})$, т. е. одномерное подпространство пространства V^{n+1}, порожденное вектором $\mathbf{x}$: $\{\lambda\mathbf{x} | \lambda \in F\}$. Однородные координаты этой точки относительно базиса (1) равны координатам вектора $\mathbf{x}$ или любого вектора $\alpha\mathbf{x}$, где α – отличное от нуля число из поля F. Аналогично однородными координатами точки $\bar{f}(M)$ относительно того же базиса являются координаты вектора $f(\mathbf{x})$. Теперь ясно, что однородные координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ точки M связаны с однородными координатами $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$ образа этой точки при проективном преобразовании $\bar{f}$ формулами:

$$\lambda x'_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x_j, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{2}$$

где $\det[\alpha_{ij}] \neq 0$; λ – произвольное, отличное от нуля число из поля F.

Обратно, любое преобразование проективного пространства, заданное формулами (2), является проективным.

Из формул (2), в частности, видно, что если два автоморфизма f_1 и f_2 пространства V^{n+1} связаны равенством $f_2 = \lambda f_1$, то они индуцируют одно и то же проективное преобразование: $\bar{f}_1 = \bar{f}_2$.

Теорема 28.9. *Множество $G(P^n)$ всех проективных преобразований проективного пространства P^n является группой относительно композиции преобразований.*

➤ Как известно (см. теорему 3.1), композиция преобразований обладает свойством ассоциативности. Тождественный автоморфизм пространства V^{n+1} порождает тождественное проективное преобразование пространства P^n. Пусть f – произвольный автоморфизм пространства V^{n+1} и $\bar{f}$ – порожденное им проективное преобразование пространства P^n. Легко видеть, что автоморфизм f^{-1} пространства V^{n+1} порождает проективное преобразование $\bar{f}^{-1}$, обратное преобразованию $\bar{f}$. Итак, $G(P^n)$ – группа. ◀

Теперь мы опишем свойства проективного пространства P^n, связанные с группой $G(P^n)$, аналогично тому, как было сделано в § 25.8 для аффинной группы, поэтому некоторые детали могут быть опущены.

Определение 28.12. *Группа $G(P^n)$ всех проективных преобразований проективного пространства P^n называется проективной группой.*

Определение 28.13. *Фигурой в пространстве P^n называется произвольное множество точек этого пространства. Две фигуры в пространстве P^n называются проективно эквивалентными, если существует проективное преобразование, переводящее одну из этих фигур в другую.*

Как и в § 25.8, можно показать, что проективная эквивалентность есть отношение эквивалентности (см. § 3.2) на множестве всех фигур пространства P^n и это множество разбивается на непересекающиеся классы попарно проективно эквивалентных фигур. Ниже рассмотрены некоторые из этих классов.

Теорема 28.10. *Все реперы пространства P^n образуют класс проективно эквивалентных фигур. Для любых двух реперов существует единственное проективное преобразование $\bar{f}$, переводящее первый репер во второй. При этом произвольная точка M, имеющая в первом репере координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$, переходит в точку $\bar{f}(M)$, имеющую во втором репере координаты $\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$.*

▶ Пусть задан репер

$$M_0, M_1, \ldots, M_{n+1} \tag{3}$$

пространства P^n. Это означает, что любые $n + 1$ точки среди точек (3) проективно независимы. Так как произвольный автоморфизм f пространства V^{n+1} переводит линейно независимые векторы в линейно независимые, то индуцируемое им проективное преобразование $\bar{f}$ переводит проективно независимые точки в проективно независимые. Отсюда следует, что при любом проективном преобразовании репер переходит в репер. Пусть наряду с репером (3) задан еще один репер

$$M'_0,\ M'_1,\ \ldots,\ M'_{n+1}. \tag{4}$$

Как и при доказательстве теоремы 28.8, выберем в одномерных подпространствах пространства V^{n+1}, определяемых точками (3), ненулевые векторы

$$\mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n,\ \mathbf{a}_{n+1}, \tag{5}$$

такие, что

$$\mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_n. \tag{6}$$

Аналогично в одномерных подпространствах, определяемых точками (4), выберем ненулевые векторы

$$\mathbf{e}'_0,\ \mathbf{e}'_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n,\ \mathbf{a}'_{n+1}, \tag{7}$$

удовлетворяющие условию

$$\mathbf{a}'_{n+1} = \mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1 + \ldots + \mathbf{e}'_n. \tag{8}$$

Согласно теореме 19.1, существует автоморфизм f пространства V^{n+1}, переводящий базис

$$\mathbf{e}_0,\ \mathbf{e}_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n$$

в базис

$$\mathbf{e}'_0,\ \mathbf{e}'_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n. \tag{9}$$

Из равенств (6) и (8) получаем

$$f(\mathbf{a}_{n+1}) = f(\mathbf{e}_0) + f(\mathbf{e}_1) + \ldots + f(\mathbf{e}_n) =$$
$$= \mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1 + \ldots + \mathbf{e}'_n = \mathbf{a}'_{n+1}.$$

Итак, автоморфизм f переводит векторы (5) в векторы (7), поэтому индуцируемое проективное преобразование $\bar{f}$ переводит репер (3) в репер (4).

Предположим теперь, что имеется еще одно проективное преобразование g пространства P^n, переводящее репер (3) в репер (4). Согласно определению, g индуцируется некоторым автоморфизмом f_1 пространства V^{n+1}, т. е. $g = \bar{f}_1$.

Так как автоморфизм f_1 переводит одномерные подпространства пространства V^{n+1}, определяемые векторами (5), в одномерные подпространства, определяемые векторами (7), найдутся такие числа $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n+1}$, что

$$f_1(\mathbf{a}_{n+1}) = \mu_{n+1}\mathbf{a}_{n+1}, \; f_1(\mathbf{e}_i) = \mu_i \mathbf{e}_i', \; i = 0, 1, \ldots, n. \quad (10)$$

В силу равенств (6) и (10) имеем:

$$\begin{aligned} f_1(\mathbf{a}_{n+1}) &= f_1(\mathbf{e}_0) + f_1(\mathbf{e}_1) + \ldots + f_1(\mathbf{e}_n) = \\ &= \mu_0\mathbf{e}_0' + \mu_1\mathbf{e}_1' + \ldots + \mu_n\mathbf{e}_n'. \end{aligned} \quad (11)$$

С другой стороны, из равенств (8) и (10) получаем

$$f(\mathbf{a}_{n+1}) = \mu_{n+1}\mathbf{a}_{n+1}' = \mu_{n+1}\mathbf{e}_0' + \mu_{n+1}\mathbf{e}_1' + \ldots + \mu_{n+1}\mathbf{e}_n'. \quad (12)$$

Так как векторы (9) линейно независимы, из равенств (11) и (12) следует $\mu_0 = \mu_1 = \ldots = \mu_{n+1}$. Из равенства (10) получаем

$$f_1(\mathbf{e}_i) = \mu_0 f(\mathbf{e}_i), \; i = 0, 1, \ldots, n,$$

а следовательно,

$$f_1(\mathbf{x}) = \mu_0 f(\mathbf{x}) \quad (13)$$

для любого $\mathbf{x} \in V^{n+1}$. Равенство (13), равносильное равенству $f_1 = \mu_0 f$, означает, что $\bar{f}_1 = \bar{f}$. Итак, доказано, что существует единственное проективное преобразование пространства P^n, переводящее репер (3) в репер (4).

Последнее утверждение теоремы следует из теоремы 25.13. ≺

Теорема 28.11. *Для данного k $(1 \leqslant k \leqslant n+1)$ все системы, состоящие из k проективно независимых точек, образуют класс проективно эквивалентных фигур.*

➤ Выше уже было отмечено, что любое проективное преобразование переводит проективно независимые точки в проективно независимые. Пусть заданы две системы проективно независимых точек:

$$M_0, M_1, \ldots, M_{k-1}, \quad (14)$$

$$M_0', M_1', \ldots, M_{k-1}'. \quad (15)$$

Согласно теореме 28.7, систему (14) можно дополнить до репера (3), а систему (15) – до репера (4) . Проективное преобразование, переводящее репер (3) в репер (4), переведет систему (14) в систему (15). ◄

Теорема 28.12. *Для данного k $(0 \leqslant k \leqslant n)$ все k-мерные плоскости образуют класс проективно эквивалентных фигур.*

► То, что проективное преобразование любую k-мерную плоскость переводит в k-мерную плоскость, следует из свойства 6 § 19.4. Пусть теперь P^k и P_1^k – две произвольные k-мерные плоскости пространства P^n. Возьмем в плоскости P^k какие-либо $k+1$ проективно независимые точки

$$M_0, M_1, \ldots, M_k. \tag{16}$$

Аналогично возьмем в плоскости P_1^k проективно независимые точки

$$M'_0, M'_1, \ldots, M'_k. \tag{17}$$

Проективное преобразование, переводящее точки (16) в точки (17), переведет плоскость P^k в плоскость P_1^k. ◄

Теорема 28.13. *Все пары плоскостей пространства P^n, имеющие одну и ту же характеристику, образуют класс проективно эквивалентных фигур.*

► Пусть задана пара плоскостей P^k и P^l с характеристикой (k, l, m, s). Так как при любом проективном преобразовании всякая плоскость переходит в плоскость той же размерности, пара плоскостей P^k и P^l перейдет при этом преобразовании в пару плоскостей, имеющих ту же характеристику (k, l, m, s).

