S.X.MEYLIYEV

OLIY MATEMATIKA VA KIMYODA MATEMATIKA FANINI QO‘LLASH

To'plamlar nazariyasi va matematik mantiq elementlari
Matritsa va determinantlar chiziqli algebra asoslari
Tekislikda va fazoda analitik geometriya elementlari
Matematik taxlilning asosiy tushunchalari
Kombinatorika,Extimollar va matematik statistika
Modellar va algoritmlar

O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI

NIZOMIY NOMIDAGI
TOSHKENT DAVLAT PEDAGOGIKA UNIVERSITETI

OLIY MATEMATIKA VA KIMYODA MATEMATIKA FANINI QO‘LLASH

O‘QUV QO‘LANMA

Bilim sohasi: 100000 - Gumanitar

Ta’lim sohasi: 110000 - Pedagogika

Ta’lim yo‘nalishi: 60110800 - Kimyo

Nizomiy nomli
T D P U
kutubxonasi

Toshkent – 2022

Muallif: **S. X. Meyliyev** - Nizomiy nomidagi TDPU Matematika va ta'limda axborot texnologiyalari kafedrasi katta o'qituvchisi

Mazkur o'quv qo'llanma pedagogika oliy ta'lim muassasalarining tabiiy ta'lim yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan. Unda oliy matematika va kimyoda matematika qo'llash fani dasturiga mos ravishda mavzular to'liq bayon qilingan va mazmuni tabiiy ta'lim yo'nalishi xususiyatidan kelib chiqqan holda mavzuga oid adabiyotlardan olingan ma'lumotlar bilan boyitilgan.

Данное учебное пособие предназначено, для студентов направления естественных наук,педагогических вузов.Оно соответствует учебной программе по "Высшей математике" и раскрывает прикладные стороны математики в химии. С целью обогащения содержания здесь также использована информация из соответствующей литературы,учитывающая характер области естественно образовательного цикла.

This textbook is intended for students of natural sciences in pedagogical higher education institutions. It describes the topics in detail in accordance with the program of applied mathematics in higher mathematics and chemistry, and enriches the content with information from the relevant literature, based on the nature of the field of natural education.

Taqrizchilar:

B.S.Abdullayeva

Nizomiy nomidagi TDPU ilmiy ishlar va innovatsiyalar bo'yicha prorektori, pedagogika fanlari doktori, professor

I.I.Safarov

TKTI Oliy matematika kafedrasi mudiri, fizika-matematika fanlari doktori, professor

Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika universiteti "Matematika va ta'limda axborot texnologiyalari" kafedrasi yig`ilishida ko`riv chiqilgan va tavsiya etilgan.

Bayonnoma № .... 2022-yil ...- mart

Nizomiy nomidagi Toshkent Davlat Pedagogika universiteti ilmiy kengashi yig`ilishida ko`riv chiqilgan va nashrga tavsiya etilgan.

Bayonnoma № .... 2022-yil ...- mart

SO‘Z BOSHI

Mustaqil mamlakatimizning iqtisodiy mustaqilligi va qudrati zamon talabiga javob beradigan milliy kadrlar tayyorlash bilan bevosita bog`liq. Davlat va xukumatimizning bu yo‘nalishda belgilab bergan siyosati Milliy dasturda o‘z ifodasini topgan. Xususan, milliy dasturda mavjud darsliklarni va o‘quv qo‘llanmalarni zamon talablariga javob bera olish darajasini aniqlash, davlat tilida yangi darsliklar yaratish masalasi qo‘yilgan. Bu muammo ta`limda alohida o‘rin tutib kelgan matematika fani uchun, fan va texnikaning matematiklashuvi kuzatilayotgan hozirgi davrda, yanada dolzarbdir. Zamonaviy fan va texnika muammolarini xal qilishni matematik usullarsiz, matematik modellarsiz tasavvur etib bo‘lmaydi. Ayniqsa, kompyuter texnologiyalarining mislsiz darajadagi rivojlanishi, ularning turmushga keng miqyosida kirib kelishi amaliy masalalarni xal qilishdagi matematikaning keng imkoniyatini tobora yaqqol ko‘zga tashlantirmoqda. Hisoblash texnologiyasining xayotga joriy qilinishi texnikaviy, iqtisodiy, qishloq xo‘jalik va boshqa ko‘p o‘quv yurtlarida matematika kursini amaliy yo‘naltirish talabini oshirdi. Bu esa talabalarning matematik dasturlash, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, o‘yinlar nazariyasi, mantiq, modellashtirish kabi matematikaning yo‘nalishlari bo‘yicha bilimga ega bo‘lishi zaruriyatini qo‘ydi, ular matematika dasturidan munosib joy oldilar. Mamlakatni sosial-iqtisodiy jixatdan rivojlantirish masalalarini xal qilish iqtisodning yangi turi: bozor iqtisodiyotiga o‘tishni ta`minlash kabi masalalar mutaxassislar oldiga o‘z kasbini juda puxta egallash vazifasini yuklaydi. Bu borada va o‘rta ta`limni qayta qurish eng zarur tadbirlardan biridir. Zamonaviy fan va texnikani matematik tadbiq usullarisiz, matematik modellashtirishsiz tasavvur etib bo‘lmaydi. Ayniqsa, elektron-hisoblash texnikasining keng miqyosda qo‘llanilishi natijasida matematikaning aniq masalalarini hal qilishdagi imkoniyati tobora yaqqol ko‘zga tashlanmoqda. SHu tufayli « matematika» kursining asosiy maqsad-talabalarni zarur matematik bilim bilan ta`minlash, shu bilim asosida masalalarni modellashtirish va AKT yordamida ularni xal qilishga o‘rgatishdan iboratdir. Kursning ish dasturi zarur hajmda, matematika kursining na`munaviy dasturi asosida tuzilgan.

“Matematika” kursi bo‘yicha talabalarning bilim, o‘quv va ko‘nikmasiga qo‘yiladigan talablar:

Kursni o'rganish natijasida talaba quyidagilarni bilishi shart:

- *matematikaning zamonaviy fandagi va taraqqiyotdagi rolini;*
- *matematik masalalarni amaliy jixatdan qo'llash mumkin bo'lgan darajagacha olib bora oladigan puxta bilimga ega bo'lish;*
- *mustaqil ravishda, adabiyotlarda keltirilgan va talabaning ixtisosligiga kerakli bo'lgan matematik tushunchalarni chuqur bilmog`i lozim.*

Dastlabki bir semestrda o'qiladigan matematikaning umumiy kursi

bo'lajak bakalavrda matematik tayyorgarlik asosini yaratishdan iborat bo'lib, bu maxsus matematik kurslarni o'zlashtirishga, shuningdek matematik uslublarni o'rganilayotgan boshqa umumiy muhandislik va maxsus kurslarda qulay usulda qo'llashni bilishiga imkon yaratadi. Matematik ma`ruzalarda kursning asosiy tarkibi bayon qilinib, asosiy matematik tushunchalar va uslublarning taxlili keltiriladi. Ma`ruza o'qish, mos misol va masalalar ko'rish bilan birga olib boriladi. Amaliy mashg`ulotlarda esa talabalar matematik masalalarni yechishdagi asosiy usullari bilan tanishadilar. Oliy matematika kursini o'rganish natijasida talabalar matematik masalalarni hal qilishga zarur chuqur bilimini egalashlari, mantiqiy va algoritmik tafakkurlarini rivojlantirishlari hamda zarur matematik qo'llanmalar va AKT dan foydalanib matematik apparat yordamida amaliy masalalar to'g`risida izlanishlar olib bora olishlari zarur. Oliy matematika kursini chuqur o'rganish uchun talabalarning o'rta maktab matematikasining barcha bo'limlarini yetarli darajada bilishlari zarur. Ushbu fanni o'qitishdan maqsad - talabalarni zamonaviy matematika asoslari bilan tanishtirish, kasbiy faoliyatga oid masalalarini ongli ravishda tadqiq etish, muammolar yechimini topishda matematikaning imkoniyatlari mohiyatini tushuntirish, ularni qo'llay olishga o'rgatish hamda ularni amaliyotda tatbiq etish ko'nikmasini hosil qilishdan iborat.

Fanning vazifasi

- matematik tushunchalar mazmunini, qoidalarni va usullarni ongli o' zlashtirish orqali fikrlash madaniyatini egallash, axborotlarni tushunish, umumlashtirish va tahlil qilish, maqsadni qo'yish va unga erishish yo'llarini tanlash;

- og'zaki va yozma nutqini asoslagan holda o'z fikrlarini mantiqan to'g'ri, aniq ifodalash;

- matematikaning asosiy usullarini, jumladan matematik tahlil va modellashtirish, nazariy va eksperimental tadqiqotlar usullarini kasbiy faoliyatga qo'llash kompetentsiyalariga erishish;

- matematik madaniyatni oshirish hamda ilmiy dunëqarashini shakllantirishdan iborat. Fanni o'zlashtirish natijasida talaba:

- *dunyoni bilishning maxsus usuli bo'lgan matematika, uning tushunchalari va tasavvurlarining yaxlitligi, matematik mantiq elementlari, matematik modellashtirish va algoritmlar nazariyasi, ko'p o'lchamli Yevklid geometriyasi, differentsial va integral hisob nazariyalari, matematika fanining jamiyatdagi va tadqiqotlardagi o'rni haqida* ***tasavvur va bilimga ega bo'lishi;***
- *matematik tahlil, analitik geometriyaning asosiy tushunchalari va metodlari, asosiy algebraik tuzilmalar, vektor fazo, chiziqli akslantirish, mantiqiy hisoblarni bilish va ulardan foydalanish* ***ko'nikmalariga ega bo'lishi****;*

obyektlarning sifat va miqdor munosabatlarini ifodalashda matematik belgilardan foydalanish, differentsial va integral hisob nazariyalarining metodlarini qo'llay olish, eksperiment natijalarini qayta ishlashning statistik metodlaridan foydalana olish, mantiqiy amallar va formulalarni, matematik atamalarni tushuna olish ***malakasiga ega bo'lishi kerak.***

I modul. "MATEMATIKA" FANIGA KIRISH. TO'PLAMLAR NAZARIYASI ELEMENTLARI VA MATEMATIK MANTIQ ELEMETLARI

1-§.Matematika faniga kirish

Tayanch so'z va iboralar: *matematika fanining predmeti, maqsadi va mazmuni, matematik modellar, matematik taffakur, matematikaning vujudga kelish davri, elementar matematika davri, o'zgarmas miqdorlar matematikasi davri, hozirgi zamon matematikasi davri, rivojlanishining asosiy bosqichlari induksiya va deduksiya, teoremalar, aksiomalar, ta'riflar va ularning mohiyati*

1.1.Matematika faning predmeti, maqsadi va mazmuni.

Matematika so'zi yunoncha ματεμα so'zidan olingan bo'lib, u fan, bilim degan ma'nolarni anglatadi. Matematika moddiy dunyoning miqdoriy munosabatlari va fazoviy formalarini o'rganadigan fandir.

Matematika va matematik usullar fan, texnika hamda iqtisodiyotning turli-tuman masalalarini hal qilishda keng qo'llanilmoqda. Hozirgi kunda xalq xo'jaligining barcha sohalarida AKTning keng miqyosda qo'llanilayotganligi sababli matematika va matematik usullarning ahamiyati yanada ortdi. Bu esa barcha oliy o'quv yurtlarida, jumladan, pedagogika institutlari va univarsitetlarning kimyo ta'lim yo'nalishlarida matematikani o'qitishga katta ahamiyat berilishi kerakligini taqozo etadi.

Kimyo ta'lim yo'nalishlarida matematikani o'qitishdan maqsad – talabalarni mantiqiy fikrlash qobiliyatlarini rivojlantirish, ularda matematik madaniyatning umumiy saviyasini yanada ko'tarish, matematikadan o'quv adabiyotlarini mustaqil o'rganish va undan foydalana bilish hamda kundalik hayotda uchraydigan masalalarni matematik usullar bilan tekshira olish malakalarini hosil qilishdan iboratdir.

Biz kimyo ta'lim muassasalaridayoq o'rganishni boshlagan endi esa uni o'rganishni oliy o'quv yurtlarida davom ettirayotgan matematika eng qadimgi fanlardan biri bo'lib hisoblanadi. "Matematika fani nimani o'rganadi?" degan savolga umumiy javob topish uchun juda ko'plab matematiklar va faylasuflar harakat qilganlar. Matematika kishilik jamiyati paydo bo'lgan davrdayoq paydo bo'lgan va taraqqiy etib kelmoqda.Buyuk rus matematigi A.N.Kolmogorov (1903-1987) matematika taraqqiyotini to‘rt davrga bo‘ladi.

I davr. Matematikaning shakllanish davri deb hisoblanib, u kishilik jamiyati

paydo bo‘lgandan boshlanib eramizdan avvalgi VI-V asrgacha davom etdi. Bu davrda insonlar turli narsalarni sanashni o‘rgandi va natijada natural son tushunchasi paydo bo‘ldi hamda ular uchun “katta”, “kichik”, “teng” tushunchalari paydo bo‘ldi. Bulardan tashqari insonlar yer o‘lchash, chegaralarni aniqlash va turli shakldagi ish qurollarini yasash bilan shug‘ullandilar va natijada ularda geometrik shakllar hamda jismlar haqidagi tushunchalar shakllandi.

II davr. Elementar matematika davri deb atalib, u eramizdan avvalgi V asrdan boshlanib, XII asr boshlarigacha davom etdi. Bu davrda oldingi davrdagi tarqoq matematik bilimlar, xususiy ko‘rinishdagi natijalar va qonun-qoidalar birlashtirilib umumiy ko‘rinishga keltirildi. Bu ishlar qadimgi Yunon davlatida eramizdan avvalgi III asrlarda yashab o‘tgan Evkilid tomonidan amalga oshirildi. Bu ishlarni yanada rivojlantirishda Aristotel (eramizdan avvalgi 384-322 yillar) ning xizmatlari ham katta bo‘ldi.

Ko‘rilayotgan davrning IX-XV asrlarida matematikaning rivojlanishiga O‘rta Osiyolik olimlar ham katta hissa qo‘shdilar. Muhammad ibn Muso al-Xorazmiy (783-850 yillar) birinchi bo‘lib o‘zining “Aljabr val Muqobala” asari orqali algebra faniga asos soldi. U o‘zining bu asarida tenglamalarni sinflarga ajratdi va har bir sinf uchun yechish usullarini bayon qildi. Yevropalik olimlar bu kitobdan foydalanishibkvadrat tenglamalarni yechish usullari bilan tanishdilar. Bu davrdagi zabardast olimlardan yana biri Mirzo Ulug‘bek (1394-1449 yillar) dir. U o‘zining “Ziji Ko‘ragoniy” nomli asarida 1018 ta yulduzning koordinatalarini juda katta aniqlik bilan hisoblab berdi.

III davr. “O‘zgaruvchi miqdorlar matematikasi” davri deb atalib, u XVII asrdan XIX asrning boshigacha davrni o‘z ichiga oladi. Elementar matematika davrida ba’zi bir kattaliklar va geometrik obyektlar o‘zgarmas miqdorlar deb qaralgan bo‘lsa, endi, yangi davrda ular o‘rniga o‘zgaruvchi miqdorlar qaray boshlandi. Bu davrda turli amaliy masalalarni yechishda ikki o‘zgaruvchi miqdor orasidagi o‘zaro bog‘lanishlar o‘rganila boshlandi va bunday bog‘lanishlar funksiya tushunchasiga olib keldi. Nemis matematigi Leybnis 1682-1686 yillatda va ingliz matematigi Nyuton 1665-1666 yillarda turli amaliy masalalarni echishning kuchli matematik quroli bo'lgan differensial va integral hisobni yaratdilar hamda matematik analiz faniga asos soldilar.

IV davr. Hozirgi zamon matematikasi davri deb atalib, u XIX asr boshidan to hozirgi kungacha hisoblanadi. Dastlabki davrlarda matematika asosan amaliy masalalarni yechish va qisman matematikaning ichki zaruriyati tufayli rivojlangan bo'lsa, bu davrda matematikaning rivojlanishi ham amaliy masalalarni yechish, ham matematikaning ichki qonuniyatlari tufayli amalga oshdi. Bu rivojlanish oldin aniqlangan tushunchalarni, natijalarni umumlashtirish, ularni mantiqiy jihatdan tugallanganligiga erishish, oldingi natijalarni hozirgi zamon natijalari asosida qayta ko'rib chiqish, tahlil qilish kabi yo'nalishlarda amalga oshdi.

O'zbekistonda matematika fanining rivojlanishida V.I.Romanovskiy (1879-1954), akademik T.N.Qori-Niyoziy (1897-1970), akademik T.A.Sarimsaqov (1915-1995), akademik S.X.Sirojiddinov (1920-1988), T.A.Azlarov (1938-2011), akademik T.J.Jo'rayev (1934-2009), akademik N.Yu.Satimov (1939-2005), akademik M.S.Salohitdinov(1933 – 2018), akademik Sh.O.Alimov, akademik Sh.A.Ayupov, akademik Sh.S.Farmonov, akademik A.Sa'dullayev, akademik A.A'zamovlar katta hissa qo'shdilar. Hozirgi vaqtda matematika va matematik usullar qo'llanilmaydigan fan yoki sohani ko'rsatish qiyin. Bunga matematikaning quyidagi xususiyatlarini sabab qilib ko'rsatish mumkin.

- Matematika biror xulosani keltirib chiqarishda ma'lum bir qoidalardan hech qanday chetlashmaydi, ya'ni u izchillikka egadir.
- Matematikada xulosalar aksiomatik asosda keltirib chiqariladi. Bunda poydevor sifatida aksiomalarning ma'lum bir tizimi olinib, matematik tushuncha va natijalar unga asoslangan holda yaratiladi.
- Matematika obyektlarning real ma'nosi qanday bo'lishidan qat'iy nazar ularni abstraktlashtirilgan, umumlashtirilgan holda qaraydi. Shu sababli olinadigan natijalar ham umumiy xususiyatga ega bo'ladi.[15 , 6-b][1]

Matematika dastlab, astronomiya, fizika, mexanika, elektrotexnika, gidravlika kabi fanlarga tadbiq qilingan bo'lsa, hozirgi kunda u kimyo, biologiya, meditsina, iqtisod kabi fanlarda ham keng qo'llanila boshlandi.

1.2.Matematikaning hozirgi vaqtda kimyo fanlardagi o'rni va ahamiyati

▪Matematik bilimlar nafaqat baho olish uchun savol – javoblar yoki imtihonlarda, balki uyda, ish jarayonida, kimyoviy masalalarni yechishda, iqtisodiy masalalarni hisoblashda, sport va san'at bilan shug'ullanishda, savdo – sotiq, oldi – berdi, hayotning har bir lahzasida naf beradi. Matematika fani biror misol yoki masala, topshiriqlarni turmushdagi oddiy vaziyatlar yordamida yechishga o'rgatadi.

▪Masalan: 1. Talabaning stipendiyasi 520.000 so'm. Agar uning stependiyasi 20%ga ortsa, talaba necha so'm stependiya oladi.

Yechish: Bu masalani yechish uchun quyidagi qoidadan foydalansak, aytaylik umumiy holatda ishchining maoshi a so'm bo'lsin.

▪Uning maoshi p%ga ortirilsa, u (1+p:100)*a so'm maosh oladi. Mana shu qoidaga asoslanib talabani necha so'm stependiya olishinini hisoblashimiz mumkin.

▪Talabani stependiyasi (1+20:100)*520.000=624.000 so'm.

2. Matiz avtomashinasida 100km yo'lni bosib o'tish uchun 5.8l benzin sarflaydi. 8.7l yoqilgi bilan bu avtomashinada nech km yo'l bosish mumkin?

Yechish: Bu masalani tug'ri proporsional usulida osongina yechish mumkin:

▪100 km – 5.8l

x km – 8.7l

▪100*8.71=5.81*x soddalashtiradigan bo'lsak 870=5.81*x, x=870:5.81, x=150km

▪Demak, avtomashina 8.7l yoqilgi bilan 150km yo'lni bosib o'tadi.

3.Tarkibida10 % xlorid kislota bo'lishi uchun, tarkibida 30% xlorid kislota bo'lgan 100g suvli eritmaga necha gramm chuchuk suv qo'shish kerak?

Yechish: Bu masalani yechishda xlorid kislotani foizini tushirish uchun eritmaga ma'lum miqdor qo'shish kerak bo'ladi:

▪100+x – 100 %

▪30gm – 10 %

▪(100+x) *10=30*100 soddalashtiradigan bo'lsak 100+x=300, x=200gm

▪Demak, eritma 10% xlorid kislota bo'lishi uchun 200gm suv qo'shish kerak bo'ladi.

3.Tarkibida 90% suv bo‘lgan 100 kg aralashmaning tarkibida 80% suv bo‘lishi uchun necha kg suvini ajratib olish kerak?

Yechish: Bu masalani yechishda suvni ajratib olishimiz kerak, shuning uchun aralashmadan ma’lum miqdorni ayiramiz:

▪100-x – 100 %

▪90-x — 80 %

▪(100-x) *80=(90-x)*100 soddalashtiradigan,bo‘lsak 800-8x=900-10x, 2x=100, x=50kg

▪Demak, aralashmani tarkibi 80% bo‘lishi uchun 50 kg suvni ajratib olish kerak.

Mutaxassislarning ta’kidlashlaricha, matematikani yaxshi o‘zlashtirgan o‘quvchining tahliliy va mantiqiy fikrlash darajasi yuqori bo‘ladi. U nafaqat misol va masalalar yechishda, balki, hayotdagi turli vaziyatlarda ham tezkorlik bilan qaror qabul qilish, muhokama va muzokara olib borish, ishlarni bosqichma – bosqich bajarish qobiliyatlarini o‘zida shakllantiradi. Shuningdek, matematiklarga xos fikrlash uni kelajakda amalga oshirmoqchi bo‘lgan ishlar, tevarak – atrofda sodir bo‘layotgan voqea – hodisalar rivojini bashorat qilish darajasiga olib chiqdi.

Ko‘pchilik matematiklar o‘z sohasini estetik miqyosda yetakchi deb baholashadi. Haqiqatdan ham, ko‘pchilik matematik isbotlar “nodir” hisoblanib, ularning natijalari esa “go‘zallik” dir. Bu go‘zallikni his etish, o‘z hayotida tatbiq etish ma’naviyat, madaniyatni rivojlanishiga asos bo‘lib xizmat qiladi.

Vatanimizning gullab-yashnashi, barqaror rivojlanishi ma’lum bir darajada yoshlarning chuqur bilimga, mustahkam ishonch-e’tiqodga va, umuman, komil inson bo‘lishlariga bog‘liq.

Matematika fanining yana bir o‘ziga xos jihati shundan iboratki, har qaysi fan albatta unga murojaat qiladi. Kimyo, iqtisodiy geografiya, tarix, dinshunoslik, huquqshunoslik kabi gumanitar fanlar ham matematika bilan ko‘proq aloqada bo‘lishadi. Masalan, Kimyoda eritmalarni tarkibini o‘zgartirshda,iqtisodiy geografiyada foizlarni hisoblashda tarix yunalishlarida qamoq jazosini ozodlikdan maxrum qilish jarayonida, aholiga pensiya tayinlash chog`ida mutaxassisdan matematik amallarni mukammal darajada bilishi talab etiladi.

Shu bilan birga zamonaviy dunyoning tezkor rivojlanishi, jahon madaniyati, inson omilining yuqori sur’atlarda o‘sib borishi bevosita matematika bilan bog‘liqligini alohida ta’kidlash joiz. Buning isboti sifatida matematikaning amaliy tatbiqlari bo'yicha ba'zi bir misollarni keltiramiz.

1. 1845 yilda fransuz matematigi **Levere** Uran planetasi trayektoriyasi tenglamasini tekshirib, bizga noma'lum osmon jismi borligini, uning trayektoriyasini va massasini nazariy yo'l bilan, ya'ni "qalam uchida" hisoblab topdi. U ko'rsatgan koordinatalar bo'yicha 1846 yil 23 sentabr kuni nemis astronomi **Galle** teleskopda Neptun planetasini kashf etdi. Xuddi shunday ravishda 9-planeta 1915 yilda qilingan matematik hisoblar asosida 1930 yili kashf etildi.

2. Kosmosni o'zlashtirish muammolarini yechishda matematika roli benihoyat kattadir. Akademik **Keldush** (Rossiya) rahbarlik qilgan "Amaliy matematika" ilmiy-tekshirish institutida bu masalalarni yechish usullari ishlab chiqildi va ular EHM lar yordamida amalga oshirildi.

3. Iqtisodiyotda xalq xo'jaligini boshqarish uchun amerikalik iqtisodchi-olim **Leontyev** tomonidan tarmoqlararo muvozanatning matematik modellari ishlab chiqildi va uning tenglamalari yechilib, ishlab chiqrishni oqilona boshqarishga erishildi.

4. **Akademik Kantorovich** (Rossiya) materiallardan andoza olishning kamchiqim yo'llarini axtarish bilan shug'ullandi va natijada chiziqli dasturlash nomli yangi matematik fanga asos soldi. Bu fan natijalari asosida xalq xo'jaligida juda katta iqtisodiy foydaga erishildi va shu sababli Kantorovich iqtisodiyot bo'yicha ***Nobel*** mukofotiga sazovor bo'ldi.

Bunday misollarni yana ko'plab keltirish mumkin va ular matematikaning qanchalik darajada ahamiyatli ekanligini ifodalaydi.

O‘z- o‘zini tekshirish uchun savol va topshriqlar

1.Matematika fanining inson faoliyatidagi ahamiyati?
2.matematika faning predmeti, maqsadi va mazmuni.
3. Matematikaning shakllanish davri?
4. Elementar matematika davri?
5. “O‘zgaruvchi miqdorlar matematikasi” davri?
6. Hozirgi zamon matematikasi davri?
7.Dengiz suvida 5% tuz bor. Tarkibida 1.5% tuz bo‘lishi uchun 30kg dengiz suviga qancha chuchuk suv qo‘yish kerak?
8.Ikki sonning yig‘indisi 2490so‘mga teng. Agar ulardan birining 8.5% ikkinchisini 6.5% ga teng bo‘lsa shu sonlarni toping?
9.Kalkulyatorning narxi dastlab 25%ga keyin esa yana 65% ga oshirildi. Kalkulyatorning narxi dastlabkisiga qaraganda necha marta oshgan?
10. Matematika faning predmeti boshqa fanlar bilan bog‘liqligi.
2.1,2,3,....25 sonlari yordamida berilgan kvadratchalarni to‘ldiring va ularning gorizantal satri va vertkal ustunlarini yig‘indisi 65 soniga teng bo‘lsin.

11.Massasi 36 kg mis va ruxdan tashkil topgan qotishmada 45% mis bor. Bu qotishmaning tarkibida 60% mis bo‘lishi uchun unga qancha mis qo‘shish kerak?
12.Kristalning massasi har yili 4% ga o‘sadi. Massasi 10g bo‘lgan kristalning 4 yildan keyingi massasini aniqlang?
13. Oralaridagi masofa 2400km bolgan ikki shahardan bir vaqtda bir-biriga qarab ikkita samoliyot uchirildi va ular 4 soatdan keyin uchrashishdi. Agar samoliyotlardan biri 350km/ soat tezlik bilan harakat qilgan bo‘lsa, ikkinchi samaliyot qanday tezlik bilan harakat qilgan?

2-§. To‘plamlar va ular ustida amallar

Tayanch so‘z va iboralar: *To‘plam uning elementlari berilish usullari.Chekli va cheksiz to‘plamlar, bo‘sh va qism to‘plamlar,universal to‘plamlamlar, teng to‘plamlar, birlashma,keshishma, ayirma, dekart (to‘g‘ri) ko‘paytmasi.Eyler-Venn diagrammalari.*

2.1 To‘plam tushinchasi va uning elementlari.

To‘plam tushunchasi matematikadagi muhim tushunchalardan biri va uni o‘zidan soddaroq tushunchalar orqali ta’riflab bo‘lmaydi. Shuning uchun ham u ta’rifsiz qabul qilinadi va uni misollar yordamida tushuntiriladi. Masalan, auditoriyadagi talabalar to‘plami, axborot resurs markazidagi kitoblar to‘plami, o‘zbek alfavitining harflari to‘plami, matematikadagi raqamlar to‘plami, bog‘dagi mevali daraxtlar to‘plami, Andijon viloyatidagi tumanlar to‘plami, natural sonlar to‘plami, barcha ikki xonali natural sonlar to‘plami, barcha uzluksiz funksiyalar to‘plami, to‘g‘ri chiziqdagi nuqtalar to‘plami, tekislikdagi barcha uchburchaklar to‘plami va hokazolar to‘plamga misol bo‘la oladi. Bunday misollarni ko‘plab keltirish mumkin. To‘plam tushunchasini anglashda uni ma’lum bir belgiga ega bo‘lgan turli narsalarning birlashmasi (majmuasi) ekanligini yodda tutish kerak.

Berilgan to‘plamni hosil qilgan narsalarni to‘plamning **elementlari** deb ataladi. To‘plamning elementlari turli narsalardan, masalan, sonlar, harflar, funksiyalar, nuqtalar, mevali daraxtlardan va hokazolardan iborat ekanligini yuqoridagi misollardan ko‘rish mumkin. Odatda to‘plam berilganda uning elementlari bir yoki bir necha belgilarga muvofiq aniqlangan bo‘ladi. Bu belgilarga asosan, har bir narsa to‘plamning elementi yoki elementi emasligini aniqlash mumkin. To‘plamning asosiy xususiyati unda bir xil element faqat bir marta ishtirok etishidir.

To‘plamlar $A, B, C, D, \ldots$ kabi harflar bilan, uni tashkiletgan elementlar esa $a, b, c, d, \ldots$ kabi harflar bilan belgilanadi. a element A to‘plamning elementi bo‘lsa, uni $a \in A$ ko‘rinishda, a element A to‘plamning elementi bo‘lmasa, uni $a \bar{\in} A$ yoki $a \notin A$ kabi yoziladi.
Misollar. 1) N barcha natural sonlar to‘plami bo‘lsin,

$$N = \{1, 2, 3, \ldots, n, \ldots\}.$$

U holda $7 \in N, 95 \in N, 0{,}9 \notin N, -19 \notin N, \frac{2}{7} \notin N$.

2) Q barcha ratsional sonlar to'plami bo'lsin, ya'ni $Q = \left\{\frac{m}{n}\right\}$, bunda $m \in Z,\ n \in N$. U holda $1 \in Q, \frac{1}{3} \in Q, \frac{2}{3} \in Q, -19 \in Q$.

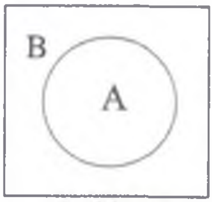
3) A berilgan $x^2 + 9 = 0$ tenglamaning barcha haqiqiy ildizlari to'plami bo'lsin. Bu holda A to'plamning elementlari bo'lmaydi. Chunki $x^2 + 9 = 0$ tenglama haqiqiy ildizlarga ega emas.

Ta'rif. Bironta ham elementga ega bo'lmagan to'plamni **bo'sh** to'plam deyiladi va uni $\emptyset$ kabi belgilanadi.

Masalan, {$sinx = 3$ tenglamaning ildizlari to'plami}, {perimetri 0 ga teng bo'lgan kvadratlar to'plami}, {kvadrati manfiy bo'lgan haqiqiy sonlar to'plami} lar bo'sh to'plamlardir.

Ta'rif. Agar A to'plamga tegishli bo'lgan har bir a element boshqa bir B to'plamga ham tegishli bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamning qismi deyiladi va u $A \subset B$ kabi yoziladi.

Quyidagi 1-chizmada B kvadratdagi, A esa uning ichida yotgan doiradagi nuqtalar to'plami bo'lsa, u holda $A \subset B$ bo'ladi. (1-chizma)



1-chizma

Masalan, fermerga tegishli bo'lgan bog'dagi mevali daraxtlar to'plamini A, barcha daraxtlar to'plamini B deb olsak, u holda $A \subset B$ bo'ladi.

Yuqoridagi ta'rifdan ixtiyoriy A to'plam uchun $A \subset A$ va $\emptyset \subset A$ tasdiqlar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Bundan esa $\subset$ belgi haqiqiy sonlar uchun qo'llaniladigan $\leq$ belgiga o'xshash ma'noga ega ekanligi kelib chiqadi.

Ta'rif. Agar A va B to'plamlar uchun bir vaqtda $A \subset B$ va $B \subset A$ shartlar bajarilsa, u holda bu to'plamlar teng deyiladi va u $A = B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{-2; 2\}$ va $B = \{x^2 - 4 = 0$ tenglama ildizlari$\}$ to'plamlar uchun $A = B$ bo'ladi. Ma'lumki, algebrada qo'shish va ko'paytirish amallari kiritilgan bo'lib, ular

$a + b = b + a$ va $ab = ba$ (kommutativlik, ya'ni o'rin almashtrish);
$a + (b + c) = (a + b) + c$ va $a(bc) = (ab)c$ (assotsiativlik, ya'ni guruhlash);
$a(b + c) = ab + ac$ (distributivlik, ya'ni taqsimot)qonunlariga bo'ysunadilar.

Bulardan tashqari har qanday a soni uchun $a + 0 = a$ va $a \cdot 0 = 0$ tengliklar ham o'rinli bo'lar edi. Endi bu tengliklar uchun ham algebraik amallar kiritamiz.

2.2.To'plamlar ustida amallar va ularning xossalari.

Ta'rif. A va B to'plamlarning yig'indisi (birlashmasi) deb, A va B to'plamlardan kamida bittasiga tegishli bo'lgan elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi. A va B to'plamlarning yig'indisi (birlashmasi) $C = A \cup B$ kabi yoziladi.

Masalan, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, \ 6\}, B = \{4, 5, 6, 7, 8\}$ bo'lsa, u holda $C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ bo'ladi.

Shunday qilib, $C = A \cup B$ to'plam yoki A to'plamga, yoki B to'plamga, yoki A va B to'plamlarning har ikkalasiga tegishli elementlardan iborat bo'ladi.

Agar $A \subset B$ bo'lsa, u holda $A \cup B = B$, xususiy holda $A \cup A = A$ bo'ladi. Agar $B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $A \cup B = A \cup \emptyset = A$ bo'ladi.

Misollar: 1) A to'plam 1, 2, 3, 4, 5 raqamlardan, B to'plam esa 0, 2, 4, 6, 8, 9 raqamlardan iborat bo'lsa, bu to'plamlarning yig'indisi (birlashmasi) C to'plam barcha raqamlar to'plamidan iborat bo'ladi, ya'ni:

$$C = A \cup B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

bo'ladi.

2) A to'plam hamma juft butun musbat sonlardan, B to'plam esa hamma toq butun musbat sonlardan iborat bo'lsa, u holda:

$$C = A \cup B = \{1, 2, 3, 4, \dots, n, \dots\}$$

bo'ladi.To'plamlarning yig'indisi (birlashmasi) amali, sonlarni qo'shish amali kabi $A \cup B = B \cup A$ kommutativlik va $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ assotsiativlik qonunlariga bo'ysunadi.

Bir nechta to'plamlarning yig'indisi (birlashmasi)

$$A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_{n-1} \cup A_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

kabi yoziladi.To'plamlar yig'indisi (birlashmasi)ni geometrik tasvirlash mumkin (2-chizma)

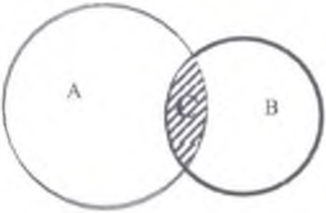
Ta'rif. 2 ta A va B to'plamlarning ko'paytmasi (kesishmasi) deb, ularning har ikkalasida bor bo'lgan elementlardan tuzilgan to'plamga aytiladi.
To'plamlar ko'paytmasi (kesishmasi)$A \cap B = C$ kabi belgilanadi.
Misollar: 1) $A = \{1, 2, 3, 5, 6\}$, $B = \{5, 6, 7, 8\}$ bo'lsa, u holda $C = A \cap B == \{5,6\}$ bo'ladi.
2) $A = \{2, 4, 6, 8, \ldots, 2n, \ldots\}$, $B = \{3, 6, 9, 12, \ldots\}$ bo'lsa, u holda $C = A \cap B == \{6, 12, 18, \ldots\}$ bo'ladi.
Xususiy holda, $A \subset B$, yoki $A = B$ yoki $B = \emptyset$ bo'lsa, u holda $A \cap B = A$, $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ bo'ladi.

Agar A va B to'plamlar umumiy elementlarga ega bo'lmasa, u holda $C = A \cap B = \emptyset$ bo'ladi.
Agar $A_1, A_2, \ldots, A_n$ to'plamlar berilgan bo'lsa, ularning ko'paytmasi $A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ni qisqacha, $C = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$ kabi belgilanadi.

2.3.Eyler-Venn diagrammalari

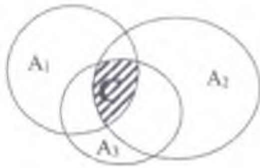
Ko'pincha to'plamlarni simvolik tarzda tekislikdagi biror boshqa shakl ko'rinishida tasvirlashadi. To'plamlar turli tabiatli bo'lishiga qaramay, ularni bunday tasvirlash, ayniqsa, to'plamlar ustidagi amallarga oid mulohazalarda ancha qulaylik tug'diradi.
3-chizmada A to'plam (I doira) va B to'plam (II doira) larning ko'paytmasi tasvirlangan. C to'plam A va B to'plamlarning umumiy qismi, C ning elementlari ham A to'plamga (I doiraga), ham B to'plamga (II doiraga) tegishlidir.

3-chizma



3.1-chizma

3.2-chizma



Bunday doiralar **Eyler doiralari** deb ataladi. Biror C to'plam D to'plamning qism to'plami ekanini Eyler doiralari yordamida tasvirlash uchun C ni tasvirlovchi doirani D ni tasvirlovchi doira ichiga chizish kerak (3.1-chizma). 3.2-chizmada A_1, A_2, A_3 to'plamlarning ko'paytmasi tasvirlangan. C to'plamning elementlari ham A_1 ga, ham A_2 ga, ham A_3 ga tegishli, ya'ni C to'plam A_1, A_2, A_3 to'plamlar uchun umumiy qismdir. 3.2 chizmda 3.1 chizmadagidan farqli o'laroq to'plamlar doira ko'rinishida tasvirlanmagan.

Bunday tasvirlash ba'zan Vien diagrammalari deb ham ataladi. Universall to'plam, ko'pincha, tekislikdagi biror kvadrat shaklida tasvirlanadi.

To'plamlar ko'paytmasi (kesishmasi) amali quyidagilarga bo'ysunadi:

$A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik),

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (assotsiativlik),

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivlik).

Bulardan tashqari $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$ va $B \subset A$ bo'lsa, u holda $A \cap B = B$ tengliklar ham o'rinli bo'ladi.

Bir nechta $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ to'plamlarning kesishmasi

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_{n-1} \cap A_n = \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kabi yoziladi va barcha A_k $(k = 1,2,\dots,n)$ to'plamlarga tegishli bo'lgan umumiy elementlardan tuzilgan to'plam kabi bo'ladi.

Ta'rif. A va B to'plamlarning ayirmasi deb, A to'plamning B to'plamga kirmaydigan barcha elementlaridan tuzilgan to'plamga aytiladi.

A va B to'plamlarning ayirmasi $C = A \backslash B$ kabi yoziladi.

Misollar: 1) A={1, 2, 3, 4, 5, 6}, B={0, 2, 4, 6, 8} bo'lsa, u holda $C = A \backslash B = \{1, 3, 5, 6\}$ bo'ladi.

2) Agar $A = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, \dots\}$ va $B = \{3, 6, 9, 12, \dots\}$ bo'lsa, u holda $C = A \backslash B = \{2, 4, 8, 10, 14, \dots\}$ bo'ladi.

Nizomiy nomli
T D P U
kutubxonasi

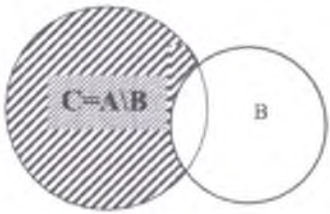
3) $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ va $B = \{1, 3, 7, 9\}$ bo‘lsa, u holda $A \backslash B = \{2, 4, 5\}$ va $B \backslash A = \{7, 9\}$ bo‘ladi.To‘plamlar ayirmasi uchun $A \backslash A = \emptyset$, $A \backslash \emptyset = A$, $\emptyset \backslash A = \emptyset$ va $A \subset B$ bo‘lsa $A \backslash B = \emptyset$ munosabatlar o‘rinlidir.

A va B to‘plamlar ayirmasining geometrik talqini 4-chizmada tasvirlangan.

Ta’rif. Agar ko‘paytirilayotgan barcha to‘plamlarni biror Ω to‘plamning qism to‘plamlari deb qarash mumkin bo‘lsa, u holda Ω ni **universal to‘plam** deb ataladi.Masalan, sonlar bilan bog‘liq barcha to‘plamlar uchun $\Omega = (-\infty; +\infty)$ to‘plam universal to‘plam bo‘ladi.

Ta’rif. Agar A to‘plam Ω universal to‘plamning qismi bo‘lsa, u holda $\Omega \backslash A$ to‘plam A to‘plamning to‘ldiruvchisi deb ataladi va u $\complement(A)$ kabi yoziladi.

(4-ch)



(5-ch)

Agar quyidagi 5-chizmada Ω universal to‘plam doiradagi nuqtalar to‘plami, A to‘plam esa uning ichida yotgan to‘g‘ri to‘rtburchakdagi nuqtalar to‘plami bo‘lsa, u holda uning to‘ldiruvchisi $\complement(A)$ 5-chizmadagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi.

Masalan,

$\Omega = \{$kimyo yo‘nalishi barcha talabalari$\}$,

$A = \{$sessiyada barcha fanlardan muvaffaqiyatli topshirgan talabalar$\}$ bo‘lsa, u holda

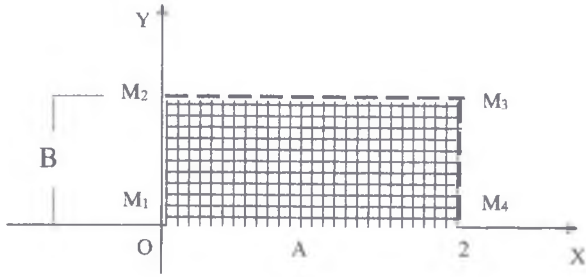
$\complement(A) = \{$sessiyani muvaffaqiyatli topshira olmagan talabalar$\}$ to‘plami bo‘ladi.

Ta’rif. A va B to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi deb, birinchi elementi A to‘plamdan, ikkinchi elementi B to‘plamdan olingan barcha (a, b) ko‘rinishdagi juftliklardan tuzilgan to‘plamga aytiladi.

A va B to‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi $A \times B$ kabi yoziladi.

Misollar: 1) R – haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lib, $A = R$ va $B = R$ bo‘lsa, u holda $A \times B$ – tekislikdagi barcha nuqtalar to‘plami bo‘ladi; 2) Agar $A = [0, 2]$ va $B = [0, 1]$ bo‘lsa, $A \times B$ to‘plam tekislikdagi $(x, y)(x \in A = [0, 2], y \in R = [0,1])$ nuqtalardan, ya’ni uchlari

$M_1(0,0), M_2(0,1)$, $M_3(2,1)$ va $M_4(2,0)$ nuqtalarda joylashgan to‘g‘ri to‘rtburchakdan iborat bo‘ladi. (6-chizma).



(6- chizma)

To‘plamlarning Dekart ko‘paytmasi uchun kommutativlik qonuni bajarilmaydi,ya’ni $A \times B \neq B \times A$. Buni yuqoridagi 2-misoldan ham ko‘rish mumkin. Agar $A = [0,2]$ va $B = [0,1]$ to‘plamlar uchun $A \times B$ Dekart ko‘paytma asosining uzunligi 2, balandligi 1 bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lsa, $B \times A$ Dekartko‘paytma asosining uzunligi 1 va balandligi 2 bo‘lgan to‘g‘rito‘rtburchakdan iborat.

2.4. Munosabat tushunchasi. Ekvivalentlik, simmetriklik, tranzitivlik, va tartib munosabatlari

$A_1,...,A_n$ - bo‘sh bo‘lmgan to‘plamlar $\forall a_1 \in A_1,...,\forall a_n \in A_n$ - elementlardan tuzilgan barcha $(a_1,...,a_n)$ n-liklar to‘plami $A_1,...,A_n$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi deyiladi. $A_1,...,A_n$ to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi $A_1 \times ... \times A_n$ ko‘rinishida belgilanadi.

1-misol. $A_1 = \{0, \Diamond\}$, $B = \{1,2,3\}$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin, u holda

$A \times B = \{(0,1),(0,2),(0,3),(\Diamond,1),(\Diamond,2),(\Diamond,3)\}$

$B \times A = \{(1,0),(1,\Diamond),(2,0),(2,\Diamond),(3,0),(3,\Diamond)\}$.

Bu misoldan $A \times B \neq B \times A$ ekanligini ko‘rish mumkin, ya’ni dekart ko‘paytma kommutativ emas ekan.

Agar $A_1 \times ... \times A_n$ dekart ko‘paytmada $A_1 = A_2 = ... = A_n = A$ bo‘lsa, bunday dekart ko‘paytma A^n ko‘rinishida yoziladi va A to‘plamning n-dekart darajasi deyiladi. Xususan $A^2 - A$ ning dekart kvadrati deyiladi.To‘plamlarning birinchi va nolinchi darajalarini $A^1 = A$, $A^0 = \varnothing$ tengliklar ko‘rinishida aniqlash kelishilgan.

1-ta'rif. $A \neq \varnothing$ to'plam berilgan bo'lsin. A^n ning ixtiyoriy ρ to'plamostini A to'plamda aniqlangan n-ar yoki n-o'rinli munosabat deyiladi. Hususan A^2 ning ixtiyoriy to'plamostisi A to'plamida berilgan binar munosabat deyiladi. Agar (a, b) juftliklar ρ binar munosabatga tegishli bo'lsa, $a \rho b$ deb belgilaymiz.

2-misol. N^2 ning $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),...\}$ to'plamostisi natural sonlar to'plamida aniqlangan tenglik munosabatidir.

3-misol. N^2 ning $"<"=\{(1,2),(1,3),...,(2,3),(2,4),...,(3,4),(3,5),...\}$ to'plamostisini qaraylik. Bu munosabat tengsizlik munosabati bo'lib $(a,b)\in"<"$ bo'lishi $a<b$ orqali belgilanadi va a kichik b deb o'qiladi. 5.5-ta'rifdan ko'rinib turibdiki, A da - 0 o'rinli munosabat, bu $A^0=\{\varnothing\}$ to'plamning to'plamostilari bo'lib, faqat $\varnothing$ $\{\varnothing\}$ to'plamlardan iboratdir. Bir o'rinli munosabat esa A ning ixtiyoriy to'plamostisi bo'lar ekan. Bir o'rinli munosabat unar munosabat deyiladi.

4-misol. $A=\{a,b\}$ to'plamda aniqlangan barcha unar munosabatlar $\varnothing$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{a,b\}$ to'plamlardan iborat.Binar munosabatlar matematikada ko'p uchraydigan munosabatlardan biri bo'lganligi uchun u bilan to'liqroq tanishib chiqamiz.

2-ta'rif. Agar R - A to'plamda berilgan binar munosabat bo'lsa, u holda binar munosabatga tegishli barcha juftliklarning, barcha birinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam $Dom\, R$ orqali, barcha ikkinchi koordinatalaridan tuzilgan to'plam esa $\mathrm{Im}\, R$ orqali belgilanad. Ular mos ravishda R munosabatning aniqlanish va o'zgarish sohalari deyiladi.

3-ta'rif. Agar R – ikki o'rinli, ya'ni binar munosat bo'lsa, u holda $\{(a,b)/\forall(b,a)\in R^1\}$ munosabat R^1-munosabatga teskari munosabat deyiladi va R^{-1}orqali belgilanadi. R^{-1} munosabat R ning inversiyasi deyiladi.

4-ta'rif. P va Q binar munosabatlar bo'sh bo'lmagan A to'plamda berilgan bo'lsin. U holda $P \circ Q = \{(a,c) | \exists\, b\in A, (a,b)\in Q \wedge (b,c)\in P\}$ to'plam P va Q binar munosabatlarning kompozisiyasi deyiladi.

Teorema. Agar f, h, g lar A to'plamida berilgan binar munosabatlar bo'lsa, u holda $f\circ(h\circ g)=(f\circ h)\circ g$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni binar munosabatlar kompozisiyasi assosiativdir.

Isbot. $\forall(x,t)\in f\circ(g\circ h)$ bo'lsin, u holda kompazisiya ta'rifga ko'ra shunday $y,z\in A$ elementlar topilib $(x,y)\in f$, $(y,z)\in g$ va $(z,t)\in L$ bo'ladi. Demak $(x,z)\in f\circ g$ va $(z,t)\in L$ u holda $(x,t)\in(f\circ g)\circ h$ bo'ladi. ya'ni

$f\circ(g\circ L)\subseteq(f\circ g)\circ h$. Shunga o‘xshash $(f\circ g)\circ h\subseteq f\circ(g\circ h)$ bo‘lishi isbotlanadi.

Munosabatlar

D to‘plamida R –binar munosabat berilgan bo‘lsin.

1. Agar $\forall x \in A$ uchun xRx bo‘lsa, R –binar munosabat refleksiv munosabat deyiladi;
2. Agar xRy bo‘lishidan yRx bo‘lishi kelib chiqsa, ya’ni $R^{-1}=R$ shart bajarilsa, R-simmetrik munosabat deyiladi;
3. Agar xRy va yRx bo‘lishidan xRz bo‘lishi kelib chiqsa, ya’ni $R\circ R\subset R$ shart bajarilsa, R-tranzitiv munosabat deyiladi;[1]

Refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo‘lgan binar munosabat ekvivalentlik munosabati deyiladi.

Ekvivalentlik munosabati ba’zan $\equiv$, $\sim$, $\simeq$ kabi ko‘rinishlarda ham belgilanadi. [2]**1-misol.** Z- butun sonlar to‘plamida $\forall a, b\in Z$ butun sonlar ayirmasi birdan katta bo‘lgan m butun songa qoldiqsiz bo‘linsa, a soni b soni bilan, m-modul bo‘yicha taqqoslanadi deyiladi va $a\equiv b$ (mad m) deb yoziladi. Bu munosabat refleksiv munosabatidir, haqiqatdan $\forall a\in Z$ uchun $a-a=0\vdots m$, ya’ni $a\equiv a$ (mad m); $\equiv$-simmetrik munosabatdir, chunki $a\equiv b$(mad m) bo‘lsa $a-b\vdots m$, demak $-(b-a)\vdots m$, ya’ni $b\equiv a$ (mad m); $\equiv$-tranzitiv munosabatdir, haqiqatdan $a\equiv b$ (mad m) va $b\equiv c$ (mad m) bo‘lsa, $(a-b)\vdots m$ va $(b-c)\vdots m$ bo‘ladi, u holda $a-c=((a-b)+(b-c))\vdots m$, ya’ni $a\equiv c$(mad m) bo‘ladi. Shunday qilib bu munosabat-refleksiv, simmetrik, tranzitiv ya’ni ekvivalentlik munosabati ekan.

2-misol. Tekislikdagi barcha to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida to‘g‘ri chiziqlarning parallel bo‘lishi munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

3-misol. Tekislikdagi barcha uchburchaklar to‘plamida uchburchaklarning o‘xshashlik munosabati ekvivalentlik munosabatidir.

Ta’rif. A to‘plamda aniqlangan R-ekvivalentlik munosabati berilgan bo‘lsin. $\forall a\in A$ uchun $\bar{a}$ orqali A to‘plamning a ga ekvivalent bo‘lgan barcha elementlarini belgilaymiz va to‘plamni a element

---

[1] Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada 2011p.p.450ning mazmun, mohiyatidan foydalanildi

[2] Susanna S. Epp. Discrete Mathematics with Applications, Fourth Edition. Printed in Canada 2011p.p.450 ning mazmun, mohiyatidan foydalanildi

yaratgan ekvivalentlik sinfi deb ataymiz. Ekvivalentlik sinfining ixtiyoriy elementi shu sinfning vakili deyiladi.

1-misol. Z-butun sonlar to'plamida 3 modul bo'yicha taqqoslash munosabati berilgan bo'lsin, u holda

$\bar{0}=\{3z / z\in Z\}$ $\bar{1}=\{3z+1 / z\in Z\}$ $\bar{2}=\{3z+2 / z\in Z\}$. Bu ekvivalentlik sinflari 3 modul bo'yicha chegirmalar sinflari deyiladi.

2-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy R ekvivalentlik munosabati berilgan bo'lsin, u holda shu R ekvivalentlik munosabati bo'yicha aniqlangan barcha ekvivalent sinflari to'plami A to'plamning R ekvivalentlik munosabati bo'yicha faktor- to'plami deyiladi.

Ta'rif. A to'plamning bo'sh bo'lmagan to'plamostilaridan tuzilgan $B=\{A_\alpha / \alpha\in\Omega\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar B ixtiyoriy ikkita elementining kesishmasi bo'sh to'plmadan iborat bo'lib, B ning barcha elementlarining yig'indisi A ga teng bo'lsa, u holda B to'plam A to'plamning bo'laklangani deyiladi.

Ta'rif. A to'plamda R- tartib munosabat berilgan bo'lsin, (A,R) juftlik tartiblangan to'plam deyiladi. Agar R- qisman tartib munosabati bo'lsa, (A,R) qisman tartiblangan to'plam, R chiziqli tartib munosabati bo'lsa, (A,R) chiziqli tartiblangan to'plam deyiladi.

1-misol. $(N,<)$-juftlik chiziqli tartiblangan to'plamdir. Kelgisida $a<b$ yozuvni odatdagidek $a<b$, $a\le b$ yozuvni esa a kichik yoki teng b deb o'qiymiz va $a\le b$ ni $(a<b)\vee(a=b)$ mulohaza ma'nosida tushunamiz. Xususan $4\le 4, 3\le 4$ mulohazalar aynan rost mulohazalardir.

$(A,<)$- tartiblangan to'plam berilgan bo'lsin, u holda $a\in A$ elementdan kichik element mavjud bo'lmasa a- minimal element, agar a dan katta element mavjud bo'lmasa a-maksimal element deyiladi. A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan kichik bo'lgan a element A ning eng kichik elementi, A dagi o'zidan boshqa barcha elementlaridan katta bo'lgan b element A ning eng katta elementi deyiladi.

2-misol. $A=\{1,2,3,4,12\}$ to'plamida, agar $a\vdots b$ bo'lsa, $b<a$ deylik, u holda 1 eng kichik element, 12 eng katta element bo'ladi.

3-misol. $A=\{1,2,3,4\}$ to'plamda ham 6.28 –misoldagi kabi aniqlangan < –tartib munosabatni qaraylik.U holda 1-minimal element, 3, 4-maksimal elementlar bo'lishlari ravshan.

Shunday qilib, maksimal elementlari bir nechta bo'lgan to'plamlar mavjud ekan. Minimal elementlari ham bir nechta bo'ladigan to'plamga misol keltirishni o'quvchilarga havola etamiz.

Ta'rif. Har qanday bo'sh bo'lmagan to'plamostisi minimal elementga ega chiziqli tartiblangan to'plam to'liq tartiblangan to'plam deyiladi.

Chiziqli tartiblangan to'plamlarda minimal element tushunchasi eng kichik element tushunchasi bilan, maksimal element tushunchasi esa eng katta element tushunchasi bilan bir xil bo'lishi ravshan.

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. To'plam tushunchasi qanday tushuncha?
2. Qanday to'plam bo'sh to'plam deb ataladi?
3. To'plamning qismi deyilganda nimani tushunasiz?
4. To'plamlar va ular ustida amallar ?
5. To'plamning to'ldiruvchisi deganda nimani tushunasiz?
6. To'plamlarning Dekart ko'paytmasi qanday aniqlanadi?

7. Quyidagi yozuvlarni o'qing va har bir to'plamning elementlarini ko'rsating:

a) $E=\{x|x\in N,-1<x<5\}$; b) $F=\{x|5x=x-7\}$;

v) $Q=\{x(x+12)=0\}$ g) $U=\{x|x\in R,x^2=2\}$;

d) $V=\{x|x\in N,x^2<9\}$; e) $W=\{x|x\in N,x^2\le 9\}$.

8. Quyidagi to'plam qaysi elementlardan tuzilgan:

a) 1 va 3 bilangina yoziladigan barcha uch xonali sonlar to'plami;

b) 1, 3, 5 raqamlaridan (faqat bir marta) foydalanib yoziladigan barcha uch xonali sonlar to'plami;

c) raqamlarning yig'indisi 5 ga teng bo'lgan uch xonali sonlar to'plami;

d) 100 dan kichik va oxirgi raqami 1 bo'lgan barcha natural sonlar to'plami?

9. $M=\{36;29;15;68;27\}, P=\{4;15;27;47;36;90\}, Q=\{90;4;47\}$ berilgan. $M\cap P, M\cap Q, P\cap Q, M\cap P\cap Q$ larni toping.

10. $A-18$ ning hamma natural bo'luvchilari to'plami, $B-24$ ning hamma natural bo'luvchilari to'plami bo'lsa, $A\cap B$ to'plam elementlarini ko'rsating.

11. $A=\{1,2,3\}$ va $B=\{2,4\}$ to'plamlar berilgan. Bu to'plamlar uchun $A\cup B, A\cap B$, $A\setminus B$, $A\triangle B$ va $A\times B$ lar topilsin.

12. Quyidagi to'plamlarni son o'qida belgilang:

a) $\{x|x\in N,x\le 3\}$; b) $\{x|x\in Z,-2\le x\le 2\}$;

v) $\{x|x \in R, x > 4{,}1\}$; g) $\{x|x \in R, -2{,}7 \le x \le 1\}$;

d) $\{x|x \in R, x < 6\}$; e) $\{x|x \in R, 3{,}4 < x \le 8\}$;

j) $\left\{x|x \in R, -3\frac{1}{4} \le x \le -1\right\}$; z) $\{x|x^2 = 4\}$;

k) $\{x|(x^2-1)(x^2-4)=0\}$.

13. $A = \{-1{,}1\}$ to'plam bilan $(x-1)^2(x+1)^3 = 0$ tenglamaning barcha ildizlari to'plami o'zaro teng bo'la oladimi?

14. X=(-3;4] va Y=[-1;7] to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi va ayirmasini toping.

15. A=(0;5), B=[-2;2) va C=[-4;1] bo'lsa, $A \cup B \cup C$ va $A \cap B \cap C$ larni toping.

16. Tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plamini toping. Bu to'plamlarning qaysilari bo'sh to'plam ekanligini aniqlang:

a) $3x + 15 = 4(x-8)$; b) $2x + 4 = 4$; v) $2(x-5) = 3x$

g) $x^2 - 4 = 0$; d) $x^2 + 16 = 0$; e) $(2x+7)(x-2) = 0$

3-§ .Matematik mantiq elementlari. Mulohazalar va ustida amallar

Tayanch so'z va iboralar: *Matematik mantiq,mulohaza tushinchasi, uning qiymati mantiqiy amallar va formulalar, mulohazalar hisobi, inkor,kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya, ekvivalensiya.*

3.1.Matematik mantiqning asosiy tushinchalari

Matematik mantiq matematikaning bir bo'limi bo'lib, unda mulohazalar va ular ustida mantiqiy amallar o'rganiladi. Chin yoki yolog'onligi haqida fikr yuritish mumkin bo'lgan har qanday darak gapga mulohaza deyiladi.

Mulohazalar odatda lotin alifbosining kichik harflari bilan belgilanadi. Masalan, a, b, c, ...

Mulohazalar ustida bajariladigan mantiqiy amallar maxsus belgilar yordamida ifodalanadi. Bu belgilar hozirgi zamon matematikasining barcha bo'limlarida qo'llaniladi. Bu belgilar quyidagilardir:

$p \wedge q$ - p va q
$p \vee q$ - p yoki q
$\neg p$ - p emas
$p \to q$ - p dan q kelib chiqadi
$p \leftrightarrow q$ - p agar faqat va faqat agar q
$\perp$ - yolg'on
$\top$ - rost

$\forall$ - ixtiyoriy, barcha, har qanday
$\exists$ - shunday, mavjud
$\nexists$ - mavjud emas, keying mavzularda bu belgilar haqida batafsil tushinchalarni beramiz.

Agar mulohazalar o'rtasiga mantiq amalllaridan qo'ysak, yangi mulohaza hosil bo'lib, bunday mulohazaga qo'shma mulohaza deyiladi. Mulohazalar algebrasida rost yoki yolg'on tushunchalari asosiy tushunchalardan hisoblanadi. Qo'shma mulohazaning rost yoki yolg'on ekanligini ta'rifdan kelib chiqqan holda jadval asosida ko'rish birmuncha qulaylik tug'diradi. Bunday jadvalga rostlik jadvali ham deyiladi

Mulohaza matematik mantiqning asosiy tushunchalaridan bo'lib, u rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gapdir. Masalan, «Kvadrat to'g'ri to'rtburchakdir», «7-tub son», «2>5» kabi tasdiqlar mulohazalar bo'lib, birinchi va ikkinchi mulohazalar rost, uchinchi mulohaza esa yolg'on mulohazadir.

Demak, biror bir gap mulohaza bo'lishi uchun, u albatta darak gap bo'lishi va rost yoki yolg'onligi bir qiymatli aniqlanishi shart.

Undov, so'roq gaplar mulohaza bo'la olmaydi. Rost mulohazaga 1 qiymatni, yolg'on mulohazaga 0 qiymatni mos qo'yamiz. Mulohazalarni lotin alifbosining bosh harflari bilan belgilashni kelishib olamiz. Quyida biz berilgan mulohazalardan mantiq amallari deb ataladigan amallar yordamida boshqa mulohazalar hosil qilish usullarini ko'rib chiqamiz.

Ta'rif. Berilgan A mulohaza rost bo'lganda yolg'on, A mulohaza yolg'on bo'lganda rost bo'ladigan mulohaza A mulohazaning inkori deyiladi va $\rceil A$ yoki $\bar{A}$ orqali belgilanadi.

Inkor amali quyidagi jadval yordamida to‘liq aniqlanadi:

A	$\rceil A$
1	0
0	1

Bunday jadvallarni rostlik jadvali deb ataymiz.

Masalan, A mulohaza - «7-tub son» degan rost mulohaza bo‘lsin, u holda $\rceil A$ - «7-tub son emas» degan yolg‘on mulohazadan iborat.

Ta’rif. A va B mulohazalar rost bo‘lgandagina rost bo‘lib, qolgan hollarda yolg‘on bo‘ladigan mulohaza A va B mulohazalarning kon’yunksiyasi deyiladi va $A \wedge B$ yoki A & B ko‘rinishda belgilanadi

Kon’yunksiya amalining rostlik jadvali quyidagichadir:

A	B	$A \wedge B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Ta’rif. A va B mulohazalar diz’yunksiyasi deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg‘on bo‘lgandagina yolg‘on, qolgan hollarda rost bo‘ladigan $A \vee B$ mulohazaga aytiladi.

A	B	$A \vee B$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Ta’rif. A va B mulohazalar implikasiyasi deb, A mulohaza rost va B mulohaza yolg‘on bo‘lgandagina yolg‘on, qolgan hollarda rost bo‘ladigan $A \to B$ mulohazaga aytiladi.

A	B	$A \to B$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Ta'rif. A va B mulohazalar ekvivalensiyasi deb, A va B mulohazalarning ikkalasi ham yolg'on yoki rost bo'lganda rost, qolgan hollarda yolg'on bo'ladigan $A \leftrightarrow B$ mulohazaga aytiladi

A	B	$A \leftrightarrow B$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Bu amallar uchun rostlik jadvallarini keltiramiz:

A	B	$A \vee B$	$A \to B$	$A \leftrightarrow B$
1	1	1	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	1	0
0	0	0	1	1

$\wedge$ - mantiqiy ko'paytirish, $\vee$ - mantiqiy qo'shish amallari deb yuritiladi. $A \wedge B$ mulohazani A va B; $A \vee B$ mulohazani A yoki B;

$A \to B$ mulohazani A mulohazadan B mulohaza kelib chiqadi yoki agar A bo'lsa, u xolda B bo'ladi; $A \leftrightarrow B$ mulohazani A mulohazadan B mulohaza va B mulohazadan A mulohaza kelib chiqadi yoki A bo'ladi, faqat va faqat shu holda-ki, agar B bo'lsa, deb o'qiymiz.

Mulohazalar to'plamini M harfi bilan belgilaylik. U holda M to'plam, unda bajariladigan barcha $\rceil$, $\wedge$, $\vee$, $\to$, $\leftrightarrow$ amallar bilan birgalikda mulohazalar algebrasi deb yuritiladi. Mulohazalar algebrasini qisqacha MA orqali belgilaymiz.

M to'plamda bajariladigan amallarni bajarilish tartibi quyidagicha: avval inkor amali bajariladi, agar inkor amali qavslardan tashqarida bo'lsa, u xolda qavs ichidagi amallar bajariladi. Keyin kon'yunksiya, undan so'ng diz'yunksiya, implikasiya va nihoyat ekvivalensiya amallari bajariladi.

Matematik mulohazalarni yuqoridagi belgilar yordamida ifoda etishga doir misollar keltiramiz:

1-misol. Agar $a>b$ va $b>c$ bo'lsa, $a>c$ bo'ladi.

$(a>b)\wedge(b>c)\Rightarrow(a>c)$.

2-misol. $a>b$ bo'lsa, $a+c>b+c$ bo'ladi. $(a>b)\Rightarrow(a+c>b+c)$.

3-misol. $a=0$ yoki $b=0$ bo'lsa, $ab=0$ bo'ladi va aksincha, $ab=0$ bo'lsa, $a=0$ yoki $b=0$ bo'ladi. $(ab=0)\Leftrightarrow((a=0)\vee(b=0))$.

4-misol. $a>0$ va $b>0$ bo'lsa, $ab>0$ bo'ladi. $(a>0)\wedge(b>0)\Rightarrow(ab>0)$.

5-misol. Ixtiyoriy x haqiqiy son uchun $|x|\geq x$. $\forall x\in R$: $|x|>x$.

6-misol. Ixtiyoriy $a\geq 0$ son uchun, shunday $x\in R$ son mavjudki, $x^2=a$ bo'ladi, ya'ni $\forall a\geq 0$, $\exists x\in R$: $x^2=a$.

O'z- o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Mulohaza deganda nimani tushinasiz?

2.Mulohazalar kon'yunksiyasi va diz'yunksiyasi nima va unga misollar?

3.Mulohazalar implikasiyasi va ekvivalensiyasi nima vaunga misollar?

4.Mulohaza inkori nima? Misollar keltiring.

5.Mantiqiy amallarning bajarilishi tartibini ayting. Rostlik jadvali nima?

6.Quyidagi jumlalar orasidan mulohazalarini ajrating va ularni rostlik qiymatini toping: a) 7-butun son; b) 68 ni 5 ga bo'lganda 4 qoldiq qoladi; d) so'roq gaplar mulohaza bo'ladi; e) x≤17; f) 17×2-21=13; g) x^2+4=13; h) 24-tub son.

7. A:" Onasining Yoshi qizining yoshidan kichik";
B:" Samarqand shahri O'zbekistondagi shaharlardan biri";
C: "8-dekabr – Kondtitutsiya kuni". AΛB-?, AΛC-?, BΛC−?, CΛB−?, BΛA−?

8. 12≥8 mulohazaning rost yoki yolg'onligini aniqlang.

9. A: " Agar -4<-2 bo'lsa, u holda 8<7 bo'ladi" mulohazaning rost yoki yolg'onligini isbotlang.

10. A: " 972 soni 9 ga karrali"; B: " 972 soni raqamlarining yig'indisi 9 ga karraloi" mulohazalarning ekvivalensiyasini tuzing.

11. A: "26:2+11=28", B: " 3-tub son" mulohazalari berilgan bo'lasa, $A\vee B, B\vee A, \bar{A}\vee B, \bar{A}\vee\bar{B}, A\vee\bar{B}$, larni so'z orqali ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.

12. A: " Otasining yoshi o'g'lining yoshidan kichik";

B: " Qashqadaryo shahri O'zbekistondagi shaharlardan biri";

C: " 8 mart- ayollar bayrami kuni".

A∧B-? , A∧C-?, B∧C-?, C∧B-?, B^A-?

13. $12\geq 8$ mulohazaning rost yoki yolg'onligini aniqlang.

Jumlalarni matematik mantiq belgilari yordamida yozing:

14. $a < 0$ va $b > 0$ bo'lsa, $ab < 0$ bo'ladi.

Agar $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ bo'lsa, $a = b = c = 0$ bo'ladi va aksincha,

15. $a = b = c = 0$ bo'lsa, $a^2 + b^2 + c^2 = 0$ bo'ladi.

16. A∧B→A∧B– mulohazalarning rostlik jadvalini tuzing.

A	B	C	A∧B	A∧C	A∧B→A∧C
1	1	1			
1	0	1			
0	1	1			
0	0	1			
1	1	0			
1	0	0			

4-§.Predikatlar. Kvantorlar. Predikatlar algebrasining formulasi va uning tatbiqi

Tayanch iboralar: *predikatlar algebrasi, predikatlarning aniqlanish sohasi, predikatning rostlik to'plami, rostlik to;plami, predikatlar konyunksiyasi, diz'yuksiyasi, ekvivalensiya, implikatsiya, inkori, kvantor tushunchasi, umumiylik kvantori, mavjudlik kvantori, paradox, kutilmagan, g'alati, shubhasiz to'g'ri, yolg'onchi va refliksivlik paradokslari, sofizm, mavzuga doir tatbiqlar*

4.1.Predikatlar va ular ustida amallar

Predikatlar haqida tushincha.

Mulohazalar mantig`i orqali siz tushuntira olmaydigan muhim narsalar judayam ko'p. Masalan, siz "butun son 2 ga bo'linmasa, undan keyin keluvchi butun son 2 ga bo'linadi" deya olmaysiz. Bunga sabab birlamchi, "butun son 2 ga bo'linmaydi"ning rostlik qiymatiga ega bo'lgan mulohaza emasligidir. Shunga qaramay, *p* ni "1 va 7 oralig'idagi butun son 2 ga bo'linmaydi, lekin undan keyin keluvchi butun son esa 2 ga bo'linadi" degan tasdiq deb olaylik. Biz bu tasdiqni predikat tilida quyidagicha ifodalashimiz mumkin. *P (n)* quyidagi gap bo'lsin: "Agar *n* soni 2 ga bo'linmasa, u holda $n+1$ soni 2 ga bo'linadi". U holda biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$$p \leftrightarrow p(1) \wedge p(2) \wedge p(3) \wedge p(4) \wedge p(5) \wedge p(6) \wedge p(7).$$

Muammo shundaki, umumiy bo'lgan butun son va undan keyin keluvchi son (2 ga bo'linadi) tasdig`ini ifoda etish uchun bizga cheksiz, hattoki yozib bo'lmaydigan cheksiz kon`yunksiya kerak.

Bu muammoni hal qilish uchun *predikatlar mantig`i* deb nomlangan kuchli mantiqiy sistemani qurishimiz kerak. Biz bu sistemani "hammasi uchun" deb ataluvchi bitta yangi sodda atama, "o'zgaruvchilar" deb ataydigan va x, y, z (va boshqalar) bilan, yoki agar bizda mos harflar qolmayotgan bo'lsa, indekslarni kiritish orqali belgilarni kiritish orqali tuzamiz. Va nihoyat, $P(x)$, $Q(x,y)$, $R(x,y,z)$ predikatlarni kiritamiz, ular x, y, z o'zgaruvchilarni real qiymatlari bilan almashtirilganda rost yoki yolg`on mulohazaga aylanadi. o'rnini bosganda. Masalan,

$P(x)$ predikat "Agar x butun son va 2 ga bo'linmaydigan bo'lsa, u holda $x+1$ soni 2 ga bo'linadi" bo'lsin. Keyin esa biz istalgan masalani "Hamma x lar uchun, P (x)" deyish orqali ifoda etamiz. Biz buni $(\forall x)\ P(x)$ belgilari bilan yozamiz.

Ba`zida $(Ax)\ P(x) \rightarrow Q(x))$ formulaning o'rniga biz "P dagi barcha x lar uchun, $Q(x)$ bajariladi" kabi o'qiladigan $(\forall\, x \in P)\ (Q(x))$ formulani yozamiz. $\in$ belgisi bilan biz keyinroq to'xtalib o'tadigan *to'plam nazariyasi*dagi sodda atama belgilanadi. Demak, biz P to'plamni, predikat $P(x)$ bajariladigan barcha elementlar to'plami deb hisoblaymiz.

Biz predikat mantig`ining yana bir asosiy belgisi "mavjud"ni ta`riflay olamiz.

Shu nuqtai nazardanki, ba`zi bir x lar uchun P(x) ekanligi xamma x lar uchun P(x) bo'lmasligini bildiradi yani $(\forall x)\ \neg P(x)$. Demak bizda

$$(\exists x)P(x) \leftrightarrow \neg(\forall x)\ \neg P(x).$$

Agar siz bu haqida bir oz fikr yuritsangiz, siz keltirilgan formulaning to'g'ri ekanligini ko'rasiz

$$(\forall x)P(x) \leftrightarrow \neg\ (\exists x)\ \neg P(x).$$

Siz A va Z qo'shnilarini o'rnini almashtira olishingizni va ifoda manosini saklay olishingizga ahamiyat bering, lekin siz Ava Z larni o'rnini almashtira olmaysiz. Masalan, o'zimizni o'zgaruvchan insoniy mavjudot deb hisoblasak, $P(x,y)$ formulasi"*x*belgisi *y*ning otasi" manosini beradi deb olaylik. Shunday qilib $(Ay)\ (Zx)\ (P(x,y))$ to'g'ri bo'lishi mumkin (har bir insonning otasi bor), garchi $(Zx)(Ay)(P(x,y))$

shubhasiz noto‘g‘ri, madomiki barchaning otasi hisoblanadigan inson yuq. Agar siz mantiqiy hisoblash orqali predikat *P (x)* to‘g‘ri ekanligini isbotlay olsangiz, u holda predikat hisoblash tasnifida *(Ax) P(x)*to‘g‘ri hisoblanadi. Masalan, biz *P (x)*va *P (x) → Q (x,y)*va *Q (x,y)* haqiqiy usunlar ishlatgan holda va g‘oyaviy hisoblashdagi kabi, ModusPonens hisoblanadigan formulalarni isbotlay olamiz.

Biz oddiy tarzda *P (x)* nikesim kabi izohlangandan ko‘ra yangi o‘zgaruvchan formula ekanligini tahmin qilamiz. Bundan tashqari, agar *x* haqida bilmasdan turib *P (x)*formulasini isbotlay olsak, demak *P (x)* hamma *x* uchun to‘g‘ri bo‘lishi kerak ekanligi manosini bildiruvchi *P (x) → (Ax) P (x)* ,bizda aniq aloqadorlik mavjud. Shuningdek, bu yerda *x, P (x) → (Zx) P(x)* ham bor.

Biroq, umumiy holatda narsalarni mantiqiy hisoblashdan ko‘ra predikat hisoblash orqali isbot qilish ancha murakkab jarayondir. Nima bo‘lganda ham bu bizlarni havotirga solmaydi, chunki matematika bilan aloqa sifatida ishlash, biz shug‘ullanadigan narsalar qanday isbotlanishidan bizni ozod etadi, huddi biz telefonni ishlatish kabi, yani elektromagnit teoriyasi haqida hech narsani bilmasdan turib biz qaysi tugmani qachon bosishni yaxshi bilamiz.

Biz Rasselning ilmiy qoidalarga mos kelmaydigan g‘oya (paradoks) lariga keyinroq to‘xtalib o‘tamiz, lekin shu o‘rinda predikat mantig`ida uchrab turadigan chigal paradokslar haqida izoh berish muhim.

Bu paradokslar Rasselning va boshqa to‘plam nazariyasidagi paradokslardan ko‘ra murakkabroq, chunki ularning oldini olish sezilarli darajada mushkuldir.

Predikat mantiqidagi eng muhim paradoks bu *Yolg‘onchining Paradoksi* hisoblanadi. Soddagina aytganda Yolg‘onchining paradoksi “Bu jumla noto‘g‘ri” demakdir.

Birinchidan, bunday gap mulohaza mantiqining emas balki predikat mantiqining bir bo‘lagi ekanligiga o‘zingizni ishontira olishingiz kerak. Shundan so‘ng, agar bu jumla rost bo‘lsa yolg`on bo‘lishiga va yolg`on bo‘lsa rost bo‘lishiga ham o‘zingizni ishontiring. O‘z navbatida bu shubhasiz ziddiyat hisoblanadi.

Mantiq olimlari noqonuniy o‘ziga ishora qiladigan predikatlar orqali bu ziddiyatdan chiqib ketishga urinishdi. Lekin Yolg‘onchining paradoksi dagi o‘ziga ishora qilmaydigan shakli quyidagicha. Birinchi predikatni aniqlaymiz

P739 (x) = predikat P740 yolg`on

Keyin quyidagi predikatni shakllatiramiz

P740(x) = predikat P739 rost.

Demak, agar P739 rost bo'lsa, u holda P740 yolg`on, bu P739 yolg`on ekanligini bildiradi. Shunday qilib P739 yolg`on bo'lishi kerak. Bizda P740 rost, demak P739 yolg`on. Bu jarayon ziddiyat deyiladi.

Yana bitta ishlash yuli predikat iyerarxiyalarini saqlashdir va bir xil yoki balandroq darajadagi predikatni anglatuvchi predikatni taqiqlash lozim. Lekin bungacha borishning bizga zaruriyati yo'q. [3]

4.2 Mavjudlik kvantori haqida tushincha

M to'plamda aniqlangan $P(x_1,\ldots,x_n)$ predikat berilgan bo'lsin, u holda $\exists x_1 P(x_1,\ldots,x_n)$- ifoda n-1 o'zgaruvchili predikat bo'lishini ko'rib chiqamiz. Haqiqatdan, $x_2,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilar M to'plamdan olingan $a_2,\ldots,a_{n-1}$ qiymatlarni qabul qilsin, u holda $\exists x_1 P(x_1,a_2,\ldots,a_{n-1})$ ifodalar x_1 ning M to'plamdan olingan kamida bitta qiymatida rost bo'lsa rost, aks holda yolg'on bo'ladigan mulohazadir. Ko'rinib turibdiki, $\exists x_1 P(x_1,\ldots,x_n)$ - predikat $x_2,\ldots,x_n$ o'zgaruvchilarning M dagi qiymatlari bilan aniqlanib x_1 ga bog'liq emas ekan. Ya'ni n-1 o'zgaruvchili predikat ekan.

$\exists x_1 P(x_1,\ldots,x_n)$ - ifoda «Shunday x_1 mavjud-ki, $P(x_1,\ldots,x_n)$ bo'ladi» deb o'qiladi. $\exists$ - simvol esa mavjudlik kvantori deyiladi.

4-misol. Natural sonlar to'plamida aniqlangan «$x^2+y^2=16$» - ikki o'zgaruvchili P(x, u) predikat berilgan bo'lsin, u holda:

$\exists xP(x, 1) = 0$; $\exists xP(x, 2) = 0$; $\exists xP(x, 3) = 0$;

$\exists xP(x, 4) = 1$; $\exists xP(x, 5) = 0,\ldots$, va hokazo.

$\exists x_1 P(x_1,\ldots,x_n)$ predikatda x_1 o'zgaruvchi bog'liq o'zgaruvchi, qolgan $x_2,\ldots,x_n$ lar erkin o'zgaruvchilar deyiladi.

Amaliyotda predikatlarga kvantorlar ketma-ket bir necha marta qo'llanish hollari uchraydi. Masalan, $\forall x \exists y P(x,u)$ ko'rinishdagi mulohazani $\forall x(\exists y P(x, y))$ deb tushunish kerak.

Bizga P(x) Q(x, y)...$R(x_1,\ldots,x_n)$ A, B ko'rinishdagi predikatlar berilgan bo'lsin. Har qanday n(n=0, 1, 2) o'rinli predikatni elementar formula deb ataymiz. Xususan har qanday mulohaza ham elementar formuladir.

---

[3] *Mathematical Literacy for Humanists. Herbert Gintis, p.p.8-10* betlarning mazmun mohiyatidan foydalanildi.

1) har qanday elementar formula predikatlar mantiqining formulasidir;

2) agar A va B lar predikatlar mantiqining formulalari bo‘lsa, u holda ($\rceil$A), (A $\wedge$ B), (A $\vee$ B), (A $\leftrightarrow$ B), ($\exists$xA), ($\forall$xA) ifodalar ham predikatlar mantiqining formulalaridir;

3) boshqa usul bilan predikatlar mantiqining formulalarini hosil qilib bo‘lmaydi.

Formula ifodasini ixchamlashtirish tartibi mulohazalar algebrasidek, ya’ni tashqi qavslarni tashlab yozamiz, qolgan qavslar amallarning bajarilish tartibiga mos ravishda tashlab yoziladi. Undan tashqari har doim avval kvantor bilan bog‘lash bajariladi deb hisoblaymiz, masalan, $(\forall xA(x)) \rightarrow B$ ko‘rinishdagi forlulani $\forall xA(x) \rightarrow B$ ko‘rinishda yozish mumkin.

Predikatlar mantiqining A formulasi tarkibidagi elementar formulalarni, har qanday predikatlar bilan almashtirish natijasida aynan rost predikat hosil bo‘lsa bunday formula <u>aynan rost formula</u> yoki <u>mantiq qonun</u> yo <u>umumqiymatli formula</u> deyiladi. Predikatlar algebrasining ikkita formulasi ularga kirgan barcha predikatlarni har qanday predikatlar bilan almashtirganimizda bir xil qiymatlar qabul qilsalar, ular <u>teng kuchli</u> deyiladi. A va B formulalar teng kuchliligi A $\equiv$ B ko‘rinishida belgilanadi.

Mulohazalar algebrasidagi asosiy teng kuchliliklarda mulohazalarni predikatlar mantiqining formulalari bilan almashtirib predikatlar mantiqining teng kuchli formulalarini hosil qilishimiz mumkin, masalan, $\overline{A \wedge B} \equiv \overline{A} \vee \overline{B}$ teng kuchlilikdagi A, B mulohazalarni predikatlar mantiqining mos ravishda $\mathcal{A}$ va $\mathcal{B}$ formulalari bilan almashtirsak $\overline{\mathcal{A}} \wedge \overline{\mathcal{B}} \equiv \overline{\mathcal{A}} \vee \overline{\mathcal{B}}$ teng kuchlilikka ega bo‘lamiz, xususan $\overline{F(x) \wedge F(y)} \equiv \overline{F(x)} \vee \overline{F(y)}$

Bu teng kuchliliklardan tashqari predikatlar mantiqning o‘zigagina xos bo‘lgan teng kuchli formulalar ham bor. Shunday teng kuchli formulalar namunalarini keltiramiz:

1. $\rceil(\forall xP(x)) \equiv \exists x \rceil P(x)$.
2. $\rceil(\exists xP(x)) \equiv \forall x \rceil P(x)$.
3. $\forall xP(x) \equiv \rceil(\exists x \rceil P(x))$.
4. $\exists xP(x) \equiv \rceil(\forall x \rceil P(x))$.
5. $\exists xA(x) \vee \exists xB(x) \equiv \exists x(A(x) \vee B(x))$.
6. $\forall xA(x) \wedge \forall xB(x) \equiv \forall(x)(A(x) \wedge B(x))$.

4.3. Paradoks va sofizmlar

Paradoks (qad. yun. παράδοξος - kutilmagan, g‘alati) – ko‘pchilik tomonidan qabul etilgan an’anaviy fikr, tajribaga o‘z mazmuni yoki shakli bilan keskin zid bo‘lgan, kutilmagan mulohaza. Har qanday paradoks «shubhasiz to‘g‘ri» (asoslimi, asossizmi, bundan qati nazar) hisoblangan u yoki bu fikrni inkor etishdek ko‘rinadi. «Paradoks» terminining o‘zi ham dastlab antik falsafada har qanday g‘alati, original fikrni ifodalash uchun ishlatilgan.

Mantiqiy paradokslar, odatda, mantiqiy asoslari to‘la aniqlanmagan nazariyalarda uchraydi.

Bir nechta paradoksni keltiramiz.

1-misol. (Yolg‘onchi paradoksi). "Men tasdiqlayotgan barcha narsa yolg‘on" mulohazani qaraymiz.

Agar bu mulohaza rost bo‘lsa, bu mulohazaning ma’nosiga asosan aytilgan mulohazaning yolg‘on ekanligi haqiqat. Agar bu mulohaza yolg‘on bo‘lsa, mulohazadagi ta’kid - yolg‘on. Demak, bu mulohaza yolg‘on degan mulohaza yolg‘on, shunday ekan, bu mulohaza haqiqat. Ziddiyat. ■

2-misol. (Refleksivlik paradoksi). O‘zbek tilidagi so‘zning ma’nosi o‘zida ifodalansa, uni refleksiv deb ataylik.

Masalan, “o‘zbekcha” so‘zi refleksiv, “inglizcha” so‘zi esa refleksiv emas. Xuddi shunday, “o‘ntaharfli“ so‘zi refleksiv, “oltitaharfli“ so‘zi esa refleksiv emas. Barcha refleksiv so‘zlar to‘plamini qaraylik. “Norefleksiv” so‘zi o‘zi refleksivmi?

Agar bu so‘z refleksiv bo‘lsa, u holda ma’nosiga ko‘ra, u norefleksiv. Agar bu so‘z norefleksiv bo‘lsa, u holda uning ma’nosi o‘zida ifodalangani uchun, u refleksiv bo‘ladi. Ziddiyat. ■

Sofizm (qad.yun. σόφισμα - hiyla) –ataylab chiqariladigan noto‘g‘ri xulosa, biror tasdiqning noto‘g‘ri isboti. Bunda isbotdagi xato ancha ustalik bilan bilintirmay yuboriladi.

Sofizmga oid masalalarni dastlab, miloddan avvalgi V asrda Qadimgi Yunonistonda yashagan matematik Zenon tuzgan.

Zenon, mashhur chopqir Axillesning oldida sudralib ketayotgan toshbaqani hech qachon quvib yeta olmasligini matematik mulohazalar yordamida quyidagicha “isbot” qilgan. Axilles toshbaqaga qaraganda 10 marta tezroq chopa oladi. Dastlab, toshbaqa 100 metr oldinda bo‘lsin. Axilles bu 100 metrni chopib o‘tguncha, toshbaqa 10 metr ilgarilaydi. Axilles bu 10 metrni chopib o‘tguncha toshbaqa yana 1 metr siljiydi va h.k. Ular orasidagi masofa doim qisqarib boradi, lekin hech qachon nolga aylanmadi.