Пусть теперь в пространстве P^n заданы две пары плоскостей P^k, P^l и P_1^k, P_1^l, имеющие одну и ту же характеристику (k, l, m, s). Соответствующие им пары плоскостей A^{k+1}, A^{l+1} и A_1^{k+1}, A_1^{l+1} пространства A^{n+1} также имеют одну и ту же характеристику $(k+1, l+1, m+1, s+1)$. Согласно теореме 25.20, существует автоморфизм f пространства A^{n+1}, переводящий плоскости A^{k+1}, A^{l+1} в плоскости A_1^{k+1}, A_1^{l+1}. Тогда проективное преобразование $\bar{f}$, индуцированное автоморфизмом f, переведет плоскости P^k, P^l в плоскости P_1^k, P_1^l. ◄

В заключение установим связь между проективными и аффинными преобразованиями. Рассмотрим аффинную карту (B, ρ) пространства P^n, считая, что направляющее пространство плоскости B натянуто на векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$. В этом случае несобственные точки пространства P^n характеризуются равенством $x_0 = 0$, а для остальных точек неоднородные координаты $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ связаны однородными формулами (см. § 28.2):

$$\xi_i = x_i / x_0, \; i = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Запишем формулы проективного преобразования:

$$\left.\begin{aligned} \lambda x_0' &= \alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \ldots + \alpha_{0n}x_n, \\ \lambda x_1' &= \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \lambda x_n' &= \alpha_{n0}x_0 + \alpha_{n1}x_1 + \ldots + \alpha_{nn}x_n. \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

Рассмотрим теперь такое проективное преобразование $\tilde{f}_0$, которое несобственные точки переводит в несобственные. Оно характеризуется тем, что из равенства $x_0 = 0$ следует равенство $x_0' = 0$. Из первого равенства системы (19) получим

$$\alpha_{01} = \alpha_{02} = \ldots = \alpha_{0n} = 0, \tag{20}$$

т. е. первое равенство (19) примет вид

$$\lambda x_0' = \alpha_{00}x_0. \tag{21}$$

Из невырожденности матрицы $[\alpha_{ij}]$ и равенств (20) следует, что $\alpha_{00} \neq 0$. Поэтому равенство (21) показывает, что преобразование $\tilde{f}_0$ собственные точки переводит в собственные. Разделив теперь обе части каждого из равенств (19), кроме первого, на $\lambda x_0' = \alpha_{00}x_0$ и использовав формулы (18), получим:

$$\left.\begin{aligned} \xi_1' &= \beta_{11}\xi_1 + \beta_{12}\xi_2 + \ldots + \beta_{1n}\xi_n + \beta_1, \\ \xi_2' &= \beta_{21}\xi_1 + \beta_{22}\xi_2 + \ldots + \beta_{2n}\xi_n + \beta_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \xi_n' &= \beta_{n1}\xi_1 + \beta_{n2}\xi_2 + \ldots + \beta_{nn}\xi_n + \beta_n, \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

где $\beta_{ij} = \alpha_{ij}/\alpha_{00}$; $\beta_i = \alpha_{i0}/\alpha_{00}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Очевидно, что $\det[\beta_{ij}] \neq 0$.

Преобразование $\tilde{f}_0$ индуцирует на карте аффинное преобразование g, задаваемое формулами (22). Итак, имеет место

Теорема 28.14. Множество всех проективных преобразований n-мерного проективного пространства, переводящих в себя совокупность точек, несобственных относительно некоторой аффинной карты, индуцирует на этой карте аффинную группу.

28.5. Сложное отношение четырех точек

Пусть в проективном пространстве P^n задана прямая P^1 и выбрана система однородных координат, определяемая базисом $\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ пространства V^{n+1}. Как известно из § 28.3, прямая P^1 может быть задана системой уравнений:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{00}x_0 + \alpha_{01}x_1 + \ldots + \alpha_{0n}x_n = 0, \\ \alpha_{10}x_0 + \alpha_{11}x_1 + \ldots + \alpha_{1n}x_n = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \alpha_{n-2\ 0}x_0 + \alpha_{n-2\ 1}x_1 + \ldots + \alpha_{n-2\ n}x_n = 0, \end{array}\right\} \quad (1)$$

ранг которой равен $n-1$. Пусть, далее, $(q_0, q_1, \ldots, q_n)$, $(r_0, r_1, \ldots, r_n)$ – фундаментальная система решений системы (1), а Q, R – соответствующие точки прямой P^1. Тогда для любой точки $M(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ прямой P^1 найдутся числа $\mu_1, \mu_2 \in F$, такие, что

$$x_i = \mu_1 q_i + \mu_2 r_i,\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad (2)$$

причем если точка M отлична от Q и R, то $\mu_1 \neq 0$, $\mu_2 \neq 0$. Пусть $S(s_0, s_1, \ldots, s_n)$, $T(t_0, t_1, \ldots, t_n)$ – две различные точки прямой P^1, отличные от точек Q, R. Тогда

$$s_i = \sigma_1 q_i + \sigma_2 r_i,\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad (3)$$

$$t_i = \tau_1 q_i + \tau_2 r_i,\ i = 0, 1, \ldots, n, \quad (4)$$

причем $\sigma_1 \neq 0$, $\sigma_2 \neq 0$, $\tau_1 \neq 0$, $\tau_2 \neq 0$.

Определение 28.14. *Число* $\frac{\sigma_2}{\sigma_1} : \frac{\tau_2}{\tau_1}$ *называется сложным или двойным отношением четырех точек Q, R, S, T и обозначается $(QRST)$.*

Итак,

$$(QRST) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} : \frac{\tau_2}{\tau_1}. \quad (5)$$

Покажем, что сложное отношение (5) зависит только от выбора точек Q, R, S, T и не зависит от координат этих точек. В выбранной системе координат координаты точек определены лишь с точностью до множителя, поэтому точки Q, R, S, T могут быть заданы соответственно координатами:

$$\bar{q}_i = \lambda_1 q_i, \quad \bar{r}_i = \lambda_2 r_i, \quad \bar{s}_i = \lambda_3 s_i, \quad \bar{t}_i = \lambda_4 t_i,$$

где λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 – произвольные, отличные от нуля элементы поля F. Относительно этих координат равенства (3) и (4) примут вид:

$$\bar{s}_i = \frac{\sigma_1\lambda_3}{\lambda_1}\bar{q}_i + \frac{\sigma_2\lambda_3}{\lambda_2}\bar{r}_i,$$
$$\bar{t}_i = \frac{\tau_1\lambda_4}{\lambda_1}\bar{q}_i + \frac{\tau_2\lambda_4}{\lambda_2}\bar{r}_i.$$

Следовательно, сложное отношение точек Q, R, S, T

$$\frac{\sigma_2\lambda_3\lambda_1}{\lambda_2\sigma_1\lambda_3} : \frac{\tau_2\lambda_4\lambda_1}{\lambda_2\tau_1\lambda_4} = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} : \frac{\tau_2}{\tau_1}$$

не зависит от выбора координат этих точек в данной системе координат.

Перейдем теперь к какой-либо новой системе однородных координат. Как известно из § 28.2, старые координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ произвольной точки M выражаются через новые координаты x_0', x_1', …, x_n' этой точки по формулам:

$$x_i = \mu \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x_j', \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{6}$$

где $\det[\alpha_{ij}] \neq 0$; μ – не равное нулю число из поля F. В частности, для точек Q, R, S, T имеем:

$$\left.\begin{aligned} q_i &= \mu \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} q_j', \quad r_i = \mu \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} r_j', \\ s_i &= \mu \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} s_j', \quad t_i = \mu \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} t_j'. \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Подставляя эти выражения в равенства (3), (4) и сокращая полученные равенства на μ, получаем:

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}(s_j' - \sigma_1 q_j' - \sigma_2 r_j') = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n. \tag{8}$$

$$\sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij}(t'_j - \tau_1 q'_j - \tau_2 r'_j) = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{9}$$

Равенства (8) показывают, что

$$s'_j - \sigma_1 q'_j - \sigma_2 r'_j = 0, \; j = 0, 1, \ldots, n, \tag{10}$$

так как в противном случае столбцы матрицы $[\alpha_{ij}]$ были бы линейно зависимы вопреки невырожденности этой матрицы.

Перепишем равенства (10) в виде

$$s'_j = \sigma_1 q'_j + \sigma_2 r'_j, \; j = 0, 1, \ldots, n. \tag{11}$$

Аналогично из равенств (9) получаем

$$t'_j = \tau_1 q'_j + \tau_2 r'_j, \; j = 0, 1, \ldots, n. \tag{12}$$

Равенства (11) и (12) показывают, что сложное отношение точек Q, R, S, T, выраженное в новых координатах, имеет то же значение (5), что и в старых координатах.

Проведенным выше вычислениям можно дать и другое истолкование. Будем рассматривать соотношения (6) как формулы проективного преобразования пространства P^n, переводящего произвольную точку M, заданную в некоторой проективной системе координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$, в точку M', заданную в той же системе координатами $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$. Тогда мы получаем следующее утверждение.

Теорема 28.15. *Сложное отношение четырех точек сохраняется при любом проективном преобразовании.*

28.6. Квадрики в проективном пространстве

Рассмотрим действительное $(n + 1)$-мерное аффинное пространство, вложенное в комплексное $(n + 1)$-мерное аффинное пространство $A^{n+1}(i)$ (см. § 27.1). Зафиксировав в пространстве $A^{n+1}(i)$ действительную точку и проведя через нее все прямые пространства $A^{n+1}(i)$, получим действительное n-мерное проективное пространство, вложенное в комплексное n-мерное проективное пространство $P^n(i)$.

Выберем в пространстве V^{n+1} некоторый базис

$$\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{1}$$

и рассмотрим уравнение

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} a_{ij} x_i x_j = 0, \tag{2}$$

где a_{ij} – действительные числа, не равные нулю одновременно, $a_{ij} = a_{ji}$.

Определение 28.15. *Квадрикой пространства $P^n(i)$ называется множество всех точек этого пространства, однородные координаты которых в базисе (1) удовлетворяют уравнению (2).*

Согласно теореме 27.1, уравнение заданной квадрики в выбранном репере определено однозначно с точностью до умножения левой части уравнения на произвольное, отличное от нуля действительное число.

Перейдем теперь к новому базису

$$\mathbf{e}'_0,\ \mathbf{e}'_1,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n. \tag{3}$$

Формулы, выражающие однородные координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$ точки M в базисе (1) через однородные координаты $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$ этой же точки в базисе (3), имеют вид

$$\lambda x_i = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x'_j,\ i = 0,\ 1,\ \ldots,\ n, \tag{4}$$

где $\det[\alpha_{ij}] \neq 0$; α_{ij} – действительные числа.