Zenon masalalari cheksizlik, harakat, koinot tushunchalari bilan bog'liq bo'lib, ular matematika va fizika fanlarining rivojida katta ahamiyatga ega bo'ldi.

Ayrim sofizmlar ulug' ajdodlarimiz Farobiy asarlarida, Beruniy bilan Ibn Sinoning yozishmalarida muhokama qilingan.

Biz quyida eng sodda sofizmlarga misollar keltirib ularni tushuntirishga xarakat qilmoqchimiz.

1-misol. (1000 so'm qaerga ketdi?). Universitetning 3 nafar talabasi o'z do'stlaridan birini mehmon qilish uchun kafega taklif qilishdi. Ular ovqatlanib bo'lishgach ofitsiant ularga 25000 so'mlik hisobni berdi. 3 nafar talaba har biri 10000 so'mdan pul berib, 30000 so'mni ofitsiantga berishdi. Ofitsiant ularga 5000 so'm qaytim qaytardi. 3 nafar talaba 1000 so'mdan bo'lishib olishdi va 2000 so'mni taksi uchun berishdi. Universitetga qaytishayotganda talabalardan biri hisoblay boshladi, "Har birimiz 9000 so'mdan xarajat qildik, bu 27000 so'm bo'ladi, 2000 so'm taksiga berdik, buni qo'shsak 29000 so'm bo'ladi. 1000 so'm qaerga ketdi ?"

Bu yerdagi asosiy qilinayotgan "xatolik" hisoblashning noto'g'ri qilinayotganda. 3 nafar talaba 9000 so'mdan 27000 so'm pul to'lashdi. Bundan 25000 so'mini kafega to'lashdi, 2000 so'mini taksi uchun do'stiga berishdi, demak umumiy hisob 27000 so'm bo'ladi. Yuqoridagi hisoblashda 2000 so'm 27000 so'mning ichida yotibdi.

2-misol. ("$2\times2=5$" sofizmi). Ekanligini isbot qilamiz.

$$16-36=25-45$$

$$4^2-2\cdot\frac{4\cdot9}{2}=5^2-2\cdot\frac{5\cdot9}{2}$$

$$4^2-2\cdot\frac{4\cdot9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2=5-2\cdot\frac{5\cdot9}{2}+\left(\frac{9}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}=\sqrt{\left(4-\frac{9}{2}\right)^2}$$

$$4-\frac{9}{2}=5-\frac{9}{2}\Rightarrow 4=5\Rightarrow 2\times2=5$$

4-tenglikda o'ng va chap taraflaridan kvadrat ildiz chiqarib $2\times2=5$ tenglikni hosil qilamiz. Bu yerdagi asosiy qilinayotgan "xatolik" manfiy sondan kvadrat ildiz chiqarib yuborilgan, ildiz tegida manfiy son turishi mumkin emas.

O‘z- o‘zini tekshirish savol va topshriqlar

1. Predikatga ta’rif bering?

2. Predikatning aniqlanish sohasi, rostlik jadvali nima? Misollar yordamida tushuntiring?

3. Predikatlar kon’yunksiyasining ma’nosini tushuntiring.

4. Predikatlar diz’yunksiyasining ma’nosini tushuntiring

5. Predikatlar implikatsiyaning ma’nosini tushuntiring.

6. Predikatlar diz’yunksiyasi, kon’yunksiyasi, implikatsiyasi, ekvivalensiyasiga misollar keltiring.

7. Kvantorlar nima?

8. Predikatli formula qanday hosil qilinadi?

9. Predikatli formulaning qanday turlarini bilasiz?

10. Sofizmni qanday tshunasiz.

11. Matematik tasdiqlarni predikatlar tilida ifodalashga misol keltiring.

12. N – natural sonlar to‘plamida aniqlangan R(x)-“x-toq son”; Q(x)- “x birorta natural sonning kvadratiga teng” - predikatlar berilgan.

X=1, 4, 5, 9 qiymatlar uchun $R\wedge Q$, $R\vee Q$, $R\rightarrow Q$, $R\leftrightarrow Q$, $\urcorner R$, $\urcorner Q$ predikatlarning qiymatlarini toping.

13. Quyidagi teng kuchliliklarni isbotlang:

1) $\urcorner(\forall x R((x)) = \exists x \urcorner R(x)$

2) $\urcorner(\exists x R(x)) = \forall x \urcorner R(x)$

3) $\forall x R(x) = \urcorner(\exists x \urcorner R(x))$

14. Quyidagi teng kuchliliklarni isbotlang:

1) $\exists x R(x) = \urcorner(\forall x \urcorner Rx))$

2) $\exists\ xA(x) =\wedge\exists xB((x) =\exists\ x(A(x) \vee B(x))$

3) $\forall\ xA(x) \wedge\forall xB(x) =\forall(x)(A(x) \wedge B(x))$

15. 5l va 9l idishlar yordamida krandan 3l suv olish mumkinmi?

16. Toshbaqa 1 minutda 50 sm yo‘l bosadi. U 0.1km masofaniqancha soatdao‘tadi?

17. 2x2=5 ekanligini yuqorida isbotlash usulidan tasqari isbotlang.

18. 800kg mevani tarkibida 80% suv bor, bir necha kundan keyin mevaning og‘irligi 500kg ga tushdi. Endi meaning tarkibida necha % suv bor?

5-§. Matritsalar

Tayanch so'z va iboralar: *matritsa, matritsaning elementi, kvadrat matritsa, nol matritsa, birlik matritsa, diagonal matritsalar, xos va xosmas matritsalar, matritsalar yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi, songa ko'paytmasi, teskari matritsa,simmetrik matritsa,matritsa rangi.*

5.1. Matritsalar algebrasi elementlari

Ta'rif_1: Haqiqiy sonlarning ***m×n o'lchamli matritsasi*** deb *m* ta satr va *n* ta ustundan iborat haqiqiy sonlar bilan ma'lum tartibda to'ldirilgan to'g'ri to'rt-burchakli jadvalga aytiladi. Jadvalni to'ldirgan sonlar ***matritsaning elementlari*** deyiladi.

Matritsalarni belgilash uchun (‖ ‖) yoki (( )) belgilar ishlatiladi va odatda, lotin alifbosining katta harflari bilan, masalan, *A, B, C,...,* kabi nomlanadi. A matritsaning i-satr va j-ustundagi elementi a_{ij} kabi belgilanadi. Bunda element indeksidagi ***i*** va ***j*** natural sonlar ***elementning*** A matritsadagi o'rni - ***koordinatalarini*** bildiradi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad yoki \quad A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix} \qquad (1)$$

matritsa m ta satr va n ta ustundan iborat.

A matritsa qisqacha $A=\|a_{ij}\|_{mxn}$, $i=1,2,...,m, j=1,2,...,n$ kabi ham ifodalanadi.

Misol uchun, $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$, *o'lchamlari* 2x2 *bo'lgan matritsalar bo'lsa,* $D=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 2x3 *o'lchamli matritsalardir.*

Ta'rif_2: Ikkita bir xil o'lchamli matritsalarda barcha o'zaro mos elementlari teng bo'lsa, bunday ***matritsalar teng*** deyiladi va *A=B* kabi yoziladi

5.2.Matritsalarning turlari va ular ustida amallar

Har qanday haqiqiy son - ***bir elementdan iborat matritsa***.

$A=(a_{11},a_{12},...,a_{1n})$ matritsa - ***satr-matritsa.*** $A=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ ... \\ a_{n1} \end{pmatrix}$ matritsa - ***ustun-matritsa.***

Satr va ustunlari soni teng bo'lgan matritsa -***kvadrat matritsa.***
Kvadrat matritsa-ning a_{ii} elementlari ***asosiy diagonal elementlari.***
Asosiy diagonaldan yuqoridagi (quyidagi) barcha elementlari nol bo'lgan kvadrat matritsa ***uchburchak matritsa.***

Masalan, $D=\begin{pmatrix} 2 & -9 & 3 \\ 0 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *yoki* $C=\begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Kvadrat matritsaning asosiy diagonal elementlaridan tashqari barcha elementlari nol bo'lsa, ya'ni $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & ... & 0 \\ 0 & a_{22} & ... & 0 \\ ... & ... & ... & 0 \\ 0 & 0 & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$ ko'rinishda bo'lsa, ***diagonal matritsa*** deyiladi.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & ... & 0 \\ 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}_{nxn}$ - ***n-tartibli birlik matritsa,***

Kvadrat matritsa elementlari uchun $a_{mn} = a_{nm}$ munosabat o'rinli bo'lsa, bunday
matritsa ***simmetrik matritsa*** deb. Kvadrat matritsa elementlari uchun $a_{mn} = -a_{nm}$
munosabat o'rinli bo'lganda esa ***kososimmetrik matritsa*** deb ataladi.

A matritsaga ***qarama-qarshi matritsa*** $-A=(-a_{ij})$ matritsa.

Misol_1. *. Berilgan matritsalarning o'lchamlarini va turlarini aniqlang.*

$$A=\begin{Vmatrix}2 & 4 & 1\\ -1 & 0 & 2\end{Vmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\quad C=\begin{Vmatrix}2 & 2 & -1\\ 0 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 4\end{Vmatrix},\quad D=\begin{Vmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -8\end{Vmatrix}$$

Yechish: *A- (2x3) o'lchamli, B - (3x2) o'lchamli. C - 3-tartibli, D esa 4-tartibli kvadrat matritsalar. C matritsaning diagonal elementlaridan pastki elementlarining hammasi 0 ekanidan* ***pastki uchburchak*** *matritsa hisoblanadi. D matritsada faqat diagonal elementlari noldan farqli ekanidan* ***diagonal matritsa.***

Matritsani songa ko'paytirish. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ matritsaning λ ***haqiqiy songa ko'paytmasi*** deb elementlari: $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ *(i=1,2,....,m, j=1,2,....,n.)* kabi aniqlangan $C=(c_{ij})_{m\times n}$ matritsaga aytiladi:

$$C=\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n}\\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Misol_2. $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 6\\ 1 & 6 & 4\end{pmatrix}$ *va* $\lambda=4$ *uchun* $\lambda\cdot A$ *ni aniqlang.*

Yechish: $\lambda\cdot A=4\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & 5 & 6\\ 1 & 6 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12 & 4 & 8\\ 4 & 20 & 24\\ 4 & 24 & 16\end{pmatrix}.$

Matritsalarni o'zaro qo'shish (ayirish). Ikkita A va B matritsaning *yig'indi (ayirma)* sining natijasi C matritsa bo'lib, uning elementlari $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$ kabi aniqlanadi.

Misol. $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 4\\ 3 & 2 & 3\end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}$ *matritsalar uchun 2A + B ni hisoblang.*

Yechish: $2A=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 2 & 8\\ 6 & 4 & 6\end{pmatrix}$, $2A+B=\begin{pmatrix}2 & 4 & 6\\ 4 & 2 & 8\\ 6 & 4 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & 3 & 4\\ 5 & 7 & 8\\ 1 & 2 & 4\end{pmatrix}=$

$$=\begin{pmatrix} 2+1 & 4+3 & 6+4 \\ 4+5 & 2+7 & 8+8 \\ 6+1 & 4+2 & 6+4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & 7 & 10 \\ 9 & 9 & 16 \\ 7 & 6 & 10 \end{pmatrix}.$$

Matritsani matritsaga ko'paytirish. $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalarning *ko'paytmasi*dan iborat bo'lgan $C=A\cdot B=(c_{ij})$ matritsaning elementlari quyidagi formula yordamida aniqlanadi:

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot b_{kj}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\ldots+a_{in}b_{nj} \quad (2)$$

(2) formuladan ko'rinib turibdiki, $A\cdot B$ ko'paytirish amali faqatgina A matritsaning *ustunlari soni* va B matritsaning *satrlari soni o'zaro teng* bo'lgandagina amalga oshiriladi.

Misol_3. $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ *matritsalarlarni ko'paytiring.*

Yechish: *Yuqoridagi ta'rifga ko'ra*

$$C=A\cdot B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23}+a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23}+a_{23}b_{33} \end{pmatrix}$$

A matritsaning o'lchami $(m\times n)$, B matritsaning o'lchamii $(n\times q)$ bo'lsa, C= $A\cdot B$ matritsaning o'lchami $(m\times q)$ bo'ladi.

Misol_4. *Matritsalar ustida ko'rsatilgan amallarni bajaring.*
Yechish:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1\cdot 0+0\cdot 1+(-1)\cdot(-2) & 1\cdot(-1)+0\cdot 0+(-1)\cdot 2 \\ 2\cdot 0+1\cdot 0+0\cdot(-2) & 2\cdot(-1)+1\cdot 0+0\cdot 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Transponirlangan matritsa va uning xossalari. Transponirlash amalini qo'llash deganda A matritsaning satr va ustun elementlarini almashtirib yozish tushuniladi. A matritsaning *transponirlangan matritsasini* A^T orqali belgilanadi.

Masalan,

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ bo'lsa, } A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1m} & a_{2m} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

bo'ladi.

Agar A matritsaing o'lchami $m\times n$ bo'lsa, u holda A^T matritsaing o'lchami $n\times m$ bo'ladi.

Matritsalarni transponirlash, qo'shish va ko'paytirish amallari quyidagi xossalarga ega:

1. $\left(A^T\right)^T = A$, $\quad (a\cdot A)^T = aA^T$,
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$, $\quad (A\cdot B)^T = B^T A^T$

tsa—satrlar va ustunlar shaklida joylashtirilgan sonlar jadvali bo'lib, amalda bunday jadvallar tez-tez uchrab turadi.

5.3.Matritsaning rangi va teskari matritsa tushunchalari.

Matritsaning *rangi* deb uning noldan farqli minorlarning eng yuqori tartibiga aytiladi. A matritsaning rangi $r(A)$ ko'rinishda belgilanadi.

Matritsa rangining xossalari:

a) agar matritsaning o'lchami $m\times n$ bo'lsa, u holda $A\le \min(m;n)$;

b) agar A matritsani barcha elementlari nolga teng bo'lsa, u holda $rang\ A = 0$;

c) agar A kvadrat matritsani $(n\times n)$ ning $rang\ A = n$ bo'lsa, u holda $|A|\ne 0$.

Elementlar almashtirishlar matritsaning rangini o'zgartirmaydi, ya`ni: *quyidagi amallar bajarilishi natijasida matritsaning rangi o'zgarmaydi:*

a) matritsaning noldan iborat qator (yoki ustun) larni tashlab yuborish;

b) istalgan satr (ustun) ning elementlarini noldan farqli har qanday songa ko'paytirish;

v) istalgan ikki satr (ikki ustun) ni o'zaro almashtirish;

c) bir satr (ustun) ning elementlarini istalgan noldan farqli ko'paytirib, boshqa satr (ustun) ning mos elementlariga ko'paytirish.

A matritsaning determinanti noldan farqli bo'lsa, A ***–xosmas matritsa*** deyiladi.

Aks holda, ya'ni determinanti nol bo'lsa, A ***–xos matritsa*** deyiladi.

A_{nxn} matritsaga ***qo'shma matritsa*** quyidagicha aniqlanadi:

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Bu yerda A_j lar berilgan A matritsa a_j elementlarining algebraik to'ldiruvchilari.

Agar quyidagi $A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=E$ tenglik o'rinli bo'lsa, A^{-1} orqali belgilangan matritsa berilgan ***A matritsaga teskari matritsa*** deyiladi.Xosmas A matritsaning tekari matritsasini aniqlash formulasi:

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

A kvadratik maxsusmas matritsaning teskari matritsasi A^{-1} uchun qo'yidagi formulani olamiz: $A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}$

Ohirgi formula A maxsusmas matritsaning teskarisini qurish klassik usul formulasi deyiladi. Umuman olganda, klassik usulda teskari matritsa qurish jarayoni qo'yidagi ketma-ket bajariladigan qadamlarni o'z ichiga oladi:

1. Berilgan A kvadrat matritsa determinanti kattaligi hisoblanadi. Agar $\det A \neq 0$ bo'lsa, keyingi qadamga o'tiladi. Agarda $\det A = 0$ bo'lsa, A matritsa maxsus va teskari matritsa mavjud emas;

2. $A = (a_{ik})$ matritsa elementlarining mos ad`yunktlari hisoblanadi va tartib saqlangan holda, matritsa elementlari mos ad`yunktlari matritsasi (A_{ik}) tuziladi;

3. (A_{ik}) matritsa transponirlanadi va A matritsa elementlari mos ad`yunktlari matritsasining transponirlangan matritsasi yoki shuning o'zi qo'shma $A\nu = (A_{ki})$ matritsasi tuziladi;

4. $A\nu = (A_{ik})$ matritsa har bir elementi detA ga bo'linadi va A-1 teskari matritsa quriladi.

Masalan. $A=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ maxsusmas matritsaning teskari matritsasini klassik usulda quring. Klassik usulda ikkinchi tartibli maxsusmas matritsa teskarisi $\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}$ formula asosida quriladi. Formulani qo‘llab $A^{-1}=\frac{1}{10}\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\ -0,1 & 0,3\end{pmatrix}$ natijani olamiz. Teskari matritsa to‘g‘ri qurilganini ta’rif asosida tekshirib ko‘ramiz: $AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\ -0,1 & 0,3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=E$ Demak, berilgan A matritsaning teskarisi $A^{-1}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,4\\ -0,1 & 0,3\end{pmatrix}$

$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn}\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsa

$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n}\\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

5.1-misol. $A=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ matritsaga teskari matritsani toping va natijani tekshiring.

Yechish. Berilgan matritsaning determinantini hisoblaymiz:

$$\det A=\begin{vmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{vmatrix}=6-4=2.$$

$\det A\neq 0$ va A matritsa uchun teskari matritsa mavjud.

Matritsa elementlarining algebraik to‘ldiruvchilarini topamiz:

$A_{11}=(-1)^{1+1}2=2, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}1=-1,$

$A_{21}=(-1)^{2+1}4=-4, \; A_{22}=(-1)^{2+2}3=3.$

A matritsaga biriktirilgan matritsani topamiz:

$$adjA=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21}\\ A_{12} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

Shunday qilib,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}2 & -4\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}.$$

Tekshirish:

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 4\\ 1 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -2\\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=I.$$

5.2-misol. $A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{pmatrix}$ *matritsaga teskari matritsani toping .*

Yechish. Bu matritsa uchun:

$$\det A=\begin{vmatrix}1 & -2 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 1\end{vmatrix}=0-4+2-0+4+1=3\neq 0.$$

Matritsa elementlarining algebraik to'ldiruvchilarini topamiz:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,\qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{31}=-\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & -1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=0,\qquad A_{22}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ -2 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=3,$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & 1\end{vmatrix}=2,\qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=3,\qquad A_{33}=\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=4.$$

A matritsaga biriktirilgan matritsani topamiz:

$$\mathrm{acj}A=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Demak,

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}\begin{pmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & 3 & 3\\ 2 & 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & 1 & \frac{2}{3}\\ 0 & 1 & 1\\ \frac{2}{3} & 1 & \frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savol topshiriqlar

1.Matritsa deb nimaga aytiladi?
2.Matritsaning qanday turlari mavjud?
3.Matritsalar yig'indisi deb nimaga aytiladi?
4.Matritsalar ko'paytmasi qanday xosil qilinadi?
5.Matritsani songa ko'paytmasi qanday aniqlanadi?
6.Berilgan A va B matritsalar uchun C matritsani toping.(Bu misollarda A^T belgilash A matritsaning transponirlangan matritsasini bildiradi.)

7. a) $A=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$ $C=2A+B$

b) $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $C=(3A)^T-B$

8. a) $A=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -4 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & -5 \end{pmatrix}$, $C=A+B^T$

b) $A=\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & 2 & -4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $C=2A+3B$

9. $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $C=A^T-B^T$

10. $A=\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -7 \end{pmatrix}$ va $C=\begin{pmatrix} -7 & -5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ bo'lsin. $C=A^{-1}$ ekanini ko'rsating.

11. $B=\begin{pmatrix} 4 & 0 & -5 \\ -18 & 1 & 24 \\ -3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsa $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -6 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ matritsaning teskari matritsasi bo'lishini ko'rsating.

12. A va B matritsalarni ko'paytmasini hisoblang.

1.a) $A_{3\times2}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -2 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$ $B_{2\times2}=\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$. в) $A=(1\ -1\ \ 2\ \ 3)$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \\ 5 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

2. a) $A=\begin{pmatrix}1&-1&1\\2&1&0\\5&7&1\\1&4&3\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}5&-1&2&1\\2&2&0&1\\1&-1&5&4\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}-2&3&0&1\\1&1&2&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\\-1&2\\1&3\end{pmatrix}$

3. a) $A=\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&0&1\\0&1&-1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1&1\\1&3\\1&2\end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\\0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}3&2&1\\5&1&1\end{pmatrix}$

4. a) $A=\begin{pmatrix}2&2&3\\1&-1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}$ va $B=\begin{pmatrix}2&1&-1\\5&2&4\\7&3&2\end{pmatrix}$ bo'lsa, A^{-1}, B^{-1} ni hisoblang.

b) $A=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ bo'lsin. $A^2=A^{-1}$ va $A^3=I$ bo'lishini ko'rsating.

5. $B=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}11&-3&5\\-17&21&-11\\-10&6&2\end{pmatrix}$ matritsa $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\4&2&1\\3&-1&5\end{pmatrix}$ matritsaning teskari matritsasi bo'lishini ko'rsating.

6-§. Determinantlar nazariyasi elementlari

Tayanch so'z va iboralar: *determinant, satr va ustun elementlar, bosh va yordamchi diagonal elementlar, determinantning qiymati, minor va algebraik to'ldiruvchi, determinantning o'lchovi, bir qator xossalari, hisoblash usullari.*

6.1 Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantning xossalari

Determinant tushunchasidan dastlab chiziqli tenglamalar sistemasini yechishda foydalanilgan bo'lib, keyinchalik determinantlar matematikaning bir qancha masalalarini yechishga, jumladan xos sonlarni topishga, differensial tenglamalarni yechishga, vektor hisobiga, keng tatbiq etildi [4].

---

[4] E.Kreyszig. Advancet engineering Matematics. Copyright. 2011, pp. 255-265

1. Ikkinchi va uchunchi tartibli determinantlar

Ikkinchi tartibli determinant

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad (1)$$

kabi belgilanadi va aniqlanadi.

$a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ sonlarga determinantning elementlari deyiladi. Bunda a_{11}, a_{12} 1-satr, a_{21}, a_{22} 2-satr, a_{11}, a_{21} 1-ustun va a_{12}, a_{22} 2-ustun elementlari hisoblanadi, ya'ni a_{ij} determinantning i-satr va j- ustunda joylashgan elementini ifodalaydi.

a_{11}, a_{22} elementlar joylashgan diagonalga determinantning bosh diagonali, a_{21}, a_{12} elementlar joylashgan diagonalga determinantning yordamchi diagonali deyiladi.

Shunday qilib, ikkinchi tartibli determinant bosh diagonal elementlari ko‘paytmasidan yordamchi diagonal elementlari ko‘paytmasini ayrilganiga teng:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Misol. Berilgan determinantlarni hisoblang.

1. $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3\cdot 5 - (-2)\cdot 4 = 15 + 8 = 23;$

2. $\begin{vmatrix} tg\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & ctg\alpha \end{vmatrix} = tg\alpha \cdot ctg\alpha - \sin\alpha\sin\alpha = 1 - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha.$

Matritsaning muhim tavsiflaridan biri determinant hisoblanadi. Determinant faqat kvadrat matritsalar uchun kiritiladi.

A kvadrat matrisaning determinanti $\det A$ bilan belgilanadi. Masalan, $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ matritsaning determinanti $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ kabi aniqlanadi. Bunda matritsani uning determinanti bilan adashtirmaslik kerak: mattitsa – bu sonlar massivi; determinant – bu bitta son.

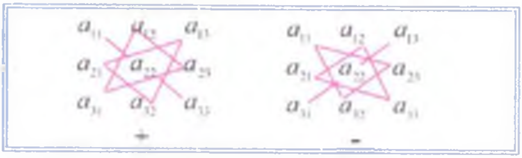
Uchinchi tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \qquad (2)$$

kabi belgilanadi va aniqlanadi. Uchinchi tartibli determinant uchun satr, ustun, bosh diagonal, yordamchi diagonal tushunchalari ikkinchi tartibli determinantdagi kabi kiritiladi. Uchinchi tartibli determinantlarni hisoblashda (2) tenglikning o'ng tomonidagi birhadlarni topishning yodda saqlash uchun oson bo'lgan qoidalaridan foydalaniladi.

«*Uchburchak qoidasi*» ushbu sxema bilan tasvirlanadi [5]:



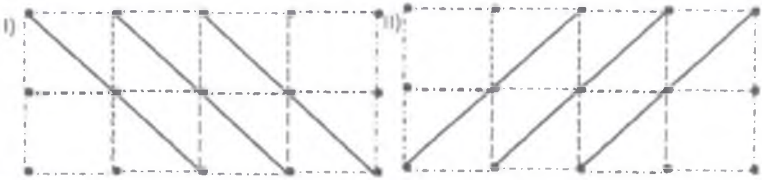
Bunda diagonallardagi yoki asoslari diagonallarga parallel bo'lgan uchburchaklar uchlaridagi elementlar uchta elementning ko'paytmasini hosil qiladi. Agar uchburchaklarning asoslari bosh diagonalga parallel bo'lsa, u holda elementlarning ko'paytmasi ishorasini saqlaydi. Agar uchburchaklarning asoslari yordamchi diagonalga parallel bo'lsa, u holda elementlarning ko'paytmasi teskari ishora bilan olinadi.

3-misol. $\begin{vmatrix} 2 & 6 & -2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot5\cdot1 + 1\cdot(-1)\cdot(-2) + 6\cdot4\cdot3 -$
$3\cdot5\cdot(-2) - (-1)\cdot4\cdot2 - 1\cdot6\cdot1 = 10 + 2 + 72 + 30 + 8 - 6 =$
$122 - 6 = 116.$

Sarrus usuli. Bu usulda determinantning o'ng tomoniga uning I va II ustunlari takroran yozilib, 3×5 tartibli matritsa hosil qilinadi. Bu matritsaning elementlari sxematik ko'rinishda nuqtalar singari ifodalanadi (3-chizma) va chiziqlar bilan tutashtirilgan elementlarning ko'paytmasi I holda o'z ishorasi bilan, II holda esa qarama-qarshi ishora bilan olinadi.3-chizma.

[5] Lay, David C. Linear algebra and is applications. Copyright. 2012, pp.162-169

III tartibli determinantni (3) chizma bilan hisoblashga misol



keltiramiz.

Misol. Qo'yidagi determinantni $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix}$ Sarrius usuli bilan hisoblang.6

Yechim. $\left|\begin{matrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{matrix}\right|\begin{matrix} 3 & 3 \\ 4 & 1 \\ 1 & -2 \end{matrix} = 3\cdot1\cdot(-2) + 3\cdot3\cdot1 +$

$+(-1)\cdot4\cdot(-2) - (-1)\cdot1\cdot1 - 3\cdot3\cdot(-2) - 3\cdot4\cdot(-2) = 51$

Javob. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 51$

6.2.Determinantlar bir qator xossalarga ega

1^0. Determinantning biron satri unga mos ustuni bilan almashtirilsa, uning qiymati o'zgarmaydi.

2^0. Determinantning ixtiyoriy ikkita satr (ustun) lari o'rni o'zaro almashtirilsa, uning qiymati qarama-qarshisiga o'zgaradi.

3^0. Agar determinantda ikkita satr (ustun) elementlari bir hil bo'lsa, u holda uning qiymati nolga teng bo'ladi.

4^0. Determinantda biror satr (ustun) elementlari umumiy k ko'paytuvchiga ega bo'lsa, uni determinant belgisi oldiga chiqarish mumkin.

5^0. Agar determinantda biror satr (ustun) nollardan iborat bo'lsa, uning qiymatinolga teng bo'ladi.

6^0. Agar determinantning ixtiyoriy ikkita satr (ustun) elementlari o'zaro proporsionalbo'lsa, uning qiymati nolga teng bo'ladi.

7^0. Agar determinantning biror satri (ustuni) ikkita qo'shiluvchi yig'indisidan iborat bo'lsa, u holda uni ikkita determinant yig'indisi sifatida yozish mumkin. Bunda birinchi determinantning satr (ustun)

[6] М.В.Воронов. Г.П.Мещерякова. Математика для студентов гуманитарных факультетов.2002.стр.116-121.

elementlari birinchi qo'shiluvchidan,ikkinchi determinantning satr(ustun) elementlari ikkinchi qo'shiluvchidan iborat bo'ladi.

8^0. Agar dioganal elementlaridan yuqorida yoki pastida yotgan elementlar nolga teng bo'lsa, u holda determinantning qiymati dioganal elementlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Bu xossalarning isboti juda ham sodda. Shuning uchun ularni isbotini talabalarga mustaqil ish sifatida qoldiramiz.

Ta'rif. Determinantning biror elementiga mos kelgan minori deb, shu element turgan satr va ustun elementlarini o'chirishdan qolgan elementlardan tuzilgan determinantga aytiladi.

Minor M_{ij} bilan belgilanadi $(i, j = 1,2, \dots, n)$.

Masalan,

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & 5 & -2 \end{vmatrix} \qquad (*)$$

determinantning ikkinchi satr elementlarining minorlarini yozamiz:

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}, \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix}.$$

Ta'rif. Ixtiyoriy n-tartibli determinanta_{ij} $(i, j = 1,2, \dots, n)$ elementining algebraik to'ldiruvchisi deb $(-1)^{i+j} M_{ij}$ kabi aniqlanadigan songa aytiladi.

Determinantning a_{ij} elementini algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} bilan belgilanadi.

Masalan, (*) determinant ikkinchi satr elementlarining algebraik to'ldiruvchilari quyidagicha bo'ladi:

$$A_{21} = -M_{21} = 23, \quad A_{22} = M_{22} = -16, \quad A_{23} = -M_{23} = 6$$

9^0. Determinantning ixtiyoriy bir i-satrida joylashgan a_{ij} $(i, j = 1,2, \dots, n)$ elementlarini ularning A_{ij} $(i, j = 1,2, \dots, n)$ algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmalarining yig'indisi shu determinantning qiymatiga teng bo'ladi.

Masalan, bu xossa III tartibli determinantning birinchi satri uchun quyidagicha bo'ladi.

$$|A| = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} \qquad (**)$$

Xuddi shunday tarzda determinantning ikkinchi va uchinchi satrlari uchun ham yuqoridagidek tenglikni yozish mumkin.

$$a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = |A|, \quad a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = |A| (***)$$

(*) va (***) tengliklar determinantning satrlar bo‘yicha yoyilmasi deyiladi.

Shunga o‘xshash ustunlar bo‘yicha yoyilmalar ham yozish mumkin.

4-misol. Quyidagi determinantni birinchi satr elementlari bo‘yicha yoyib hisoblang.

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix}$$

Yechish: Dastlab uchburchak qoidasi bilan hisoblaymiz:

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot 5 \cdot 2 + (-3) \cdot (-2) \cdot (-3) + 2 \cdot 2 \cdot 3 -$$

$$-3 \cdot 5 \cdot (-3) - (-2) \cdot 2 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 \cdot 2 =$$

$$40 - 18 + 12 + 45 + 16 + 12 = 107.$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & -3 \\ -3 & 5 & 2 \\ 3 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$$

$$= 4(10 + 4) - -2(-6 - 6) - 3(96 - 15)$$

$$= 56 + 24 + 27 = 107$$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Ikkinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
2. Uchinchi tartibli determinant deb nimaga aytiladi?
3. Uchinchi tartibli determinant qanday hisoblanadi?
4. Minor deb nimaga aytiladi?
5. Algebraik to‘ldiruvchi deb nimaga aytiladi?
6. Determinantlar qanday xossalarga ega?
7.Quyidagi ikkinchi tartibli aniqlovchilarni hisoblang:

1.a) $\begin{vmatrix} 0,(3) & -0,(42) \\ 99 & 3 \end{vmatrix}$ b). $\begin{vmatrix} \sqrt{2} & -3 \\ \frac{1}{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix}$ s) $\begin{vmatrix} \sqrt{a} & -1 \\ a & 1+\sqrt{2} \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

2. a) $\begin{vmatrix} \cos x & -\sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}$. b) $\begin{vmatrix} a^{\frac{3}{4}} & a^{\frac{1}{2}} \\ -a^{\frac{1}{2}} & a^{\frac{1}{4}} \end{vmatrix}$. s) $\begin{vmatrix} 2\sin^2\alpha & \cos^2\alpha \\ 2\sin^2\beta & \cos^2\beta \end{vmatrix}$. d) $\begin{vmatrix} \sqrt[4]{5} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt[4]{125} \end{vmatrix}$

8.Berilgan tenglamalarni yeching:

a). $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$. b) $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$. s) $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix}=0$. d) $\begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ 2 & 8-x \end{vmatrix}=0$

9. Berilgan tengsizliklarni yeching:

a) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2x-3 & -2 \end{vmatrix}<0$. b) $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4x \\ -5 & 3 \end{vmatrix}>0$. s) $\begin{vmatrix} x & 3x-4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}<0$. d) $\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix}<0$.

10. Quyidagi uchunchi tartibli aniqlovchilarni hisoblang

a) $\begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -3 & 1 & 5 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$ в) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 5 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ s) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 7 & 2 \\ 2 & 3 & -7 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 9 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

11.Berilgan tenglamalarni yeching:

1.a) $\begin{vmatrix} x^2-4 & -1 \\ x-2 & x+2 \end{vmatrix}=0$. **b)** $\begin{vmatrix} 4\sin x & 1 \\ 1 & \cos x \end{vmatrix}=0$ **s)** $\begin{vmatrix} 3-x & 2 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix}=0$ **d)** $\begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ 2 & 8-x \end{vmatrix}=0$

12. Berilgan tengsizliklarni yeching:

1.a) $\begin{vmatrix} x-1 & 3 \\ 2x-3 & -2 \end{vmatrix}<0$ **.b)** $\begin{vmatrix} 2x-3 & 4x \\ -5 & 3 \end{vmatrix}>0$**.s)** $\begin{vmatrix} x & 3x-4 \\ 6 & -2 \end{vmatrix}<0$**.d)** $\begin{vmatrix} 3-x & 4 \\ 2 & 4-x \end{vmatrix}<0$.

2. a) $\begin{vmatrix} x^2+7 & 2 \\ 3x & 1 \end{vmatrix}>-1$. **b)** $\begin{vmatrix} x^2+3 & x \\ 2 & 5 \end{vmatrix}>5$ **s)** $\begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ \sin x & \cos x \end{vmatrix}>0$**.d)** $\begin{vmatrix} x\cos x & x \\ -x & x \end{vmatrix}>0$

Chiziqli tenglamalar sistemasini yechish. Kramer va Gauss usullari

6.3. Kroneker – Kapelli teoremasini tenglamalar sistemasini yechishdagi ahamiyati

Bizga quyidagi n ta noma'lumlar m tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1)$$

a_{ij} lar noma'lumlarning oldidan koeffisientlar bo'lib, a_{ij} dagi birinchi indeks i tenglama nomerini, ikkinchi indeksi j da noma'lumg nomerni bildiradi, b_i lar esa ozod hadlar, x_j lar esa noma'lumlar ($i=1,...,m$; $j=1,...,n$)

1 – ta'rif. Agar (1) sistema yechimga ega bo'lsa, unga birgalikda bo'lgan sistema, agar yechimga ega bo'lmasa birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

2 – ta'rif. Agar birgalikda bo'lgan sistema yagona yechimga ega bo'lsa, uni aniq sistema deyiladi. Agar cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, uni aniqmas sistema deyiladi.Endi (1) sistemadagi noma'lumlarning koeffisientlaridan tuzilgan matrisa

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m} & a_{m2} & ... & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad (2)$$

tuzaylik. So'ngra A matrisaning ustunlariga ozod hadlardan iborat bo'lgan ustun qo'shgan holda quyidagi matrisani tuaylik.

$$A=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & b_2 \\ .... & .... & .... & .... & ... \\ a_{m1} & a_{m2} & ... & a_{mn} & b_m \end{array}\right) \qquad (3)$$

(3) kengaytirilgan matrisa deyiladi.

Endi qachon (1) sistema birgalikda bo'ladi degan savol tug'iladi.

Bu savolga quyidagi Kroneker – Kapelli teoremasi javob beradi.

Teorema. (1) Chiziqli tenglamalar sistemasi birgalikda bo'lishi uchun A va B matrisalarning ranglari teng, ya'ni $r(A)=r(B)$ bo'lishi zarur va kifoya.

Bu erda bo'lishi mumkin:

1) Agar $r(A)<r(B)$ bo'lsa sistema birgalikda bo'lmagan sistema bo'lib yechimi mavjud bo'lmaydi.

2) Agar $r(A)=r(B)=n$ bo'lsa sistema birgalikda bo'lib yagona yechimga ega bo'ladi.

3) Agar $r(A)=r(B)=r<n$ bo'lsa sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Boshqacha aytganda tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Endi quyidagi bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasini ko'raylik:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{cases} \qquad (4)$$

Agar (4) sistemaning $\Delta \neq 0$ bo'lsa bu sistema har vaqt birgalikda bo'lgan sistema bo'lib yagona $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, ... , x_n = 0$ yechimga ega bo'ladi. Agar $\Delta = 0$ bo'lsa (4) sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

Bu erda kengaytirilgan matrisa

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & .... & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & .... & a_{2n} & 0 \\ .... & .... & .... & .... & ... \\ a_{m} & a_{m2} & ... & a_{mn} & 0 \end{array} \right)$$

ko'rinishda bo'lib, A matrisadan faqat nollardan iborat bo'lgan bitta ustun bilan farq qilgani uchun, har vaqt

$r(A) = r(B) = n$ bo'ladi.

Bu esa (4) sistemaning yagona $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, ... , x_n = 0$ yechimlar mavjud ekanligini ko'rsatadi.

Teorema. (4) sistema faqat nolmas yechimlarga ega bo'lishi uchun A matrisaning rangi noma'lumlar soni n dan kichik bo'lishi zarur va kifoya.

$$r(A) < n.$$

Eslatma. Agar bir jinsli sistemada tenglamalar soni m **noma'lumlar soni** n **dan kichik bo'lsa, u holda** $r(A) \leq m < n$ **bo'lib sistema cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'ladi.**

6.4.Tenglamalar sistemasini yechishning [7]Kramer usuli

Faraz qilaylik, *I*-darajali, ikkita noma'lumli, ikkita algebraik tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\boxed{\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}} \qquad (1).$$

[7] Sh. R. Xurramov. Oliy matematika. Misol va masalalar, nazorat topshiriqlari. 1- qism. Toshkent, "Fan va texnologiya", 2015.27-30 betlar.

(1) sistemaning 1-tenglamasini a_{22} ga, 2-tenglamasini $-a_{12}$ ga ko'paytirib qo'shsak: $(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-b_2a_{12}$

$$\Rightarrow \quad X_1=\frac{b_1a_{22}-b_2a_{12}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad (2)$$

Agar (1) sistemaning 1-tenglamasi $-a_{21}$ ga, 2-tenglamasini a_{11} ga ko'pattirib qo'shsak

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})X_2=b_2a_{11}-b_1a_{21} \qquad X_2=\frac{b_2a_{11}-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}} \quad (3)$$

(2) va (3)larga e'tibor bersak 2-tartibli determinant ta'rifiga ko'ra

$$X_1=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{\Delta x}{\Delta}; \qquad X_2=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}}=\frac{\Delta y}{\Delta}; \quad (4)$$

ga ega bo'lamiz. (4) ga Kramer usuli deyiladi.

(1) sistema yagona yechimga ega bo'lishi uchun $\Delta\neq 0$ zarur va yetarli. (4) ga e'tibor bersak Δ berilgan (1) sistemadagi noma'lumlarning oldidagi koeffitsentidan tuzilgan 2-tartibli determinant, Δ_1, Δ_2 lar esa mos ravishda Δning birinchi va ikkinchi ustunlarini ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantlar.Agar uch noma'lumli 3ta algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{13}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{23}x_3+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$$ berilgan bo'lib $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}\neq 0$ bo'lsa

berilgan tenglamaning yechimlari:

$$X_1=\frac{\Delta x}{x}; \quad X_2=\frac{\Delta_{x2}}{x}; \quad X_3=\frac{\Delta_{x3}}{\Delta} \quad (5)$$

Kramer usulida aniqlanadi. Bu yerda ham $\Delta_{x1}, \Delta_{x2}, \Delta_{x3}$ lar Δning ustun elementlarini mos ravishda ozod elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan determinantlar.

Agar birinchi darajali n ta noma'lumli n ta algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_1=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2 \\ ------------- \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \qquad \Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ - & - & - & - \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{vmatrix}\neq 0$$

bo'lsa, berilgan sitemaning yechimini Kramer usuliga ko'ra quyidagicha aniqlash mumkin:

$$X_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad X_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ \dots, \ X_n = \frac{\Delta_n}{\Delta} \qquad (6)$$

Δ_1, Δ_2, ... , Δ_n lar Δ ning ustun elementlarini mos ravishda ketma-ket ozod hadlar bilan almashtirishdan hosil bo'ladi.

Misol. 1) $\begin{cases} 2x+5y=8 \\ 3x+y=-1 \end{cases}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 2-15=13; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 8+5=13; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -2-24=-26$$

$$X = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{13}{-13} = -1; \qquad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{-26}{-23} = 2. \quad Javob: (-1;2)$$

2) $\begin{cases} 5x-3y+2z=9 \\ 2x+2y-5z=3 \\ 2y-y-3z=7 \end{cases}$ $\quad \Delta = \begin{vmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -5 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -55. \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} 9 & -3 & 2 \\ 3 & 2 & -5 \\ 7 & -1 & -3 \end{vmatrix} = -55.$

J: (1; -2; -1).

Agar 3 noma'lumli bir jinsli 2ta tenglamalar sistemasi

$$\boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{cases} \quad (7)}$$

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ determinantlarning loaqal bittasi noldan farqli bo'lsa, u holda (7) sistemaning barcha yechimalri

$$\boxed{X = \Delta_1 t \ , \quad y = \Delta_2 t \ , \quad z = \Delta_3 t \qquad (8)}$$

formula bilan aniqlanadi. (t-ixtiyoriy son).

$$\boxed{\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{cases} \quad (9)}$$

(9) da $\Delta \neq 0$ bo'lsa, x=0, y=0, z=0 lar sistemaning yagona yechimi bo'ladi. Agar $\Delta = 0$ bo'lsa, (9)ning cheksiz ko'p yechimi bo'lib ular (7) kabi aniqlamadi.

1). $\begin{cases} 3x-5y+z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 3 \qquad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 4. \qquad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 11.$$

$x=3t$, $y=4t$, $z=11t$ J:(3t; 4t; 11t).

2). $\begin{cases} x-y-z=0 \\ x+4y+2z=0 \\ 3x+7y+3z=0 \end{cases}$ $\Delta=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 3 & 7 & 3 \end{vmatrix}=12-7-6+12-14+3=0$

$\Delta_1=\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}=2.$ $\Delta_2=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3$ $\Delta_3=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}=5.$ $(2t;-3t;5t)$.

Tenglamalar sistemasini yechishning [8]Gayss usuli.

Quyidagi n ta noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi berilgan bo'lsin:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_1=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n=b_2 \\ ------------- \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n=b_m \end{cases} \quad (2)$$

a_j $(i=\overline{1,m},\quad j=\overline{1,n})$ koeffitsentdagi birinchi indeks tenglama nomerini, ikkinchi indeks esa noma'lum nomerini bildiradi.

Ta'rif 1: Agar (1) sistema yechimga ega bo'lsa, unga birgalikda bo'lgan sitema, agar yechimga bo'lmasa birgalikda bo'lmagan sistema deyiladi.

Ta'rif 2: Agar birgalikda bo'lgan chiziqli tenglamalar sistemasi yasgona yechimga ega bo'lsa, uni aniq sistema deyiladi. Cheksiz ko'p yechimga ega bo'lsa, aniqmas sistema deyiladi.

Chiziqli tenglamalar sistemasida quyidagi elementlar alamashtirishlar bajarish mumkin :

1. Istalgan ikkita tenglamani o'rinlarini almashtirish.
2. Tenglamalarni ixtiyoriy bittasining tomonini noldan farqli ko'paytirish mumkin.
3. Ixtiyoriy bitta tenglamasining har ikkala tomonini biror haqiqiy songa ko'paytirib, boshqa biror tenglamaga qo'shishi mumkin.

Bu elementlar alamshtirishlarni bajarishdan hosil bo'lgan sistema berilgan sistemaga teng kuchli bo'ladi. Endi (1) sistemani Gayss usuli bilan yechamiz bu usulning mohiyati, noma'lumlarni ketma-ket yo'qotib, berilgan sistemaga teng kuchli bo'lgan uchburchak ko'rinishdagi sistemaga keltiriladi $a_{11}\neq0$ deb (1) ning birinchi tenglamasini a_{11} ga bo'lib, so'ngra uni $-a_{21}$ ga ko'paytirib, ikkinchi tenglamaga qo'shamiz. Keyin $-a_{31}$ ga ko'paytirib 3chi tenglamaga qo'shamiz va shu jarayonni davom ettirsak natijada shunday sistema hosil bo'ladiki, u sistemaning faqat birinchi tenglamasi x_1 qatnashib, qolganlarida qatnashmaydi.

[8] Erwin Kreyszig. Adanced Engineering Mathematics. 9E. p.287-290

Shu jarayonni (1) sistemaning qolgan tenglamariga ketma-ket tadbiq etish natijasida ikkita siste-maning bittasiga kelamiz

$$\begin{cases} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3...+c_{1n}x_1=d_1 \\ x_2+c_{23}x_3+...+c_{2n}x_n=d_2 \\ ---------------- \\ x_n=d_n \end{cases} \quad (2) \text{ yoki } \begin{cases} x_1+c_{12}x_2+c_{13}x_3+...+c_{1n}x_1=d_1 \\ x_2+c_{23}x_3+...+c_{2n}x_n=d_2 \\ - - - - - - - - \\ x_p+...c_{pn}x_n=d_p \end{cases}$$

(2) sistemaga uchburchak sitema, (3)ga esa pog`onali sistema deyiladi.

Agar (1) sistema (2) ko'rinishdagi sistemaga keltirilsa, u holda (1) sistema birgalikda bo'lgan sistema bo'lib, uning yechimi yagona bo'ladi. Agar (1) sistema (3) ko'rinishdagi sistemaga keltirilsa u holda (1) sistema birgalikda bo'lib, yechimi cheksiz ko'p bo'ladi.

1-misol.

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=-1 \\ 2x_1-3x_2+x_3=-7 \\ x_1-4x_2 \qquad =-5 \end{cases}$$

Yechish. Endi elementlari noma'lumlarning oldidagi koeffisientlardan ва ozod hadlardan tuzilgan kengaytirilgan matrisa tuzaylik:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 1 & -7 \\ 1 & -4 & 0 & -5 \end{array}\right)$$

Birinchi yo'l elementlarini -2 ga ko'paytirib, ikkinchi yo'l elementlariga, -1 ga ko'paytirib uchinchi yo'l elementlariga qo'shamiz:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & -11 & -3 & -5 \\ 0 & -8 & -2 & -4 \end{array}\right)$$

Ikkinchi yo'l elementlarini $-\frac{1}{11}$ ga, uchinchi yo'l elementlarini $-\frac{1}{8}$ ga ko'paytirsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

kelib chiqadi.Ikkinchi yo'l elementlarini -4 ga ko'paytirib, birinchi yo'l elementlariga, -1 ga ko'paytirib, uchinchi yo'l elementlariga qo'shsak:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & -\frac{31}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{44} & \frac{1}{22} \end{array}\right)$$

hosil bo'ladi.Uchinchi yo'l elementlarini -44 ga ko'paytirsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{10}{11} & -\frac{31}{11} \\ 0 & 1 & \frac{3}{11} & \frac{5}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

hosil bo'ladi.Uchinchi yo'l elementlarini $-\frac{3}{11}$ ga ko'paytirib, ikkinchi yo'l elementlariga, so'ngra, $-\frac{10}{11}$ ga ko'paytirib, birinchi yo'l elementlariga qo'shsak,

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

hosil bo'ladi. Bundan $x_1=-1$; $x_2=1$; $x_3=-2$ ekanligi kelib chiqadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usulining mohiyati nimadan iborat?
2. Tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usulining mohiyati nimadan iborat?
3. Chiziqli tenglamalar sistemasi deganda qanday sistemani tushunasiz?
4. Birgalikda bo‘lmagan sistema deyilganda qanday sistemani tushinasiz?
5. Qanaqa holatda tenglamalar sistemasi cheksiz ko‘p yechimga ega bo‘ladi?
6. Quyidagi 2 noma’lumli ikkita tenglamadan tashkil topgan sistemalarni Kramer va matrisalar usullarida yeching.

1.a) $\begin{cases} x+y=4 \\ x-y=2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x+5y=153 \\ x-2y=3 \end{cases}$ s) $\begin{cases} 3x+5y=21 \\ 2x-y=1 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 2x-3y=-1 \\ y=0{,}75x \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} \frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y=1 \\ 3x-5y=-3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \frac{1}{4}x-y=-5 \\ \frac{1}{2}x-\frac{1}{7}y=3 \end{cases}$ s) $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos 2\alpha \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} ax-by=a^2+b^2 \\ bx+ay=a^2+b^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x\cos\alpha-y\sin\alpha=\cos 2\alpha \\ x\sin\alpha+y\cos\alpha=\sin 2\alpha \end{cases}$ s) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2) \end{cases}$

4.a) $\begin{cases} (a+b)x-(a-b)y=4ab \\ (a-b)x+(a+b)y=2(a^2-b^2) \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3 \\ 2x_1-x_2+x_3=2 \\ -3x_1+2x_2+x_3=0 \end{cases}$ s) $\begin{cases} 3x_1+x_2+x_3-4=0 \\ x_1+2x_2-x_3-4=0 \\ 2x_1+x_2+2x_3-16=0 \end{cases}$

5. a) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-13=0 \\ 3x_1+2x_2+2x_3-16=0 \\ 4x_1-2x_2+5x_3-5=0 \end{cases}$. b) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3-2x_4=1 \\ -2x_1-3x_2+x_3+3x_4=3 \\ 5x_1+9x_2-10x_3-9x_4=0 \end{cases}$ s) $\begin{cases} x_1+2x_2 \quad =2 \\ 2x_1+x_2+3x_3=1 \\ 2x_1+7x_2-3x_3=31 \end{cases}$

6. Quyidagi uch noma’lumli uchta tenglamadan tashkil topgan sistemani Kramer, Gauss va matrisa usullarida yeching.

1. a). $\begin{cases} x+y-3z=-1 \\ 2x-y+z=2 \\ 3x+2y-4z=1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1+3x_2-4x_3=-1 \\ x_1-5x_2+x_3=7 \\ 2x_1+x_2-3x_3=3 \end{cases}$ s) $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+4x_3=1 \end{cases}$

2. a) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 = 20 \\ 5x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ -3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = -4 \end{cases}$ *в*) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 13 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 16 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 5 = 0 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 1 \\ -2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 3 \\ 5x_1 + 9x_2 - 10x_3 - 9x_4 = 0 \end{cases}$

3. a) $\begin{cases} -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ -5x_1 + 10x_2 - 7x_3 = 10 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 7 \\ -4x_1 + 2x_2 = -2 \\ 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -3 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 12x_4 = 10 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 4 \\ x_1 + 7x_2 + 9x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

4. a) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 31 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 = 3 \\ -3x_1 - 2x_2 + 12x_3 - 7x_4 = -5 \\ x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2 \end{cases}$

s) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$

7. Bir jinsli tenglamalar sistemasini yeching $(-\infty < t < \infty)$.

a) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 7x_3 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 + 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

s) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 2x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$

7-§. Vektorlar va ular ustida amallar

Tayanch so'z va iboralar: *vektorlar va ular ustida amallar, vektorlarning skalyar, vektor va aralash ko'paytmalari, tekislik va fazodagi dekart koordinatalar sistemasi, tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa, tatbiqlari.*

7.1. Vektorlar va uning elementlari

Tabiat va texnika hodisalarini o'rganinshda uchraydigan kattaliklar ikki turga bo'linadi. Faqat son qiymatlari bilan aniqlanadigan kattaliklarga *skalyar kattaliklar* deyiladi. Skalyar kattaliklarga hajm, massa, harorat misol bo'ladi. Shunday kattaliklar, masalan, kuch, tezlik, tezlanish mavjudki, ular son qiymatlari bilan birgalikda yo'nalishlari bilan ham aniqlanadi. Bunday kattaliklarga *vektor kattaliklar* deyiladi. Vektor kattaliklar geometrik jihatdan vektorlar bilan ifodalanadi.

Tayin uzunlikka va yo'nalishga ega bo'lgan kesma *vektor* deb ataladi.

Vektor $\overrightarrow{AB}$ yoki $\vec{a}$ bilan belgilanadi. Bunda A nuqtaga vektorning boshlang'ich yoki qo'yilish nuqtasi deyilsa, B nuqtaga uning oxirgi nuqtasi deyiladi.

$\overrightarrow{BA}$ vektor $\overrightarrow{AB}$ vektorga qarama-qarshi vektor hisoblanadi. $\vec{a}$ vektorga qarama-qarshi vektor $(-\vec{a})$ bilan belgulanadi.

Boshlang'ich va oxirgi nuqtalari orasidagi masofaga *vektorning uzunligi* yoki *moduli* deyiladi. Vektorning moduli $|\overrightarrow{AB}|$ yoki $|\vec{a}|$ ko'rinishda belgilanadi.

Boshlang'ich va oxirgi nuqtalari ustma-ust tushadigan vektor *nol vektor* deb ataladi va $\vec{0}$ bilan belgilanadi. Bunda $|\vec{0}|=0$ bo'ladi. Nol vektor yo'nalishga ega bo'lmaydi. Uzunligi birga teng vektorga *birlik vektor* deyiladi va $\vec{e}$ orqali belgilanadi. $\vec{a}$ vektor bilan bir xil yo'nalgan birlik vektorga *$\vec{a}$ vektorning orti* deyiladi va $\vec{a}^{\circ}$ bilan belgilanadi.

1-ta'rif. Bir to'g'ri chiziqda yoki parallel to'g'ri chiziqlarda yotuvchi vektorlar *kollinear vektorlar* deb ataladi.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning kollinearligi $\vec{a}\|\vec{b}$ deb yoziladi. Kollinear vektorlar bir tomonga yo'nalgan (ular $\uparrow\uparrow$ kabi belgilanadi) yoki qarama-qarshi tomonlarga yo'nalgan (ular ↑↓ kabi belgilanadi) bo'lishi mumkin. Hol vektor har qanday vektorga kollinear hisoblanadi.

2-ta'rif. Bir tekislikda yoki parallel teksliklarda yotuvchi vektorlar *komplanar vektorlar* deb ataladi.

3-ta'rif. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear, bir tomonga yo'nalgan va uzunliklari teng bo'lsa, ularga *teng vektorlar* deyiladi va $\vec{a}=\vec{b}$ kabi yoziladi.

Vektorlar tengligining bu ta'rifi *erkin vektorlar* deb ataluvchi vektorlarni xarakterlaydi. Bu ta'rifga asosan erkin vektorni fazoning ixtiyoriy nuqtasiga o'z-o'ziga parallel ko'chirish mumkin bo'ladi. Erkin vektorlar tushunchasidan foydalanib, vektorlarning kollinearligi va komplanarligi uchun boshqa ekvivalent ta'riflarni berish mumkin: agar ikkita nol bo'lmagan vektorlar bir nuqtaga ko'chirilganida bir to'g'ri chiziqda yotsa, bu vektorlarga kollinear vektorlar deyiladi; agar uchta nol bo'lmagan vektorlar bir nuqtaga ko'chirilganida bir tekislikda yotsa, bu vektorlarga komplanar vektorlar deyiladi.

Ayrim hollarda vektorning erkin ko'chirilishi chegaralanishi mumkin. Agar vektorning qo'yilish nuqtasi qat'iy fiksirlangan bo'lsa, bu vektorga *bog'langan vektor* deyiladi. Agar vektor joylashishi mumkin bo'lgan to'g'ri chiziq berilgan bo'lsa, bu vektorga *sirpanuvchi vektor* deyiladi.

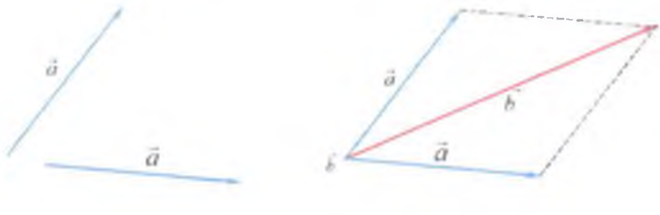
Bog'langan va sirpanuvchi vektorlar nazariy mexanikada keng qo'llaniladi. Masalan, M nuqtaning radius vektori bog'langan vektor bo'ladi; aylanma harakatda aylanish o'qida joylashgan burchak tezlik vektori sirpanuvchi vektor bo'ladi.

Vektorlar ustida chiziqli amallar

Vektorlarni qo'shish, ayirish va vektorni songa ko'paytirish amallari *vektorlar ustida chiziqli amallar* hisoblanadi. Ikkita $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektor berilgan bo'lsin. Istalgan O nuqta olib, bu nuqtaga $\overline{OA}=\vec{a}$

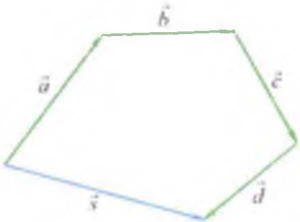
1-shakl

vektorni parallel ko'chiramiz. A nuqtaga $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$ vektorni qo'yamiz. Bunda birinchi vektorning boshlang'ich nuqtasini ikkinchi vektorning oxirgi nuqtasi bilan tutashtiruvchi $\overrightarrow{OB}$ vektorga *$\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning yig'indisi* deyiladi, ya'ni $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}$ 1-shakl. Vektorlarni qo'shishning bu usuli *uchburchak qoidasi* deb ataladi. Ikkita vektorni *parallelogramm qoidasi* bilan ham qo'shish mumkin. Buning uchun O nuqtaga $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ va $\overrightarrow{OC}=\vec{b}$ vektorlarni qo'yamiz va ulardan parallelogramm yasaymiz. Bunda parallelogrammning O uchidan o'tkazilgan $\overrightarrow{OB}$ diagonal $\vec{a}+\vec{b}$ vektorni beradi 2-shakl.

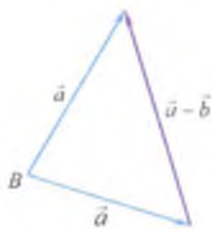


2-shakl

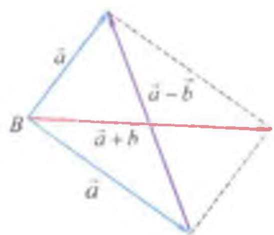
Bir nechta vektornining yig'indisini topish uchun bu vektorlrga teng vektorlardan ko'pburchak (siniq chiziq) hosil qilinadi. Bunda ko'pburchak birinchi vektorining boshlang'ich nuqtasi bilan oxirgi vektorining oxirgi nuqtasini tutashtiruvchi vektor ko'pburchak barcha vektorlarining yig'inndisiga teng bo'ladi. Bir necha vektorni bunday qo'shish usuliga *ko'pburchak qoidasi* (yoki *siniq chiziqlar qoidasi*) deyiladi. 3-shaklda to'rta $\vec{a},\vec{b},\vec{c},\vec{d}$ vektorlarning yig'indisi $\vec{s}$ tasvirlangan.



3-shakl



4-shakl



5-shakl

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ *vektorlarning ayirmasi* deb, $\vec{a}$ vektor bilan $\vec{b}$ vektorga qarama-qarshi bo'lgan $(-\vec{b})$vektor yig'indisiga aytiladi, ya'ni

$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$. $\vec{a}-\vec{b}$ ayirmani topish uchun $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorni umumiy O nuqtaga qo'yamiz. Bunda $\vec{b}$ vektor oxiridan $\vec{a}$ vektor oxiriga yo'nalgan vektor $\vec{a}-\vec{b}$ vektorni beradi (4-shakl).

$\overline{OA}=\vec{a}$ va $\overline{OB}=\vec{b}$ vektorlarga qurilgan $OABC$ parallelogrammning diagonal vektorlari mos ravishda bu vektorlarning yig'indisinidan va ayirmasidan iborat bo'ladi (4-shakl).

$\vec{a}$ *vektorning* $\lambda \neq 0$ *songa ko'paytmasi* deb, $\vec{a}$ vektorga kollinear, uzunligi $|\lambda|\cdot|\vec{a}|$ ga teng va yo'nalishi $\lambda>0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bilan bir xil, $\lambda<0$ bo'lganda $\vec{a}$ vektor yo'nalishiga qarama-qarshi bo'lgan $\lambda\vec{a}$ vektorga aytiladi.

Vektorni songa kopaytirishning bu ta'rifidan quyidagi xossalar kelib chiqadi:

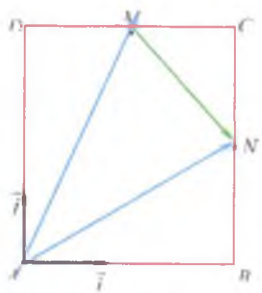
1- xossa. $\vec{a}$ $(\vec{a}\neq 0)$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lishi uchun $\vec{b}=\lambda\vec{a}$ bo'lishi zarur va etarli, bu yerda λ - birorta son;

2- xossa. $\vec{a}=|\vec{a}|\cdot\vec{a}^{\circ}$ $(\vec{a}\neq 0)$, ya'ni har bir nol bo'lmagan vektor uzunligi bilan ortining ko'paytmasiga teng bo'ladi.

Vektorlar ustida chiziqli amallar ushbu xossalarga ega:

1°. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$;	2°. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$;
3°. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$;	4°. $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$;
5°. $\lambda(\mu\vec{a})=(\lambda\cdot\mu)\vec{a}$;	6°. $(\lambda+\mu)\vec{a}=\lambda\vec{a}+\mu\vec{a}$;
7°. $\lambda(\vec{a}+\vec{b})=\lambda\vec{a}+\lambda\vec{b}$;	8°. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$.

Masala. $ABCD$ to'g'ri to'rtburchakning tomonlari $AB=3$, $AD=4$. $M-DC$ tomonning o'rtasi, $N-CB$ tomonning o'rtasi (6-shakl).



6-shakl

$\overline{AM}, \overline{AN}, \overline{MN}$ vektorlarni mos ravishda $\overline{AB}$ va $\overline{AD}$ tomonlar bo‘ylab yo‘nalgan $\vec{i}$ va $\vec{j}$ birlik vektorlar orqali ifodalaymiz. Buning uchun $\vec{a} = |\vec{a}| \cdot \vec{a}^{\circ}$ bo‘lishini hisobga olib, topamiz:

$$\overline{AB} = |\overline{AB}| \cdot \vec{i} = 3\vec{i}, \quad \overline{AD} = |\overline{AD}| \cdot \vec{j} = 4\vec{j}.$$

1-shaklga ko‘ra $\overline{DM} = \overline{MC} = \frac{1}{2}\overline{DC} = \frac{1}{2}\overline{AB} = \frac{3}{2}\vec{i}$,

$$\overline{BN} = \overline{NC} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\overline{AD} = 2\vec{j}.$$

Vektorlarni qo‘shish qoidasi bilan topamiz:

$$\overline{AM} = \overline{AD} + \overline{DM} = 4\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{i}; \qquad \overline{AN} = \overline{AB} + \overline{BN} = 3\vec{i} + 2\vec{j};$$

$$\overline{MN} = \overline{MC} + \overline{CN} = \overline{MC} - \overline{NC} = \frac{3}{2}\vec{i} - 2\vec{j}.$$

7.2. Ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi.

1-ta’rif. *Ikki* $\vec{a}$ *va* $\vec{b}$ *vektorning skalyar ko‘paytmasi* deb bu vektorlar uzunliklari bilan ular orasidagi burchak kosinusi ko‘paytmasiga teng songa aytiladi va $\vec{a}\vec{b}$ (yoki $\vec{a} \cdot \vec{b}$ yoki $(\vec{a}, \vec{b})$) kabi belgilanadi. Demak, ta’rifga ko‘ra

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi,} \tag{1}$$

bu yerda $\varphi - \vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi burchak.

(1) formulani boshqa ko‘rinishda yozish mumkin. Ma’lumki $\Pi p_{\vec{b}}\vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi$ va $\Pi p_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cos\varphi$.

Bundan

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}| \cdot \Pi p_{\vec{a}}\vec{b}} \tag{2}$$

yoki

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot \Pi p_{\vec{b}}\vec{a}}, \tag{3}$$

ya’ni ikki vektorning skalyar ko‘paytmasi ulardan birining moduli bilan ikkinchisining birinchi vektor yo‘nalishidagi o‘qqa proeksiyasining ko‘paytmasiga teng.

Skalyar ko'paytmaning xossalari

***1-xossa**. Ko'paytuvchilarning o'rin almashtirish* xossasi:

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}.}$$

Isboti. Ta'rifga ko'ra $\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b})$ va shu kabi $\vec{b}\vec{a} = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|\cos(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a})$. Sonlar ko'paytmasi bo'lgani sababli $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = |\vec{b}|\cdot|\vec{a}|$, shu bilan birga $\cos(\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \cos(\vec{b}\,\hat{,}\,\vec{a})$. Bundan $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$.

***2-xossa**. Skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash* xossasi:

$$\boxed{(\lambda\vec{a})\vec{b} = \lambda(\vec{a}\vec{b}).}$$

Isboti. (1.5.2) formulaga ko'ra $(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\vec{b}|\cdot \Pi p_{\vec{b}}(\lambda\vec{a})$. Vektorning o'qdagi proeksiyasining 3-xossasiga asosan $\Pi p_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\cdot \Pi p_{\vec{b}}|\vec{a}|$. Bundan

$$(\lambda\vec{a})\vec{b} = |\vec{b}|\cdot \Pi p_{\vec{b}}(\lambda\vec{a}) = \lambda\cdot|\vec{b}|\cdot \Pi p_{\vec{b}}|\vec{a}| = \lambda\cdot(|\vec{b}|\,\Pi p_{\vec{b}}|\vec{a}|) = \lambda(\vec{a}\vec{b}).$$

***3-xossa**. Qo'shishga nisbatan taqsimot* xossasi:

$$\boxed{\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}}.$$

Isboti. Vektorning o'qdagi proeksiyasining 2-xossasiga ko'ra

$$\Pi p_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = \Pi p_{\vec{a}}\vec{b} + \Pi p_{\vec{a}}\vec{c}.$$

Demak,

$$\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot \Pi p_{\vec{a}}(\vec{b}+\vec{c}) = |\vec{a}|\cdot(\Pi p_{\vec{a}}\vec{b} + \Pi p_{\vec{a}}\vec{c}) =$$
$$= |\vec{a}|\cdot \Pi p_{\vec{a}}\vec{b} + |\vec{a}|\cdot \Pi p_{\vec{a}}\vec{c} = \vec{a}\vec{b} + \vec{a}\vec{c}.$$

***4-xossa**.* Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar perpendikular bo'lsa, u holda ularning skalyar ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\vec{b} = 0$ $(|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0)$ bo'lsa, u holda $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'ladi.

Xususan: $\vec{i}\cdot\vec{j} = \vec{j}\cdot\vec{k} = \vec{k}\cdot\vec{i} = \vec{j}\cdot\vec{i} = \vec{k}\cdot\vec{j} = \vec{i}\cdot\vec{k} = 0.$

Isboti. $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsa $\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \frac{\pi}{2}$ yoki $\cos\varphi = 0$ bo'ladi. Bundan $\vec{a}\vec{b} = 0$. $\vec{a}\vec{b} = 0$ $(|\vec{a}| \neq 0, |\vec{b}| \neq 0)$ bo'lsa, $\cos\varphi = 0$ bo'ladi. Bundan $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ya'ni $\vec{a} \perp \vec{b}$.

***5-xossa**.* Vektorning skalyar kvadrati uning uzunligi kvadratiga teng, ya'ni $\boxed{\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2}$.

Xususan: $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1$.

Isboti. $\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cos 0^\circ = |\vec{a}|\cdot|\vec{a}| = |\vec{a}|^2$.

Izoh. Agar $\vec{a}$ vektorni skalyar kvadratga ko‘tarib, keyin kvadrat ildiz chiqarilsa $\vec{a}$ vektorning o‘zi emas, balki uning moduli kelib chiqadi, ya’ni

$$\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}| \quad (\sqrt{\vec{a}^2} \neq \vec{a}).$$

Misollar. 1. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{\pi}{3}$ bo‘lsin. $(3\vec{a} - \vec{b})\cdot(2\vec{a} + 4\vec{b})$ ko‘paytmani hisoblaymiz. Buning uchun skalyar ko‘paytmaning ta’rifi va xossalaridan foydalanamiz:

$$(3\vec{a} - \vec{b})\cdot(2\vec{a} + 4\vec{b}) = 3\vec{a}\cdot 2\vec{a} - \vec{b}\cdot 2\vec{a} + 3\vec{a}\cdot 4\vec{b} - \vec{b}\cdot 4\vec{b} = 6\vec{a}^2 + 10\vec{a}\vec{b} - 4\vec{b}^2 =$$

$$= 6|\vec{a}|^2 + 10|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{3} - 4|\vec{b}|^2 =$$

$$= 6\cdot 4^2 + 10\cdot 4\cdot 6\cdot\frac{1}{2} - 4\cdot 6^2 = 96 + 120 - 144 = 72.$$

2. $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, $\varphi = (\vec{a}\,\hat{,}\,\vec{b}) = \dfrac{2\pi}{3}$ bo‘lsin. Bu vektorlarga qurilgan parallelogramm diagonallarining uzunliklarini topamiz. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga qurilgan parallelogram diagonallari $\vec{a} + \vec{b}$ va $\vec{a} - \vec{b}$ vektorlardan iborat bo‘ladi. Skalyar ko‘paytmaning xossalaridan foydalanib, topamiz:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} + \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 2\cdot 4\cdot 3\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + 9} = \sqrt{13},$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(\vec{a} - \vec{b})^2} = \sqrt{\vec{a}^2 - 2\vec{a}\vec{b} + \vec{b}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi + |\vec{b}|^2} =$$

$$= \sqrt{16 + 2\cdot 4\cdot 3\cdot\frac{1}{2} + 9} = \sqrt{37}.$$

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning skalyar ko‘paytmasi

Ikkita $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ va $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ vektor berilgan bo‘lsin. U holda skalyar ko‘paytmaning xossalarini va $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ birlik vektorlarning skalyar ko‘paytmalarini hisobga olib topamiz:

$$\vec{a}\vec{b} = (a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}) = a_xb_x\vec{i}\vec{i} + a_xb_y\vec{i}\vec{j} + a_xb_z\vec{i}\vec{k} +$$

$$+ a_yb_x\vec{j}\vec{i} + a_yb_y\vec{j}\vec{j} + a_yb_z\vec{j}\vec{k} + a_zb_x\vec{k}\vec{i} + a_zb_y\vec{k}\vec{j} + a_zb_z\vec{k}\vec{k} =$$

$$= a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Demak,

$$\boxed{\vec{a}\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z,} \qquad (4)$$

ya'ni koordinatalari bilan berilgan ikki vektorning skalyar ko'paytmasi ularning mos koordinatalari ko'paytmalarining yig'indisiga teng.

Misol

$\vec{a} = \{4;-2;3\}, \vec{b} = \{1;-2;0\}, \vec{c} = \{2;1;-3\}$ bo'lsin. $(\vec{a} + 3\vec{b}) \cdot (\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$ ko'paytmani hisoblaymi. Buning uchun $\vec{m} = \vec{a} + 3\vec{b}$ va $\vec{n} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ vektorlarning koordinatalarini topamiz:

$$\vec{m} = \{4 + 3 \cdot 1; -2 + 3 \cdot (-2); 3 + 3 \cdot 0\} = \{7;-8;3\},$$

$$\vec{n} = \{4 - 1 + 2; -2 + 2 + 1; 3 - 0 - 3\} = \{5;1;0\}.$$

Bundan (4) formulaga ko'ra $\vec{m} \cdot \vec{n} = 7 \cdot 5 + (-8) \cdot 1 + 3 \cdot 0 = 27$.

Skalyar ko'paytmaning ayrim tatbiqlari

1. Ikki vektor orasidagi burchak. $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ va $\vec{b} = b_x\vec{i} + b_y\vec{j} + b_z\vec{k}$ vektorlar orasidagi burchak $\varphi = (\vec{a} \hat{,} \vec{b})$ bo'lsin.

U holda (1.5.1) va (1.5.4) tengliklardan topamiz:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}} \qquad (5)$$

yoki

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.} \qquad (6)$$

Shu kabi $l_1(\alpha_1;\beta_1;\gamma_1)$ va $l_2(\alpha_2;\beta_2;\gamma_2)$ yo'nalishlar orasidagi burchak uchun

$$\cos\varphi = \cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2. \qquad (7)$$

2. Ikki vektorning perpendikulyarlik sharti. $\vec{a} \perp \vec{b}$ bo'lsin.

U holda (6) tenglikdan

$$\boxed{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0} \qquad (8)$$

kelib chiqadi. l_1 *va* l_2 *yo'nalishlarning perpendikularlik shartini* (5) tenglikdan topamiz:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \cos\beta_1 \cos\beta_2 + \cos\gamma_1 \cos\gamma_2 = 0. \qquad (9)$$

3. Vektorning berilgan yo'nalishdagi proeksiyasi. (1.5.3) tenglikdan topamiz:

$$\boxed{\Pi p_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{b}|}}\ \boxed{\left(\Pi p_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|}\right)} \tag{10}$$

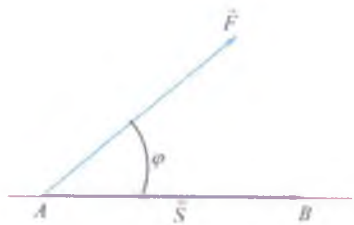
yoki

$$\boxed{\Pi p_{\vec{b}}\vec{a}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}}\ \boxed{\left(\Pi p_{\vec{a}}\vec{b}=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}}\right)}. \tag{11}$$

Shu kabi $\vec{a}(x;y;z)$ *vektorning* $l(\alpha;\beta;\gamma)$ *yo'nalishdagi (o'qdagi) proeksiyasi:*

$$\boxed{\Pi p_l\vec{a}=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma}. \tag{12}$$

4. Kuchning bajargan ishi. Moddiy nuqta A nuqtadan B nuqtaga $\overrightarrow{AB}=\vec{S}$ ko'chish yo'nalishi bilan φ burchak tashkil etuvchi $\vec{F}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab harakatlanayotgan bo'lsin 7-shakl.



7-shakl

Fizika kursidan ma'lumki $\vec{F}$ kuchning $\vec{S}$ ko'chishdagi bajargan ishi $A=F\cdot S\cdot\cos\varphi$ yoki $A=\vec{F}\vec{S}$ (13) formula bilan aniqlanadi.

Demak, moddiy nuqtaning to'g'ri chiziqli harakatida o'zgarmas kuchning bajargan ishi kuch vektori va ko'chish vektorining skalyar ko'paytmasiga teng. Bu jumla *skalyar ko'paytmaning mexanik ma'nosini* anglatadi.

Misollar. 1. Moddiy nuqta $A(1;-2;2)$ nuqtadan $B(5;-5;-3)$ nuqtaga $\vec{F}=\{2;-1;-3\}$ kuch ta'sirida to'g'ri chiziq bo'ylab ko'chgan. Quyidagilarni topamiz: 1) $\vec{F}$ kuchning bajargan ishini; 2) $\vec{F}$ kuchning ko'chish yo'nalishidagi proyeksiyasini; 3) $\vec{F}$ kuchning ko'chish yo'nalishi bilan tashkil qilgan burchagini. Bunda avval moddiy nuqta ko'chish vektorini, uning va $\vec{F}$ kuchning uzunligini topamiz:

$$\vec{S}=\overrightarrow{AB}=\{4;-3;-5\},\quad |\vec{S}|=\sqrt{16+9+25}=5\sqrt{2},\quad |\vec{F}|=\sqrt{4+1+9}=\sqrt{14}.$$

U holda:

1) $A = \vec{F}\vec{S} = 2\cdot 4 + (-1)\cdot(-3) + (-3)\cdot(-5) = 26$ $(ish\ b.)$;

2) $\Pi p_{\vec{S}}\vec{F} = \dfrac{\vec{F}\vec{S}}{|\vec{S}|} = \dfrac{26}{5\sqrt{2}} = \dfrac{13\sqrt{2}}{5}$;

3) $\cos\varphi = \dfrac{\vec{F}\vec{S}}{|\vec{F}|\cdot|\vec{S}|} = \dfrac{26}{5\sqrt{2}\cdot\sqrt{14}} = \dfrac{13\sqrt{7}}{35}$, $\quad \varphi = \arccos\dfrac{13\sqrt{7}}{35}$.

2. $\vec{m} = \vec{a} + 2\vec{b}$ va $\vec{n} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ o‘zaro perpendikular vektorlar bo‘lsin. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ birlik vektorlar orasidagi burchakni topami.

$\vec{m} \perp \vec{n}$ bo‘lgani uchun $(\vec{a} + 2\vec{b})\cdot(5\vec{a} - 4\vec{b}) = 0$ bo‘ladi.

Bundan $5\vec{a}^2 + 6\vec{a}\vec{b} - 8\vec{b}^2 = 0$ yoki $5|\vec{a}|^2 + 6|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi - 8|\vec{b}|^2 = 0$.

$\vec{a}$ va $\vec{b}$ birlik vektorlar bo‘lgani sababli: $5 + 6\cos\varphi - 8 = 0$.

Bundan $\cos\varphi = \dfrac{1}{2}$ yoki $\varphi = \dfrac{\pi}{3}$.

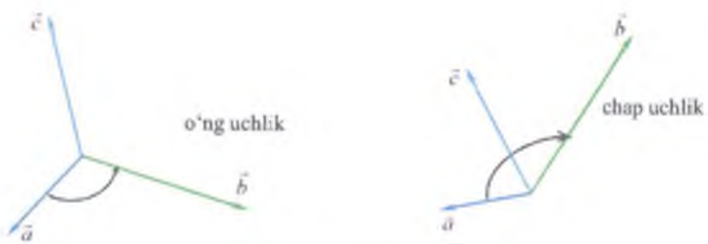
7.3.Ikki vektorning vektor ko‘paytmasi

Agar uchta vektordan qaysi biri birinchi, qaysi biri ikkinchi va qaysi biri uchinchi ekani ko‘rsatilgan bo‘lsa, bu vektorlarga tartiblangan uchlik deyiladi. Tartiblangan uchlikda vektorlar joylashish tartibida yoziladi.

Agar komplanar bo‘lmagan vektorlar tartiblangan uchligining uchinchi

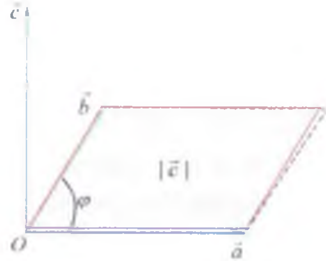
vektori uchidan qaralganda birinchi vektordan ikkinchi vektorga qisqa burilish soat

strelkasi yo‘nalishiga teskari bo‘lsa, bunday uchlikka *o‘ng uchlik*, agar soat strelkasi yo‘nalishida bo‘lsa chap uchlik deyiladi (8-shakl).



8-shakl

ta'rif. $\vec{a}$ *vektorning* $\vec{b}$ *vektorga vektor ko'paytmasi deb* quyidagi shartlar bilan aniqlanadigan $\vec{c}$ vektorga aytiladi (9-shakl):



9-shakl

1) $\vec{c}$ vektor $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar, ya'ni $\vec{c}\perp\vec{a}$ va $\vec{c}\perp\vec{b}$;

2) $\vec{c}$ vektorning uzunligi son jihatidan tomonlari $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlardan iborat bo'lgan parallelogrammning yuziga teng, ya'ni $|\vec{c}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, bu yerda $\varphi=(\widehat{\vec{a},\vec{b}})$;

3) $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning vektor ko'paytmasi $\vec{a}\times\vec{b}$ yoki $[\vec{a},\vec{b}]$ kabi belgilanadi.

1-xossa. Ko'paytuvchilarning o'rinlari almashtirilsa vektor ko'paytma ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartiradi, ya'ni

$$\boxed{\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.}$$

Isboti. Vektor ko'paytmaning ta'rifiga ko'ra $\vec{a}\times\vec{b}$ va $\vec{b}\times\vec{a}$ vektorlar bir xil uzunlikka ega (parallelogrammning yuzi o'zgarmaydi), kollinear, ammo qarama-qarshi yo'nalgan, chunki $\vec{a},\vec{b},\vec{a}\times\vec{b}$ vektorlar o'ng uchlik, $\vec{b},\vec{a},\vec{b}\times\vec{a}$ vektorlar chap uchlik tashkil qiladi.

Demak,

$$\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}.$$

2-xossa. *Skalyar ko'paytuvchiga nisbatan guruhlash* xossasi:

$$\boxed{(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})}$$

Isboti. $\lambda>0$ bo'lsin. U holda $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ va $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ vektorlar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarga perpendikulyar bo'ladi, chunki $\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir tekislikda yotadi. Shu sababli $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}$ va $\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$ vektorlar kollinear. Shuningdek, bu vektorlar bir tomohga yo'nalgan ($\lambda\vec{a}$ va $\vec{a}$ vektorlar bir tomonga yo'nalgan) hamda ular bir xil uzunlikka ega:

$$|(\lambda\vec{a})\times\vec{b}|=|\lambda\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin((\lambda\vec{a}),\vec{b}))=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}),$$

$$|\lambda(\vec{a}\times\vec{b})|=\lambda|\vec{a}\times\vec{b}|=\lambda|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin(\vec{a},\vec{b}).$$

Demak,

$$(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b}).$$

Xossa $\lambda<0$ da shu kabi isbotlanadi.

3-xossa. *Qo'shishga nisbatan taqsimot* xossasi:

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}}.$$

Isboti. Bu xossaning isbotini keltirmaymiz.

4-xossa. Agar $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa, u holda ularning vektor ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\times\vec{b}=0$ $(|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0)$ bo'lsa, u holda $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'ladi.

Isboti. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo'lsa ular orasidagi burchak $\varphi=0^{\circ}$ yoki $\varphi=180^{\circ}$ ga teng va bunda $\sin\varphi=0$ bo'ladi. U holda $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi=0$. Bundan $\vec{a}\times\vec{b}=0$.

$\vec{a}\times\vec{b}=0$ bo'lsa $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi=0$ bo'ladi. U holda $\sin\varphi=0$. Bundan $\varphi=0^{\circ}$ yoki $\varphi=180^{\circ}$, ya'ni $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear.

Misollar

1. $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlarning vektor ko'paytmalarini topamiz. Bunda vektor ko'paytmaning ta'rifigadan quyidagi tengliklar bevosita kelib chiqadi:

$$\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k},\ \ \vec{j}\times\vec{k}=\vec{i},\ \ \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}.$$

Haqiqatan ham masalan, $\vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}$ uchun:

1) $\vec{k}\perp\vec{i},\ \vec{k}\perp\vec{j}$;

2) $|\vec{k}|=|\vec{i}||\vec{j}|\sin 90^{\circ}=1$;

3) $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

Shu kabi $\vec{j}\times\vec{k}=\vec{i}, \vec{k}\times\vec{i}=\vec{j}$. U holda 1- xossaga ko'ra

$$\vec{j}\times\vec{i}=-\vec{k},\ \ \vec{k}\times\vec{j}=-\vec{i},\ \ \vec{i}\times\vec{k}=-\vec{j}.$$

Vektor ko'paytmaning 4- xossasidan topamiz:

$$\vec{i}\times\vec{i}=\vec{j}\times\vec{j}=\vec{k}\times\vec{k}=0.$$

2. $|\vec a|=3$, $|\vec b|=2$, $\varphi=(\vec a,\vec b)=\dfrac{\pi}{6}$ bo'lsin. $|(\vec a+2\vec b)\times(\vec a-3\vec b)|$ni hisoblaymiz.Buning uchun vektor ko'paytmaning ta'rifi va xossalaridan foydalanamiz:

$(\vec a+2\vec b)\times(\vec a-3\vec b)=\vec a\times\vec a+2\vec b\times\vec a-3\vec a\times\vec b-6\vec b\times\vec b=-5\vec a\times\vec b$.

Bundan $|(\vec a+2\vec b)\times(\vec a-3\vec b)|=|-5\vec a\times\vec b|=5|\vec a|\cdot|\vec b|\sin\varphi=5\cdot3\cdot2\cdot\sin\dfrac{\pi}{6}=15$.