Подставляя выражения x_i из формул (4) в уравнение (2), получаем уравнение квадрики (2) в новых координатах:

$$\sum_{i,\ j=0}^{n} a'_{ij} x'_i x'_j = 0.$$

Если рассматривать формулы (4) как формулы проективного преобразования, переводящего точку M с координатами $x_0, x_1, \ldots, x_n$ в репере (1) в точку M' с координатами $x'_0, x'_1, \ldots, x'_n$ в том же репере, то мы получаем следующее утверждение:

Теорема 28.16. *При проективном преобразовании пространства $P^n(i)$ любая его квадрика преобразуется в квадрику.*

Как показано в § 22.4, квадратичную форму, стоящую в левой части уравнения (2), с помощью преобразования (4) можно привести к нормальному виду:

$$-(x_0')^2 - \ldots - (x_k')^2 + (x_{k+1}')^2 + \ldots + (x_r')^2,\ 0 < r \leqslant n.$$

В результате имеем следующее утверждение:

Теорема 28.17. *Для любой квадрики (2) можно подобрать базис (3) так, чтобы уравнение квадрики в этом базисе имело нормальный вид:*

$$-(x_0')^2 - \ldots - (x_k')^2 + (x_{k+1}')^2 + \ldots + (x_r')^2 = 0,\ 0 < r \leqslant n. \quad (5)$$

Так как уравнение квадрики можно умножить на -1 и с помощью преобразования вида (4) изменить нумерацию координат, будем считать, что в уравнении (5) $k \leqslant (r+1)/2$.

Разобьем теперь множество всех квадрик пространства $P^n(i)$ на классы. К одному классу отнесем такие квадрики, которые в подходящих базисах задаются одним и тем же уравнением (5) (при одних и тех же k и r). Согласно теореме 28.17 и закону инерции для действительных квадратичных форм, каждая квадрика попадет в один вполне определенный класс.

Теперь мы покажем, что построенные классы совпадают с классами проективно эквивалентных квадрик. Пусть K и K' – две квадрики, принадлежащие одному из построенных классов. Пусть, далее, квадрика K задается в некотором базисе (1) уравнением

$$-x_0^2 - x_1^2 - \ldots - x_k^2 + x_{k+1}^2 + \ldots + x_r^2 = 0. \quad (6)$$

Тогда квадрика K' задается в каком-либо базисе (3) этим же уравнением. Возьмем реперы R и R' пространства P^n, соответствующие базисам (1) и (3). Согласно теореме 28.10, существует проективное преобразование f пространства P^n, переводящее репер R в репер R'. При этом произвольная точка M, имеющая в репере R однородные координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$, переходит в точку $f(M)$ с координатами $\lambda x_0, \lambda x_1, \ldots, \lambda x_n$ в репере R'. Так как квадрика K состоит из всех точек пространства P^n, координаты которых в репере R удовлетворяют уравнению (6), ее образ $f(K)$ состоит из всех точек, координаты которых в репере R' также удовлетворяют уравнению (6), следовательно, $f(K) = K'$. Итак, *для любых двух квадрик из одного класса существует проективное преобразование, переводящее одну из этих квадрик в другую.*

Пусть теперь K и K'' – две квадрики из разных классов, причем квадрика K задается в базисе (1) уравнением (6), а квадрика K'' задается в некотором базисе (3) уравнением

$$-(x_0')^2 - (x_1')^2 - \ldots - (x_l')^2 + (x_{l+1}')^2 + \ldots + (x_s')^2 = 0, \quad (7)$$

где $s \neq r$ или $l \neq k$.

Предположим, что существует проективное преобразование g, переводящее квадрику K в квадрику K''. Оно задается формулами:

$$\mu x_i = \sum_{j=0}^{n} \beta_{ij} x_j'', \; i = 0, 1, \ldots, n, \quad (8)$$

где $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – координаты произвольной точки $M \in P^n$ в базисе (1); $x_0'', x_1'', \ldots, x_n''$ – координаты точки $g(M)$ в том же базисе. Подставляя выражения x_i из формул (8) в левую часть уравнения (6), получаем уравнение

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij} x_i'' x_j'' = 0 \quad (9)$$

квадрики $g(K)$ в базисе (1). Левая часть этого уравнения представляет собой квадратичную форму ранга $r + 1$, положительный индекс инерции которой равен $r - k$.

Рассмотрим теперь преобразование однородных координат, соответствующее переходу от базиса (1) к базису (3). Оно задается с помощью формул:

$$\lambda x_i'' = \sum_{j=0}^{n} \alpha_{ij} x_j', \; i = 0, 1, \ldots, n, \quad (10)$$

где $x_0'', x_1'', \ldots, x_n''$ – координаты произвольной точки M' в базисе (1); $x_0', x_1', \ldots, x_n'$ – координаты той же точки в базисе (3). Подставляя значения $x_0'', x_1'', \ldots, x_n''$ из выражений (10) в левую часть уравнения (9), получаем уравнение

$$\sum_{i,\, j=0}^{n} b_{ij} x_i' x_j' = 0 \tag{11}$$

квадрики $g(K)$ в базисе (3). Здесь слева стоит квадратичная форма ранга $r + 1$, положительный индекс инерции которой равен $r - k$. Так как, по нашему предположению, $g(K) = K''$, то уравнения (7) и (11) задают одну и ту же квадрику K'' в одной и той же системе однородных координат, определяемой базисом (3). На основании леммы 27.3 левые части уравнений (7) и (11) должны различаться лишь действительным, отличным от нуля числовым множителем α. Из условий $k \leqslant (r + 1)/2$, $l \leqslant (s + 1)/2$ следует, что $\alpha > 0$. Однако это невозможно, так как квадратичные формы, стоящие в левых частях уравнений (7) и (11), различаются рангом или положительным индексом инерции, а умножение квадратичной формы на положительное число α не изменяет этих чисел. Полученное противоречие показывает, что для двух квадрик K и K'', взятых из разных классов, не существует проективного преобразования, переводящего одну из этих квадрик во вторую. Итак, доказана

Теорема 28.18. *Множество всех квадрик пространства $P^n(i)$ разбивается на непересекающиеся классы проективно эквивалентных квадрик. К одному классу относят все квадрики, задающиеся в соответствующих базисах одним и тем же нормальным уравнением (5).*

Сопоставим теперь проективную классификацию квадрик в пространстве $P^n(i)$ с аффинной классификацией квадрик в пространстве $A^n(i)$. Как и в § 28.1, аффинное пространство $A^n(i)$ будем рассматривать как множество всех собственных точек проективного пространства $P^n(i)$.

Пусть в пространстве $A^n(i)$ задан некоторый репер

$$(0, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n). \tag{12}$$

Будем обозначать координаты произвольной точки M в репере (12) через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. Рассмотрим в пространстве $A^n(i)$ произвольную квадрику K, заданную в репере (12) уравнением

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij}\xi_i\xi_j + 2\sum_{i=0}^{n} a_{0i}\xi_i + a_{00} = 0. \qquad (13)$$

Как было сделано в § 28.2, введем в пространстве $P^n(i)$ однородные координаты $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Для собственных точек пространства $P^n(i)$, т. е. для точек пространства $A^n(i)$, имеем:

$$\xi_i = x_i/x_0,\ i = 1, 2, \ldots, n. \qquad (14)$$

Для несобственных точек пространства $P^n(i)$ $x_0 = 0$. Подставляя выражения (14) в левую часть уравнения (13) и умножая полученное уравнение на x_0^2, приходим к уравнению

$$\sum_{i,\,j=0}^{n} a_{ij}x_i x_j = 0. \qquad (15)$$

Это уравнение квадрики K в однородных координатах в пространстве $A^n(i)$. Однако уравнение (15) можно рассматривать и в пространстве $P^n(i)$. Там оно задает некоторую квадрику $\bar{K}$. Квадрика K есть множество всех собственных точек квадрики $\bar{K}$.

Итак, *каждой квадрике K пространства $A^n(i)$ можно поставить в соответствие однозначно определенную квадрику $\bar{K}$ пространства $P^n(i)$ так, чтобы K было множеством всех собственных точек квадрики $\bar{K}$.*

Обратно, пусть в пространстве $P^n(i)$ некоторая квадрика $\bar{K}$ задана своим уравнением (15) в однородных координатах. Напомним, что среди чисел a_{ij}, $i, j = 0, 1, \ldots, n$, есть отличные от нуля. Обозначим через K множество всех собственных точек квадрики $\bar{K}$. Разделив уравнение (15) на x_0^2 и воспользовавшись формулами (14), мы придем к уравнению (13) множества K в репере (12). Возможны следующие случаи.

1. Среди коэффициентов a_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, есть отличные от нуля. Тогда (13) – уравнение второй степени относительно $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и K является квадрикой в пространстве $A^n(i)$.

2. Коэффициенты $a_{ij} = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, но среди коэффициентов a_{0i}, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть отличные от нуля.

Тогда (13) является уравнением первой степени относительно $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ и K – гиперплоскость в пространстве $A^n(i)$.

3. Коэффициенты $a_{ij} = 0$, $a_{0i} = 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Так как по условию $a_{00} \neq 0$, то равенство (13) приводит к противоречию. В этом случае $K = \varnothing$.