Ikkita $\vec a=a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k$, $\vec b=b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k$ vektor berilgan bo'lsin.
U holda

$$\vec a\times\vec b=(a_x\vec i+a_y\vec j+a_z\vec k)\times(b_x\vec i+b_y\vec j+b_z\vec k)=a_xb_x(\vec i\times\vec i)+a_xb_y(\vec i\times\vec j)+a_xb_z(\vec i\times\vec k)+$$
$$+a_yb_x(\vec j\times\vec i)+a_yb_y(\vec j\times\vec j)+a_yb_z(\vec j\times\vec k)+a_zb_x(\vec k\times\vec i)+a_zb_y(\vec k\times\vec j)+a_zb_z(\vec k\times\vec k)=$$
$$=a_xb_y\vec k-a_xb_z\vec j-a_yb_x\vec k+a_yb_z\vec i+a_zb_x\vec j-a_zb_y\vec i=$$
$$(a_yb_z-a_zb_y)\vec i-(a_xb_z-a_zb_x)\vec j+$$
$$+(a_xb_y-a_yb_x)\vec k=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec k,$$

ya'ni

$$\boxed{\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\vec k} \tag{13}$$

yoki

$$\boxed{\vec a\times\vec b=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}}. \tag{14}$$

Misol

$\vec a=\{3;-1;-2\}$, $\vec b=\{0;-2;4\}$ bo'lsin. $(\vec a+2\vec b)\times(2\vec a-3\vec b)$ kopaytmani topamiz. Avval $\vec m=\vec a+2\vec b$ va $\vec n=2\vec a-3\vec b$ vektorlarning koordinatalarini topamiz:

$$\vec m=\{1\cdot3+2\cdot0;1\cdot(-1)+2\cdot(-2);1\cdot(-2)+2\cdot4\}=\{3;-5;6\},$$
$$\vec n=\{2\cdot3-3\cdot0;2\cdot(-1)-3\cdot(-2);2\cdot(-2)-3\cdot4\}=\{6;-8;-16\}.$$

Bundan (1.5.13) formulaga ko'ra

$$\vec m\times\vec n=\begin{vmatrix}-5 & 6\\ -8 & -16\end{vmatrix}\vec i-\begin{vmatrix}3 & 6\\ 6 & -16\end{vmatrix}\vec j+\begin{vmatrix}3 & -5\\ 6 & -8\end{vmatrix}\vec k=128\vec i+84\vec j+6\vec k.$$

Vektor ko‘paytmaning ayrim tatbiqlari

1. Ikki vektorning kollinearlik sharti. Vektor ko‘paytmaning 4-xossasiga ko‘ra $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar kollinear bo‘lsa $\vec{a}\times\vec{b}=0$ yoki

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}-(a_xb_z-a_zb_x)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}=0$$

bo‘ladi.Bundan $a_yb_z-a_zb_y=0,\ a_xb_z-a_zb_x=0,\ a_xb_y-a_yb_x=0$

yoki

$$\boxed{\frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}}, \tag{15}$$

ya’ni kollinear vektorlarning koordinatalari proporsional bo‘ladi va aksincha

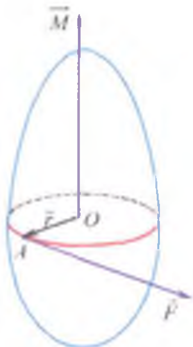
proporsional koordinatalarga ega vektorlar kollinear bo‘ladi.

2. Parallelogramm va uzburchakning yuzlari. Vektor ko‘paytmaning ta’rifiga ko‘ra $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\sin\varphi$, ya’ni $S_{par}=|\vec{a}\times\vec{b}|$.

Bundan $S_{\Delta}=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|$. Demak,

$$\boxed{S_{par}=2S_{\Delta}=\sqrt{\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}^2}} \tag{16}$$

3. Nuqtaga nisbatan kuch momenti. O nuqtasi mahkamlangan qattiq jism A nuqtasiga qo‘yilgan $\vec{F}$ kuch ta’sirida O nuqta atrofida aylanma harakat qilayotgan bo‘lsin (10-shakl).



10-shakl

Fizika kursidan ma’lumki $\vec{F}$ kuchning O nuqtaga nisbatan momenti deb

O nuqtadan o'tuvchi va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi $\overrightarrow{M}$ vektorga aytiladi:

1) $\overrightarrow{M} \perp \vec{r}$ va $\overrightarrow{M} \perp \vec{F}$, bu yerda $\vec{r} = \overrightarrow{OA}$ – A nuqtaning radius vektori;

2) $|\overrightarrow{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \sin\varphi$, bu yerda $\varphi = (\hat{\vec{r}, \vec{F}})$;

3) $\vec{r}, \vec{F}, \overrightarrow{M}$ vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi.

Shunday qilib,

$$\overrightarrow{M} = \vec{r} \times \vec{F},$$

ya'ni qo'zg'almas nuqtaga nisbatan kuch momenti kuch qo'yilgan nuqta radius vektorining kuch vektoriga vektor ko'paytmasiga teng. Bu jumla *vektor ko'paytmaning mexanik ma'nosini* anglatadi.

4. Aylanma harakat chiziqli tezligi. Yuqorida keltirilgandagi kabi qo'zg'almas O nuqta atrofida $\vec{\omega}$ burchak tezlik bilan aylnma harakat qilayotgan qattiq jism

M nuqtasining chziqli tezligi Eyler formulasi bilan topiladi:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r},$$

bu yerda $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ – M nuqtaning radius vektori.

Misollar

1. m, n ning qanday qiymatlarida $\vec{a} = \{-2;3;n\}$ va $\vec{b} = \{m;-6;2\}$ vektorlar kollinear bo'ladi? Ikki vektorning kollinearlik shartiga ko'ra $\frac{-2}{m} = \frac{3}{-6} = \frac{n}{2}$.

Bundan $m = 4$, $n = -1$.

2. $\vec{a} = 2\vec{j} - 3\vec{k}$ va $\vec{b} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$ vektorlarga qurilgan arallelogrammning yuzini hisoblaymiz.

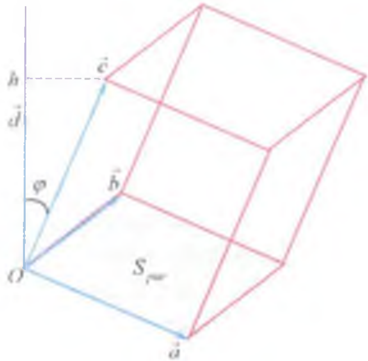
$$S = \sqrt{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}^2} = \sqrt{9^2 + 12^2 + (-8)^2} = 17(y.b.).$$

Uchta vektorning aralash ko'paytmasi

Ta'rif. *Uchta $\vec{a}, \vec{b}$ va $\vec{c}$ vektorning aralash ko'paytmasi* deb $\vec{a}$ vektorni $\vec{b}$ vektorga vektor ko'paytirishdan hosil bo'lgan $\vec{a} \times \vec{b}$ vektorni $\vec{c}$ vektorga skalyar ko'paytirib topilgan songa aytiladi va $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ kabi belgilanadi.

Uchta komplanar bo'lmagan $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ vektorlar berilgan bo'lsin.

Bu vektorlarga parallelepiped quramiz va $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}$ vektorni yasaymiz (11-shakl).



(11-shakl)

Vektor ko‘paytmaning ta’rifiga ko‘ra $\vec{d}\perp\vec{a}$, $\vec{d}\perp\vec{b}$, $|\vec{d}|=S_{par}$,bu yerda S_{par} – parallelepiped asosining yuzi.

Bundan $\quad \vec{d}\cdot\vec{c}=|\vec{d}|\cdot|\vec{c}|\cos\varphi.$

11-shaklda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar o‘ng uchlik tashkil qiladi va $\varphi<\frac{\pi}{2}$, ya’ni $\cos\varphi>0$. U holda $|\vec{c}|\cos\varphi=h$ va $\vec{d}\cdot\vec{c}=S_{par}\cdot h=V$. Ikkinchi tomondan $\vec{d}\cdot\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$. Demak, $V=\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Agar $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar chap uchlik tashkil qilsa $\varphi>\frac{\pi}{2}$ va $\cos\varphi<0$ bo‘ladi. U holda $|\vec{c}|\cos\varphi=-h$, $V=-\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

Shunday qilib, komplanar bo‘lmagan uchta vektorning aralash ko‘paytmasi qirralari bu vektorlarning uzunliklaridan iborat bo‘lgan parallelepiped hajmiga ishora aniqligida teng bo‘ladi, ya’ni

$$\boxed{V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c},} \qquad (17)$$

bunda vektorlar o‘ng uchlik tashkil qilsa musbat ishora, chap uchlik tashkil qilsa manfiy ishora olinadi. Bu jumla *aralash ko‘paytmaning geometrik ma’nosini* anglatadi.

1-xossa. Amallarining o‘rinlari almashtirilsa aralash ko‘paytma o‘zgarmaydi, ya’ni

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

Isboti. Skalyar ko‘paytmaning o‘rin almashtirish xossasiga ko‘ra

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}).$$

(7) formuladan topamiz:

$$V=\pm(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c},\ \ V=\pm(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}.$$

Bunda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ va $\vec{b},\vec{c},\vec{a}$ uchliklarning har ikkalasi yoki o'ng uchlik yoki chap uchlik tashkil qiladi. Shu sababli $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}$. Bundan

$$(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c}).$$

2-*xossa*. Ko'paytuvchilarning o'rinlari doiraviy almashtirilsa aralash ko'paytma o'zgarmaydi, ya'ni

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

Isboti. Skalyar ko'paytmaning o'rin almashtirish xossasidan topamiz:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\vec{a}\cdot(\vec{b}\times\vec{c})=(\vec{b}\times\vec{c})\cdot\vec{a}=\vec{b}\vec{c}\vec{a},$$

$$\vec{b}\vec{c}\vec{a}=\vec{b}\cdot(\vec{c}\times\vec{a})=(\vec{c}\times\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{c}\vec{a}\vec{b}.$$

3-*xossa*. Ikkita qo'shni ko'paytuvchining o'rinlari almashtirilsa aralash ko'paytma ishorasini almashtiradi. Masalan, $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}$.

Isboti. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=-(\vec{b}\times\vec{a})\cdot\vec{c}=-\vec{b}\vec{a}\vec{c}.$

4-*xossa*. Agar nolga teng bo'lmagan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda ularning aralash ko'paytmasi nolga teng bo'ladi. Shunindek, teskari tasdiq o'rinli: agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0\ (|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0,|\vec{c}|\neq 0)$ bo'lsa, u holda $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarkomplanar bo'ladi.

Isboti. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0\ (|\vec{a}|\neq 0,|\vec{b}|\neq 0,|\vec{c}|\neq 0)$ bo'lsin. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar emas deb faraz qilamiz. U holda bu vektorlarga hajmi $V\neq 0$ bo'lgan parallelopiped qurish mumkin. $V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ dan $\vec{a}\vec{b}\vec{c}\neq 0$ kelib chiqadi. Bu $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$ shartga teskari. Demak, qilingan faraz noto'g'ri va $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsin. U holda $\vec{d}=\vec{a}\times\vec{b}$ vektor $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar yotgan tekislikka perpendikulyar bo'ladi.

Bundan $\vec{d}\perp\vec{c}$. Shu sababli $\vec{d}\cdot\vec{c}=0$ yoki $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$.

Koordinatalari bilan berilgan vektorlarning aralash ko'paytmasi

Uchta $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, $\vec{c}=c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k}$ vektor berilgan bo'lsin.

U holda

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k},$$

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}\right)\cdot(c_x\vec{i}+c_y\vec{j}+c_z\vec{k})=$$

$$=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}c_x-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}c_y+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}c_z$$

yoki

$$\boxed{\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}} \qquad (18)$$

Misol

$\vec{a}=\{-2;2;1\}$, $\vec{b}=\{3;-2;5\}$, $\vec{c}=\{1;-1;3\}$ vektorlar berilgan. $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ ko'paytmani hisoblaymiz:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c}=\begin{vmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}=12+10-3+2-10-18=-7.$$

Aralash ko'paytmaning ayrim tatbiqlari

1. Fazodagi vektorlarning o'zaro joylashishi. $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlarning fazoda o'zaro joylashishini aniqlash $V=\pm\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ bo'lishiga asoslanadi. Bunda agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c}>0$ bo'lsa, u holda vektorlar o'ng uchlik tashkil qiladi, agar $\vec{a}\vec{b}\vec{c}<0$ bo'lsa, u holda vektorlar chap uchlik tashkil qiladi.

2. Uchta vektorning komplanarlik sharti. Aralsh ko'paytmaning 4-ossasiga ko'ra nolga teng bo'lmagan $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ vektorlar komplanar bo'lsa, u holda $\vec{a}\vec{b}\vec{c}=0$

yoki

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}=0}. \qquad (19)$$

3. Parallelepiped va piramidaning hajmlari. Aralash ko'paytmaning geometrik ma'nosiga ko'ra $V_{par}=|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|$. Bundan

$$V_{pir}=\frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Shunday qilib,

$$\boxed{V_{par}=6V_{pir}=\left\|\begin{matrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{matrix}\right\|}. \qquad (20)$$

Misol.

Piramidaning uchlari berilgan: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(-5;-4;8)$. Piramidaning D uchidan tushirilgan balandligi uzunligini topami.

Avval piramida qirralarini ifodalovchi vektorlarni topamiz:

$$\overrightarrow{AB}=\{2;-2;-3\},\ \overrightarrow{AC}=\{4;0;6\},\ \overrightarrow{AD}=\{-7;-7;7\}.$$

Piramida hajmini hisoblaymiz:

$$V=\frac{1}{6}\left\|\begin{matrix} 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \\ -7 & -7 & 7 \end{matrix}\right\|=\frac{1}{6}|84+84+84+56|=\frac{154}{3}.$$

Qirralari $\overrightarrow{AB}$ va $\overrightarrow{AC}$ vektorlarning uzunliklaridan iborat bo'lgan yoqning yuzini hisoblaymiz

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(-12)^2+24^2+8^2}=14.$$

Piramida uchun $V=\frac{1}{3}hS$. Bundan

$$h=\frac{3V}{S}=\frac{3\cdot\frac{154}{3}}{14}=\frac{154}{14}=11$$

Misol. Uchlari O(0;0;0), A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4) nuqtalarda bo'lgan parallelopipedning hajmini toping.

$$V=(OA\times OB)\cdot OC=\begin{vmatrix}5 & 2 & 0\\ 2 & 5 & 0\\ 1 & 2 & 4\end{vmatrix}=84 \text{ kub birlik.}$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Vektorga ta'rif bering.
2.Skalyar ko'paytma qanday kattalik?
3.Vektorlarni vector ko'paytmasiga ta'rif bering.
4.Vektor ko'paytma qanday kattalik?
5.Vektorlarni aralash ko'paytmasiga ta'rif bering.
6. $\overline{AB}$ vektorning koordinatasi va uzunligini toping.
1. a) $A(1;1;3)$, $B(2;2;3)$ b) $A(0;1;3)$, $B(1;2;3)$ s) $A(0;1;-1)$, $B(1;2;0)$ d) $A(2;2;3)$, $B(3;2;4)$

2.Uchlari *A(2;1;-4)*, *B(1;3;5)*, *C(7;2;3)* va *D(8;0;-6)* nuqtalarda bo'lgan to'rtburchakning parallelogramm ekanligini isbotlang va parallelogramm tomonlarining uzunliklarini toping.

3.*A(-1;2;3)*, *B(2;-1;1)*, *C(1;-3;-1)* va *D(-5;3;3)* nuqtalar trapetsiyaning uchlari bo'lishini tekshiring.

4. Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarni skalyar ko'paytmasini toping.
a) $\bar{a}\{-2;1;1\}$, $\bar{b}\{3;-2;4\}$ b) $\bar{a}\{0;1;1\}$, $\bar{b}\{-1;-3;0\}$ c) $\bar{a}\{-2;1;1\}$, $\bar{b}\{0;-2;-5\}$ d) $\bar{a}\{0;1;1\}$, $\bar{b}\{3;-1;0\}$.

7. *AB* kesmaning boshlang'ich nuqtasi *A(-1;2;4)* va uni 1/2 nisbada bo'luvchi *C(2;0;2)* nuqta berilgan. *B* uchining koordinatalarini toping.

8. $\overline{AB}$ vektorning koordinatasi va uzunligini toping.
1.a) $A(2;1;2)$, $B(3;2;2)$ b) $A(0;1;1)$, $B(1;2;2)$ s) $A(0;-4;3)$, $B(1;-3;4)$ d) $A(1;2;1)$, $B(0;1;2)$

2. Uchlari *A(1;2;3)* va *B(4;2;-1)* bo'lgan *AB* kesmani teng ikkiga bo'luvchi *M* nuqtaning koordinatalarini toping.

3. *AB* kesmaning boshlang'ich nuqtasi *A(-1;3;2)*. Uni teng ikkiga bo'luvchi nuqta esa *C(2;0;2)* bo'lsin. *B* uchning koordinatalarini toping.

4. Quyidagi $\bar{a}$ va $\bar{b}$ vektorlarni skalyar ko'paytmasini toping.

a) $\bar{a}\{0;-1;-1\}$, $\bar{b}\{1;-3;8\}$ b) $\bar{a}\{0;-1;-1\}$, $\bar{b}\{2;0;2\}$ s) $\bar{a}\{-2;1;2\}$, $\bar{b}\{1;0;-1\}$ d) $\bar{a}\{0;1;1\}$, $\vec{b}\{-3;-1;1\}$

5. *AB* kesmaning boshlang'ich nuqtasi *A*(*-1;3;2*). Uni teng ikkiga bo'luvchi nuqta esa *C*(*2;0;2*) bo'lsin. *B* uchning koordinatalarini toping.

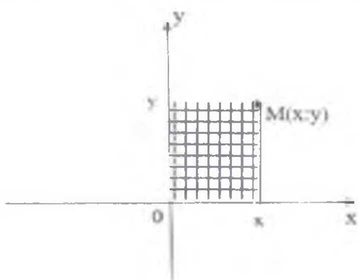
8-§.Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa

Tayanch so'z va iboralar: *Koordinatalar sistemasi, tekislik, fazo,ikki nuqta orasida masofa, kesmani berilgan nisbatda bo'lish.Vektor, vektor fazo,chiziqli amallar,skalyar ko'paytma, vektor va aralash ko'paytma.*

8.1.Tekislik va fazoda dekart koordinatalar sistemasida nuqtalarni joylashuv holati.

Tekislikda to'g'ri burchakli dekart koordinatalari sistemasi quyidagicha kiritiladi: Tekislikda biror *O* nuqtani olib, undan koordinata o'qlari deb ataluvchi 2 ta o'zaro perpendikulyar *Ox* va *Oy* o'q o'tkazamiz. Bu yerdagi *O* nuqta koordinatalar boshi, *Ox* o'q – absissalar o'qi, *Oy* o'q – ordinatalar o'qi deyiladi. Bu sistemada masofalarni o'lchash uchun *OE* masshtab birligi (masshtab-kesma) tanlaymiz va uning uzunligini 1 ga teng deb hisoblaymiz. Uning yordamida koordinata o'qlaridagi har bir nuqtaga biror haqiqiy sonni mos qo'yishimiz mumkin. (Bunda *Ox* o'qning *O* nuqtadan o'ng tomnidagi qismiga musbat sonlar, chap tomonidagi qismiga manfiy sonlar, *O* nuqtaga nol soni qo'yiladi; *Oy* o'qning *O* nuqtadan yuqori tomonidagi qismiga musbat sonlar, quyi tomonidagi qismiga esa manfiy sonlar qo'yiladi).

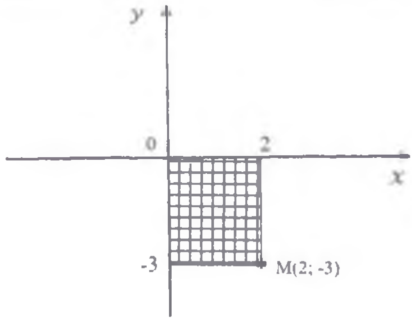
Nuqtaning koordinatalari. Yuqorida kiritilgan to'g'ri burchaklidekart koordinatalar sistemasi tekislikdagi har bir nuqtaning holatini aniqlash imkonini beradi. Nuqtaning tekislikdagi (yoki



fazodagi) o'rnini aniqlovchi sonlarga shu nuqtaning koordinatalari deyiladi. M nuqtaning absissasi va ordinatasi uning koordinatalari deb ataladi. Absissasi x va ordinatasi y bo'lgan M nuqta $M(x,y)$ kabi yoziladi.

Nuqtaning koordinatalari uning tekislikdagi holatini to'la aniqlaydi: haqiqiy sonlarning har bir (x,y) juftiga tekislikda bitta $M(x,y)$ nuqta mos keladi va aksincha, tekislikdagi har bir M nuqtaga x va y haqiqiy sonlarning bitta (x,y) jufti mos keladi. Umumiy holatda tekislikdagi biror M(x,y) nuqtaning holati quyidagicha bo'ladi. (1-shakl)

Masalan: M(2; -3) nuqtani tekislikdagi holati quyidagicha bo'ladi.



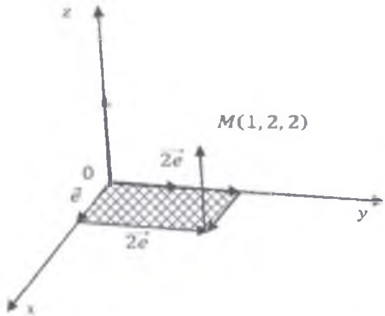
2-shakl.

Ravshanki, *XOY* sistema tekislikni to'rtta qismga ajratadi. Bu qismlar choraklar (yoki kvadratlar) deb ataladi. Absissa va ordinatalari bir vaqtda musbat bo'lgan nuqtalar joylashgan qismni I chorak deb, soat strelkasi harakati yo'nalishiga teskari yo'nalishda, qolgan qismlarni II chorak, III chorak va IV chorak deb belgilab chiqamiz. Bu holda quyidagiga ega bo'lamiz.

	I	II	III	IV
x	+	-	-	+
y	+	+	-	-

Fazoda dekart koordanatalar sistemasi berilganda, har bir M nuqtaga aniq bir $\overline{OM}$ vektorni doimo mos keltirish mumkin, ya'ni boshi O nuqta oxiri esa berilgan M nuqtada bo'lgan vektor: $\overline{OM}(x;y;z) \Leftrightarrow M(x;y;z)$ M nuqtaning affin reperdagi koordinatalari bo'ladi. Demak, fazodagi nuqtalar to'plami bilan ma'lum tartibda olingan haqiqiy sonlar uchliklari to'plami orasida ikki tomonlama moslik mavjud.

Fazoda koordinatalar sistemasiga nisbatan berilgan M nuqta uchun $\overline{OM}$ radius vektor deb ataladi va $\overline{OM} = x\bar{e}_1 + y\bar{e}_2 + z\bar{e}_3$ yoziladi.



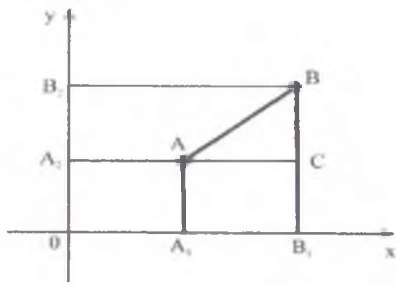
3-shakl.

Umuman M(a;b;c) nuqtani yasash uchun Ox o'qida $a\bar{e}_1$ ni uning oxiridan Oy o'qqa // holda $b\bar{e}_2$ n uni oxiridan Oz o'qqa // holda $c\bar{e}_3$ ni yasaymiz. Shu vektorning oxirgi uchi izlangan nuqta bo'ladi 3-shakl.

8.2.Tekislik va fazoda ikki nuqta orasidagi masofa.

1. Aytaylik, *XOY* koordinata tekisligida ikkita $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalar berilgan bo'lsin.

AB masofani *A* va *B* nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalovchi formulani keltirib chiqarish masalasini qaraymiz. A nuqtadan koordinata o'qlariga mos ravishda AA_1 va AA_2 perpendikulyarlarni tushiramiz. U holda $OA_1=x_1$ va $OA_2=y_1$ bo'ladi. Shuningdek, *B* nuqtadan o'qlarga BB_1 va BB_2 perpendikulyarlarni tushiramiz. Bu holda $OB_1=x_2$ va $OB_2=y_2$ bo'ladi. A nuqta orqali *Ox* o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq BB_1 to'g'ri chiziq bilan *C* nuqtada kesishadi. 4-shakl.



4-shakl.

ABC to'g'ri burchakli uchburchakdan (Pifagor teoremasiga ko'ra)

$$AB^2=AC^2+BC^2$$

AC va *BS* kesmalarni *A* va *B* nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$AC=A_1B_1=OB_1-OA_1=x_2-x_1,$$
$$BC=A_2B_2=OB_2-OA_2=y_2-y_1.$$

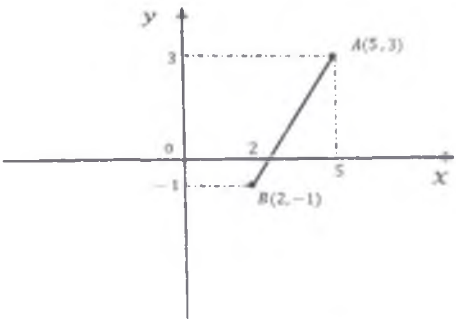
Demak, $AB^2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$ (1)

bo'ladi. Bu formula tekislikdagi to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida berilgan ikkinuqta orasidagi masofani topish formulasi deb ataladi va amaliyotda keng qo'llaniladi.

Misol. Usbu A(5,3) va B(2,-1) nuqtalar orasidagi masofani toping.

Yechish. $x_1=5, y_1=3$ *va* $x_2=2, y_2=-1$ ekanligini e'tiborga olib, (1) formuladan quyidagiga ega bo'lamiz: 5-shakl.

AB = $\sqrt{(2-5)^2+(-1-3)^2}=\sqrt{9+16}=5$ (uzunlik birligi).



5-shakl.

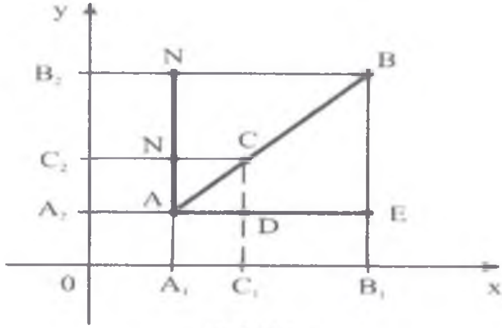
Kesmani berilgan nisbatda bo'lishi. Aytaylik, $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ nuqtalar va λ son berilgan bo'lsin. *AB* kesmani λ nisbatda bo'lish masalasini qaraymiz, ya'ni *A* va *B* nuqtalar orasida yotuvchi shunday *C* nuqtani topish kerakki,

$$\frac{AC}{CB}=\lambda$$

bo'lsin, *C* nuqtaning koordinatalarini *(x,y)* deylik. *x* va *y* larni *A* va *B* nuqtalarning koordinatalari va λ paramert orqali ifodalovchi ushbu

$$x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda},\ y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

formulalarni keltirib chiqaramiz. Bu formulalar **kesmani** λ **nisbatda bo'lish** formulalari deb ataladi 6-shakl.



6-shakl.

A, C va *B* nuqtalardan O_x va O_y o'qlarga perpendikulyarlar tushiramiz. U holda $OA_1=x_1$, $OC_1=x$, $OB_1=x_2$, $OA_2=y_1$, $OC_2=y$, $OB_2=y_2$ bo'ladi. *A* nuqta orqali *Ox* o'qqa parallel to'g'ri chiziq o'tkazamiz. Bu to'g'ri chiziq CC_1 to'g'ri chiziq bilan esa *D* nuqtada kesishadi. $\angle BAE$ burchakni qaraymiz. *CD* va *BE* parallel to'g'ri chiziqlar uning tomonlaridan proportsional kesmalar ajratadi (bu maktab elementar geometriya kursidan ma'lum):

$$\frac{AD}{DE}=\frac{AC}{CB}=\lambda \quad (*)$$

Endi *AD* va *DE* kesmalarni *A, B, C* nuqtalarning koordinatalari orqali ifodalaymiz:

$$AD=A_1C_1=OC_1-OA_1=x-x_1,$$

$$DE=C_1B_1=OB_1-OA_1=x_2-x.$$

U vaqtda (*) dan:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x}=\lambda \Rightarrow x-x_1=\lambda x_2-\lambda x \Rightarrow (1+\lambda)x=x_1+\lambda x_2 \Rightarrow x=\frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda};$$

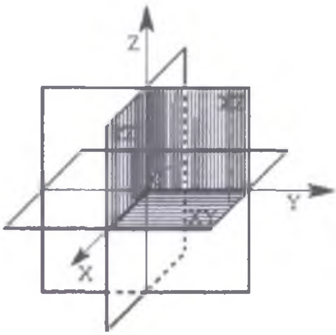
Xuddi shunga o'xshash, isbot qilinadiki, $y=\frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$.

Xususan, $\lambda=1$ desak, $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$ bo'ladi.

Bu formulalar kesmani teng ikkiga bo'lish formulalari deyiladi.

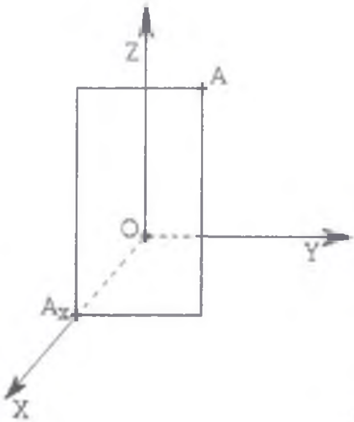
8.3 Fazoda koordinatalar sistemasi va koordinata tekisliklarin joylashuv holati

Bitta O nuqtada kesishuvchi o‘zaro perpendikulyar uchta *x,y,z* to‘g‘ri chiziqni olamiz. Bu to‘g‘ri chiziqlarning har bir jufti orqali tekislik o‘tkazamiz. *x* va *y* to‘g‘ri chiziqlar orqali o‘tuvchi tekislik *xy* tekislik deyiladi. *x,y,z* to‘g‘ri chiziqlar *koordinata o‘qlari* deyiladi, ularning kesishgan O nuqtasi – *koordinatalar boshi, xy, yz* va *xz* tekisliklar esa *koordinata tekisliklari* deyiladi. O nuqta koordinata o‘qlarining har birini ikkita yarim to‘g‘ri chiziqqa – yarim o‘qlarga ajratadi.



7-shakl

Ulardan birini musbat, ikkinchizini manfiy deb aytishga shartlashib olamiz. (7-shakl) Fazoda ixtiyoriy *A* nuqtani olamiz va undan *yz* tekislikka parallel tekislik o‘tkazamiz. Bu tekislik *x* o‘qni biror A_x nuqtada kesib o‘tadi. *A* nuqtaning *x koordinatasi* deb moduli OA_x kesmaning uzunligiga teng sonni aytamiz; bu son, agar A_x nuqta *x* ning musbat yarim o‘qida yotsa – musbat va manfiy yarim o‘qda yotsa –manfiy. Agar A_x nuqta O nuqta bilan ustma – ust tushsa, $x=0$ deb olamiz. 8-shakl



8-shakl.

A nuqtaning *y* ; *z* koordinatalari shuning singari aniqlanadi. Nuqtaning koordinatalarini nuqtaning harfiy belgilanishi yoniga qavs ichida yozamiz: *A(x; y; z;)*. Ba'zan oddiygina qilib uning koordinatalari bilan belgilaymiz: *(x; y; z)*.

Yuqoridagi mulohazalardan biz quyidagi umumiy qoidani keltirib chiqaramiz.

Uchta koordinata tekisligi fazoni 8 ta oktantalarga ajratadi. Quyidagi jadvalda fazoda berilgan nuqtaning oktantalardagi ishoralari ko'rsatilgan.

Oktantalar Koordinatalar	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
X	+	-	-	+	+	-	-	+
Y	+	+	-	-	+	+	-	-
Z	+	+	+	+	-	-	-	-

Masala: *A(1; 2; 3), B(0; 1; 2), C(0; 0; 3), D(1; 2; 0)* nuqtalardan qaysilari:

1) *xy* tekislikda; 2) *z* o'qida; 3) *yz* tekislikda yotadi.

$A_1(x_1;y_1;z_1)$ va $A_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalar orasidagi masofa quyidagi formula yordamida hisoblanadi:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Masala: *xy* tekislikda *A(0; 1; −1), B(−1; 0; 1), C(0; −1; 0)* nuqtalardan baravar uzoqlashgan *D(x; y; 0)* nuqtani toping.

Yechish: Izlanayotgan nuqta *D(x; y; 0)* bo'lsin. U holda

$$AD^2=(x-0)^2+(y-1)^2+(0+1)^2$$
$$BD^2=(x+1)^2+(y-0)^2+(0-1)^2$$
$$CD^2=(x-0)^2+(y+1)^2+(0-0)^2$$

Oldingi ikkita masofani uchinchisiga tenglab quyidagi tenglamalarni hosil qilamiz:

$$-4y+1=0;\ 2x-2y+1=0$$

Bundan, $y=\frac{1}{4}, x=-\frac{1}{4}$. Javob: $D\left(-\frac{1}{4};\frac{1}{4};0\right)$

$A_1(x_1;y_1;z_1)$ va $A_2(x_2;y_2;z_2)$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesma o'rtasining koordinatalari quyidagi formulalar yordamida topiladi:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2};\ y=\frac{y_1+y_2}{2};\ z=\frac{z_1+z_2}{2}$$

Masala: Uchlari *A(1; 3; 2), B(0; 2; 4), C(1; 1; 4), D(2; 2; 2)* nuqtalarda bo'lgan
ABCD to'rtburchakning parallelogramm ekanini isbotlang.

Yechish: Diagonallari kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadigan to'rtburchak parallelogramm bo'ladi. Bundan masalani yechishda foydalanamiz.

AC kesma o'rtasini koordinatalari $x=\frac{1+1}{2}=1;\ y=\frac{3+1}{2}=2;\ z=\frac{2+4}{2}=3$

BD kesma o'rtasining koordinatalari

$$x=\frac{0+2}{2}=1;\ y=\frac{2+2}{2}=2;\ z=\frac{4+2}{2}=3$$

AC va *BD* kesmalar o'rtalarining koordinatalari bir xil. Demak, kesmalar kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi. Demak, *ABCD* to'rtburchak – parallelogramm.

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Kesmani berilgan nisbatda bo'lish nima?
2.Ikki nuqta orasidagi masofa qanaqa qilib topiladi?
3.Fazoda nuqtaning koordinatasi qanday topiladi va qanday belgilanadi?
4.*X(3;−2;5)* yozuv nimani anglatadi?
5.Fazoda ikki nuqta orasidagi masofa qanday topiladi?
6. 15 m uzunlikdagi telefon simi telefon ustuniga yer sirtidan 8 m balandlikda mahkamlangan va undan uyga tortilgan, bu yerda u 20 m balandlikda mahkamlangan. Sim osilib turmagan deb faraz qilib, uy bilan ustun orasidagi masofani toping.

7. Teng tomonli uchburchakning tomonlari 3 m ga teng. Uchburchak har bir uchidan 2 m masofada bo'lgan nuqtadan uchburchak tekisligigacha bo'lgan masofani toping.

8. $A(2;-1;-3)$ va $B(-1;-1;1)$ nuqtalar orasidagi masofani toping.

9. $A(1;2;3)$ nuqta berilgan. Bu nuqtadan koordinata o'qlariga va koordinata tekisliklariga tushirilgan perpendikulyar asoslarini toping.

10. $(1;2;3)$ nuqtadan: 1) koordinata tekisliklarigacha;
2) koordinata o'qlarigacha va koordinatalar boshlarigacha bo'lgan masofalarni toping.

11. $(0;0;1)$, $(0;1;0)$ va $(1;0;0)$ nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi va yz tekislikdan 2 birlik masofadagi nuqtalarni toping.

12. x o'qida $A(1;2;3)$, $B(-2;1;3)$ nuqtalardan baravar uzoqlikdagi $C(x;0;0)$ nuqtani toping.

13. Uchlari: 1) $A(0;2;-3)$, $B(-1;1;1)$, $C(2;-2;-1)$, $D(3;-1;-5)$; 2) $A(2;1;3)$, $B(1;0;7)$, $C(-2;1;5)$, $D(-1;2;1)$ nuqtalarda bo'lgan ABCD to'rtburchakning parallelogramm ekanini isbotlang.

14. Kesmaning bir uchi $A(2;3;-1)$ va uning o'rtasi $C(1;1;1)$ berilgan. Kesmaning ikkinchi uchi $B(x;y;z)$ ni toping.

15. ABCD parallelogrammning uchta uchining koordinatalari berilgan; to'rtinchi D uchining koordinatalarini toping:

9-§ TO'G'RI CHIZIQ TENGLAMALARI

Tayanch so'z va iboralar: *to'g'ri chiziqning turli tenglamalari, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak, ikkita to'g'ri chiziqning parallelligi va perpendikulyarligi shartlari, nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa.*

9.1. Tekislikdagi chiziq

Ma'lumki, koordinatalar usuli bilan, ya'ni koordinatalar sistemasini kiritish orqali tekislik istalgan nuqtasining o'rnini ikkita son (nuqta koordinatalari) bilan aniqlash mumkin bo'ladi. Shu bilan birga koordinatalar usuli tekislikdagi har qanday chiziqning o'rnini uning tenglamasi, ya'ni chiziq nuqtalarining koordinatalarini bog'lovchi tengliklar bilan aniqlash imkonini beradi.

Oxy tekislikdagi chiziq tenglamasi deb aynan shu chiziq barcha nuqtalarining x va y koordinatalari orasidagi bog'lanishni

aniqlovchi ikki noma'lumli $F(x,y)=0$ ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi.

Shu kabi, koordinatalari ikki noma'lumli $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi Oxy tekislikning barcha $M(x;y)$ nuqtalari to'plamiga *tekislikda* shu tenglama bilan aniqlanuvchi *chiziq* deyiladi.

Chiziq qutb koordinatalar sistemasida $F(r,\varphi)=0$ tenglama bilan beriladi, bu yerda $r,\varphi-$ chiziq nuqtalarining qutb koordinatalari.

Ayrim hollarda tekislikdagi chiziq $y=f(x)$ tenglama bilan beriladi. Bunda chiziq $y=f(x)$ funktsiyaning grafigi deb ataladi.

Tekislikdagi chiziq ikkita $x=x(t),\ y=y(t),\ t\in T$ tenglamalar bilan ham berilishi mumkin. Bunda barcha $M(x(t);y(t)),\ t\in T$ nuqtalar to'plami tekislikdagi chiziqni ifodalaydi. $x=x(t),\ y=y(t)$ funksiyalarga bu chiziqning parametrik tenglamalari, t o'zgaruvchiga parametr deyiladi.

Chiziqning parametrik tenglamalaridan $F(x,y)=0$ tenglamasiga $x=x(t),\ y=y(t)$ tengliklarningdan qandaydir usul bilan t parametrni yo'qotish orqali o'tiladi. Masalan, $x=t^2, y=t^3$ parametrik tenglamalardan $x^3=t^6,\ y^2=t^6$ tengliklarga o'tib, ulardan $y^2-x^3=0$, ya'ni $F(x,y)=0$ ko'rinishdagi tenglama hosil qilinadi.

Tekislikdagi chiziqning ikkita $x=x(t),\ y=y(t)$ parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektor tenglama bilan berish mumkin. Bunda t parametr (vaqt) o'zgarishi bilan $\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektorning oxiri biror chiziqni chizadi. Bu chiziqqa nuqtaning traektoriyasi, $\vec{r}=\vec{r}(t)$ tenglamaga harakat tenglamasi deyiladi. Bu jumla chiziqning vektor va parametrik tenglamalarining *mexanik ma'nosini* bildiradi.

Shunday qilib, tekislikdagi har qanday chiziqqa ikki o'zgaruvchining biror $F(x,y)=0$ tenglamasi mos keladi va aksincha, ikki o'zgaruvchining har qanday $F(x,y)=0$ tenglamasiga, umuman olganda, tekislikdakdagi biror chiziq mos keladi. Bunda «umuman olganda» iborasi aytilganlarda muctasnoga yo'l qo'yilishi mumkinligini bildiradi.

Masalan, $(x-1)^2+(y-4)^2=0$ tenglamaga chiziq emas, balki $M(1;4)$ nuqta mos keladi; $x^2+y^2+3=0$ tenglamaga tekislik nuqtalarining hech bir geometrik o'rni mos kelmaydi.

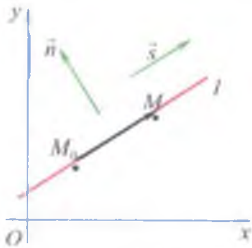
Tekislikdagi analitik geometriyada ikkita masala qaraladi: geometrik xossalariga ko'ra chiziqning tenglamasini keltirib chiqarish; tenglamasiga asosan chiziqning ko'rinishi va xossalarini o'rganish.

Tekislikdagi to'g'ri chiziq tenglamalari

Tekislikdagi to'g'ri chiziq tekislikdagi chiziqlardan eng soddasi hisoblanadi. To'g'ri chiziqning tekislikdagi o'rni turli parametrlar bilan bir qiymatli aniqlanishi mumkin. Masalan, to'g'ri chiziqning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bilan, ikki nuqtaning koordinatalari bilan va boshqalar bilan. Shu sababli to'g'ri chiziqning aniqlanish parametrlariga mos uning turli tenglamalari qaraladi.

Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasi

Oxy tekislikda berilgan $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tuvchi va berilgan $\vec{n}=\{A;B\}$ vektorga perpendikular l to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Buning uchun l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olib, $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ vektorni yasaymiz (1-shakl).



1-shakl

Bunda $\vec{n}\perp\overline{M_0M}$ bo'ladi. Ikki vektorning perpendikulyarlik shartidan topamiz:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)=0.} \qquad (1)$$

(1) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.

To'g'ri chiziqqa perpendikular bo'lgan har qanday vektorga *to'g'ri chiziqning normal vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{n}=\{A;B\}$ vektor (1) to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi.

Misol

Ikkita nuqta berilgan: $M_1(2;3)$ va $M_2(-1;0)$. M_2 nuqtadan o'tuvchi va $\overline{M_1M_2}$ vektorga perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz:

$$\overline{M_1M_2}=\{-1-2;0-3\}=\{-3;-3\} \text{ yoki } A=-3,\ B=-3.$$

Izlanayotgan to'g'ri chiziq tenglamasini (2.2.1) formula bilan topamiz:

$$-3(x-(-1))-3(y-0)=0$$

yoki

$$x+y+1=0.$$

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi

(1) tenglamani l to'g'ri chiziqda yotuvchi barcha nuqtalarning koordinata-lari qanoatlantiradi. Bu tenglamani

$$\boxed{Ax+By+C=0} \qquad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $C=-(Ax_0+By_0)$ – ozod had; $A^2+B^2\neq 0$.

(2) tenglamaga *to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi* deyiladi. Bunda $\bar{n}=\{A;B\}$ vektor to'g'ri chiziqning normal vektori bo'ladi.

Shunday qilib, x,y o'zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi tekislikdagi biror to'g'ri chiziqni ifodalaydi va aksincha, tekislikdagi har qanday to'g'ri chiziq x,y o'zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi.

To'g'ri chiziqning umumiy tenglamasini tekshiramiz, ya'ni unung xususiy hollarini ko'rib chiqamiz:

1) $A=0$ da (2) tenglama $By+C=0$ ko'rinishga keladi. Bunda to'g'ri chiziqning $\bar{n}=\{0;B\}$ normal vektori Ox o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu sababli to'g'ri chiziq Ox o'qqa parallel, Oy o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu kabi $B=0$ da kelib chiqadigan $Ax+C=0$ to'g'ri chiziq Oy o'qqa parallel, Ox o'qqa perpendikular bo'ladi;

2) $C=0$ da (2) tenglama $Ax+By=0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamani $O(0;0)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, to'g'ri chiziq koordinatalar boshidan o'tadi;

3) $A=0$ va $C=0$ da (2) tenglamadan $y=0$ kelib chiqadi. Bu to'g'ri chiziq Ox o'qda yotadi. Shu kabi $B=0$ va $C=0$ da hosil bo'ladigan $x=0$ to'g'ri chiziq Oy o'qda yotadi.

Misol

a ning qanday qiymatlarida $(a^2+4a)x+(a-5)y-2a+4=0$ to‘g‘ri chiziq: 1) Ox o‘qqa parallel bo‘ladi; 2) Ox o‘qqa perpendikular bo‘ladi;

3) koordinatalar boshidan o‘tadi. Misolning shartiga ko‘ra: $A=a^2+4a$, $B=a-5$, $C=-2a+4$. U holda:

1) $a^2+4a=0$ yoki $a=-4$, $a=0$ da $A=0$, ya’ni berilgan to‘g‘ri chiziq Ox o‘qqa parallel bo‘ladi.