Итак, *множество всех собственных точек квадрики $\tilde{K}$ пространства $P^n(i)$ может быть в пространстве $A^n(i)$ квадрикой, гиперплоскостью или пустым множеством.*

28.7. Линии второго порядка на плоскости $P^2(i)$

Пространство $P^2(i)$ в дальнейшем будем называть *плоскостью,* а квадрики в этой плоскости – *линиями второго порядка.*

На плоскости $P^2(i)$ имеется пять классов проективно эквивалентных линий второго порядка (см. § 28.6). В некоторой однородной системе координат представители этих классов могут быть заданы следующими уравнениями:

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{1}$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{2}$$

$$-x_0^2 + x_1^2 = 0, \tag{3}$$

$$x_0^2 + x_1^2 = 0, \tag{4}$$

$$x_1^2 = 0. \tag{5}$$

Определение 28.16. *Линия, заданная на плоскости $P^2(i)$ уравнением (1), называется действительным овалом, а линия, заданная на плоскости $P^2(i)$ уравнением (2), – мнимым овалом.*

Уравнение (3) задает *пару действительных прямых:* $-x_0 + x_1 = 0$, $x_0 + x_1 = 0$, а уравнение (4) – *пару мнимых прямых:* $-ix_0 + x_1 = 0$, $ix_0 + x_1 = 0$. Уравнение (5) задает *сдвоенную прямую.*

Напомним аффинную классификацию линий второго порядка на плоскости $A^2(i)$. В некотором репере $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$ представители аффинных классов могут быть заданы следующими уравнениями:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1 \qquad (\textit{эллипс}), \tag{6}$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = -1 \qquad (\textit{мнимый эллипс}), \tag{7}$$
$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 1 \qquad (\textit{гипербола}), \tag{8}$$
$$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 0 \qquad (\textit{пара действительных пересекающихся прямых}), \tag{9}$$
$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0 \qquad (\textit{пара мнимых пересекающихся прямых}), \tag{10}$$
$$\xi_1^2 = 2\xi_2^2 \qquad (\textit{парабола}), \tag{11}$$
$$\xi_1^2 - 1 = 0 \qquad (\textit{пара действительных параллельных прямых}), \tag{12}$$
$$\xi_1^2 + 1 = 0 \qquad (\textit{пара мнимых параллельных прямых}), \tag{13}$$
$$\xi_1^2 = 0 \qquad (\textit{сдвоенная прямая}). \tag{14}$$

При переходе от плоскости $A^2(i)$ к плоскости $P^2(i)$ каждая из линий (6) – (14) превращается в одну из линий (1) – (5). Для реализации этого перехода рассмотрим формулы, связывающие однородные координаты с неоднородными:

$$\xi_1 = x_1/x_0, \ \xi_2 = x_2/x_0. \tag{15}$$

Подставляя выражения (15) в уравнение (6) и умножая полученное уравнение на x_0^2, приходим к уравнению (1). Это означает, что эллипс является множеством собственных точек действительного овала $O_э$.

Подставляя выражения (15) в уравнение (8), мы приходим к уравнению

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Оно задает на плоскости $P^2(i)$ овал. Следовательно, гипербола также является множеством собственных точек некоторого овала $O_г$. Различие между овалами $O_э$ и $O_г$ состоит в следующем. Овал $O_э$ не имеет действительных несобственных точек. В самом деле, полагая $x_0 = 0$, из уравнения (1) получаем $x_1^2 + x_2^2 = 0$. Отсюда следует, что овал $O_э$ содержит только две несобственные мнимые точки: $M_1(1,\ i,\ 0)$, $M_2(1,\ -i,\ 0)$. Аналогично получаем, что овал $O_г$ содержит две действительные несобственные точки: $M_3(1,\ 1,\ 0)$, $M_4(1,\ -1,\ 0)$.

Подставляя теперь выражения (15) в уравнение (11), имеем

$$x_1^2 - 2x_0x_2 = 0. \tag{16}$$

Совершая преобразование однородных координат по формулам:

$$x_0 = (x_0' - x_2')/\sqrt{2},\ x_1 = x_1',\ x_2 = (x_0' + x_2')/\sqrt{2},$$

приводим уравнение (16) к нормальному виду:

$$-(x_0')^2 + (x_1')^2 + (x_2')^2 = 0.$$

Мы снова получили овал. Итак, парабола (11) является множеством собственных точек овала $O_п$. Подставляя $x_0 = 0$ в уравнение (16), получаем $x_1 = 0$. Это означает, что овал $O_п$ имеет одну несобственную точку $M(0,\ 0,\ 1)$.

Мнимый эллипс (7) плоскости $A^2(i)$ при переходе к плоскости $P^2(i)$ превращается в мнимый овал (2). Пара действительных пересекающихся прямых (9) плоскости $A^2(i)$ пополняется двумя несобственными точками: $N_1(0,\ 1,\ 1)$, $N_2(0,\ 1,\ -1)$ и превращается в пару действительных прямых (3) плоскости $P^2(i)$. Если перейти к однородным координатам в уравнении (12), получим

$$x_0^2 - x_1^2 = 0, \tag{17}$$

т. е. уравнение пары прямых на плоскости $P^2(i)$. Итак, при переходе от $A^2(i)$ к $P^2(i)$ пара действительных параллельных прямых (12) пополняется несобственной точкой $S(0,\ 0,\ 1)$, принадлежащей обеим этим прямым, и превращается в пару действительных пересекающихся прямых плоскости $P^2(i)$.

Аналогично в один проективный класс (4) попадают пара мнимых пересекающихся прямых (10) и пара мнимых параллельных прямых (13). Наконец, сдвоенная прямая (14) плоскости $A^2(i)$ превращается в сдвоенную прямую (5) плоскости $P^2(i)$ после добавления сдвоенной точки $T(0,\ 0,\ 1)$.

28.8. Поверхности второго порядка в пространстве $P^3(i)$

Квадрики пространства $P^3(i)$ будем называть *поверхностями второго порядка*. Как показано в § 28.6, в пространстве $P^3(i)$ имеется восемь классов проективно эквивалентных поверхностей второго порядка. В некоторой однородной системе координат представители этих классов задаются следующими уравнениями:

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad (1)$$

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad (2)$$

$$-x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad (3)$$

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad (4)$$

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \quad (5)$$

$$-x_0^2 + x_1^2 = 0, \quad (6)$$

$$x_0^2 + x_1^2 = 0, \quad (7)$$

$$x_1^2 = 0. \quad (8)$$

Определение 28.17. *Поверхности (1), (2), (3) в пространстве $P^3(i)$ называются соответственно мнимой овальной поверхностью, действительной овальной поверхностью и кольцевидной поверхностью.*

Уравнения (4) – (8) задают соответственно *мнимый конус*, *действительный конус*, *пару действительных различных плоскостей*, *пару мнимых различных плоскостей* и *сдвоенную плоскость*.

Напомним аффинную классификацию поверхностей второго порядка в пространстве $A^3(i)$. В некотором репере $(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ представители аффинных классов могут быть заданы следующими уравнениями:

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1 \quad (\textit{эллипсоид}), \quad (9)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = -1 \quad (\textit{мнимый эллипсоид}), \quad (10)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 1 \quad (\textit{однополостный гиперболоид}), \quad (11)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = -1 \quad (\textit{двуполостный гиперболоид}), \quad (12)$$

$$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 2\xi_3 \quad (\textit{эллиптический параболоид}), \quad (13)$$

$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 2\xi_3$ (*гиперболический параболоид*), (14)

$\xi_1^2 + \xi_2^2 - \xi_3^2 = 0$ (*действительный конус*), (15)

$\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 0$ (*мнимый конус*), (16)

$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 1$ (*эллиптический цилиндр*), (17)

$\xi_1^2 + \xi_2^2 = -1$ (*мнимый эллиптический цилиндр*), (18)

$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 1$ (*гиперболический цилиндр*), (19)

$\xi_1^2 = 2\xi_2$ (*параболический цилиндр*), (20)

$\xi_1^2 - \xi_2^2 = 0$ (*пара действительных пересекающихся плоскостей*), (21)

$\xi_1^2 + \xi_2^2 = 0$ (*пара мнимых пересекающихся плоскостей*), (22)

$\xi_1^2 - 1 = 0$ (*пара действительных параллельных плоскостей*), (23)

$\xi_1^2 + 1 = 0$ (*пара мнимых параллельных плоскостей*), (24)

$\xi_1^2 = 0$ (*сдвоенная плоскость*). (25)

При переходе от пространства $A^3(i)$ к пространству $P^3(i)$ каждая из поверхностей (9) – (25) превращается в одну из поверхностей (1) – (8). Чтобы проследить этот переход, используем формулы, связывающие однородные координаты с неоднородными:

$$\xi_1 = x_1/x_0, \ \xi_2 = x_2/x_0, \ \xi_3 = x_3/x_0. \tag{26}$$

Подставляя выражения (26) в уравнение (9) и умножая полученное уравнение на x_0^2, приходим к уравнению (2). Это означает, что эллипсоид является множеством действительных точек действительной овальной поверхности $O_э$. Подставляя выражения (26) в уравнение (12), получаем

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_0^2 = 0, \tag{27}$$

т. е. уравнение типа (3). Итак, при переходе к пространству $P^3(i)$ двуполостный гиперболоид (12) превращается в действительную овальную поверхность $O_г$, задаваемую уравнением (27). Перейдем теперь к однородным координатам в уравнении (13):

$$x_1^2 + x_2^2 - 2x_0x_3 = 0. \tag{28}$$

Совершая преобразование однородных координат:

$$x_0 = (x_0' - x_3')/\sqrt{2},\ x_1 = x_1',\ x_2 = x_2',\ x_3 = (x_0' + x_3')/\sqrt{2},$$

приводим уравнение (28) к нормальному виду:

$$-(x_0')^2 + (x_1')^2 + (x_2')^2 + (x_3')^2 = 0.$$

Таким образом, эллиптический параболоид (13) при переходе к пространству $P^3(i)$ превращается в действительную овальную поверхность $O_п$, задаваемую уравнением (28).

Покажем, что действительные овальные поверхности $O_э$, $O_г$, $O_п$ отличаются друг от друга своим отношением к несобственной плоскости. В самом деле, найдем пересечение поверхности $O_э$ с несобственной плоскостью. Для этого в уравнение (2) подставим $x_0 = 0$. Получим уравнение

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

которое в однородных координатах на несобственной плоскости $P^2(i)$ задает мнимый овал. Итак, поверхность $O_э$ пересекает несобственную плоскость по мнимому овалу. Аналогично находим, что поверхность $O_г$, заданная уравнением (27), пересекает несобственную плоскость по действительному овалу

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Наконец, поверхность $O_п$ пересекает несобственную плоскость по паре мнимых прямых

$$x_1^2 + x_2^2 = 0.$$

Мнимый эллипсоид (10) при переходе к пространству $P^3(i)$ превращается в мнимую овальную поверхность (1).

Переходя к однородным координатам в уравнении (11), получаем уравнение

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0.$$

Это уравнение, подобно уравнению (3), задает в пространстве $P^3(i)$ кольцевидную поверхность $K_г$. Запишем в однородных координатах уравнение (14):

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_0x_3 = 0.$$

Приводя это уравнение к нормальному виду, убеждаемся, что оно задает кольцевидную поверхность $K_п$. Поверхности $K_г$ и $K_п$ различаются своим отношением к несобственной плоскости $P^2(i)$: поверхность $K_г$ пересекает плоскость $P^2(i)$ по овалу $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$, а поверхность $K_п$ – по паре действительных прямых $x_1^2 - x_2^2 = 0$.

Мнимый конус $M_к$, заданный уравнением (16), при переходе к пространству $P^3(i)$ превращается в мнимый конус пространства $P^3(i)$ с уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

Если теперь перейти к однородным координатам в уравнении (18), мы получим уравнение

$$x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0,$$

которое в пространстве $P^3(i)$ также задает мнимый конус $M_ц$. Поверхность $M_к$ пересекает несобственную плоскость $P^2(i)$ по действительному овалу, а поверхность $M_ц$ – по паре мнимых прямых.

Действительный конус (15) пространства $A^3(i)$ при переходе к пространству $P^3(i)$ превращается в действительный конус $\bar{K}$ с уравнением

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0. \tag{29}$$

Переходя к однородным координатам в уравнении (17) эллиптического цилиндра, приходим к уравнению

$$-x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{30}$$

которое в пространстве $P^3(i)$ задает действительный конус $\bar{K}_э$. Аналогично из уравнения (19) гиперболического цилиндра получаем уравнение

$$x_0^2 - x_1^2 + x_2^2 = 0, \tag{31}$$

которое в пространстве $P^3(i)$ также задает действительный конус $\bar{K}_г$. Переходя к однородным координатам в уравнении (20) параболического цилиндра, получаем уравнение

$$x_1^2 - 2x_0x_2 = 0. \tag{32}$$

Приводя это уравнение к нормальному виду, убеждаемся, что оно также задает действительный конус $\bar{K}_п$.

Поверхности $\bar{K}$, $\bar{K}_э$, $\bar{K}_г$, $\bar{K}_п$ отличаются друг от друга своим отношением к несобственной плоскости. Чтобы найти пересечение каждой из этих поверхностей с несобственной плоскостью, достаточно в уравнения (29) – (32) подставить $x_0 = 0$. В результате получаем, что поверхности $\bar{K}$, $\bar{K}_э$, $\bar{K}_г$, $\bar{K}_п$ пересекают несобственную плоскость соответственно по следующим линиям: действительному овалу, паре мнимых прямых, паре действительных прямых, сдвоенной прямой.

Пара действительных пересекающихся плоскостей пространства $A^3(i)$, заданная уравнением (21), при переходе к пространству $P^3(i)$ превращается в поверхность Π_1, заданную уравнением $x_1^2 - x_2^2 = 0$ и состоящую из пары действительных плоскостей. Переходя в уравнении (23) к однородным координатам, получаем уравнение $-x_0^2 + x_1^2 = 0$, которое в пространстве $P^3(i)$ задает поверхность Π_2, также состоящую из пары действительных плоскостей. Поверхности Π_1 и Π_2 пересекают несобственную плоскость соответственно по паре действительных прямых и по сдвоенной прямой.

Пара мнимых пересекающихся плоскостей (22) и пара мнимых параллельных плоскостей (24) при переходе к пространству $P^3(i)$ превращаются в поверхности Π_3 и Π_4, каждая из которых в свою очередь сама является парой мнимых плоскостей, пересекающихся по действительной прямой. Эта прямая для поверхности Π_3 является собственной, а для поверхности Π_4 – несобственной.

Сдвоенная плоскость (25) пространства $A^3(i)$ при переходе к пространству $P^3(i)$ превращается в сдвоенную плоскость пространства $P^3(i)$.

29. ТЕНЗОРЫ

В этой главе дается общее понятие о тензорах и операциях над ними. Тензоры довольно часто встречаются в линейной алгебре и аналитической геометрии. Они применяются не только в математике, но и в механике, физике и т. д.

29.1. Общее понятие о тензорах

Пусть V^n – n-мерное линейное пространство над полем P. Возьмем какой-либо вектор $\mathbf{x} \in V^n$. Если выбрать некоторый базис

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}_n, \tag{1}$$

то вектор $\mathbf{x}$ можно единственным образом разложить по этому базису:

$$\mathbf{x} = x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + \ldots + x^n\mathbf{e}_n = \sum_{i=1}^{n} x^i\mathbf{e}_i\,. \tag{2}$$

Здесь мы номер координаты вектора $\mathbf{x}$ помещаем в верхний индекс буквы x, а не в нижний, как это делалось раньше. Такой способ обозначений при рассмотрении тензоров оказывается более удобным.

Введем новое соглашение относительно операции суммирования: если в каком-либо выражении производится суммирование по индексу, стоящему один раз вверху и один раз внизу, знак суммирования будем опускать. Другими словами, сумму, стоящую в правой части равенства (2), будем обозначать $x^i\mathbf{e}_i$. Итак, формулу разложения вектора $\mathbf{x}$ по базису (1) можно переписать в виде

$$\mathbf{x} = x^i\mathbf{e}_i. \tag{3}$$

Возьмем теперь какой-либо другой (новый) базис

$$\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \ldots,\ \mathbf{e}'_n \tag{4}$$

и разложим каждый из векторов (4) по базису (1):

$$\left.\begin{array}{l}
\mathbf{e}'_1 = a_1^1\mathbf{e}_1 + a_1^2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_1^n\mathbf{e}_n,\\
\mathbf{e}'_2 = a_2^1\mathbf{e}_1 + a_2^2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_2^n\mathbf{e}_n,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\mathbf{e}'_n = a_n^1\mathbf{e}_1 + a_n^2\mathbf{e}_2 + \ldots + a_n^n\mathbf{e}_n.
\end{array}\right\} \tag{5}$$

Из коэффициентов разложения в формулах (5) можно составить матрицу

$$A = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{bmatrix}, \qquad (6)$$

которая в § 17.7 была названа матрицей перехода от базиса (1) к базису (4). Заметим, что элемент матрицы A, стоящий в i-й строке и j-м столбце, мы обозначаем теперь a_j^i. Использовав соглашение о суммировании, перепишем теперь формулы (5) в виде

$$\mathbf{e}'_j = a_j^i \mathbf{e}_i. \qquad (7)$$

Индекс i в равенстве (7) называется *индексом суммирования*, а j – *свободным индексом*. В дальнейшем будем считать, что если в формуле есть свободный индекс, это означает, что данная формула является краткой записью n формул, которые получаются, когда свободному индексу придают значения 1, 2, ..., n.

Разложим теперь указанный выше вектор $\mathbf{x}$ по базису (4):

$$\mathbf{x} = x'^i \mathbf{e}'_i, \ i = 1, 2, \dots, n. \qquad (8)$$

Здесь $x'^1, x'^2, \dots, x'^n$ – новые координаты вектора $\mathbf{x}$, т. е. его координаты в новом базисе (4). Выразим новые координаты вектора $\mathbf{x}$ через его старые координаты $x^1, x^2, \dots, x^n$. Для этого запишем формулы (7) в матричном виде:

$$[\mathbf{e}'_1 \ \mathbf{e}'_2 \ \dots \ \mathbf{e}'_n] = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n]A. \qquad (9)$$

Пусть B – матрица, обратная матрице A:

$$B = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \dots & b_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_1^n & b_2^n & \dots & b_n^n \end{bmatrix}. \qquad (10)$$

Умножая обе части равенства (9) справа на матрицу B, получаем

$$[\mathbf{e}_1\ \mathbf{e}_2\ \dots\ \mathbf{e}_n] = [\mathbf{e}'_1\ \mathbf{e}'_2\ \dots\ \mathbf{e}'_n]B.$$

Перепишем это равенство в виде

$$\mathbf{e}_j = b^i_j \mathbf{e}'_i. \tag{11}$$

Использовав равенства (3), (8), (11), имеем:

$$\mathbf{x} = x'^i \mathbf{e}'_i = x^j \mathbf{e}_j = x^j (b^i_j \mathbf{e}'_i) = (b^i_j x^j)\mathbf{e}'_i.$$

Отсюда в силу единственности разложения вектора $\mathbf{x}$ по базису (4) следует искомая формула

$$x'^i = b^i_j x^j. \tag{12}$$

Запишем эту формулу в развернутом виде:

$$\left.\begin{array}{l} x'^1 = b^1_1 x^1 + b^1_2 x^2 + \dots + b^1_n x^n, \\ x'^2 = b^2_1 x^1 + b^2_2 x^2 + \dots + b^2_n x^n, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x'^n = b^n_1 x^1 + b^n_2 x^2 + \dots + b^n_n x^n. \end{array}\right\} \tag{13}$$

Сопоставим формулы (5) и (13). Если в формулах (5) коэффициенты перехода от старого базиса (1) к новому базису (4) образуют матрицу A^T, в формулах (13) коэффициенты перехода от старых координат вектора $\mathbf{x}$ к его новым координатам образуют матрицу $B = A^{-1}$.

Теперь мы сформулируем первое определение тензора.

Определение 29.1. *Говорят, что в линейном пространстве V^n дан одновалентный контравариантный тензор, если в каждом базисе указано n чисел a^1, a^2, ..., a^n из поля P (координат тензора), преобразующихся при переходе от базиса (1) к базису (4) по закону*

$$a'^i = b^i_j a^j, \tag{14}$$

где $B = [b^i_j]$ – матрица перехода от базиса (4) к базису (1).

Термин «контравариантный», т. е. «противопреобразующийся», указывает на то, что координаты контравариантного тензора a^1, a^2, ..., a^n преобразуются не так, как векторы базиса $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ ..., $\mathbf{e}_n$, а с помощью обратной транспонированной матрицы (ср. формулы (5) и (13)). Выше мы видели, что примером одновалентного контравариантного тензора служат координаты вектора.

Рассмотрим теперь линейную функцию на линейном пространстве V^n (см. § 23.1):

$$f\colon V^n \to P. \tag{15}$$

Исходя из базиса (1), получаем

$$f(\mathbf{x}) = f(x^i\mathbf{e}_i) = x^i f(\mathbf{e}_i) = a_i x^i,$$

где

$$a_i = f(\mathbf{e}_i). \tag{16}$$

Определение 29.2. *Числа (16) называются координатами линейной функции f в базисе (1).*

Посмотрим теперь, как преобразуются координаты линейной функции f при переходе к новому базису (4). Имеем

$$a'_j = f(\mathbf{e}'_j) = f(a^i_j\mathbf{e}_i) = a^i_j f(\mathbf{e}_i) = a^i_j a_i.$$

Итак,

$$a'_j = a^i_j a_i. \tag{17}$$

Мы видим, что координаты линейной функции преобразуются так же, как базисные векторы (ср. равенства (7) и (17)). Этим и объясняется употребление термина «ковариантный», т. е. «сопреобразующийся», в следующем определении.