2) $a-5=0$ yoki $a=5$ da $B=0$ va berilgan to‘g‘ri chiziq Ox o‘qqa perpendikular bo‘ladi.

3) $-2a+4=0$ yoki $a=2$ da $C=0$ bo‘ladi. Demak, $a=2$ da to‘g‘ri chiziq koordinatalar boshidan o‘tadi.

To‘g‘ri chiziqning kanonik tenglamasi

$M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan o‘tuvchi va $\vec{s}=\{p;q\}$ vektorga parallel bo‘lgan l to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Buning uchun l to‘g‘ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olib, $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0\}$ vektorni yasaymiz (1-shakl). Bunda $\vec{s}$ va $\overline{M_0M}$ vektorlar kollinear bo‘ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan quyidagini topamiz:

$$\boxed{\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}} \qquad (3)$$

(3) tenglamaga to‘g‘ri *chiziqning kanonik tenglamasi* (yoki *berilgan nuq-tadan o‘tuvchi va berilgan vektorga parallel to‘g‘ri chiziq tenglamasi*) deyiladi. To‘g‘ri chiziqqa parallel bo‘lgan (yoki to‘g‘ri chiziqda yotuvchi) nolga teng bo‘lmagan har qanday vektorga to‘g‘ri chiziqning *yo‘naltiruvchi vektori* deyiladi.

Demak, $\vec{s}=\{p;q\}$ vektor (3) to‘g‘ri chiziqning yo‘naltiruvchi vektori bo‘ladi.

To‘g‘ri chiziqning parametrik tenglamalari

(3) tenglamada $\frac{x-x_0}{p}=\frac{y-y_0}{q}=t$, $t\in(-\infty;+\infty)$ belgilash kiritamiz. Bundan

$$\boxed{\begin{aligned} x&=x_0+tp,\\ y&=y_0+tq \end{aligned}} \qquad (4)$$

tenglamalar kelib chiqadi, bu yerda t – parametr.

(4) tenglamalarga *to'g'ri chiziqning parametrik tenglamalari* deyiladi.

To'g'ri chiziqning vektor tenglamasi

Ma'lumki, tekislikdagi chiziqning ikkita parametrik (skalyar) tenglamalarini bitta vektor tenglama bilan berish mumkin.

Demak, (4) tenglamalar sistemasini

$$\boxed{\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}} \qquad (5)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $\vec{r}=\{x;y\}$, $\vec{r}_0=\{x_0;y_0\}$ – mos ravishda 1-shaklda tasvirlangan $M(x;y)$, $M_0(x_0;y_0)$ nuqtalarning radius vektorlari; $\vec{s}=\{p;q\}$ – to'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi vektori.

(5) tenglamaga *to'g'ri chiziqning vektor tenglamasi* deyiladi.

Misol. $M(-2;4)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{s}=\{1;-3\}$ vektorga parallel to'g'ri chiziqning kanonik, parametrik va vektor tenglamalarini tuzamiz. Buning uchun to'g'ri chiziqning (3), (4) va (5) tenglamalaridan foydalanamiz:

$$\frac{x+2}{1}=\frac{y-4}{-3};$$

$$x=-2+t, \quad y=4-3t, \quad t\in T;$$

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{s}, \quad r_0=\{-2:4\}.$$

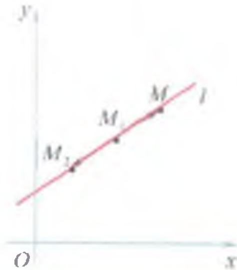
Berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

Berilgan ikki $M_1(x_1;y_1)$ va $M_2(x_2;y_2)$ nuqtadan o'tuvchi l to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Buning uchun l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olib, $\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1\}$ va $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1\}$ vektorlarni yasaymiz. Bunda $\overline{M_1M}$ va $\overline{M_1M_2}$ vektorlar kollinear bo'ladi. (2-shakl). Shu sababli

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}} \qquad (6)$$

bo'ladi.

(6) tenglamaga *berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* deyiladi.



2-shakl

To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Ox va Oy o'qlaridan a va b ga teng kesmalar ajratuvchi, ya'ni $M_1(a;0)$ va $M_2(0;b)$ nuqtalardan o'tuvchi l to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Buning uchun $M_1(a;0)$ va $M_2(0;b)$ nuqtalarning koordinatalarini (6) tenglamaga qo'yamiz:

$$\frac{x-a}{0-a}=\frac{y-0}{b-0}.$$

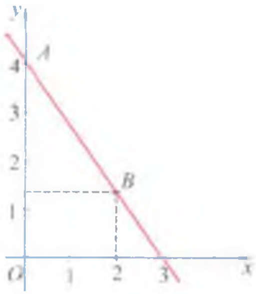
Bundan

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}. \qquad (7)$$

(7) tenglamaga *to'gri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasi* deyiladi.

Misol $4x+3y-12=0$ tenglama bilan berilgan to'g'ri chiziqni chizmada tasvirlaymiz. Tekislikdagi to'g'ri chiziqni chizish uchun uning ikkita nuqtasini bilish etarli bo'ladi.

To'g'ri chiziq tenglamasida, masalan $x=0$ deb, $y=4$ni, ya'ni $A(0;4)$ nuqtani va shu kabi $B\left(2;\frac{4}{3}\right)$ nuqtani topamiz. Bu nuqtalarni tutashtirib, berilgan tenglamaga mos to'g'ri chiziqni chizamiz 3-hakl.

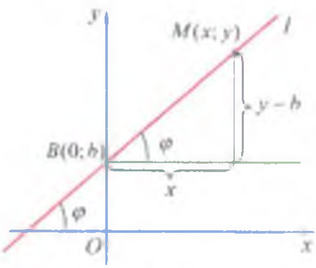


3-shak

Bu masalani boshqacha, ya'ni to'g'ri chiziq tenglamasini kesmalarga nisbatan tenglamaga keltirib yechish mumkin. Buning uchun tenglamaning ozod hadi (-12)ni o'ng tomonga o'tkazamiz va hosil bo'lgan tenglikning har ikkala tomonini 12 ga bo'lamiz:

$$4x+3y=12,\quad \frac{4x}{12}+\frac{3y}{12}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x}{3}+\frac{y}{4}=1.$$

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziq Ox o'qidan o'ng tomonga koordinatalar boshiga nisbatan 3 ga teng kesma, Oy o'qidan esa koordinatalar boshiga nisbatan yuqoriga 4 ga teng kesma ajratadi (4-shakl).



4-shakl

To'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi

Ox o'qning musbat yo'nalishdan berilgan to'g'ri chiziqqa soat strelkasiga teskari yo'nalishda hisoblangan eng kichik φ burchakka *to'g'ri chiziqning og'ish burchagi* deyiladi.

Og'ish burchagining tangensiga, ya'ni $k=tg\varphi$ songa *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyenti* deyiladi.

Oy o'qdan b kesma ajratuvchi ($B(0;b)$ nuqtadan o'tuvchi) va burchak koeffitsiyenti k ga teng bo'lgan l to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Buning uchun l to'g'ri chiziqda yotuvchi ixtiyoriy $M(x;y)$ nuqtani olib, burchak tangensi ta'rifidan foydalanamiz (4-shakl):

$$\frac{y-b}{x}=tg\varphi$$

yoki

$$y=tg\varphi x+b.$$

Bundan

$$\boxed{y=kx+b}. \qquad (8)$$

Bu tenglamaga *to'g'ri chiziqning burchak koeffitsiyentli tenglamasi* deyiladi.

Berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi

$M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan o'tuvchi va k burchak koeffitsiyentga (berilgan yo'nalishga) ega bo'lgan l to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. To'g'ri chiziq $M_1(x_1;y_1)$ nuqtadan o'tgani sababli nuqtaning koordinatalari (8) tenglamani qanoatlantiradi: $y_1=kx_1+b.$ Bundan $b=y_1-kx_1$.

U holda (8) tenglamadan topamiz: $y=kx-kx_1+y_1$

yoki

$$\boxed{y-y_1=k(x-x_1)}. \qquad (9)$$

(9) tenglamaga *berilgan nuqtadan berilgan yo'nalish bo'yicha o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasi* (yoki *to'g'ri chiziqla r dastasi tenglamasi*) deyiladi.

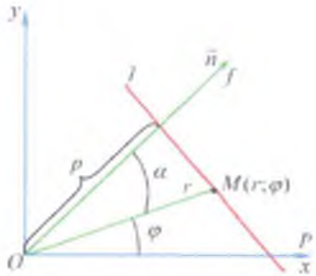
To'g'ri chiziqning qutb tenglamasi

To'g'ri chiziq tenglamasini qutb koordinatalarida topamiz. Bunda O qutbdan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa P va Cp qutb o'qi bilan berilgan to'g'ri chi-ziqqa perpendikular bo'lgan f o'q orasidagi α burchak berilgan bo'lsin (4-shakl).

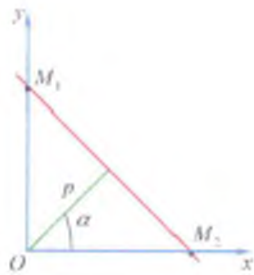
l chiziqning ixtiyoriy $M(r;\varphi)$ nuqtasi uchun $\Pr_f \overline{OM}=P$ bo'ladi.

Ikkinchi tomondan $\Pr_f \overline{OM}=|\overline{OM}|\cdot\cos(\alpha-\varphi)=r\cos(\alpha-\varphi)$.

U holda $\boxed{r\cos(\alpha-\varphi)=P}$. (10)



5-shakl



6-shakl

tenglamaga *to'g'ri chiziqrning qutb tenglamasi* deyiladi.

Misol. $M_1\left(5;\frac{\pi}{2}\right)$ va $M_2(5;0)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziqning qutb tenglamasini tuzamiz. To'g'ri chiziqning M_1 va M_2 nuqtalar orasidagi kesmasi katetlari 5 ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakning gipotenuzasi bo'ladi. Bunda qutbdan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa to'g'ri burchak uchidan gipotenuzaga tushirilgan balandlikdan iborat (6-shakl). Uning uzunligini (p ni) va yo'nalshini (α ni) topamiz:

$$p=\frac{|OM_1|\cdot|OM_2|}{\sqrt{|OM_1|^2+|OM_2|^2}}=\frac{5\cdot5}{\sqrt{5^2+5^2}}=\frac{5\sqrt{2}}{2},\quad \alpha=\frac{\pi}{4}.$$

Bundan (10) formulaga ko'ra

$$r\cos\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

To'g'ri chiziqning normal tenglamasi

(10) tenglamani to'g'ri burchakli koordinatalarda yozamiz. Buning uchun

Oxy koordinatalar sistemasining boshini qutb bilan va absissalar o'qini qutb o'qi bilan ustma-ust tushadigan qilib tanlaymiz (7-shakl). U holda O nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa p va Ox oq bilan berilgan to'g'ri chiziqqa

perpendikulyar bo'lgan f o'q ($\bar{n}$ normal vektor) orasidagi burchak α bo'ladi.

(10) tenglamadan topamiz: $r\cos\varphi\cos\alpha+r\sin\varphi\sin\alpha-p=0$.

To'g'ri burchakli va qutb koordinatalarini bog'lovchi formulalariga ko'ra

$$r\cos\varphi = x,\ \ r\sin\varphi = y.$$

Bundan

$$\boxed{x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0}. \tag{11}$$

(11) tenglamaga *to'g'ri chiziqning normal tenglamasi* deyiladi.

To'g'ri chiziqning (1)-(11) tenglamalaridan har birini qolganlaridan keltirib chiqarish mumkin.

Misol tariqasida (2) tenglamadan (11) tenglamani keltirib chiqaramiz. Buning uchun (2) tenglikning chap va o'ng tomonini *normallovchi ko'paytuvchi* deb ataluvchi $M = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ songa ko'paytiramiz.

Hosil bo'lgan $\frac{Ax+By+C}{\sqrt{A^2+B^2}} = 0$ tenglamada

$$\cos\alpha = \pm\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \ \sin\alpha = \pm\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}},\ \ p = \pm\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

belgilashlar kiritsak, (11) tenglama kelib chiqadi. Bunda M ko'paytuvchining ishorasi C koffitsiyentning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlanadi.

Misol.

To'g'ri chiziqning $5x - 12y + 8 = 0$ tenglamasini normal ko'rinishga keltiramiz. Buning uchun tenglamaning chap va o'ng tomonini $M = -\frac{1}{\sqrt{5^2+(-12)^2}} = -\frac{1}{13}$ (chunki $C > 0$) soniga ko'paytiramiz.

Bundan

$$-\frac{5x}{13} + \frac{12y}{13} - \frac{8}{13} = 0,$$

bu yerda $\cos\alpha = -\frac{5}{13},\ \ \sin\alpha = \frac{12}{13},\ \ p = \frac{8}{13}.$

9.2. Tekislikda ikki to'g'ri chiziqning o'zaro joylashishi

Ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak

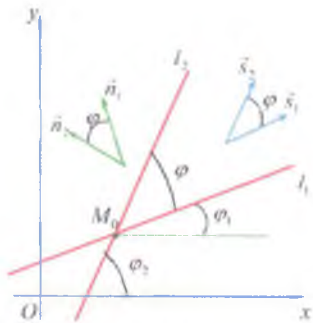
Tekislikdagi ikki l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak φ bo'lsin. Bu burchak to'g'ri chiziq tenglamalarining berilishiga ko'ra turli formulalar bilan aniqlanishi mumkin.

1.To‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad \text{va} \quad A_2x+B_2y+C_2=0$$

bilan berilgan bo‘lsin.

Bunda to‘g‘ri chiziqlarning $\vec{n}_1=\{A_1;B_1\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2\}$ normal vektorlari orasidagi burchak to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakka teng, ya’ni $\varphi=(l_1\hat{,}l_2)=(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2)$ bo‘ladi (7-shakl).



7-shakl

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan topamiz:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{n}_1\vec{n}_2}{|\vec{n}_1|\cdot|\vec{n}_2|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.} \quad (12)$$

2. To‘g‘ri chiziqlar kanonik tenglamalari

$$\frac{x-x_0}{p_1}=\frac{y-y_0}{q_1} \quad \text{va} \quad \frac{x-x_0}{p_2}=\frac{y-y_0}{q_2}$$

bilan berilgan bo‘lsin. Bunda $\vec{s}_1=\{p_1;q_1\}$, $\vec{s}_2=\{p_2;q_2\}$ bo‘ladi.

U holda $\varphi=(l_1\hat{,}l_2)=(\vec{s}_1\hat{,}\vec{s}_2)$ (7-shakl)

ekanini hisobga olib, topamiz:

$$\boxed{\cos\varphi=\frac{\vec{s}_1\vec{s}_2}{|\vec{s}_1|\cdot|\vec{s}_2|}=\frac{p_1p_2+q_1q_2}{\sqrt{p_1^2+q_1^2}\sqrt{p_2^2+q_2^2}}.} \quad (13)$$

3. To‘g‘ri chiziqlar burchak koffitsiyentli

$$y=k_1x+b_1 \quad \text{va} \quad y=k_2x+b_2$$

tenglamalari bilan berilgan bo‘lsin.

7-shaklga ko‘ra $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Bundan

$$tg\varphi = tg(\varphi_2 - \varphi_1), \quad tg\varphi = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 tg\varphi_1}$$

yoki

$$\boxed{tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}} \quad (14)$$

kelib chiqadi. Agar bunda to‘g‘ri chiziqlardan qaysi biri birinchi va qaysi biri ikkinchi ekani ko‘rsatilmasdan ular orasidagi o‘tkir burchakni topish talab qilinsa, u holda (14) formulaning o‘ng tomoni modulga olinadi, ya’ni

$$\boxed{tg\varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|}. \quad (15)$$

Shunday qilib, to‘g‘ri chiziqlar tenglamalarining ko‘rinishiga qarab ular

orasidagi burchak (12)-(14) formulalardan biri bilan topiladi.

Misol

$y = -4x + 1$ va $5x - 3y - 7 = 0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni topamiz.

Birinchi tenlamaga ko‘ra $k_1 = -4$. Ikkinchi tenglamadan topamiz:

$$5x - 3y - 7 = 0, \quad y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}, \text{ bunda } k_2 = \frac{5}{3}.$$

U holda

$$tg\varphi = \frac{\frac{5}{3} - (-4)}{1 + (-4)\cdot\frac{5}{3}} = -1. \quad \text{Demak, } \varphi = \frac{3\pi}{4}.$$

Ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlik sharti

Tekislikdagi ikki to‘g‘ri chiziqning perpendikularlık shartini ikki to‘g‘ri chiziq orasidagi burchakni topish formulalaridan keltirib chiqaramiz.

$l_1 \perp l_2$ bo‘lsin. U holda $\cos\varphi = 0$ va (12) tenglikdan topamiz:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 = 0} \quad (16)$$

Shu kabi (13) tenglikdan

$$\boxed{p_1p_2 + q_1q_2 = 0} \quad (17)$$

kelib chiqadi.

(14) tenglikdan $ctg\varphi=\frac{1+k_1k_2}{k_1-k_2}$. U holda $l_1\perp l_2$ da $ctg\varphi=0$ yoki

$$\boxed{1+k_1k_2=0} \tag{18}$$

bo'ladi.

Demak, to'g'ri chiziqlar tenglamalarining ko'rinishiga qarab ularning
perpendikular bo'lishi (16)-(18) shartlardan biri bilan aniqlanadi.

Ikki to'g'ri chiziqning parallellik sharti

l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsin. U holda $\vec{n}_1=\{A_1;B_1\}$ va $\vec{n}_2=\{A_2;B_2\}$
vektorlar kollinear bo'ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ikki to'g'ri chiziqning parallellik shartini topamiz:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}} \tag{19}$$

Agar l_1 va l_2 to'g'ri chiziqlar parallel bo'lsa, u holda $\vec{s}_1=\{p_1;q_1\}$ va $\vec{s}_2=\{p_2;q_2\}$
vektorlar kollinear bo'ladi. Bundan

$$\boxed{\frac{p_1}{p_2}=\frac{q_1}{q_2}} \tag{20}$$

$l_1\parallel l_2$ bo'lganida $tg\varphi=0$ bo'ladi. U holda (14) tenglikdan topamiz:

$$\boxed{k_1=k_2} \tag{21}$$

Shunday qilib, (19)-(21) shartlardan biri to'g'ri chiziqlar tenglamalarining
berilishiga ko'ra ularning parallel bo'lishini aniqlaydi.

Misol

$M_0(2;1)$ nuqtadan o'tuvchi va $2x+3y+4=0$ to'g'ri chiiqqa perpendikular to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Bunda to'g'ri chiziq tenglamasini $Ax+By+C=0$ ko'rinishda izlaymiz.

To'g'ri chiziq $M_0(2;1)$ nuqtadan o'tgani sababli $2A+B+C=0$ va $2x+3y+4=0$ to'g'ri chiiqqa perpendikular bo'lgani uchun $2A+3B=0$ bo'ladi.

Bu tenglamalarni birgalikda yechib topamiz: $A=-\frac{3}{4}C,\ B=\frac{1}{2}C.$

A va B koffitsiyentlarni izlanayotgan tenglamaga qo'yamiz:

$$-\frac{3}{4}Cx+\frac{1}{2}Cy+C=0.$$

Bundan

$$(-3x+2y+4)C=0 \quad \text{yoki} \quad 3x-2y-4=0.$$

Ikki to'g'ri chiziqning kesishishi

To'g'ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ va } A_2x+B_2y+C_2=0$$

bilan berilgan bo'lsin va $M_0(x_0;y_0)$ nuqtada kesishsin (38-shakl).

U holda $M_0(x_0;y_0)$ nuqtaning koordinatalari har ikkala tenglamani qanoatlantiradi. Shu sababli ikki to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasi koordinatalari

$$\boxed{\begin{cases} A_1x_0+B_1y_0+C_1=0, \\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0 \end{cases}} \tag{22}$$

sistemadan topiladi.

Bunda $M_0(x_0;y_0)$ kesishish nuqtasi orqali o'tuvchi to'g'ri chiziqlar dastasi

$$\boxed{A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0} \tag{23}$$

tenglama bilan aniqlanadi, bu yerda λ – sonli ko'paytuvchi.

Misol

$2x-y-2=0$ a to'g'ri chiziq bo'ylab yo'naltirilgan yorug'lik nuri $x-2y+2=0$ to'g'ri chiziqda akslanadi (qaytadi). Qaytuvchi nur yo'nalgan to'g'ri chiziq tenglamasini tuzamiz. Yorug'lik nurining qaytish nuqtasi $2x-y-2=0$ va $x-2y+2=0$ to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi bo'ladi.

Bu nuqta $M(x;y)$ bo'lsin. Uni quyidagi sistemadan topamiz:

$$\begin{cases} 2x-y-2=0, \\ x-2y+2=0. \end{cases}$$

Bundan $M(2;2)$. Yorug'lik nuri akslanuvchi va yo'nalgan to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensini topamiz:

$$tg\alpha=\frac{\frac{1}{2}-2}{1+\frac{1}{2}\cdot 2}=-\frac{3}{4}.$$

Bu son yorug'lik nuri qaytuvchi va akslanuvchi to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak tangensiga teng bo'ladi.

U holda

$$-\frac{3}{4}=\frac{k-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}\cdot k},$$

bu yerda k – nur qaytuvchi to‘g‘ri chiziqning burchak koeffitsiyenti. Bundan

$k=-\frac{2}{11}$. Demak, izlanayotgan to‘g‘ri chiziq $M(2;2)$ nuqtadan o‘tadi va $k=-\frac{2}{11}$ bo‘ladi.

Ikki to‘g‘ri chiziqning ustma-ust tushishi

To‘g‘ri chiziqlar umumiy tenglamalari

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \text{ va } A_2x+B_2y+C_2=0$$

bilan berilgan bo‘lsin va ustma-ust tushsin. Bunda: birinchidan $l_1 \parallel l_2$ bo‘ladi va $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\lambda$ tengliklardan $(A_1-\lambda A_2)=0$, $(B_1-\lambda B_2)=0$ kelib chiqadi; Ikkinchidan l_1 to‘g‘ri chiziqning har bir nuqtasi, jumladan $M_0(x_0;y_0)$ nuqtasi, l_2 to‘g‘ri chiziqda ham yotadi, ya’ni

$$A_1x_0+B_1y_0+C_1=0,\ A_2x_0+B_2y_0+C_2=0$$

bo‘ladi. Bu tengliklarning ikkinchisini λ ga ko‘paytiramiz va birinchidan ayiramiz: $(A_1-\lambda A_2)x_0+(B_1-\lambda B_2)+(C_1-\lambda C_2)=0$. U holda $\frac{C_1}{C_2}=\lambda$ bo‘ladi. Bundan to‘g‘ri chiziqlarning ustma-ust tushush shartini ifodalovchi

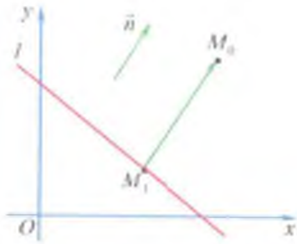
$$\boxed{\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}}. \tag{24}$$

tengliklar kelib chiqadi.

Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa

Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqa tushirilgan perpendikularning uzunligiga nuqtadan *to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0;y_0)$ nuqta va $Ax+By+C=0$ tenglama bilan l to‘g‘ri chiziq berilgan bo‘lsin. M_0 nuqtadan l to‘g‘ri chiziqqa tushiurilgan perpendikularning asosini $M_1(x_1;y_1)$ bilan belgilaymiz (8-shakl).



8-shakl

U holda $\overline{M_1M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1\}$ va $M_1(x_1; y_1)$ nuqta l to'g'ri chiziqda yotgani sababli $Ax_1 + By_1 + C = 0$, ya'ni $C = -Ax_1 - By_1$ bo'ladi.

M_0 nuqtadan l to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani vektorning o'qdagi proeksiyasining xossalaridan foydalanib topamiz:

$$d = \left|\Pi p_{\vec{n}} \overline{M_1M_0}\right| = \frac{\left|\overline{M_1M_0} \cdot \vec{n}\right|}{|\vec{n}|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B|}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_0 + By_0 - Ax_1 - By_1|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Shunday qilib, *nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa*

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}} \tag{25}$$

formula bilan topiladi.

Misol.

$3x + 4y - 4 = 0$ va $6x + 8y + 5 = 0$ parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi masofani topamiz. Buning uchun birinchi to'g'ri chiziqda ixtiyoriy $M(x; y)$ nuqtani olamiz. Masalan, agar $x = 0$ bo'lsa, u holda $y = 1$ bo'ladi, ya'ni $M(0;1)$. U holda berilgan parallel to'g'ri chiziqlar orasidagi d masofa $M(0;1)$ nuqtadan ikkinchi $6x + 8y + 5 = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofaga teng bo'ladi. Uni (25) formula bilan hisoblaymiz:

$$d = \frac{|6 \cdot 0 + 8 \cdot 1 + 5|}{\sqrt{6^2 + 8^2}} = \frac{13}{10}(ub).$$

O‘z-o‘zini tekshirishuchun savol va topshiriqlar

1. Tekislikdagi chiziqning tenglamasi qanday ko‘rinishda yoziladi?

2. To‘g‘ri chiziqlarning o‘zaro joylashuvini ifodalovchi munosabatlar.

3. Normallovchi ko‘paytuvchi nima?

5. Ikkita to‘g‘ri chiziqlar orasidagi masofa.

6. To‘g‘ri chiziqlar dastasining tenglamasini ko‘rinishi.

7. Koordinata o‘qlarining tenglamalari.

8. $2x+2y-5=0$ to‘g‘ri chiziq Ox o‘qining musbat yo‘nalishi bilan qanday burchak hosil qiladi?

9.To‘g‘ri chiziqning 8x-3y+2=0 umumiy tenglamasi berilgan. Uning parametrik tenglamasini yozing.

10.Rombning ikki qarama-qarshi uchlarining koordinatalari berilgan, $A(1;-4)$

$C(-1;3)$. Romb diogonallarining tenglamasini yozing.

11.Uchlari A(-3,-2), B(1,2), C(4,-5) nuqtalarda bo‘lgan uchburchak berilgan (to‘g‘ri burchakli dekart koordinatalar sistemasida):

1) Uchburchakni yasang.
2) Uchburchak tomonlari uzunliklarini hisoblang.
3) Uchburchak tomonlari tenglamalarini yozing.
4) A uchidan chiqqan mediana yotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini yozing.
5) A uchidan chiqqan balandlik yotgan to‘g‘ri chiziq tenglamasini tuzing.
6) Uchburchak yuzini hisoblang.

12. To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchakni toping:

a) $\begin{cases} 3x+2y-1=0 \\ 6x+4y+9=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x-4y=0 \\ 8x+6y=11 \end{cases}$

13. $\frac{x+2\sqrt{5}}{4}+\frac{y-2\sqrt{5}}{2}=0$ to‘g‘ri chiziq berilgan. To‘g`ri chiziqning umumiy tenglamasi yozing.

14. $3x-2y+7=0$, $6x-4y-9=0$, $6x+4y-5=0$, $2x+3y-6=0$ to‘g‘ri chiziqlar orasidan parallel va perpendikulyar to‘g‘ri chiziqlarni aniqlang.

15. Uchburchak AB tomonining tenglamasi $x-3y+3=0$ va AC tomonining tenglamasi $x+3y+3=0$ hamda AD balandligining asosi $D(-1;3)$ berilgan bo‘lsa, uchburchakning ichki burchaklari topilsin.

16. Uchlari $A(-2;0)$, $B(2;4)$ va $C(4;0)$ bo'lgan uchburchak berilgan. Uchburchak tomonlari, AE medianasi, BD balandlik tenglamalarini, AE mediana uzunligini toping.

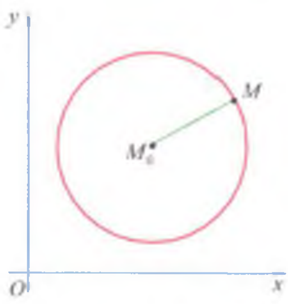
17. $O(0;0)$ va $A(-3;0)$ nuqtalar berilgan OA kesmada parallelogramm yasalgan, uning diogonallari $B(0;2)$ nuqtada kesishadi. Parallelogramm tomonlari va diogonallari tenglamasini yozing.

9.3.Ikkinchi tartibli egri chiziqlar. Aylana. Ellips

Oxy koordinatalar sistemasida x, y o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi chiziq (egri chiziq) *tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziq deyiladi.* Tekislikdagi ikkinchi tartibli chiziqlarga aylana, ellips, giperbola va parabola kiradi.Bu to'rtta chiziqlar va ularning buzilish holatlari, ya'ni ikkinchi darajali tenglama bo'sh to'plamni (mavhum egri chiziqni), nuqtani, parallel to'g'ri chiziqlar juftini, kesishuvchi to'g'ri chiziqlar juftini aniqlaydigan holatlar ikkinchi tartibli algebraik tenglamalar bilan aniqlanuvchi barcha chiziqlarni to'la-to'kis ifodalaydi.

Aylana

1-ta'rif. Markaz deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi tekislik nuqtalarining geometrik o'rniga *aylana* deyiladi. $M_0(x_0;y_0)$ nuqtadan R masofada yotuvchi tekislik nuqtalarini qaraymiz. Bu nuqtalardan biri $M(x;y)$ nuqta bo'lsin (1-shakl).



1-shakl

Aylananing ta'rifiga ko'ra $|M_0M|=R$.

Bundan

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R$$

yoki

$$\boxed{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2} \qquad (1)$$

(1) tenglamaga aylananing kanonik tenglamasi deyiladi. Bunda $M_0(x_0;y_0)$ nuqta aylana *markazi*, R masofa aylana *radiusi* deb ataladi.

Xususan, $x_0=0, y_0=0$ da (2.3.1) tenglamadan topamiz:

$$\boxed{x^2+y^2=R^2} \qquad (2)$$

Bu tenglama markazi koordintalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng aylanani aniqlaydi.

Misol

Koordinatalari $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi $M(x;y)$ nuqta aylana nuqtasi bo'lishini ko'rsatamiz. Buning uchun $M(x;y)$ nuqta koordinatalarining har ikkala tomonini kvadratga ko'taramiz va hadlab qo'shamiz:

$$x^2+y^2=R^2\cos^2 t+R^2\sin^2 t=R^2(\sin^2 t+\cos^2 t)=R^2$$

yoki

$$x^2+y^2=R^2.$$

Demak, koordinatalari $x=R\cos t$, $y=R\sin t$ tenglamalar bilan aniqlanuvchi

$M(x;y)$ nuqta markazi koordintalar boshida yotuvchi va radiusi R ga teng

aylanada yotadi. Aylanani aniqlovchi ushbu

$$\boxed{\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \ t\in[0;2\pi] \end{cases}} \qquad (3)$$

tenglamalar sistemasiga *aylananing parametrik tenglamalari* deyiladi.

Misol

$x^2+y^2+8x-4y-5=0$ tenglama bilan aniqlanuvchi aylananing markazi va radiusini topamiz. Buning uchun tenglamaning chap tomonida x va y ga nisbatan to'la kvadrat ajratamiz:

$$x^2+8x+16-16+y^2-4y+4-4-5=0$$

yoki

$$(x+4)^2+(y-2)^2=5^2.$$

Bu tenglama markazi $M_0(-4;2)$ nuqtada yotuvchi va radiusi $R=5$ ga teng aylanani ifodalaydi.

Ellips

2-ta'rif. Har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalarning yig‘indisi o‘zgarmas miqdorga teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga *ellips* deyladi.

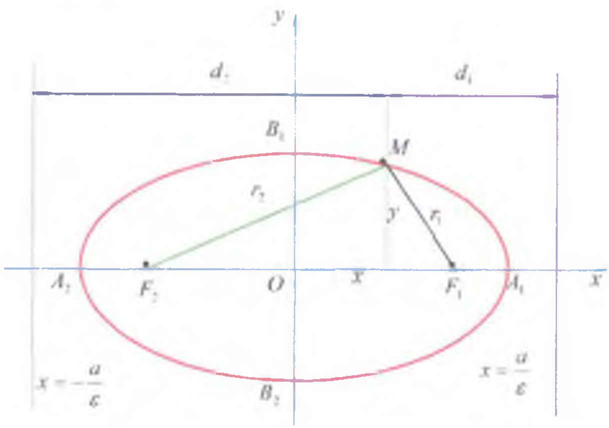
F_1 va F_2 ellipsning fokuslari, M ellipsning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. $|F_1F_2|=2c$, $|F_1M|=r_1$, $|F_2M|=r_2$ belgilashlar kiritamiz.

Ellipsning ta’rifiga ko‘ra

$$\boxed{r_1+r_2=2a,} \tag{4}$$

bu yerda a – o‘zgarmas son $(2a>2c)$.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o‘q fokuslardan o‘tadigan va Oy o‘q $|F_1F_2|$ kesmani teng ikkiga bo‘ladigan qilib tanlaymiz (2-shakl). U holda $M(x;y)$, $F_2(-c;0)$, $F_1(c;0)$ bo‘ladi. Ikki nuqta orasidagi masofa formulasiga ko‘ra



2-shakl

$$r_1=\sqrt{(x-c)^2+y^2}\,, \quad r_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,.$$

r_1 va r_2 ni (2.3.4) tenglikka qo‘yib, almashtirishlar bajaramiz:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2}+\sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a,$$

$$(x-c)^2+y^2=(2a-\sqrt{(x+c)^2+y^2})^2,$$

$$x^2-2xc+c^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x+c)^2+y^2}+x^2+2xc+c^2+y^2,$$

$$a\sqrt{(x+c)^2+y^2}=a^2+xc,$$

$$a^2x^2+2a^2xc+a^2c^2+a^2y^2=a^4+2a^2xc+x^2c^2,$$

$$(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2).$$

$b^2=a^2-c^2$ (chunki $a>c$) belgilash kiritib, topamiz:

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$$

yoki

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.} \qquad (5)$$

(5) tenglamaga *ellipsning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Misol. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ tengliklar ellipsning nuqtasini aniqlashini ko'rsatamiz. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ tengliklardan topamiz:

$\frac{x}{a}=\cos t,\ \frac{y}{b}=b\sin t$.

U holda $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\cos^2 t+\sin^2 t=1$ ya'ni $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$

Demak, $x=a\cos t,\ y=b\sin t$ tengliklar ellipsning nuqtasini aniqlaydi.Ellipsni aniqlovchi ushbu

$$\boxed{\begin{cases} x=a\cos t, \\ y=b\sin t,\ t\in[0;2\pi] \end{cases}} \qquad (6)$$

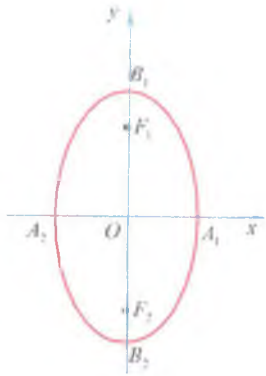
tenglamalar sistemasiga *ellipsning parametrik tenglamalari* deyiladi. Ellipsning shaklini uning (5) kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz. (5) tenglikda x va $y$ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun ellips Ox, Oy o'qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli (5) tenglamani $x\geq 0$, $y\geq 0$da (I-chorakda) tekshirish etarli bo'ladi.

I-chorakda (5) tenglamadan $y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ kelib chiqadi. Bunda x koordinata 0 dan a gacha o'sganida y koordinata b dan 0 gacha kamayadi. Ellipsning qolgan chorakdagi shaklini koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (3-shakl).

Ellipsda $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, $|A_1A_2|$, $|B_1B_2|$ kesmalarning $2a$, $2b$ uzunliklariga mos ravishda katta va kichik o'qlar, a, b sonlarga mos ravishda katta va kichik yarim o'qlar, $|F_1M|$, $|F_2M|$ kesmalarning r_1, r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.Ilipsning shakli $\frac{b}{a}$ nisbatga bog'liq bo'ladi, ammo ellipsning shaklini $\frac{c}{a}$ nisbat yordamida tekshirish qulaylikka ega.

$\varepsilon = \frac{c}{a}$ kattalikka *ellipsning ekstsentritsiteti* deyiladi. Bunda $0<\varepsilon<1$, chunki $0<c<a$.

$b^2 = a^2 - c^2$ dan $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\left(\frac{c}{a}\right)^2}$, ya'ni $\frac{b}{a} = \sqrt{1-\varepsilon^2}$. Demak, $\varepsilon \to 1$ da $\frac{b}{a} \to 0$, ya'ni b kichiklashib, ellips Ox o'qqa tomon siqilib boradi, aksincha $\varepsilon \to 0$ da $\frac{b}{a} \to 1$, ya'ni ellips aylanaga yaqinlashib boradi.



3-shakl

M nuqtadan d_1, d_2 masofada o'tuvchi va tenglamalari $x = \pm\frac{a}{\varepsilon}$ dan iborat bo'lgan to'g'ri chiziqlar *ellipsning direktrisalari* deb ataladi. Direktrisalar ushbu $\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = \varepsilon$ tengliklarni qanoatlantiradi.

Bu tengliklardan ellipsning fokal radiuslari uchun

$$r_1 = a - \varepsilon x, \quad r_2 = a + \varepsilon x$$

formulalar kelib chiqadi.

$b^2 = a^2 - c^2$ dan $a>b$ kelib chiqadi. Agar $a<b$ bo'lsa, u holda (5) tenglama uzunligi $2b$ ga teng katta o'qi Oy o'qida yotuvchi va uzunligi $2a$ ga teng kichik o'qi Ox o'qida yotuvchi ellipsni aniqlaydi (3-shakl).

Bu ellipsning fokuslari $F_1(0;c)$ va $F_2(0;-c)$ nuqtalarda yotadi, bu yerda $c = \sqrt{b^2 - a^2}$.

Agar $a=b$ bo'lsa, u holda (5) tenglamadan $x^2 + y^2 = a^2$ tenglama, ya'ni markazi koordinata boshida yotuvchi va radiusi a ga teng aylana tenglamasi kelib chiqadi. Demak, aylana ellipsning xususiy holi hisoblanadi.

Misol. $4x^2+9y^2=144$ ellipsning o‘qlari uzunliklarini, fokuslarining koordinatalarini va ekssentrisitetini topamiz. Buning uchun ellipsning tenglamasini kanonik ko‘rinishga keltiramiz:

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Bundan $a^2=36,\ b^2=16$. Demak, $a=6,\ b=4,\ 2a=12,\ 2b=8$. Shunday qilib ellips o‘qlarining uzunliklari mos ravishda 12 va 8 ga teng.

a va b ni bilgan holda c ni topamiz:

$$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{36-16}=2\sqrt{5}.$$

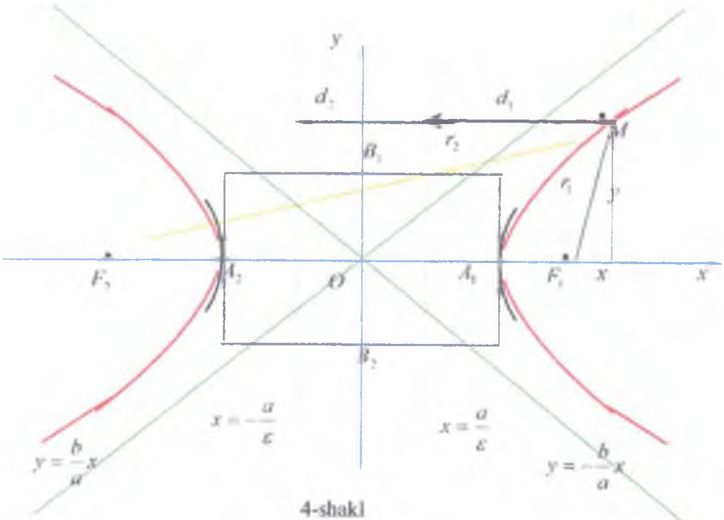
Bundan fokuslarning koordinatalarini va ekssentrisitetni topamiz:

$$F_{21}(2\sqrt{5};0),\ F_2(-2\sqrt{5};0);$$

$$\varepsilon=\frac{c}{a}=\frac{2\sqrt{5}}{6}=\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

Giperbola

3-ta’rif. Har biridan fokuslar deb ataluvchi berilgan ikki nuqtagacha bo‘lgan masofalar ayirmasining moduli o‘zgarmas miqdorga teng bo‘lgan tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga *giperbola* deyiladi.



4-shakl

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o'q F_1 va F_2 fokuslardan o'tadigan va Oy o'q $|F_1F_2|$ kesmani teng ikkiga bo'ladigan qilib tanlaymiz. 4-shakl. $M(x;y)$ giperbolaning ixtiyoriy nuqtasi bo'lsin. $|F_1F_2|=2c$, $|F_1M|=r_1$,

$|F_2M|=r_2$ belgilashlar kiritamiz. Ciperbolaning tarifiga ko'ra

$$\boxed{|r_1-r_2|=2a,} \qquad (7)$$

bu yerda $a-$ o'zgarmas son $(2a<2c)$.

(7) ifodada (4) ifodada bajarilgan almashtirishlar kabi almashtirishlar bajarib, quyidagi tenglamani keltirib chiqaramiz:

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,} \qquad (8)$$

bu yerda $b^2=c^2-a^2$. (8) tenglamaga *giperbolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.Giperbolaning shaklini uning (8) kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz.

(8) tenglikda x va y ning faqat juft darajalari qatnashgani uchun giperbola ellips kabi Ox, Oy o'qlarga va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo'ladi. Shu sababli (8) tenglamani $x\geq 0$, $y\geq 0$ da (I-chorakda) tekshiramiz. I-chorakda (8) tenglamadan $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ kelib chiqadi. Bunda $x\geq a$ va x koordinata 0 dan boshlab o'sishi bilan y koordinata ham o'sib boradi, ya'ni $x\to+\infty$ da

$y\to+\infty$ ($M(x;y)\to\infty$). $M(x;y)$ nuqta cheksizlikka qanday qilib intilishini ko'rsatish uchun koordinatalar boshidan o'tuvchi va burchak koeffitsiyenti $k=\frac{b}{a}$ ga teng bo'lgan $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqni qaraymiz. Bu chiziq ushbu xossaga ega: M nuqta giperbola bo'ylab harakat qilib koordinata boshidan cheksiz uzoqlashgani sari bu to'g'ri chiziqqa juda yaqinlashib boradi, lekin uni kesib o'tmaydi, ya'ni asimptotik yaqinlashadi.

Shunday qilib, giperbola I-chorakda $A_1(a;0)$ nuqtadan o'tib, $y=\frac{b}{a}x$ to'g'ri chiziqqa asimptotik yaqinlashgani holda o'ngga va yuqoriga qarab o'sib boradi.

Giperbolaning qolgan choraklardagi shaklini koordinata o'qlariga nisbatan simmetrik qilib chizamiz (4-shakl). Shunday qilib, giperbola ikki qismdan iborat bo'ladi. Bu qismlarga giperbolaning tarmoqlari deyiladi.

$y=\pm\frac{b}{a}x$ tenglama bilan aniqlanuvchi to'g'ri chiziqlarga *giperbolaning asimptotalari* deyiladi.

Giperbolada $A_1(a;0)$, $A_2(-a;0)$, $B_1(0;b)$, $B_2(0;-b)$ nuqtalarga uchlar, $|A_1A_2|$kesmaning $2a$ uzunligiga haqiqiy o'q, $|B_1B_2|$ kesmaning $2b$ uzunligiga mavhum o'q, a, b sonlarga mos ravishda haqiqiy va mavhum yaim o'qlar, $|F_1M|$, $|F_2M|$ kesmalarning r_1, r_2 uzunliklariga fokal radiuslar deyiladi.

$\varepsilon=\frac{c}{a}$ kattalikka *giperbolaning ekssentrisiteti* deyiladi. Bunda $\varepsilon>1$, chunki $c>a$.

$b^2=c^2-a^2$ dan $\frac{b}{a}=\sqrt{\left(\frac{c}{a}\right)^2-1}$, ya'ni $\frac{b}{a}=\sqrt{\varepsilon^2-1}$. Demak, ekstsentrisitet qanchalik kichik bo'lsa $\frac{b}{a}$ shunchalik kichik bo'ladi, ya'ni $\varepsilon\to 1$ da $\frac{b}{a}\to 0$ va giperbola haqiqiy o'qi tomon siqilib boradi, aksincha ε kattalashgan sayin $\frac{b}{a}$ ham kattalashib, giperbolaning tarmoqlari kengayib boradi.

M nuqtadan d_1 va d_2 masofada o'tuvchi , tenglamalari $x=\pm\frac{a}{\varepsilon}$ dan iborat to'g'qri chiziqlar giperbola*ning direktrisalari* deb ataladi. Direktrisalar ushbu

$$\frac{r_1}{d_1}=\frac{r_2}{d_2}=\varepsilon$$

tengliklarni qanoatlantiradi.

Bu tengliklardan giperbolaning fokal radiuslari uchun ushbu

$x>0$ bo'lganda $r_1=\varepsilon x-a$, $r_2=\varepsilon x+a$;

$x<0$ bo'lganda $r_1=-a-\varepsilon x$, $r_2=a-\varepsilon x$

formulalar kelib chiqadi. Yarim o'qlari teng bo'lgan giperbolaga *teng tomonli giperbola* deyiladi. Teng tomonli giperbola

$$\boxed{x^2-y^2=a^2} \qquad (9)$$

tenglama bilan aniqlanadi.

$x^2 - y^2 = a^2$ tenglamani koordinata o'qlarini $\alpha = -\frac{\pi}{4}$ burchakka burish orqali $y' = \frac{k}{x'}$, $k = \frac{a^2}{2}$ ko'rinishga keltirish mumkin. Bunda asimptotalar kooordinata o'qlaridan iborat bo'ladi. Demak, Ox va Oy o'qlar asimptota bo'lgan teng tomonli giperbola $y = \frac{k}{x}$ ko'rinishdagi tenglama bilan ifodalanadi.

Agar giperbolaning fokuslari Oy o'qida yotsa, u holda giperbola

$$\boxed{\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1} \qquad (10)$$

tenglama bilan aniqlanadi. Bunda giperbolaning ekstsentritsiteti $\varepsilon = \frac{c}{b}$ tenglik bilan, asimptotalari $y = \pm\frac{b}{a}x$ tenglamalar bilan, direktrisalari $y = \pm\frac{b}{\varepsilon}$ tenglamalar bilan topiladi. (8) va (10) tenglamalar bilan aniqlanuvchi giperbolalarga *qo'shma giperbolalar* deyiladi.

Misol

Ekssentrisiteti $\sqrt{2}$ ga teng va $M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ nuqtadan o'tuvchi giperbolaning kanonik tenglamasini tuzamiz. Uning yarim oqlari uzunligini, fokuslari koordinatalarini topamiz va asimptotalarining, direktrisalarining tenglamalarini tuzamiz.

Ma'lumki, $\varepsilon = \frac{c}{a} = \sqrt{2}$ yoki $c^2 = 2a^2$. Ikkinchi tomondan $c^2 = a^2 + b^2$. Bundan $a^2 = b^2$. Demak izlanayotgan giperbola teng tomonli.

$M(\sqrt{3};\sqrt{2})$ nuqtada giperbolada yotadi. Shu sababli $\frac{(\sqrt{3})^2}{a^2} - \frac{(\sqrt{2})^2}{a^2} = 1$, ya'ni $a^2 = 1$. Demak, izlanayotgan giperbolaning kanonik tenglamasi

$$x^2 - y^2 = 1.$$

Bu tenglama bilan aniqlanuvchi giperbolaning yarim o'qlari $a = b = 1$ uzunlikka, fokuslari $F_1(\sqrt{2};0)$, $F_2(-\sqrt{2};0)$ koordinatalarga ega bo‘ladi. Bu giperbolaning asimptotalari $y = \pm x$ tenglamalar bilan, direktrisalari $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$ tenglamalar bilan aniqlanadi.

Misol. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ giperbolaning chap fokusi bilan bu giperbolaga qo‘shma giperbolaning o‘ng fokusi orasidagi masofani topamiz. Buning uchun $c^2 = a^2 + b^2$ tenglikdan foydalanamiz: $c^2 = 9 + 16 = 25$, $c = 5$. U holda berilgan giperbola uchun $F_1(5;0)$, $F_2(-5;0)$ va qo‘shma giperbola uchun $F_1'(0;5)$, $F_2'(0;-5)$ bo‘ladi. Bundan $|F_1F_2'|$ $= \sqrt{(-5-0)^2 + (0-5)^2} = 5\sqrt{2}(u.b)$.

Parabola

4-ta’rif. Fokus deb ataluvchi berilgan nuqtadan va direktrisa deb ataluvchi berilgan to‘g‘ri chiziqdan teng uzoqlikda yotuvchi tekislik nuqtalarining geometrik o‘rniga *parabola* deyiladi.

Parabolaning fokusidan direktrisasigacha bo‘lgan masofani p $(p > 0)$ bilan belgilaymiz. p ga *parabolaning parametri* deyiladi.

Oxy koordinatalar sistemasini Ox o‘q direktrisaga perpendikulyar va fokusdan o‘tadigan, $O(0;0)$ nuqta fokus va direktrisaning o‘rtasida yotadigan qilib tanlaymiz. Tanlangan koordinatalar sistemasida fokus $F\left(\frac{p}{2};0\right)$, direktrisa tenglamasi $x = -\frac{p}{2}$ bo‘ladi (4-shakl). $M(x;y)$ parabolaning ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. M nuqtaning direktrisadagi proyektsiyasini N bilan belgilaymiz.

Parabolaning ta'rifiga ko‘ra $|NM| = |MF|$.

Bundan

$$\left|x + \frac{p}{2}\right| = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2},$$

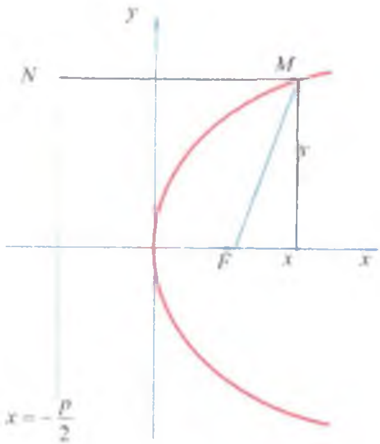
$$x^2 + px + \frac{p^2}{4} = x^2 - px + \frac{p^2}{4} + y^2$$

yoki

$$\boxed{y^2 = 2px.} \qquad (11)$$

(11) tenglamaga *parabolaning kanonik tenglamasi* deyiladi.

Parabolaning shaklini uning (11) kanonik tenglamasidan foydalanib aniqlaymiz. (11) tenglikda y ning juft darajasi qatnashgani uchun parabola Ox o‘qqa va $O(0;0)$ nuqtaga nisbatan simmetrik bo‘ladi. Shu sababli (11) tenglamani $x \geq 0$, $y \geq 0$da tekshiramiz.I-chorakda (1) tenglamadan $y = \sqrt{2px}$ kelib chiqadi. Bunda $x \geq 0$ va x koordinata 0 dan boshlab o‘sishi bilan y koordinata ham o‘sib boradi, ya’ni $x \to +\infty$ da $y \to +\infty$ ($M(x;y) \to \infty$). Shunday qilib, $y \geq 0$ bo‘lganda $M(x;y)$ nuqta $O(0;0)$ nuqtadan chiqib x o‘sishi bilan o‘ngga va yuqoriga o‘sib boradi. Parabolaning $y \leq 0$ dagi shaklini Ox o‘qiga simmetrik qilib chizamiz (5-shakl).



5-shakl

Bunda $O(0;0)$ nuqta parabolaning uchi, Ox o‘q parabo-laning o‘qi deb ataladi. Parabolaning *ektsentrisiteti* $\varepsilon = \frac{|NM|}{|MF|} = 1$ ga teng bo‘ladi, *direktrisasi* $x = -\frac{p}{2}$ tenglama bilan aniqlanadi.

Misol. Uchi koordinatalar boshida yotgan va quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi parabolaning kanonik tenglamasini tuzamiz:

1) Ox o‘qqa ega, o‘ng yarim tekislikda joylashgan va parametri $p = 3$;

2) Ox o‘qqa ega, chap yarim tekislikda joylashgan va parametri $p = \frac{1}{2}$;

3) Oy o'qqa ega, yuqori yarim tekislikda joylashgan va parametri $p=\frac{1}{4}$;

4) Oy o'qqa ega, quyi yarim tekislikda joylashgan va parametri $p=3$.

1) Ox o'qqa ega va o'ng yarim tekislikda yotuvchi parabola tenglamasi $y^2=2px$ bo'ladi. Bundan

$$y^2=6x.$$

Keyingi parabolalarning tenglamalarini shu kabi topamiz:

$$2)\ y^2=-x;\quad 3)\ x^2=\frac{1}{2}y;\quad 4)\ x^2=-6y.$$

Ikkinchi tartibli chiziqlarning umumiy tenglamasi

Ikkita x va y o'zgaruvchining ikkinchi darajali tenglamasi umumiy ko'rinishda

$$\boxed{Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0,\quad A^2+B^2+C^2\neq 0} \tag{12}$$

kabi yoziladi. Bu tenglama aylana, ellips, giperbola va parabolalardan birini aniqlashini ko'rsatamiz. Buning uchun avval koordinata o'qlarini α burchakka burish orqali (12) tenglamada koordinatalar ko'paytmalari qatnashgan hadni yo'qotamiz, ya'ni bu tenglamani

$$\boxed{Ax^2+Cy^2+2Dx+2Ey+F=0} \tag{13}$$

ko'rinishga keltiramiz. Koordinata o'qlarini burish formulalari

$$x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\quad y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$$

yordamida eski koordinatalarni yangi koordinatalar orqali ifodalaymiz:

$$A(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)^2+2B(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+$$
$$+C(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)^2+2D$$
$$(x'\cos\alpha-y'\sin\alpha)+2E(x'\sin\alpha+y'\cos\alpha)+F=0.$$

α burchakni shunday tanlaymizki, $x'y'$ oldidagi koeffitsiyent nolga aylansin, ya'ni

$$-2A\sin\alpha\cos\alpha+2B(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2C\sin\alpha\cos\alpha=0$$

tenglik bajarilsin. Bundan

$$\boxed{2B\cos 2\alpha=(A-C)\sin 2\alpha} \tag{14}$$

yoki

$$\boxed{tg2\alpha = \frac{2B}{A-C}} \qquad (15)$$

Shunday qilib, koordinata o'qlarini (15) shartni qanoatlantiruvchi α burchakka burish (12) tenglamani (13) tenglamaga keltiradi. Agar $A=C$ bo'lsa (14) ifoda ma'nosini yo'qotadi. Bu holda (14) tenglamaga ko'ra $\cos 2\alpha = 0$, ya'ni $\alpha = 45^\circ$ bo'lishi kerak. Demak, $A=C$ da koordinata o'qlarini 45° ga burish kerak bo'ladi.

1-teorema. (13) tenglama hamma vaqt yoki aylanani ($A=C$ da), yoki ellipsni ($A\cdot C>0$ da), yoki giperbolani ($A\cdot C<0$ da), yoki parabolani ($A\cdot C=0$ da) aniqlaydi. Bunda ellips (aylana) uchun – nuqta yoki mavhum ellips (aylana), giperbola uchun –kesishuvchi chiziqlar juftligi, parabola uchun – parallel chiziqlar juftligi kabi buzilishlar bo'lishi mumkin.

Isboti. $A=C$ bo'lsin deylik. U holda (13) tenglamadan topamiz:

$$Ax^2 + Ay^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0.$$

Bundan

$$x^2 + y^2 + 2\frac{D}{A}x + 2\frac{E}{A}y + \frac{F}{A} = 0,$$

$$x^2 + 2\frac{D}{A}x + \left(\frac{D}{A}\right)^2 + y^2 + 2\frac{E}{A}y + \left(\frac{E}{A}\right)^2 + \frac{F}{A} - \left(\frac{D}{A}\right)^2 - \left(\frac{E}{A}\right)^2 = 0$$

yoki

$$\boxed{\left(x+\frac{D}{A}\right)^2 + \left(y+\frac{E}{A}\right)^2 = \left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}.} \qquad (16)$$

Bunda:

- agar $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} > 0$ bo'lsa, u holda (13) tenglama markazi $O_1\left(-\frac{D}{A}, -\frac{E}{A}\right)$ nuqtada joylashgan va radiusi $R = \sqrt{\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A}}$ ga teng aylanani aniqlaydi;

- agar $\left(\frac{D}{A}\right)^2 + \left(\frac{E}{A}\right)^2 - \frac{F}{A} = 0$ bo'lsa, u holda (13) tenglama

$\left(x+\frac{D}{A}\right)^2+\left(y+\frac{E}{A}\right)^2=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglikni yagona $O_1\left(-\frac{D}{A},-\frac{E}{A}\right)$ nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Bunda «aylana nuqtaga buzilgan» deyiladi;

- agar $\left(\frac{D}{A}\right)^2+\left(\frac{E}{A}\right)^2-\frac{F}{A}<0$ bo'lsa, u holda (16) tenglama (mos ravishda (13) tenglama) hech bir chiziqni aniqlamaydi. Bunda «aylana mavhum aylanaga buzilgan» deyiladi.

Teoremaning qolgan qismi shu kabi isbotlanadi.

Shunday qilib, (13) tenglama (mos ravishda (12) tenglama) ikkinchi tartibli chiziqlardan birini aniqlaydi.

Misol. $4x^2-25y^2-24x+50y-89=0$ tenglama bilan berilgan ikkinchi tartibli chiziq ko'rinishini aniqlaymiz. Berilgan tenglama giperbolani ifodalaydi, chunki $A\cdot C=4\cdot(-25)<0$.

Tenglamada almashtirishlar bajaramiz:

$$4(x^2-6x+9)-25(y^2-2y+1)-36+25-89=0,$$

$$4(x-3)^2-25(y-1)^2=100,$$

$$\frac{(x-3)^2}{25}-\frac{(y-1)^2}{4}=1.$$

Demak, berilgan tenglama $O(3;1)$ nuqtada joylashgan va yarim o'qlari $a=5$, $b=2$ ga teng bo'lgan giperbolani aniqlaydi.

O'z- o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Ikkinchi tartibli egri chiziqlarni umumiy tenglamasi.
2.Aylana va uning kanonik tenglamasi.
3.Giperbola va uning kanonik tenglamasi.
4.Parabola va uning kanonik tenglamasi.
5.Ellips va uning kanonik tenglamasi.
6. *A(-4;6)* nuqta berilgan. Diametri *OA* kesma bo'lgan aylana tenglamasini tuzing.
7. $x^2+y^2+4x-6y=0$ aylananing *Oy* o'qi bilan kesishgan nuqtalariga o'tkazilgan radiuslari orasidagi burchak topilsin.
8. Aylanalarning markazi va radiusini toping:

a) $x^2+y^2+4x-6y-3=0$; b) $x^2+y^2+8x-14y+16=0$;

9.Ellips ekstsentrisiteti $\varepsilon=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ga va kichik yarim o'qi 3 ga teng bo'lsa, uning kanonik tenglamasi tuzilsin.

10. $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{24}=1$ giperbolada absissasi 10ga teng va ordinatasi musbat bo'lgan nuqta olingan. Shu nuqtaning fokal radius-vektorlari topilsin.

11. k ning qanday qiymatlarida $y=kx$ to'g'ri chiziq $x^2+y^2-8x-2y+16=0$ aylanani kesadi, bu aylanaga urinadi?

12. Ellipsning tenglamasi $25x^2+169y^2=4225$ ko'rinishida bo'lsa ,uning ekssentrisiteti topilsin.

13. Giperbolaning asimptotalari $y=\pm\frac{x}{2}$ dan iborat bo'lib, u M(12; $\sqrt{27}$) nuqtadan o'tsa, giperbola kanonik tenglamasi qanday ko'rinishda bo'ladi?

14. $y^2=18x$ parabola bilan $(x+6)^2+y^2=100$ aylana umumiy vatarining tenglamasi tuzilsin.

15. $y^2=4x$ parabola fokusidan uning o'qiga perpendikulyar qilib vatar o'tkazilgan. Shu vatarning uzunligi hisoblansin.

10-§Tekislik tenglamalari.

Tayanch so'z va iboralar: *tekislikning turli tenglamalari, ikki tekislik orasidagi burchak, ikkita tekislik parallelligi va perpendikulyarligi shartlari, nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa.*

10.1.Fazoda sirt va chiziq

Koordinatalar usuli fazodagi har qanday sirtning o'rnini uning tenglamasi, ya'ni sirt nuqtalarining koordinatalarini bog'lovchi tengliklar bilan aniqlash imkonini beradi.

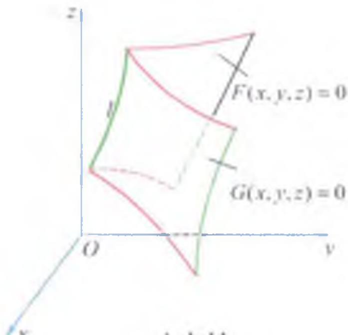
$Oxyz$ *fazodagi sirt tenglamasi* deb aynan shu sirt barcha nuqtalarining x,y,z koordinatalarini aniqlovchi uch o'zgaruvchining $F(x,y,z)=0$ tenglamasiga aytiladi. Shu kabi, koordinatalari uch o'zgaruvchining $F(x,y,z)=0$ tenglamasini qanoatlantiruvchi $Oxyz$ fazoning barcha $M(x;y;z)$ nuqtalari to'plamiga f*azoda* shu tenglama bilan aniqlanuvchi *sirt* deyiladi. Fazodagi sirt $x=x(u,v),\ y=y(u,v),\ z=z(u,v),\ (u;v)\in D$ parametrik tenglamalar bilan berilishi mumkin, bu yerda $x(u,v), y(u,v), z(u,v)$ – D sohada berilgan sirt barcha nuqtalarining va faqat shu nuqtalarning koordinatalarini beruvchi ikki o'zgaruvchining funksiyaladi.

Masalan,

$$x = R\sin u\cos v,\ \ y = R\sin u\sin v,\ \ z = R\cos u,\ \ 0 \le u \le \pi,\ \ 0 \le v \le 2\pi$$

parametrik tenglamalar sferani ifodalaydi. Fazodagi chiziqni ikki sirtning kesishish chizig'i yoki ikki sirt umumiy nuqtalarining gometrik o'rni deb qarash mumkin 1-shakl.

l chiziqni aniqlovchi ikki sirt $F(x,y,z)=0$ va $G(x,y,z)=0$ tenglamalar bilan berilgan bo'lsin (1-shakl). U holda l chiziq ikkala tenglamani ham qanoatlantiruvchi $M(x;y;z)$ nuqtalar to'plamidan tashkil topadi.



1-shakl

Koordinatalari

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini qanoatlantiruvchi $Oxyz$ fazoning barcha $M(x;y;z)$ nuqtalari to'plamiga *fazodagi* shu tenglama bilan aniqlanuvchi *chiziq* deyiladi.

Shu kabi, $Oxyz$ *fazodagi chiziq tenglamasi* deb aynan shu chiziq barcha nuqtalarining x, y, z koordinatalarini aniqlovchi

$$\begin{cases} F(x,y,z)=0, \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasiga aytiladi.

Fazodagi chiziqni nuqtaning traektoriyasi deb qarash mumkin. Bunda chiziq

$\vec{r}=\vec{r}(t)$ vektor tenglama bilan yoki

$x=x(t),\ \ y=y(t),\ \ z=z(t),\ \ t\in T$ parametrik tenglamalar bilan beriladi. Masalan,

$$x=R\cos\omega t,\ \ y=R\sin\omega t,\ \ z=\frac{h}{2\pi}t$$

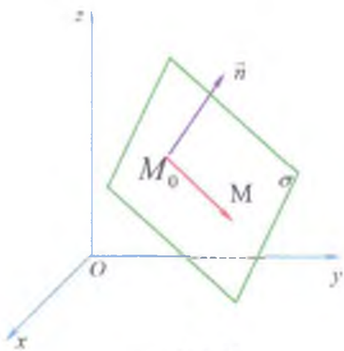
parametrik tenglamalar vint chizig'ini ifodalaydi.

Fazodagi analitik geometriyada sirtni (yoki to'g'ri ciziqni) o'rganishda ikkita masala ko'riladi: geometrik xossalariga ko'ra sirtning (yoki to'g'ri ciziqning) tenglamasini keltirib chiqarish; tenglamasiga asosan sirtning (yoki to'g'ri ciziqning) ko'rinishi va xossalarini tekshirish.

Tekislik tenglamalari

Tekislik fazodagi sirtlardan eng soddasi hisoblanadi. Tekislikning fazodagi o'rni turli turli parametrlar bilan (masalan, tekislikning koordinata o'qlarida ajratgan kesmalari bilan) bir qiymatli aniqlanishi mumkin. Shu sababli

tekislikning aniqlanish parametrlariga mos uning turli tenglamalari qaraladi.



2-shakl

Berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular tekislik tenglamasi

$Oxyz$ fazoda $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta va $\bar{n}=\{A;B;C\}$ vektor berilgan bo'lsin.

M_0 nuqtadan o'tuvchi va $\bar{n}$ vektorga perpendikular σ tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun σ t ekislikda yotuvchi ihtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olib, $\overline{M_0M}=\{x-x_0;y-y_0;z-z_0\}$ vektorni yasay-miz (2-shakl).

Bunda $\bar{n}\perp\overline{M_0M}$ bo'ladi. Ikki vektorning perpendikularlik shartidan topamiz:

$$\boxed{A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0}. \quad (1)$$

(1) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga perpendikular tekislik tenglamasi* deyiladi.

Tekislikka perpendikular bo'lgan har qanday vektorga *tekislikning normal vektori* deyiladi.

Misol

$M_0(3;4;5)$ nuqtadan o'tuvchi va normal vektori $\bar{n}=\{-1;-3;2\}$ bo'lgan tekislik tenglamasini tuzamiz. Masalaning shartiga ko'ra $x_0=3, y_0=4, z_0=5$, $A=-1, B=-3, C=2$.

U holda (1) tenglamadan topamiz:

$$(-1)\cdot(x-3)+(-3)\cdot(y-4)+2\cdot(z-5)=0 \text{ yoki } x+3y-2z-5=0.$$

Tekislikning umumiy tenglamasi

(1) tenglamani σ tekislikda yotuvchi barcha nuqtalarning koordinatalari qanoatlantiradi. Bu tenglamani

$$\boxed{Ax+By+Cz+D=0} \quad (2)$$

ko'rinishda yozish mumkin, bu yerda $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$ – ozod had;

$A^2+B^2+C^2\neq 0$.

(2) tenglamaga *tekislikning umumiy tenglamasi* deyiladi.

Shunday qilib, x,y,z o'zgaruvchilarning har qanday birinchi darajali tenglamasi fazodagi biror tekislikni ifodalaydi va aksincha, fazodagi har qanday tekislik x,y,z o'zgaruvchilarning biror birinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanadi.

Tekislikning umumiy tenglamasini tekshiramiz, ya'ni unung xususiy hollarini ko'rib chiqamiz:

1) $A=0$ da (2) tenglama $By+Cz+D=0$ ko'rinishga keladi. Bunda tekislikning $\vec{n}=\{0;B;C\}$ normal vektori Ox o'qqa perpendikular bo'ladi. Shu sabali tekislik Ox o'qqa parallel bo'ladi. Shu kabi $B=0$ da $Ax+Cz+D=0$ tenglama Oy o'qqa parallel tekislikni, $C=0$ da $Ax+By+D=0$ tenglama Oz o'qqa parallel tekislikni ifodalaydi;

2) $D=0$ da (2) tenglama $Ax+By+Cz=0$ ko'rinishni oladi. Bu tenglamani $O(0;0;0)$ nuqta koordinatalari qanoatlantiradi. Demak, tekislik koordinatalar boshidan o'tadi;

3) $A=0, D=0$ da (2) tenglamadan $By+Cz=0$ kelib chiqadi. Bu tekislik

Ox o'qdan o'tadi. Shu kabi $Ax+Cz=0$ tenglama Oy o'qdan o'tuvchi tekislikni,

$Ax+By=0$ tenglama Oz o'qdan o'tuvchi tekislikni ifodalaydi;

4) $A=0, B=0$ da (2) tenglama $Cz+D=0$ yoki $z=-\frac{D}{C}$ ko'rinishni oladi. Bu tekislik Oxy tekislikka parallel bo'ladi. Shu kabi $By+D=0$ tenglama Oxz tekislikka parallel tekislikni, $Ax+D=0$ tenglama Oyz tekislikka parallel tekislikni ifodalaydi;

5) $A=0, B=0, D=0$ da (2) tenglama $Cz=0$ yoki $z=0$ ko'rinishga keladi. Bu tenglama Oxy tekislikni ifodalaydi. Shu kabi Oyz tekislik $x=0$

tenglama bilan, Oxz tekislik $y=0$ tenglama bilan aniqlanadi.

Misollar

Tekislik tenglamalarini tuzamiz:

1. Ox o'qdan va $M_0(0;-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi;

2. Oy o'qqa parallel bo'lgan va $M_1(3;0;-4), M_2(5;-2;3)$ nuqtalardan o'tuvchi;

3. Oxz tekislikka parallel bo'lgan va $M_0(1;-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi.

1. Ox o'qdan o'tuvchi tekislik tenglamasi $By+Cz=0$ bo'ladi. Bu

tenglamani $M_0(0;-2;3)$ nuqtaning koordinatalari qanoatlantiradi, chunki bu nuqta tekislikda yotadi. Demak, $(-2)\cdot B+3C=0$ yoki $B=\frac{3}{2}C$. Bundan $\frac{3}{2}Cy+Cz=0$ yoki $3y+2z=0$.

2. Oy o'qqa parallel tekislik tenglamasi $Ax+Cz+D=0$ bo'ladi. Bu tenglamani $M_1(3;0;-4)$, $M_2(5;-2;3)$ nuqtalarning koordinatalari qanoatlan-tiradi, ya'ni

$$\begin{cases} 3A-4C+D=0, \\ 5A+3C+D=0. \end{cases}$$

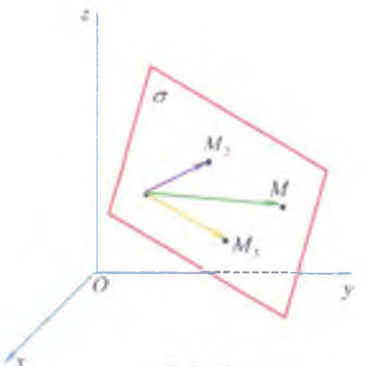
Bundan $A=-\frac{7}{29}D$ va $C=\frac{2}{29}D$. U holda $-\frac{7}{29}Dx+\frac{2}{29}Dz+D=0$ yoki $7x-2z-29=0$.

3. Oxz tekislikka parallel tekislik tenglamasi $By+D=0$ bo'ladi. Bu tenglikdan $M_0(1;-2;3)$ nuqtada $-2B+D=0$ yoki $D=2B$ kelib chiqadi. U holda $By+2B=0$ yoki $y+2=0$.

Berilgan nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamalari

Uchta $M_1(x_1;y_1;z_1)$, $M_2(x_2;y_2;z_2)$, $M_3(x_3;y_3;z_3)$ nuqtadan o'tuvchi σ tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun σ tekislikda yotuvchi ihtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani

olamiz va $\overline{M_1M}=\{x-x_1;y-y_1;z-z_1\}$, $\overline{M_1M_2}=\{x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1\}$, $\overline{M_1M_3}=\{x_3-x_1;y_3-y_1;z_3-z_1\}$ vektorlarni yasaymiz. Bunda $\overline{M_1M}$, $\overline{M_1M_2}$ va $\overline{M_1M_3}$ vektorlar komplanar bo'ladi (3-shakl).



3-shakl

Vektorlarning komplanarlik shartidan topamiz:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0.} \qquad (3)$$

(3) tenglamaga *berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasi* deyiladi.

(3)tenglamada $s=\overline{M_1M_3}=\{p;q;r\}$ belgilash kiritib, topamiz:

$$\boxed{\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ p & q & r \end{vmatrix}=0.} \qquad (4)$$

(4) tenglamaga *berilgan ikkita nuqtadan o'tuvchi va berilgan vektorga parallel tekislik tenglamasi* deyiladi.

Shu kabi (3) tenglamadan $s_1=\overline{M_1M_2}=\{p_1;q_1;r_1\}$, $s_2=\overline{M_1M_3}=\{p_2;q_2;r_2\}$ belgilashlarda topamiz:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ p_1 & q_1 & r_1 \\ p_2 & q_2 & r_2 \end{vmatrix}=0 \qquad (5)$$

(5) tenglamaga *berilgan nuqtadan o'tuvchi va berilgan ikki vektorga parallel tekislik tenglamasi* deyiladi.

Misol: $M_0(2;-1;3)$ nuqtadan o'tuvchi, $\vec{a}=\{3,0,1\}$ va $\vec{b}=\{-3;2;2\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-3 \\ 3 & 0 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0.$$

Bundan $(x-2)\cdot 2-(y+1)\cdot(6-3)+(z-3)\cdot 6=0$ yoki

$$2x-3y+6z-25=0$$

Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi

Ox, Oy, Oz o'qlarida mos ravishda a, b, c ga teng kesmalar ajratuvchi, ya'ni $A(a;0;0), B(0;b;0), C(0;0;c)$ nuqtalardan o'tuvchi σ

tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun $A(a;0;0)$, $B(0;b;0)$, $C(0;0;c)$ nuqtalarning koordinatalarini

(3) tenglamaga qo'yamiz: $\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0.$

Bundan $bcx - abc + abz + acy = 0$, $bcx + acy + abz = abc$

Yoki $$\boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1}. \qquad (6)$$

(6) tenglamaga *tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasi* deyiladi.

Misol

Koordinata o'qlarida $a = 2$; $b = -4$; $c = 6$ birlik kesmalar ajratgan tekislik tenglamasini tuzamiz. Tekislik koordinata o'qlarida $a = 2$; $b = -4$; $c = 6$ kesmalar ajratadi. Tekislikning kesmalarga nisbatan tenglamasidan topamiz: $\frac{x}{2} + \frac{y}{(-4)} + \frac{z}{6} = 1$

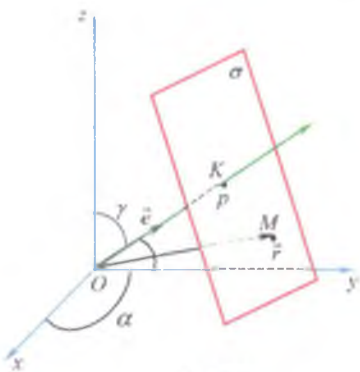
yoki

$$6x - 3y + 2z - 12 = 0.$$

Tekislikning normal tenglamasi

Koordinatalar boshidan tekislikka tushirilgan OK perpendikulyarning uzunligi p va birlik vektori

$\vec{e} = \{\cos\alpha; \cos\beta; \cos\gamma\}$ berilgan bo'lsin (4-shakl).



4-shakl

σ tekislikda yotuvchi ihtiyoriy $M(x;y;z)$ nuqtani olib, $\vec{r}=\overline{OM}=\{x;y;z\}$ radius vektorni yasaymiz. Bunda $\vec{r}$ radius vektorning $\vec{e}$ vektor yo‘nalishidagi proeksiyasi p ga teng bo‘ladi, ya’ni $\Pi p_{\vec{e}}\vec{r}=p$. Bundan $\vec{r}\vec{e}=p$, $\vec{r}\vec{e}-p=0$ yoki $\boxed{x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=-p=0}$. (7)

(7) tenglamaga *tekislikning normal tenglamasi* deyiladi.

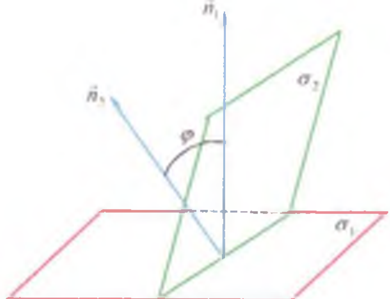
Tekislikning umumiy tenglamasini normal tenglamaga o‘tkazish uchun (2) tenglikning chap va o‘ng tomonini *normallovchi ko‘paytuvchi* deb ataluvchi $M=\pm\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$ songa ko‘paytiriladi. Bunda M ko‘paytuvchining ishorasi D koffitsiyentning ishorasiga qarama-qarshi qilib tanlanadi.

10.2 Fazoda ikki tekislikning o‘zaro joylashishi

Ikki tekislikning normal vektorlari orasidagi burchakka *ikki tekislik orasidagi burchak* deyiladi.

$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ va

$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ tenglamalar bilan berilgan σ_1 va σ_2 tekisliklar orasidagi burchak φ ga teng bo‘lsin. Bunda tekisliklarning normal vektorlari $\vec{n}_1=\{A_1;B_1;C_1\}$, $\vec{n}_2=\{A_2;B_2;C_2\}$ ga, ular orasidagi burchak tekisliklar orasidagi burchakka teng, ya’ni $\varphi=(\sigma_1\hat{,}\sigma_2)=(\vec{n}_1\hat{,}\vec{n}_2)$ bo‘ladi (5-shakl).



5-shakl

Ikki vektor orasidagi burchak kosinusi formulasidan topamiz:

$$\boxed{\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}} \qquad (8)$$

Ikki tekislikning perpendikularlik sharti

$\sigma_1 \perp \sigma_2$ bo'lsin. U holda $\cos\varphi = 0$ va (8) tenglikdan topamiz:

$$\boxed{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0}. \qquad (9)$$

Ikki tekislikning parallellik sharti

σ_1 va σ_2 tekisliklar parallel bo'lsin. U holda $\bar{n}_1 = \{A_1; B_1; C_1\}$ va $\bar{n}_2 = \{A_2; B_2; C_2\}$ vektorlar kollinear bo'ladi. Ikki vektorning kollinearlik shartidan ikki tekislikning parallellik shartini topamiz:

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}}. \qquad (10)$$

Ikki tekislikning ustma-ust tushishi

σ_1 va σ_2 tekisliklar ustma-ust tushsin. U holda birinchidan ular parallel bo'ladi.

Ikki tekislikning parallellik shartidan topamiz:

$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \lambda$ yoki $(A_1 - \lambda A_2) = 0$, $(B_1 - \lambda B_2) = 0$, $(C_1 - \lambda C_2) = 0$.

Ikkinchidan σ_1 tekislikning har bir nuqtasi, jumladan $M_0(x_0; y_0; z_0)$ nuqta σ_2 tekislikda yotadi, ya'ni

$$A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 = 0, \quad A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2 = 0.$$

Bu tengliklardan ikkinchisini λ ga ko'paytiramiz va birinchi tenglikdan ayiramiz:

$$(A_1 - \lambda A_2)x_0 + (B_1 - \lambda B_2)y_0 + (C_1 - \lambda C_2)z_0 + (D_1 - \lambda D_2) = 0.$$

Bundan $D_1 - \lambda D_2 = 0$ yoki $\frac{D_1}{D_2} = \lambda$.

Demak,

$$\boxed{\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}}. \qquad (11)$$

(11) tengliklar tekisliklarning ustma-ust tushush shartini ifodalaydi.

Misol: $4x-10y+z-3=0$ va $11x-8y-7z+8=0$ tekisliklar orasidagi burchakni topamiz:

$$\cos\varphi=\frac{4\cdot 11+(-10)\cdot(-8)+1\cdot(-7)}{\sqrt{4^2+(-10)^2+1^2}\cdot\sqrt{11^2+(-8)^2+(-7)^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Bundan $\varphi=45^o$.

Misol: $M_1(1;2;1), M_2(0;3;4)$ nuqtalardan o'tuvchi va $x+2y-z=0$ tekislikka perpendikular tekislik tenglamasini tuzamiz. Buning uchun tekislik tenglamasini $Ax+By+Cz+D=0$ ko'rinishida izlaymiz.

Misolning shartiga ko'ra:

$$\begin{cases} A+2B-C=0 \ (\textit{tekislik}\ x+2y-z=0\ \textit{tekislikka}\ \perp), \\ A+2B+C=-D \ (\textit{tekislik}\ M_1(1;2;1)\ \textit{nuqtadan o'tadi}), \\ 3B+4C=-D \ (\textit{tekislik}\ M_2(0;3;4)\ \textit{nuqtadan o'tadi}. \end{cases}$$

Sistemaning yechimi: $A=-\frac{7}{6}D$, $B=\frac{1}{3}D$, $C=-\frac{1}{2}D$.

A, B, C koffitsiyentlarni izlanayotgan tenglamaga qo'yamiz:

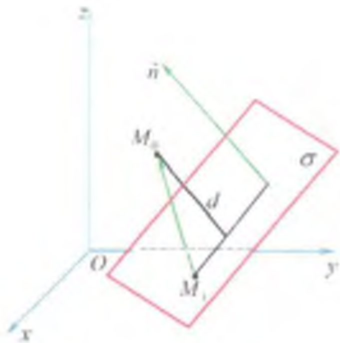
$$-\frac{7}{6}Dx+\frac{1}{3}Dy-\frac{1}{2}Dz+D=0.$$

Bundan $7x-2y+3z-6=0$.

Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa

Nuqtadan tekislikka tushirilgan perpendikularning uzunligiga nuqtadan *tekislikkacha bo'lgan masofa* deyiladi.

$M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta va $Ax+By+Cz+D=0$ tenglama bilan σ tekislik berilgan bo'lsin. M_0 nuqtadan σ tekislikka tushiurilgan perpendikularning asosini $M_1(x_1;y_1;z_1)$ bilan *belgilaymiz (6-shakl).*



(6-shakl)

U holda M_0 nuqtadan σ tekislikkacha bo'lgan masofa

$$d = \left| \Pi p_{\bar n} \overline{M_1 M_0} \right|$$

bo'ladi, bu yerda $\overline{M_1 M_0} = \{x_0 - x_1; y_0 - y_1; z_0 - z_1\}$.

Ikki vektor skalyar ko'paytmasining xossasiga ko'ra

$$d = \frac{\left| \overline{M_1 M_0} \cdot \vec n \right|}{|\vec n|} = \frac{|(x_0 - x_1)A + (y_0 - y_1)B + (z_0 - z_1)C|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$
$$= \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 - Ax_1 - By_1 - Cz_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

$M_1(x_1; y_1; z_1)$ nuqta σ tekislikda yotgani sababli $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$, ya'ni $D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1$ bo'ladi.

Bundan

$$\boxed{d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}}. \qquad (12)$$

Shunday qilib, *nuqtadan tekislik-kacha bo'lgan masofa* (12) formula bilan topiladi.

Misol-1.

$M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $M_1(3;0;3)$, $M_2(0;4;0)$ va $M_3(0;4;-3)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

Buning uchun avval berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzamiz:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ 0-3 & 4 & 0-3 \\ 0-3 & 4 & -3-3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y & z-3 \\ -3 & 4 & -3 \\ -3 & 4 & -6 \end{vmatrix}=0.$$

Bundan $-12\cdot(x-3)-9\cdot y+0\cdot(z-3)$ yoki $4x+3y-12=0$.

$M_0(5;4;-1)$ nuqtadan $4x+3y-12=0$ tekislikkacha bo'lgan masofani (12) formula bilan hisoblaymiz:

$$d=\frac{|4\cdot5+3\cdot4-12|}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}}=4(u.b).$$

O'z –o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Sirt deb nimaga aytiladi?
2. Tekislikning normal vektori deb qanday vektorga aytiladi?
3. Tekislik tenglamalarining qanday ko'rinishlari mavjud? Ularni yozib bering.
4. Ikki tekislik orasidagi burchak qanday aniqlanadi?
5. Nuqtadan to'g'ri tekislikkacha bo'lgan masofa qanday formula bilan aniqlanadi?

6. Berilgan uchta nuqtadan o'tuvchi tekislik tenglamasini tuzing:
1) $M_1(2;1;-1)$, $M_2(3;1;0)$, $M_3(-1;2;-1)$; 2) $M_1(1;-2;3)$, $M_2(4;1;3)$, $M_3(1;2;-1)$.

7. $M_1(1;2;0)$, $M_2(2;1;1)$ nuqtalardan o'tuvchi va $\vec{a}=\{3;0;1\}$ vektorga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

8. $M_0(1;-2;3)$ nuqtadan o'tuvchi va $\vec{a}=\{2;1;1\}$, $\vec{b}=\{3;1;-1\}$ vektorlarga parallel tekislik tenglamasini tuzing.

9. Tekisliklar orasidagi burchakni toping:

1) $x-2y+2z+5=0$ va $x-y-3=0$;

2) $3x-y+2z+12=0$ va $5x+9y-3z-1=0$;

3) $2x-3y-4z+4=0$ va $5x+2y+z-3=0$;

4) $x+2y+3=0$ va $y+2z-5=0$

10. m va n ning qanday qiymatlarida tekisliklar parallel bo'ladi:

1) $3x-5y-nz-2=0$, $mx+2y-3z+11=0$;

2) $nx-6y-6z+4=0$, $2x+my+3z-8=0$.

11. m ning qanday qiymatlarida tekisliklar perpendikular bo'ladi:

1) $4x-7y+2z-3=0$, $-3x+2y+mz+5=0$;

2) $x-my+z=0$, $2x+3y+mz-4=0$.

12. Tekisliklarning kesishish nuqtasini toping:

1) $x+2y-z+2=0,\ x-y-2z+7=0,\ 3x-y-2z+11=0;$

2) $x-2y-4z=0,\ x+2y-4z+4=0,\ 3x+y-z-4=0.$

13. $M_0(5;-1;4)$ nuqtadan $M_1(3;3;0)$, $M_2(0;-3;4)$, $M_3(0;0;4)$ nuqtalardan o'tuvchi tekislikkacha bo'lgan masofani toping.

14. $2x+y-2z+6=0$, $x+2y+2z-9=0$ tekisliklardan teng uzoqlikda yotuvchi Ox oqning nuqtasini toping.

15. Ikki yoqi $12x+3y-4z-4=0$ va $12x+3y-4z+22=0$ tekisliklarda yotuvchi kubning hajmini toping.

10.3. Ikkinchi tartibli sirtlar. Ikkinchi tartibli sirtlarning kanonik tenglamalari

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida x, y, z o'zgaruvchilarning ikkinchi darajali tenglamasi bilan aniqlanuvchi sirt ***ikkinchi tartibli sirt*** deyiladi. Uchta x, y va z o'zgaruvchining ikkinchi darajali tenglamasi umumiy ko'rinishda

$$Ax^2+By^2+Cz^2+Dxy+Exz+Fyz+Gx+Hy+Kz+L=0, \qquad (1)$$

kabi yoziladi, bu yerda $A,B,C,D,E,F,G,H,K,L-$o'zgarmaslar; $A^2+B^2+C^2\neq 0$.