Определение 29.3. *Говорят, что в линейном пространстве V^n дан одновалентный ковариантный тензор, если в каждом базисе указано n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из поля P (координат тензора), преобразующихся при переходе от базиса (1) к базису (4) по закону (17), где $A = [a^i_j]$ — матрица перехода от базиса (1) к базису (4).*

Выше было показано, что координаты линейной функции образуют одновалентный ковариантный тензор.

Рассмотрим введенную в § 23.2 билинейную функцию φ на линейном пространстве V^n. Элементы матрицы этой билинейной функции в базисе (1) задаются с помощью формулы

$$a_{ij} = \varphi(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j). \tag{18}$$

Назовем числа (18) *координатами билинейной функции φ в базисе (1)* и найдем закон преобразования этих координат при переходе к базису (4). Имеем

$$a'_{kl} = \varphi(\mathbf{e}_k,\ \mathbf{e}_l) = \varphi\left(a_k^i\mathbf{e}_i,\ a_l^j\mathbf{e}_j\right) = a_k^i a_l^j \varphi(\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) = a_k^i a_l^j a_{ij}.$$

Итак,

$$a'_{kl} = a_k^i a_l^j a_{ij}. \tag{19}$$

Определение 29.4. *Говорят, что в линейном пространстве V^n дан двухвалентный ковариантный тензор, если в каждом базисе указано n^2 чисел a_{ij}, преобразующихся при переходе от базиса (1) к базису (4) по закону (19).*

Выше было показано, что координаты билинейной функции образуют двухвалентный ковариантный тензор.

Теперь мы сформулируем понятие тензора общего вида.

Определение 29.5. *Говорят, что в линейном пространстве V^n дан $(p + q)$-валентный тензор, p раз ковариантный и q раз контравариантный, или типа (q, p), если в каждом базисе указаны n^{p+q} чисел $a_{i_1 i_2 \cdots i_p}^{j_1 j_2 \cdots j_q}$ (координаты тензора), преобразующихся при переходе от базиса (1) к базису (4) по закону*

$$a'^{l_1 l_2 \cdots l_q}_{k_1 k_2 \cdots k_p} = a_{k_1}^{i_1} \cdots a_{k_p}^{i_p} b_{j_1}^{l_1} \cdots b_{j_q}^{l_q} a_{i_1 i_2 \cdots i_p}^{j_1 j_2 \cdots j_q}. \tag{20}$$

Суть закона преобразования (20) состоит в том, что каждый нижний индекс тензора $a_{i_1 i_2 \cdots i_p}^{j_1 j_2 \cdots j_q}$ участвует в преобразовании один раз по схеме ковариантного тензора (17), а каждый верхний индекс – один раз по схеме контравариантного тензора (14).

29.2. Примеры тензоров

В § 29.1 уже было рассмотрено три примера тензоров: координаты вектора образуют тензор типа (1,0), координаты линейной функции – тензор типа (0,1) и координаты билинейной функции – тензор типа (0,2). (Здесь и далее линейную функцию мы будем называть также *ковектором*.)

Числа p и q, определяющие тип (q, p) тензора, могут принимать любые целые неотрицательные значения.

Определение 29.6. *Тензор типа* (0, 0) *называется инвариантом.*

Инвариант – это число, не зависящее от выбора базиса. Примером инварианта может служить число n векторов, образующих базис пространства V^n.

В качестве следующего примера рассмотрим линейный оператор f пространства V^n. Как известно (см. § 19.3 и 19.7), в любом базисе

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n \tag{1}$$

оператору f соответствует матрица $C = [c^i_j]$, которая при переходе от базиса (1) к базису

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n \tag{2}$$

изменяется по закону

$$C' = BCA, \tag{3}$$

где $A = [a^i_j]$ – матрица перехода от базиса (1) к базису (2); $B = [b^i_j] = A^{-1}$. Сравнивая элементы матриц, стоящих в левой и правой частях равенства (3), получаем

$$c'^k_l = a^j_l b^k_i c^i_j. \tag{4}$$

Итак, элементы матрицы линейного оператора образуют тензор типа (1, 1).

Возьмем, в частности, тождественный линейный оператор e. В любом базисе ему соответствует единичная матрица.

Определение 29.7. *Элементы единичной матрицы обозначают символом* δ^i_j, *который называется символом Кронекера.*

Итак, символ Кронекера определяется формулой

$$\delta^i_j = \begin{cases} 1, & \text{если } i = j, \\ 0, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Определение 29.8. *Тензор, полученный при задании в каждом базисе единичной матрицы, называется тензором Кронекера.*

Обобщим понятие билинейной функции, заданной на линейном пространстве V^n.

Определение 29.9. *Полилинейной или m-линейной функцией на линейном пространстве V^n называется отображение*

$$f\colon \underbrace{V^n \times V^n \times \ldots \times V^n}_{m \text{ раз}} \to P, \tag{5}$$

линейное относительно каждого из аргументов, т. е.

$$f(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \mu_1 \mathbf{y}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_m) =$$
$$= \lambda_1 f(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_n) + \mu_1 f(\mathbf{y}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_m)$$

для любых векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m \in V^n$ *и любых чисел* $\lambda_1,\ \mu_1 \in P$ и аналогично для других аргументов.

Возьмем какой-либо базис (1) и обозначим координаты вектора $\mathbf{x}_i$ через $x^1_{(i)},\ x^2_{(i)},\ \ldots,\ x^n_{(i)}$. Тогда

$$f(\mathbf{x}_1,\ \mathbf{x}_2,\ \ldots,\ \mathbf{x}_m) = f\left(x^{i_1}_{(1)}\mathbf{e}_{i_1},\ x^{i_2}_{(2)}\mathbf{e}_{i_2},\ \ldots,\ x^{i_m}_{(m)}\mathbf{e}_{i_m}\right) =$$
$$= x^{i_1}_{(1)} x^{i_2}_{(2)} \cdots x^{i_m}_{(m)} f\left(\mathbf{e}_{i_1},\ \mathbf{e}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{i_m}\right). \tag{6}$$

Введем следующие обозначения:

$$c_{i_1 i_2 \cdots i_m} = f\left(\mathbf{e}_{i_1},\ \mathbf{e}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{i_m}\right). \tag{7}$$

Определение 29.10. *Числа (7) называются координатами полилинейной функции (5) в базисе (1).*

Найдем закон преобразования координат (7) при переходе от базиса (1) к базису (2) по формуле $\mathbf{e}'_j = a^i_j \mathbf{e}_i$. Имеем

$$c'_{j_1 j_2 \cdots j_m} = f\left(\mathbf{e}_{j_1},\ \mathbf{e}_{j_2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{j_m}\right) =$$
$$= f\left(a^{i_1}_{j_1}\mathbf{e}_{i_1},\ a^{i_2}_{j_2}\mathbf{e}_{i_2},\ \ldots,\ a^{i_m}_{j_m}\mathbf{e}_{i_m}\right) =$$
$$= a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \cdots a^{i_m}_{j_m} f\left(\mathbf{e}_{i_1},\ \mathbf{e}_{i_2},\ \ldots,\ \mathbf{e}_{i_m}\right) = a^{i_1}_{j_1} a^{i_2}_{j_2} \cdots a^{i_m}_{j_m} c_{i_1 i_2 \cdots i_m}.$$

Сравнивая последнюю формулу с формулой (20) из §29.1, мы видим, что координаты полилинейной функции (5) образуют тензор типа $(0,\ m)$.

Рассмотрим теперь два примера тензоров из области аналитической геометрии. Пусть A^n – n-мерное аффинное пространство, связанное с линейным пространством V^n над полем P. Зафиксировав в пространстве A^n некоторую точку O, мы превратим A^n в линейное пространство, изоморфное пространству V^n. Задание в пространстве A^n репера

$$(O, \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) \tag{8}$$

с началом в точке O равносильно заданию базиса (1) в пространстве V^n. Таким образом, появляется возможность рассматривать тензоры.

Возьмем в пространстве A^n какую-либо гиперплоскость Π, не проходящую через точку O. Выберем некоторый репер (8), тогда гиперплоскость задается уравнением

$$a_i x^i + a = 0. \tag{9}$$

Так как $a \neq 0$, то разделив это уравнение на a, получим

$$c_i x^i + 1 = 0. \tag{10}$$

Числа $c_1, c_2, \ldots, c_n$ назовем *координатами гиперплоскости* Π. Возьмем еще один репер

$$(O, \mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n), \tag{11}$$

а значит, и базис (2). Запишем уравнение гиперплоскости Π в новой системе координат. Для этого выразим старые координаты $x^1, x^2, \ldots, x^n$ произвольной точки M через ее новые координаты (см. формулы (11) из §25.2):

$$x^i = a^i_j x'^j, \tag{12}$$

где $A = [a^i_j]$ – матрица перехода от базиса (1) к базису (2).

Подставляя выражения (12) в уравнение (10), получаем уравнение гиперплоскости Π в новых координатах:

$$c'_j x'^j + 1 = 0,$$

где

$$c'_j = a^i_j c_i. \tag{13}$$

Формулы (13) показывают, что координаты гиперплоскости образуют тензор типа (0, 1).

Рассмотрим теперь в пространстве A^n некоторый репер (8) и квадрику K, не содержащую точку O. Уравнение этой квадрики можно записать в виде

$$c_{ij} x^i x^j + 2c_i x^i + 1 = 0. \tag{14}$$

Числа c_{ij} и c_i называются соответственно *двухиндексными* и *одноиндексными координатами квадрики* K. Найдем закон преобразования этих координат. Для этого подставим в уравнение (14) выражения $x^i = a^i_k x'^k$, $x^j = a^j_l x'^l$ старых координат через новые. В результате получим уравнение квадрики K в новых координатах:

$$c'_{kl} x'^k x'^l + 2c'_k x'^k + 1 = 0,$$

где $c'_{kl} = a^i_k a^j_l c_{ij}$; $c'_k = a^i_k c_i$.

Итак, двухиндексные координаты c_{ij} квадрики K образуют тензор типа (0, 2), а одноиндексные координаты c_i этой же квадрики – тензор типа (0, 1).

29.3. Операции над тензорами

Как известно, при сложении векторов складываются их соответствующие координаты (см. теорему 17.4), а при сложении линейных операторов – их матрицы (см. теорему 19.3). Этими свойствами можно воспользоваться при определении операции сложения для тензоров.

Пусть в пространстве V^n заданы два тензора одного и того же типа, например (1,2). Их координаты c^i_{jk}, d^i_{jk} в базисах:

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n, \tag{1}$$

$$\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n \tag{2}$$

записываются соответственно в виде:

$$c'^l_{rs} = a^j_r a^k_s b^l_i c^i_{jk}, \tag{3}$$

$$d'^l_{rs} = a^j_r a^k_s b^l_i d^i_{jk}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь в каждом базисе систему чисел, полученных при сложении соответствующих координат данных тензоров:

$$h^i_{jk} = c^i_{jk} + d^i_{jk}, \quad h'^l_{rs} = c'^l_{rs} + d'^l_{rs}.$$

Чтобы получить закон преобразования чисел h^i_{jk} при переходе от базиса (1) к базису (2), достаточно сложить левые и правые части равенств (3) и (4) и воспользоваться свойством дистрибутивности суммы. В результате имеем

$$h'^{l}_{rs} = a^j_r a^k_s b^l_i h^i_{jk}.$$

Итак, числа h^i_{jk} преобразуются по закону тензора типа (1, 2). Аналогично рассматривается общий случай тензоров типа (p, q).

Определение 29.11. *Суммой двух тензоров одного и того же типа (p, q) называется тензор того же типа, полученный в результате сложения соответствующих координат данных тензоров в каждом базисе.*

Аналогично обосновывается и следующее

Определение 29.12. *Произведением тензора типа (p, q) на число $\lambda \in P$ называется тензор того же типа, полученный умножением координат данного тензора в каждом базисе на число λ.*

Теперь введем операцию умножения для двух произвольных тензоров, заданных в пространстве V^n. Пусть, например, заданы тензоры типа (1, 2) и типа (2, 0). Возьмем их координаты c^i_{jk}, g^{lm} в базисах (1) и (2) соответственно:

$$c'^{t}_{rs} = a^j_r a^k_s b^t_i c^i_{jk}, \tag{5}$$

$$g'^{uv} = b^u_l b^v_m g^{lm}. \tag{6}$$

Рассмотрим теперь в каждом базисе систему чисел, полученных в результате умножения каждой координаты первого тензора на каждую координату второго тензора:

$$e^{ilm}_{jk} = c^i_{jk} g^{lm}, \quad e'^{tuv}_{rs} = c'^{t}_{rs} g'^{uv}.$$

Чтобы получить закон преобразования чисел e^{ilm}_{jk}, достаточно перемножить левые и правые части равенств (5) и (6) и воспользоваться известными свойствами операции суммирования. В результате имеем

$$e'^{tuv}_{rs} = a^j_r a^k_s b^t_i b^u_l b^v_m e^{ilm}_{jk}.$$

Мы видим, что при умножении получился тензор типа (3, 2).

Итак, можно сформулировать следующее

Определение 29.13. *Произведением тензора типа (p, q) на тензор типа (r, s) называется тензор типа $(p + r, q + s)$, который получается в результате умножения в каждом базисе каждой координаты первого тензора на каждую координату второго тензора.*

Теперь рассмотрим так называемую *операцию свертывания тензоров*. Пусть задан тензор, имеющий по крайней мере один верхний и один нижний индекс, например c_{kl}^{ij}. Выберем какой-нибудь из верхних индексов, например первый, и какой-нибудь из нижних индексов, например второй. Отберем те координаты тензора, для которых два выбранных индекса имеют одинаковые значения 1, 2, ..., n, и просуммируем их при фиксированных значениях остальных индексов:

$$c_{k1}^{1j} + c_{k2}^{2j} + \ldots + c_{kn}^{nj} = c_{ks}^{sj}.$$

Эта сумма зависит только от индексов j и k, и ее можно обозначить c_k^j. Итак,

$$c_{ks}^{sj} = c_k^j. \tag{7}$$

Такое же суммирование проведем и в любом другом базисе. Например, для базиса (2) получим

$$c_{ts}^{\prime sr} = c_t^{\prime r}. \tag{8}$$

Покажем теперь, что построенные нами системы чисел c_k^j, $c_t^{\prime r}$, ... образуют тензор типа (1, 1), т. е. тензор, имеющий по сравнению с исходным на один верхний индекс и на один нижний индекс меньше. Запишем закон преобразования координат исходного тензора:

$$c_{tv}^{\prime ur} = a_t^k a_v^l b_i^u b_j^r c_{kl}^{ij}.$$

Придадим индексам u и v одинаковые значения и проведем суммирование:

$$c_{ts}^{\prime sr} = a_t^k a_s^l b_i^s b_j^r c_{kl}^{ij}. \tag{9}$$

В правой части равенства (9) происходит суммирование по пяти индексам: i, j, k, l, s. Выполним сначала суммирование по индексу s. Так как матрицы $A = [a_k^l]$ и $B = [b_l^r]$ взаимно обратные, то

$$a_s^l b_i^s = \delta_i^l = \begin{cases} 1, & \text{если } l = i, \\ 0, & \text{если } l \neq i. \end{cases} \qquad (10)$$

Подставляя формулу (10) в равенство (9), получаем

$$c'^{sr}_{ts} = a_t^k \delta_i^l b_j^r c_{kl}^{ij}$$

и, далее,

$$c'^{sr}_{ts} = a_t^k b_j^r c_{ki}^{ij}. \qquad (11)$$

В силу равенств (7) и (8) равенство (11) принимает вид

$$c'^{r}_{t} = a_t^k b_j^r c_k^j,$$

т. е. числа c_k^j образуют тензор типа (1, 1). Приведенные рассуждения позволяют сформулировать следующее

Определение 29.14. *Получение тензора c_k^j из тензора c_{kl}^{ij} по формуле (7) называется операцией свертывания тензора c_{kl}^{ij} по первому верхнему и второму нижнему индексам.*

Это определение применимо и к произвольному тензору типа (p, q), если $p > 0$ и $q > 0$. В результате свертывания получается тензор типа $(p - 1, q - 1)$.

Операция свертывания является важным источником получения инвариантов, т. е. тензоров типа (0, 0). Если выполнить последовательно p свертываний тензора типа (p, p) по парам разнотипных индексов, получится тензор типа (0, 0).

Возьмем, например, тензор c_j^i, образованный матрицами линейного оператора f пространства V^n. Свертывание приводит к инварианту

$$c = c_i^i = c_1^1 + c_2^2 + \ldots + c_n^n,$$

который по аналогии со следом матрицы (см. § 19.10) может быть назван *следом тензора* c_j^i.

Линейная функция на пространстве V^n

$$f(\mathbf{x}) = a_i x^i$$

может рассматриваться как результат умножения тензора a_i на тензор x^j и последующего свертывания. Аналогично билинейная функция

$$g(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = g_{ij}x^i y^j$$

может рассматриваться как результат умножения тензоров g_{ij}, x^k, y^l и последующего двукратного свертывания.

Упражнения

1. Докажите, что множество всех тензоров данного типа $(p,\ q)$ в линейном пространстве V^n над полем P является линейным пространством над полем P.

2. Докажите, что операция свертывания является линейным оператором.

29.4. Симметрические и кососимметрические тензоры

Рассмотрим еще одну операцию над тензором, имеющим по крайней мере два однотипных индекса, например над тензором, образованным матрицами билинейной функции

$$f(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = f_{ij}x^i y^j \tag{1}$$

на пространстве V^n. Далее рассмотрим билинейную функцию

$$g(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = f(\mathbf{y},\ \mathbf{x}) = g_{ij}x^i y^j. \tag{2}$$

Очевидно, что $g_{ij} = f_{ji}$ и матрица $G = [g_{ij}]$ получается из матрицы $F = [f_{ij}]$ транспонированием.

Определение 29.15. *Описанная выше операция над тензором f_{ij} называется операцией перестановки индексов.*

В общем случае билинейные формы (1) и (2), как и соответствующие им тензоры, не совпадают. Случай их совпадения отражает определение 22.14 и следующее

Определение 29.16. *Тензор c_{ij} называется симметрическим, если*

$$c_{ij} = c_{ji}. \tag{3}$$

Аналогично произвольный тензор $c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$, содержащий по крайней мере два однотипных индекса, называется симметрическим по паре таких индексов, например по j_1 и j_q, если

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} = c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_q j_2 \cdots j_1}. \tag{4}$$

Рассмотрим теперь произвольный тензор c_{ij} и тензор $d_{ij} = c_{ji}$, полученный из c_{ij} перестановкой индексов. Тензор

$$f_{ij} = (c_{ij} + c_{ji})/2.$$

удовлетворяет условию (3), т. е. является симметрическим. Будем обозначать его $c_{(ij)}$. Итак,

$$c_{(ij)} = (c_{ij} + c_{ji})/2. \tag{5}$$

Определение 29.17. *Получение тензора $c_{(ij)}$ из тензора c_{ij} называется операцией симметрирования.*

Понятия симметрического тензора и операции симметрирования можно обобщить.

Определение 29.18. *Тензор $c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ называется симметрическим по нижним индексам, если он не меняется при перестановке любой пары этих индексов.*

Аналогично определяется симметричность по верхним индексам.

Возьмем теперь произвольный тензор $c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ и поставим ему в соответствие тензор того же типа $(p,\ q)$, но симметрический по нижним индексам. Для этого используем понятие подстановки множества $\{j_1,\ j_2,\ \ldots,\ j_q\}$, введенное в § 3.6. Любая подстановка

$$\sigma = \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \cdots & j_q \\ j_{k_1} & j_{k_2} & \cdots & j_{k_q} \end{pmatrix},$$

согласно теореме 3.6, может быть представлена в виде произведения транспозиций, т. е. перестановок двух индексов. Поэтому можно говорить о тензоре

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_q)}.$$

Определение 29.19. *Получение из тензора*

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \tag{6}$$

тензора

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{(j_1 j_2 \cdots j_q)} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_q)}, \tag{7}$$

где суммирование берется по всем подстановкам множества $\{j_1, j_2, \ldots, j_q\}$, *называется симметрированием тензора (6) по нижним индексам.*

Очевидно, что тензор (7), полученный в результате симметрирования по нижним индексам, является симметрическим по этим индексам.

Перейдем теперь к *операции альтернирования*. Для этого напомним, что любая подстановка является четной или нечетной, и введем следующее

Определение 29.20. *Знаком подстановки* σ *называется число* $\varepsilon(\sigma)$, *заданное формулой*

$$\varepsilon(\sigma) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sigma \text{ – четная подстановка,} \\ -1, & \text{если } \sigma \text{ – нечетная подстановка.} \end{cases}$$

Определение 29.21. *Тензор* $c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$ *называется кососимметрическим по нижним индексам, если*

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_q)} = \varepsilon(\sigma) c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q}$$

для любой подстановки σ.

Теперь мы можем ввести операцию альтернирования по аналогии с операцией симметрирования.

Определение 29.22. *Получение тензора*

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{[j_1 j_2 \cdots j_q]} = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{\sigma(j_1 j_2 \cdots j_q)} \tag{8}$$

из тензора

$$c^{i_1 i_2 \cdots i_p}_{j_1 j_2 \cdots j_q} \tag{9}$$

называется операцией альтернирования тензора (9) *по нижним индексам.*

Очевидно, что тензор (8), полученный альтернированием по нижним индексам, кососимметричен по этим индексам.

Упражнения

1. Покажите, что множество всех тензоров типа (p, q), симметрических (кососимметрических) по нижним индексам, образует подпространство в линейном пространстве всех тензоров типа (p, q). Найдите размерность этих подпространств для случая $p = 0$, $q = 2$.

2. Докажите, что операции симметрирования и альтернирования являются линейными операторами.

29.5. Тензоры в евклидовом пространстве

Пусть E^n – n-мерное линейное евклидово пространство. Все, что было сказано о тензорах в произвольном линейном пространстве, остается верным и для пространства E^n. Однако благодаря наличию скалярного произведения появляются новые возможности для операций над тензорами.

Билинейную функцию, задающую в пространстве E^n скалярное произведение, обозначим через g. Выберем в пространстве E^n какой-либо базис

$$\mathbf{e}_1,\ \mathbf{e}_2,\ \dots,\ \mathbf{e}_n. \tag{1}$$

Как и в предыдущих параграфах, координаты произвольного вектора $\mathbf{x}$ в базисе (1) будем обозначать x^1, x^2, ..., x^n. Заметим, что они порождают один раз контравариантный тензор (см. § 29.1). Если $\mathbf{y}(y^1,\ y^2,\ \dots,\ y^n)$ – еще один вектор из E^n, то, как известно (см. § 23.2),

$$g(\mathbf{x},\ \mathbf{y}) = g_{ij}x^iy^j,$$

где

$$g_{ij} = (\mathbf{e}_i,\ \mathbf{e}_j) \tag{2}$$

являются координатами дважды ковариантного тензора.

Определение 29.23. *Тензор, определяемый формулой (2), называется ковариантным метрическим тензором.*

Как известно (см. § 23.4), тензор g_{ij} является симметрическим и матрица $G = (g_{ij})$ – невырожденная. Рассмотрим в каждом базисе матрицу G^{-1}, обратную матрице G. Элементы матрицы G^{-1} будем обозначать через g^{ij}.

Теорема 29.1. *Элементы матрицы G^{-1}, заданные в каждом базисе, образуют дважды контравариантный симметрический тензор.*

Возьмем наряду с базисом (1) еще один базис

$$\mathbf{e}'_1,\ \mathbf{e}'_2,\ \dots,\ \mathbf{e}'_n. \tag{3}$$

Пусть $A = (a^i_j)$ – матрица перехода от базиса (1) к базису (3), а $B = (b^i_j)$ – матрица перехода от базиса (3) к базису (1). Рассмотрим дважды контравариантный тензор, имеющий в базисе (1) координаты g^{ij}, а в базисе (3) – координаты

$$g'^{kl} = b^k_i b^l_j g^{ij}.$$

Так как g_{st} – координаты дважды ковариантного тензора в базисе (1), то координаты этого тензора в базисе (3) задаются формулой

$$g'_{lp} = a^s_l a^t_p g_{st}.$$

Имеем

$$g'^{kl} g'_{lp} = b^k_i b^l_j g^{ij} a^s_l a^t_p g_{st} = b^k_i \delta^s_j g^{ij} a^t_p g_{st} =$$
$$= b^k_i a^t_p g^{ij} g_{jt} = b^k_i a^t_p \delta^i_t = b^k_i a^i_p = \delta^k_p.$$

Итак, показано, что координаты g'^{kl} в базисе (3) тензора, определяемого матрицей G^{-1} совпадают с элементами матрицы, обратной матрице ковариантного метрического тензора в любом базисе. Симметричность матрицы G^{-1} следует из симметричности матрицы G.

Определение 29.24. *Дважды контравариантный тензор, определяемый элементами g^{ij} матрицы G^{-1}, называется контравариантным метрическим тензором.*

Пусть задан произвольный вектор

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i. \tag{4}$$

Его координаты, взятые в каждом базисе, образуют один раз контравариантный тензор. Рассмотрим теперь тензор, полученный перемножением тензоров g_{ij} и x^k с последующим свертыванием:

$$x_i = g_{ij} x^j. \tag{5}$$

Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученные по формуле (5) в каждом базисе, образуют один раз ковариантный тензор. Выясним, как связаны эти числа с вектором $\mathbf{x}$:

$$x_i = g_{ij} x^j = (\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j) x^j = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}. \tag{6}$$

Итак, x_i равно скалярному произведению вектора $\mathbf{x}$ на базисный вектор $\mathbf{e}_i$.

Определение 29.25. *Числа $x^1, x^2, \ldots, x^n$, определяемые формулой (4), называются контравариантными координатами вектора* $\mathbf{x}$. *Числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, заданные формулой (6), называются ковариантными координатами этого вектора.*

Формулы (5) выражают ковариантные координаты вектора $\mathbf{x}$ через его контравариантные координаты. Чтобы найти выражение контравариантных координат через ковариантные, умножим тензор (5) на тензор g^{ki} и произведем свертывание:

$$g^{ki}x_i = g^{ki}g_{ij}x^j = \delta^k_j x^j = x^k. \tag{7}$$

В случае ортонормированного базиса (1) матрицы тензоров g_{ij} и g^{ij} обращаются в единичную матрицу, и ковариантные координаты совпадают с контравариантными.

Определение 29.26. *Переход от тензора x^j к тензору x_i по формуле (6) называется операцией опускания индекса. Обратный переход от тензора x_i к тензору x^k по формуле (7) называется операцией поднятия индекса.*

Эти две операции можно перенести на тензоры любого типа. Прежде всего изменим способ нумерации нижних и верхних индексов тензора. До сих пор мы проводили раздельную нумерацию нижних и верхних индексов. Например, у тензора a^{ij}_{klm} среди нижних индексов k стоит на первом месте, l – на втором, m – на третьем, а среди верхних индексов на первом месте стоит i и на втором j. В дальнейшем нумерация мест нижних и верхних индексов будет производиться в совокупности. Если, например, первый индекс стоит вверху, то первое место внизу остается пустым, что отмечается точкой. Аналогично для нижних индексов. Запись $a^{i\cdot\cdot j}_{\cdot kl\cdot m}$ обозначает тензор, у которого на первом месте стоит верхний индекс, на втором и третьем – нижние индексы, на четвертом – верхний и на пятом –

нижний индексы. У этого тензора можно, например, опустить первый индекс:

$$a_{skl\cdot m}^{\cdot\cdot\cdot j} = g_{si} a^{i\cdot\cdot j}_{\cdot kl\cdot m}.$$

У вновь полученного тензора можно поднять последний индекс:

$$a_{skl\cdot}^{\cdot\cdot\cdot jt} = g^{tm} a_{skl\cdot m}^{\cdot\cdot\cdot j}.$$

Аналогично выполняются операции поднятия и опускания индексов у тензора произвольного типа.

ЛИТЕРАТУРА

Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Наука, 1979. – 512 с.

Беклемишева Л. А., Петрович А. Ю., Чубаров И. А. Сборник задач по аналитической геометрии и линейной алгебре. М.: Наука, 1987. – 496 с.

Бурдун А. А., Мурашко Е. А., Толкачев М. М., Феденко А. С. Сборник задач по алгебре и аналитической геометрии. Мн.: Издательство "Універсітэцкае", 1999. – 302 с.

Кострикин А. И., Манин Ю. И. Линейная алгебра и геометрия. М.: Наука, 1986. – 304 с.

Постников М. М. Линейная алгебра. – М.: Наука, 1986. – 400 с.

Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре. М.: Наука, 1984. – 336 с.

Сборник задач по алгебре / Под ред. Кострикина А. И. М.: Факториал, 1995. – 416 с.

Федорчук В. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. М.: Изд-во МГУ, 1990. – 328 с.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Раздел 4
ГЕОМЕТРИЯ n-МЕРНОГО ПРОСТРАНСТВА

ISBN 985-441-167-2

Учебное издание

Милованов Михаил Васильевич,
Толкачев Михаил Мефодьефич,
Тышкевич Регина Иосифовна,
Феденко Анатолий Семенович

АЛГЕБРА И АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ
Часть 2

Ответственный за выпуск *И. Б. Ткачук*

Корректор *К. А. Степанова*

Компьютерная верстка *А. Л. Потеев*

Подписано в печать с готовых диапозитивов 20.01.2001. Формат 84×108/32.
Бумага газетная. Гарнитура «Антикуа». Офсетная печать. Усл. печ. л. 11,0.
Уч.-изд. л. 18,0. Доп. тираж 2000 экз. Зак. 305

Налоговая льгота – Общегосударственный классификатор Республики Беларусь
ОКРБ 007-98, ч. 1; 22.11.20.400.

ООО «Амалфея». Лицензия ЛВ № 33 от 29.08.1997.
220073, Минск, ул. Кальварийская, 62.

Республиканское унитарное предприятие «Издательство "Белорусский Дом
печати"». 220013, Минск, проспект Ф. Скорины, 79.