Har qanday (1) ko'rinishdagi tenglamani koordinata o'qlarini parallel ko'chirish va burish orqali *kanonik ko'rinishga* keltirish mumkin. Kanonik tenglamada har bir o'zgaruvchi faqat bir marta, bitta (yo nolinchi yo birinchi yo ikkinchi) darajada qatnashadi. (1) tenglama koordinatalar sistemasining o'qlari sirtning simmetriya o'qlari bilan ustma-ust tushganida va koordinatalar boshi maxsus tanlanganida (masalan, markaziy-simmetrik sirtlarda simmetriya markazi tanlanadi) kanonik ko'rinishni oladi. Shu bilan birga ikkinchi tartibli sirt

$$F(x,y)=0\ \ (G(x,y)=0,\ H(x,z)=0) \qquad (2)$$

tenglama bilan berilishi mumkin. Bunday tenglama bilan aniqlanuvchi sirtlar silindrik sirtlar deyiladi.

Sirtlarning shaklini tasavvur qilish va chizish uchun *«parallel kesimlar usuli»* deb ataluvchi usulni qo'llaymiz. Bunda sirtning shakli uning koordinata tekisliklari yoki bu tekisliklarga parallel tekisliklar bilan keshishish chiziqlarini (kesimlarini) tekshirish yordamida o'rganiladi.

Sfera

Fazoda markaz deb ataluvchi nuqtadan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rniga ***sfera*** deyiladi.

$M_0(x_0;y_0;z)$ nuqtadan R masofada yotuvchi fazodagi nuqtalarni qaraymiz. Bu nuqtalardan biri $M(x;y;z)$ nuqta bo'lsin.

Sferaning ta'rifiga ko'ra $|M_0M|=R$. Bundan

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}=R$$

Yoki
$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2. \qquad (3)$$

(3) tenglamaga ***sferaning kanonik tenglamasi*** deyiladi.

Bunda $M_0(x_0;y_0;z_0)$ nuqta *sfera markazi*, R masofa *sfera radiusi* deb ataladi.

1-misol. Markazi $M_0(-2;2;1)$ nuqtada yotgan va $2x+y-2z-5=0$ tekislikka uringan sfera tenglamasini tuzing.

Yechish. Sfera tekislikka uringani sababli uning $M_0(-2;2;1)$ markazidan $2x+y-2z-5=0$ tekislikkacha bo'lgan masofa sferaning radiusiga teng bo'ladi. Nuqtadan tekislikkacha bo'lgan masofa formulasidan topamiz:

$$R=\frac{|2\cdot(-2)+1\cdot 2+(-2)\cdot 1-5|}{\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}}=\frac{9}{3}=3.$$

U holda (3) formulaga ko'ra

$$(x+2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9.$$

Ellipsoid

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (4)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga ***ellipsoid*** deyiladi.

Ellipsoidning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimlarini qaraymiz. Bu tekisliklarning har biri $z=h$ tenglamaga ega bo'ladi. Bunda h – birorta son.

Kesimda hosil bo'lgan chiziq

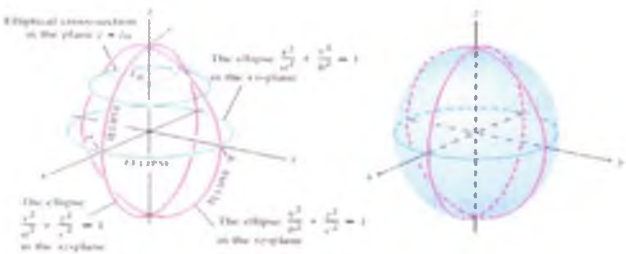
$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}, \\ z=h\end{cases} \qquad (5)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. (5) sistema tenglamalarini tekshiramiz. $|h|>c$ bo‘lganda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}<0$ bo‘ladi. Demak, (5) sirtning $z=h$ tekislik bilan kesishish nuqtasi mavjud bo‘lmaydi.

$|h|=c$, ya’ni $h=\pm c$ bo‘lganda $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ bo‘ladi. Bunda sirtlar $(0;0;c)$ va $(0;0;-c)$ nuqtalarga kesishadi va $z=c$ va $z=-c$ tekisliklar berilgan sirtga urinadi. $|h|<c$ bo‘lganda (5) tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}+\dfrac{y^2}{b^2\left(1-\dfrac{h^2}{c^2}\right)}=1, \\ z=h \end{cases} \quad \text{yoki} \quad \begin{cases} \dfrac{x^2}{a_1^2}+\dfrac{y^2}{b_1^2}=1, \\ z=h, \end{cases}$$

bu yerda $a_1=a\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$, $b_1=b\sqrt{1-\frac{h^2}{c^2}}$. Demak, kesimda yarim o‘qlari a_1 va b_1 bo‘lgan ellips hosil bo‘ladi(1-shakl).



1-shakl

Bunda $|h|$ qancha kichik o‘lsa yarim o‘qlar shuncha katta bo‘ladi. $h=0$ da ular o‘zlarining eng katta qiymatlariga erishadi: $a_1=a$, $b_1=b$.

(4) sirtning $x=h$ va $y=h$ tekisliklar bilan kesimlari ham ellipslardan iborat bo‘ladi.

Shunday qilib, qaralgan kesimlar (4) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt 1-shaklda keltirilgan ellipsoiddan iborat bo‘lishini ko‘rsatadi. a,b,c kattaliklar ellipsoidning *yarim o‘qlari* deyiladi. Yarim o‘qlar har xil bo‘lganda ellipsoid *uch o‘qli ellipsoid* bo‘ladi. Yarim o‘qlardan istalgan ikkitasi bir-biriga teng bo‘lganda ellipsoid *aylanish ellipsoidi* bo‘ladi. Yarim o‘qlarning uchalasi teng bo‘lganda ellipsoid tenglamasi

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad R = a = b = c \tag{6}$$

bo‘lgan sferaga aylanadi.

2-misol. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning Ox va Oy oqlari atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirtlarning tenglamalarini toping.

Yechish. Agar ikkinchi tartibli chiziq $F(x,y) = 0$ tenglama bilan berilgan bo‘lsa, u holda bu sirtning Ox oqi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt $F(x;\pm\sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ tenglama bilan, Oy oqi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt esa $F(\pm\sqrt{x^2 + z^2}; y) = 0$ tenglama bilan aniqlanadi.

$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ellipsning Ox oqi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasini topamiz:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\pm\sqrt{y^2 + z^2})^2}{b^2} = 1$$

yoki

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1.$$

Ellipsning Oy oqi atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan sirt tenglamasini shu kabi topiladi:

$$\frac{x^2 + z^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Hosil bo‘lgan tenglamalarning har ikkalasi aylanish ellipsoidini aniqlaydi.

Giperboloid

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{7}$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga ***bir pallali giperboloid*** deyiladi.

Bu sirtni Oxy tekislikka parallel $z = h$ tekisliklar bilan kesamiz. Kesimda

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{z^2}{c^2}, \\ z = h \end{cases}$$

yoki

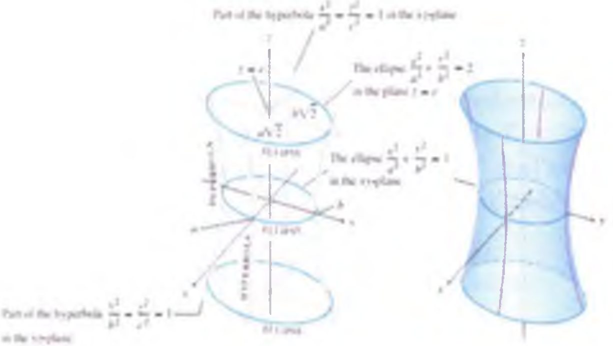
$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}\right)^2}=1, \\ z=h, \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan bilan aniqlanuvchi chiziq hosil bo‘ladi. Bu chiziq

yarim o‘qlari $a_1=a\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ va $b_1=b\sqrt{1+\dfrac{h^2}{c^2}}$ bo‘lgan ellipsdan iborat. Yarim o‘qlar $h=0$ da eng kichik qiymatlariga erishadi: $a_1=a$, $b_1=b$. $|h|$ ning o‘sishi bilan ular o‘sib boradi. Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlarni

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ x=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemalari bilan bilan aniqlanuvchi giperbolalardan iborat bo‘ladi. Kesimlarning tahlili shuni ko‘rsatadiki (7) tenglama bilan aniqlanuvchi giperboloid musbat va manfiy yo‘nalishlarida chegaralanmagan holda kengayuvchi «trubka» ko‘rinishdagi sirtdan iborat bo‘ladi (2-shakl). $a=b$ bo‘lganda (7) tenglama ***bir pallali aylanish giperboloid*** ni ifodalaydi[9].



2-shakl

$Oxyz$ kordinatlar sistemasida

[9] B. George. Jr.Thomas, Ross L Finney. Calculus and Analytic Geometry. Coryright, 1996. 829-841 b.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1 \qquad (8)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirtga ikki pallali giperboloid deyiladi.

Bu sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesisish chizig‘i

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}-1,\\ z=h\end{cases} \qquad (9)$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanadi. Bunda $|h|<c$ bo‘lganda $z=h$ tekislik sirtni kesmaydi, $|h|=c$ bo‘lganda $z=c$ va $z=-c$ tekisliklar sirtga $(0;0;c)$ va $(0;0;-c)$ nuqtalarga urinadi, $|h|>c$ bo‘lganda $z=h$ tekislik sirtni kesadi.

$|h|>c$ bo‘lganda (9) tenglamalarni quyidagicha yozish mumkin:

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a_1^2}+\frac{y^2}{b_1^2}=1,\\ z=h,\end{cases} \quad \text{bu yerda } a_1=a\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1},\ b_1=b\sqrt{\frac{h^2}{c^2}-1}.$$

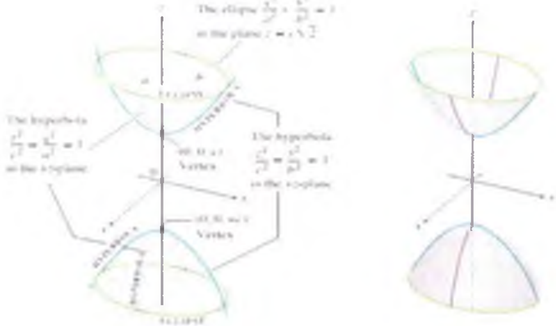
Bu chiziq $|h|$ning o‘sishi bilan yarim o‘qlari o‘suvchi ellipsni beradi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari

$$\begin{cases}\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\\ y=0\end{cases} \qquad \begin{cases}\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1,\\ x=0\end{cases}$$

tenglamalar sistemalari bilan aniqlanuvchi giperbolalar bo‘ladi.

Bu kesimlar (3-shakl) (8) sirtning ikki pallali giperboloid deb atalishiga sabab bo‘ladi. $a=b$ bo‘lganda (8) tenglama ***ikki pallali aylanish giperboloid*** ni aniqlaydi



3-shakl

3-misol. $x^2-4y^2+4z^2+2x+8y-7=0$ tenglama bilan aniqlanuvchi sirt tupini toping.

Yechish. Tenglamaning chap tomonini to‘la kvadratlarga ajratamiz:

$$x^2+2x+1-4(y^2+2y+1)+4z^2-1+4-7=0 \quad \text{yoki}$$

$$(x+1)^2-4(y-1)^2+4z^2=4.$$

Bundan

$$\frac{(x+1)^2}{2^2}+\frac{z^2}{1^2}-\frac{(y-1)^2}{1^2}=1.$$

$x'=x+1,\ y'=y-1,\ z'=z$ deb, $Oxyz$ sistema markazini $O'(-1;1;0)$ nuqtaga parallel ko‘chirish orqali $O'x'y'z'$ sistemaga o‘tamiz. Bu sistemada tenglama

$$\frac{x'^2}{2^2}+\frac{z'^2}{1^2}-\frac{y'^2}{1^2}=1$$

ko‘rinishni oladi. Bu tenglama $O'y'$ oq bo‘ylab yo‘nalgan bipallali giperboloidni aniqlaydi.

Ikkinchi tartibli konus.

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (10)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt ***ikkinchi tartibli konus*** deyiladi.

(10) sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesisish chizigi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{h^2}{c^2}, z=h$ bo‘ladi. U $h=0$ da $O(0;0;0)$ nuqtaga aylanadi.

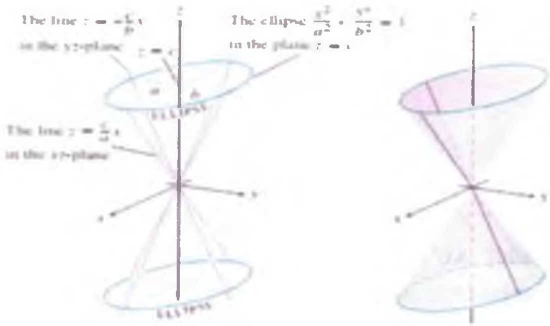
$h \neq 0$ bo‘lsa, kesimda $\begin{cases} \dfrac{x^2}{\left(\dfrac{ah}{c}\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(\dfrac{bh}{c}\right)^2}=1, \\ z=h, \end{cases}$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi ellips hosil bo‘ladi. Bu ellipsning yari o‘qlari $|h|$ ning o‘sishi bilan o‘sadi.

Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ y=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=0, \\ x=0 \end{cases}$$

sistemalar bilan aniqlanuvchi ikkita kesishuvchi to‘g‘ri chiziqlardan iborat bo‘ladi. (4-shakl)



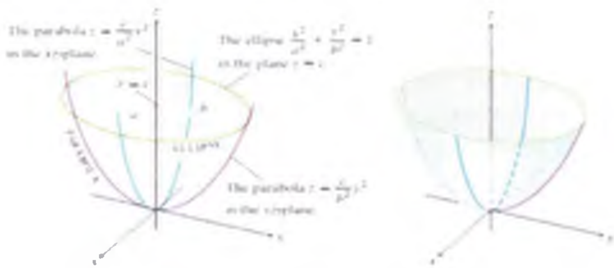
(4-shakl)

Paraboloid

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z}{c}, \quad a>0, b>0, c>0 \qquad (11)$$

kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt ***elliptik paraboloid*** deyiladi.



5-shakl

Bu sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimi ushbu

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{(ah)^2}+\dfrac{y^2}{(bh)^2}=1, \\ z=h, h>0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi ellips bo‘ladi. Uning yarim o‘qlari $|h|$ ning o‘sishi bilan o‘sadi. Sirtning Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlarida $z=\dfrac{x^2}{a^2}$ va $z=\dfrac{y^2}{b^2}$ parabolalar hosil bo‘ladi (5-shakl). Shu sababli (11) tenglama bilan aniqlanuvchi sirt elliptik paraboloid deyiladi. $a=b$ bo‘lganda (11) tenglama ***aylanish paraloidini*** aniqlaydi.

4-misol. $M_1(0;b;0)$ nuqtadan va $y=-b$ tekislikdan teng uzoqlikda yotuvchi nuqtalarning geometrik o‘rnini topaing.

Yechish. $M(x;y;z)$ izlanayotgan nuqta bo‘lsin.

Masala shartiga ko‘ra $|M_1M|=|y+b|$ yoki

$$\sqrt{x^2+(y-b)^2+z^2}=|y+b|.$$

Bundan $x^2+y^2-2yb+b^2+z^2=y^2+2yb+b^2$, $x^2+z^2=4by$ yoki

$$\frac{x^2}{4b}+\frac{z^2}{4b}=y.$$

Sirtning Oxz tekislikka parallel tekislik bilan kesimi ushbu

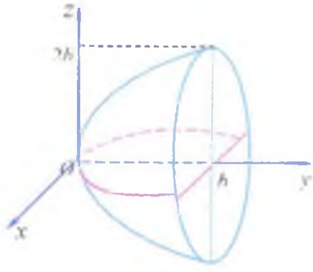
$$\begin{cases} x^2+y^2=4bh, \\ y=h, \ h>0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi aylanalardan iborat. Sirtning Oxy va Oyz tekisliklar bilan kesimlarida $y=\frac{x^2}{4b}$ va $y=\frac{z^2}{4b}$ parabolalar hosil bo‘ladi.Shunday qilib bu sirt aylanish paraboloididan iborat bo‘ladi (6-shakl).

$Oxyz$ koordinatalar sistemasida

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=z,\ a>0,\ b>0 \qquad (12)$$

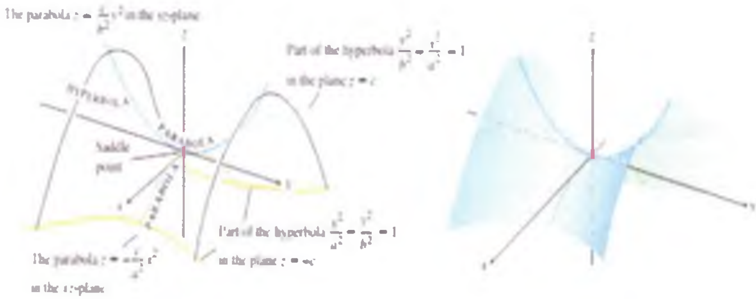
kanonik tenglama bilan aniqlanuvchi sirt ***giperbolik paraboloid*** deyiladi. Sirtning Oxy tekislikka parallel tekisliklar bilan kesimi



6-shakl

$$\begin{cases} \frac{x^2}{(ah)^2}-\frac{y^2}{(bh)^2}=1, \\ z=h, h>0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasi bilan aniqlanuvchi giperboladan, Oxz va Oyz tekisliklar bilan kesimlari $z=\frac{x^2}{a^2}$ va $z=\frac{y^2}{b^2}$ parabolalardan iborat bo‘ladi. Shunday qilib (12) tenglama bilan aniqlanuvchi sirtning ko‘rinishi «egar» shaklida bo‘ladi (7-shakl). Bu sirt giberbolik paraloboid deb ataladi.



7-shakl

Silindrik sirtlarni umumiy kanonik tenglamalarini jadval holati.

Agar L egri chiziqning har bir nuqtasi orqali berilgan $\bar{a}$ vektorga parallel to‘g‘ri chiziq o‘tkazsak, u holda silindrik sirt deb ataladigan sirtni hosil qilamiz. $\bar{a}$ vektorga parallel va silindrik sirtga tegishli to‘g‘ri chiziqlar bu sirtning yasovchilari deb ataladi, L egri chiziq esa silindrik sirtning yo'naltiruvchisi deb ataladi.

Silindrik sirtni uning yasovchilariga perpendikulyar tekislik bilan kesilganda (normal kesim) aylana hosil bo'lsa, u holda silindrik sirt doiraviy sirt, agar ellips hosil bo'lsa, elliptik sirt, agar parabola hosil bo'lsa, u holda parabolik sirt deyiladi.

Berilgan egri chiziqning har bir nuqtasidan va fazoning bu egri chiziqda yotmaydigan belgilangan nuqtasidan o'tuvchi barcha to'g'ri chiziqlar birlashmasi konus sirt deb ataladi.

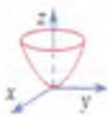
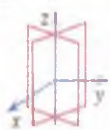
Mazkur egri chiziq konus sirtning yo'naltiruvchisi, oldindan belgilangan nuqta uning uchi, to'g'ri chiziqlar esa konus sirtning yasovchilari deb ataladi.

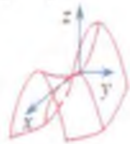
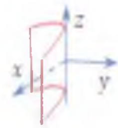
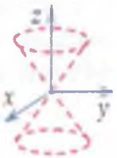
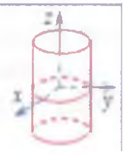
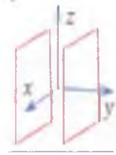
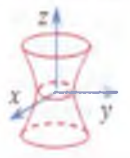
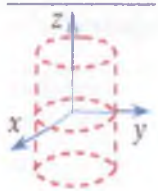
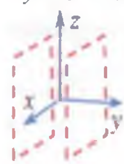
Fazodagi egri chiziqni harakatlanayotgan M nuqtaning trayektoriyasi sifatida tasavvur qilaylik, bunda vaqtning har bir t momentida bu nuqtaning x, y, z koordinatalari oldindan tanlangan koordinatalar sistemasiga nisbatan ma'lum bo'lsin:

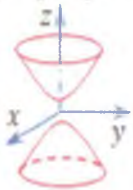
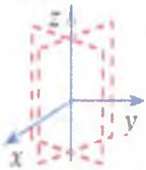
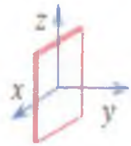
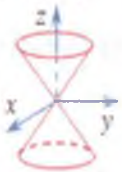
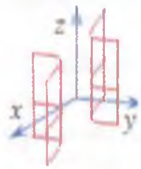
$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \qquad (1)$$

(1) ko'rinishdagi tenglamalar fazodagi egri chiziqning parametrik tenglamalari deb ataladi. Bundan tashqari ikkinchi tartibli sirtlarni kanonik tenglamalari va ularni joylashuv holatlarin quyidagi jadval orqali umumlashtiramiz. **5.1-jadval.**

5.1-jadval.

1.	Ellipsoid tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 	7.	Paraboloid tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=2z$ 	13.	Kesishuvchi tekisliklar jufti tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ 

2.	Mavhum ellipsoid tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$ 	8.	Giperbolik paraboloid sirt tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=2z$ 	14.	Parabolik silindt sirti tenglamasi $y^2=2px$ 
3.	Mavhum konus tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$ 	9.	Elliptik silind tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 	15.	Parallel tekisliklar jufti tenglamasi $y^2-b^2=0$ 
4.	Bir pallali giperboloid tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ 	10.	Mavhum elliptik silind tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$ 	16.	Mavhum parallel tekisliklar jufti tenglamasi $y^2+b^2=0$ 

5.	Ikki pallali giperboloid tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1$ 	11.	Mavhum kesishuvchi tekisliklar jufti tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ 	17.	O‘zaro ustma-ust tushadigan tekisliklar tenglamasi $y^2=0$ 
6.	Konus tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 	12.	Giperbolik silindr tenglamasi $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ 	18.	barcha tenglamalar uchun $a>0, b>0, c>0, p>0$ 1 va 2 tenglamalar uchun $a\geq b\geq c$ 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10 tenglamalar uchun $a\geq b$

α tekislikdagi chegaralangan D figurani va α tekislikka parallel bo‘lmagan biror a vektorni qaraylik. U holda $M\in D$ va $\overline{MN}=a$ bo‘lgan barcha MN kesmalarning birlashmasi asosi D bo‘lgan silindr deyiladi. Silindrik sirtlar tenglamasini olish uchun yo‘naltiruvchilarning tenglamalarini bilish talab etiladi.

$$F_1(x,y,z)=0 \text{ va } F_2(x,y,z)=0$$

yasovchi tenglamasini

$$\frac{X-x}{m}=\frac{Y-y}{n}=\frac{Z-z}{p}$$

bu yerda $M(x,y,z)$ yo‘naltiruvchiga tegishli nuqta, X,Y,Z-silindrik sirtning koordinatalari, m,n,p-yasovchiga tegishli tashkil etuvchilar (o‘zgarmas sonlar)

Mashqlar

1.Uchi koordinata boshida bo'lgan konus sirti tenglamasini tuzing

$$\left.\begin{array}{l}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\\ z=c\end{array}\right\} \quad (2)$$

Yechish. (0;0;0) va (x,y,z) nuqtalardan o'tuvchi tashkil etuvchini tenglamasi

$$\frac{X}{x}=\frac{Y}{y}=\frac{Z}{z}, \quad (3)$$

bo'ladi. Bu(2) va (3) tenglamalardan

$$x=c\frac{x}{z}; \quad y=c\frac{y}{z}$$

topiladi.U holda quyidagi konus sirtini olamiz.

$$\frac{c^2}{a^2}\frac{x^2}{z^2}+\frac{c^2}{b^2}\frac{y^2}{z^2}=1 \quad \text{yoki} \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Sirt tushunchasini misolda asoslang?
2.Ikkinchi tartibli sirt deb nimaga aytiladi?
3.Ellipsoid, giperboloid va paraboloidga ta'rif bering?
4.Elliptik paraboloidning kanonik tenglamasini ayting?
5.Giperbolik paraboloidning kanonik tenglamasini ayting?
6.Quyidagi tenglamalar qanday sirtlarni aniqlaydi:
7. Quyidagi tenglamalar qanday sirtlarni aniqlaydi:

a) $x^2+y^2=25$; b) $x^2+y^2+z^2=25$; v) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; g) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$?

8.Yarim o'qlari $a=6$ va $b=4$ va markazi koordinatalar boshida bo'lgan ellips o'zining Oz o'qda yotadigan kichik o'qi atrofida aylanadi. Ellipsning bu aylanishida chizadigan sirtning tenglamasini tuzing. Masalaga doir chizma chizing.

9. Yarim o'qlari $a=6$, $b=4$ va markazi koordinatalar boshida bo'lgan ellips o'zining Oz o'qda yotadigan katta o'qi atrofida aylanadi. Aylanish sirti tenglamasini tuzing. Masalaga doir chizma chizing.

10. $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{14}=1$ ellipsning Oy o'q atrofida aylanish sirti tenglamasini tuzing.

11. $y^2=2x$ parabolaning Ox o'q atrofida aylanishidan hosil bo'lgan sirtning tenglamasini tuzing.

12.Quyidagi tenglamalar bilan qanday sirtlar aniqlanadi: a) $x^2+y^2+z=9$;

b) $x^2+y^2+z^2=6z$; v) $x^2+y^2+z^2=4y+5$;g) $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=2$?

13. $x^2+2y^2-3z^2+2x+8y+18z-54=0$ tenglama qanday sirtni ifoda qiladi.

14.Quyidagi tenglamalar qanday sirtlarni ifoda qiladi?

a) $x^2-4y^2+4(z-2)^2-16=0$ b) $4x^2+3z^2-12y+24=0$

v) $x^2+2(y-2)^2+3(z-1)^2=18$ g) $4x^2-y^2-z^2=4$

III modul.MATEMATIK TAHLILNING ASOSIY TUSHINCHALARI

11-§.Funksiya tushinchasi

Tayanch so'z va iboralar: *miqdor tushincasi, funksiya tushunchasi, uning berilish usullari, asosiy elementar funksiyalar, funksiyalarning juft-toqligi, davriyligi, grafigi, aniqlanish va qiymatlar sohalari tatbiqlari.*

11.1.O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar

Biz amaliy faoliyatimizda mazmun jixatidan turlicha bo'lgan uzunlik, yuza, hajm, temperatura, tezlik kabi turli raiqdorlarga duch kelamiz. Bu miqdorlar aniq sharoitda ba'zan turli qiymatlarni qabul qilsa, ba'zan bir xil qiymatga teng bo'ladi. Masalan, tasodifiy 10 ta mashinaning tezligi tekshirilsa, ular har xil bo'lishi mumkin. Demak tezlik o'zgaruvchi miqdor.

Ma'lumki har qanday aylana uzunligi l ning diametri 2R ga nisbati har doim o'zgarmas son (mikdor) π =3,14... ga tengdir. Jismlarning erkin tushish tezlanishi ham o'zgarmas miqdordir.

Shunday qilib ikki xil o'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar bo'ladi. Odatda o'zgaruvchi miqdorlar x,y,z,... o'zgarmas miqdorlar esa a,b,c,...harflar orqali belgilanadi. Agar x o'zgaruvchi miqdor berilgan bo'lsa, bu miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlar to'plamiga x o'zgaruvchi miqdorning o'zgarish sohasi deyiladi. x o'zgaruvchi miqdorning o'zgarish sohasini sonlar o'qida tasvirlasak, a<x<b yoki a<x<b tengsizliklardan x ning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari (a,b) ,]a,b[oraliqda yoki [a,b] kesmalarda bo'lishi ravshan.

Ta'rif : Har xil son qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan har qanday x miqdorga o'zgaruvchi miqdor deyiladi. Barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari bir xil bo'lgan miqdorga o'zgarmas miqdor deyiladi.

Funksiya tushunchasi

Ikki to'plan elmentlari orasidagi bog'lanishni o'rnatishga asoslangan funksiya tushunchasi matematik analiz kursida o'rganilsada, nafaqat bu kursning, balki butun matematikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi.

Ikkita bo'sh bo'lmagan X va Y to'plamlar berilgan bo'lsin. f funksiya deb shunday (x,y) tartiblangan juftliklar to'plamiga aytiladiki, bunda $x \in X$, $y \in Y$ bo'ladi va har bir x bu to'plamning faqat bitta jufligiga kiradi, har bir y esa bu to'plamning hech bo'lmaganida bitta juftligiga kiradi. f funksiya $y = f(x), x \in X$ yoki $f : X \mapsto Y$ kabi yoziladi. Bunda x elementga y element mos qo'yilgan deyiladi yoki boshqacha f funksiya X to'plamni Y to'plamga akslantiradi deb aytiladi.

X to'plam f *funksiyaning aniqlanish sohasi* deb ataladi va $D(f)$ bilan belgilanadi. Barcha $y \in Y$ elementlar to'plamiga f *funksiyaning qiymatlar sohasi* deyiladi va $E(f)$ bilan belgilanadi.

$f : X \mapsto Y$ funksiya berilgan bo'lsin. Umuman aytganda X va Y to'plamlarning elementlari ixtiyoriy obyektlardan iborat bo'lishi mumkin.

Agar X va Y to'plamlarning elementlari haqiqiy sonlardan iborat, ya'ni $X \subset R, Y \subset R$ bo'lsa, f funksiyaga *sonli funksiya* deyiladi. Bunda x *argument* yoki *erkli o'zgaruvchi*, y *funksiya* yoki *bog'liq o'zgaruvchi* (x ga) deb ataladi; x va y o'zgaruvchilar funksional bog'lanishga ega deyiladi; Funksional bog'lanish ba'zan $y = y(x)$ kabi belgilanadi.

$y = f(x)$ *funksiyaning* $x = x_0 (x_0 \in X)$ *dagi xususiy qiymati* $f(x_0) = y_0$ yoki

$y|_{x=x_0} = y_0$ kabi belgilanadi. Masalan, $f(x) = 3x^2 - 2$ bo'lsa, $f(0) = -2, f(1) = 1$.

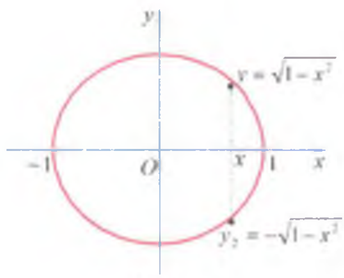
Misol. $\log_3(4x-1)$ funksiyaning aniqlanish sohasini topamiz. Bunda logarifm ostidagi ifoda musbat, ya'ni $4x-1>0$ bo'lishi kerak. Bundan $D(f)=\left(\frac{1}{4};+\infty\right)$.

Misol. $f(x)=x^2-6x+5$ funksiyaning qiymatlar sohasini topamiz. Bunda $x^2-6x+5=(x-3)^2-4$ va $\forall x\in R$da $(x-3)\geq 0$ ekanidan x ning barcha qiymatlarida $f(x)\geq -4$. $E(x-3)=[0;+\infty)$ bo'lgani uchun $E(f)=[-4;+\infty)$.

$y=f(x)$ *funksiyaning grafigi* deb Oxy koordinatalar tekisligining abssissasi x argumentning qiymatlaridan va ordinatasi y funksiyaning mos qiymatlaridan tashkil topgan barcha $(x;f(x))$ nuqtalari to'plamiga aytiladi. Funksiyaning grafigi tutash chiziqdan (egri chiziqdan yoki to'g'ri chiziqdan) iborat bo'lishi yoki ayrim nuqtalardan tashkil topishi mumkin, masalan, $y=n!$ funksiyaning grafigi 1,2,6,....nuqtalardan iborat bo'ladi

Har qanday chiziq ham biror funksiyaning grafigi bo'lavermaydi, masalan, $x^2+y^2=1$ aylana funksiyaning grafigi bo'lmaydi, chunki har bir $x\in(-1;1)$aylana nuqtalari to'plamining bitta emas balki ikkita juftligiga kiradi:

$y_1=\sqrt{1-x^2}$ va $y_2=-\sqrt{1-x^2}$ (4-shakl).



4-shakl

Bunda funksiya ta'rifining bir qiymatlilik sharti buziladi. Ammo aylananing quyi yarim tekislikdagi bo'lagi $y=-\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning grafigi, yuqori yarim tekislikdagi bo'lagi $y=\sqrt{1-x^2}$ funksiyaning grafigi bo'ladi.

Funksiyaning berilish usullari

Funksiyaning berilishi, ya'ni har bir x ga mos yagona y ni topish usuli turlicha bo'lishi mumkin. Amalda funksiya berilishining analitik, jadval va grafik usullari ko'p qo'llaniladi.

*Analitik usul*da x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish bir yoki bir nechta formula yoki tenglamalar orqali beriladi.

Masalan, $y = x^3$, $y = \sin 2x$, $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = \begin{cases} x - 5, & agar\ x < 3, \\ x^2 + 2, & agar\ x \geq 3. \end{cases}$

Agar formulada funksiyaning aniqlanish sohasi ko'rsatilmagan bo'lsa $D(f)$ sifatida argumentning sunday qiymatlari to'plami tushuniladiki, bu qiymatlarda berilgan funksiya ma'noga ega bo'ladi va haqiqiy qiymatlarni beradi.

*Jadval usuli*da x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish jadval orqali beriladi. Masalan, logorifmik fuksiyalarning, trigonometrik fuksiyalarning jadvallari.

Amalda jadval bilan funksiyaning kuzatish natijalari yoki tajribada olingan qiymatlari beriladi.

*Grafik usuli*da fuksiyaning grafigi beriladi. Ko'p hollarda grafik o'zi yozar asboblar yoki displey ekranlarida tasvirlangan bo'ladi. Bunda funksiyaning argumentning u yoki bu qiymatlariga mos qiymatlari bevosita shu grafikdan topiladi.

x va y o'zgaruvchilar orasidagi bog'lanish yuqorida keltirilgan uch usul bilan chegaralanib qolmasdan, boshqa shakllarda berilishi ham mumkin. Masalan, EHMning hisoblash programmasi shaklida, tavsiflardangina iborat holda.

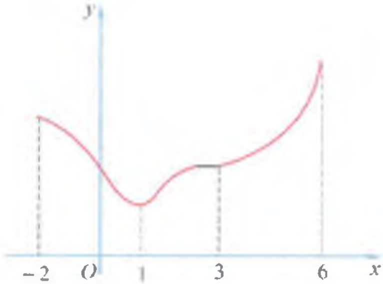
Funksiyaning monotonligi

$y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan va $X_1 \subset X$ bo'lsin.

1-ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in X_1$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1) > f(x_2)$) tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiyaga X_1 to'plamda *o'suvchi* (*kamayuvchi*) deyiladi.

2-ta'rif. Agar $\forall x_1, x_2 \in X_1$ uchun $x_1 < x_2$ bo'lganda $f(x_1) \leq f(x_2)$ ($f(x_1) \geq f(x_2)$)tengsizlik bajarilsa, $y = f(x)$ funksiyaga X_1 to'plamda *Kamaymaydigan* (*o'smaydigan*) deyiladi.

Masalan, grafigi 5-shaklda berilgan funksiya $(-2;1)$ intervalda kamayuvchi, $(1;6)$ intervalda kamaymay-digan, $(3;6)$ intervalda o'suvchi.



5-shakl

Barcha bunday funksiyalar *monoton funksiya* nomi bilan umumlashtiriladi. Bunda o'suvchi va kamayuvchi funksiyalarga *qat'iy monoton* funksiyalar deyiladi.

Funksiya monoton bo'lgan intervallar *monotonlik intervallari* deb ataladi.

Misol.

$f(x)=\dfrac{8}{2x-x^2-3}$ funksiyaning monotonlik intervallarini va eng kichik qiymatini topamiz. Buning uchun $\varphi(x)=2x-x^2-3$ belgilash kiritamiz:

$$\varphi(x)=2x-x^2-3=-2-(x^2-2x+1)=-2-(x-1)^2.$$

Bu funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda manfiy, $(-\infty;1]$ intervalda o'sadi va $[1;+\infty)$ intervalda kamayadi.

U holda $f(x)=\dfrac{8}{\varphi(x)}$ funksiya $(-\infty;1]$ intervalda kamayadi va $[1;+\infty)$ intervalda o'sadi. Bunda $\min f(x)=f(1)=-4.$

Funksiyaning juft va toqligi

$y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

Agar $\forall x\in X$ uchun $-x\in X$ va $f(-x)=f(x)$ bo'lsa $f(x)$ funksiyaga *juft funksiya* deyiladi. Masalan, $y=x^2, y=\cos x$, $y=\sqrt{1+x^2}$ – juft funksiyalar. Juft funksiya-ning grafigi ordinata o'qiga nisbatan simmetrik bo'ladi. Agar $\forall x\in X$ uchun $-x\in X$ va $f(-x)=-f(x)$ bo'lsa $f(x)$ funksiyaga *toq funksiya* deyiladi. Masalan, $y=x^3$, $y=\sin x$ – toq funksiyalar. Toq funksiyaning grafigi koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi.

Juft yoki toq bo'lmagan funksiya umumiy ko'rinishdagi funksiya deb ataladi.

Masalan, $y=x-2, y=\sqrt{x}-$ umumiy ko'rinishdagi funksiyalar.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar juft funksiyalar bo'lsa

$$f(x)+g(x),\ f(x)-g(x),\ f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$$

funksiyalar ham juft bo'ladi.

$f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar toq funksiyalar bo'lsa

$$f(x)+g(x)\ \ f(x)-g(x)$$

funksiyalar toq bo'ladi,

$$f(x)\cdot g(x),\ \frac{f(x)}{g(x)}, g(x)\neq 0$$

funksiyalar esa juft bo'ladi.

Misol.

$f(x)=\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})$ funksiya toq ekanini ko'rsatamiz. Buning uchun berilgan funksiya uchun $f(-x)=-f(x)$ yoki $f(x)+f(-x)=0$ bo'lishini tekshirib ko'ramiz:

$$f(x)+f(-x)=\ln(2x+\sqrt{1+4x^2})+\ln(-2x+\sqrt{1+4x^2})=$$
$$=\ln(1+4x^2-4x^2)=\ln 1=0.$$

Demak, funksiya toq.

Funksiyaning chegaralanganligi

$y=f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

3-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas M soni topilsaki, $\forall x\in X$ uchun $f(x)\leq M$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ fuksiya X to'plamda *yuqoridan chegaralangan* deyiladi.

4-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas m soni topilsaki, $\forall x\in X$ uchun $f(x)\geq m$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ fuksiya X to'plamda *quyidan chegaralangan* deyiladi.

5-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya ham quyidan ham yuqoridan chegaralangan bo'lsa, y'ani shunday o'zgarmas m va M sonlari topilsaki, $\forall x \in X$ uchun $m \leq f(x) \leq M$ tengsizlik bajarilsa $f(x)$ funksiya X to'plamda *chegaralangan* deyiladi.

Masalan, $y = 1 - x^4$ funksiya yuqoridan $M = 1$ soni bilan chegaralangan, $y = 2 + x^2$ funksiya quyidan $m = 2$ soni bilan chegaralangan, $y = \sin x$ funksiya

qo'yidan $m = -1$ soni bilan, yuqoridan $M = 1$ soni bilan chegaralangan.

Funksiyaning davriyligi

$y = f(x)$ funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin.

6-ta'rif. Agar shunday o'zgarmas $T\ (T \neq 0)$ son topilsaki $\forall x \in X$ uchun $x + T \in X$, $x - T \in X$, $f(x \pm T) = f(x)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiyaga *davriy funksiya* deyiladi. Bunda T larning eng kichik musbat qiymati T_0 ga $f(x)$ *funksiyaning davri* deyiladi.

Masalan, $y = \sin x$ funksiyaning davri 2π ga, tgx funksiyaning davri π ga teng.

Misollar.

1. $f(x) = 4\sin 3x + 3\cos 3x$ davrini topamiz. $A\cos(\omega x \pm \varphi)$ funksiyaning davri $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ bo'ladi. Bundan $T_0 = \dfrac{2\pi}{3}$.

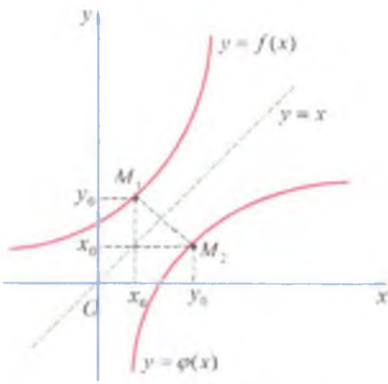
2. $f(x) = 4\sin 3x + 3\cos 3x$ davrini topamiz. Bunda $\cos 6x$ va $tg4x$ funksiyalarning davrlari mos ravishda $T_1 = \dfrac{\pi}{3}$ va $T_2 = \dfrac{\pi}{4}$. U holda $f(x) = \cos 6x + tg4x$ funksiyaning davri $\dfrac{\pi}{3}$ va $\dfrac{\pi}{4}$ sonlarining eng kichik umumiy karralisiga teng bo'ladi, ya'ni $T_0 = \pi$.

3. $f(x) = \cos^2 3x$ funksiyaning davrini topamiz. Bu funksiyaning davri $\cos^2 3x = \dfrac{1 + \cos 6x}{2}$ ekanidan $\cos 6x$ funksiyaning davri bilan bir xil bo'ladi. Demak, $T_0 = \dfrac{2\pi}{6} = \dfrac{\pi}{3}$.

Teskari funksiya

Aniqlanish sohasi X va qiymatlar sohasi Y bo'lgan $y = f(x)$ funksiya berilgan bo'lsin. Agar bunda har bir $y \in Y$ qiymatga yagona $x \in X$ qiymat mos qo'yilgan bo'lsa, u holda aniqlanish sohasi Y va qiymatlar sohasi X bo'lgan $x=\varphi(y)$ funksiya aniqlangan bo'ladi. Bu funksiya $y=f(x)$ ga *teskari funksiya* deb ataladi va $x=\varphi(y)=f^{-1}(y)$ kabi belgilanadi. $y=f(x)$ va $x=\varphi(y)$ funksiyalar *o'zaro teskari funksiyalar* deyiladi. Bunda $y=f(x)$ funksiyaga teskari $x=\varphi(y)$ funksiyani topish uchun $f(x)=y$ tenglamani x ga nisbatan yechish (agar mumkin bo'lsa) yetarli. Masalan, $y=a^x$ funksiyaga teskari funksiya $x=\log_a y$ funksiya bo'ladi. $y=x^2$ funksiyaga $x\in[0;1]$da $x=\sqrt{y}$ teskari funksiya mavjud, $x\in[-1;1]$ da esa mavjud emas, chunki bunda y ning har bir qiymatiga x ning ikkita qiymati, masalan, $y=1$ ga $x_1=-1, x_2=1$ mos keladi. Teskari funksiya ta'rifiga ko'ra X va Y to'plamlar o'rtasida bir qiymatli moslik o'rnatilsagina $y=f(x)$ funksiya teskari funksiyaga ega bo'ladi. Bundan *har qanday qat'iy monoton funksiya teskari funksiyaga ega bo'ladi* deyish mumkin bo'ladi. Bunda agar funksiya o'ssa (kamaysa), u holda unga teskari funksiya ham o'sadi (kamayadi).

$y=f(x)$ va unga teskari $x=\varphi(y)$ funksiyalar bitta egri chiziq bilan ifodalanadi' ya'ni ularning grafigi ustma-ust tushadi. Odatdagidek argument (erkli o'zgaruvchi) x bilan va funksiya (bog'liq o'zgaruvchi) y bilan belgilansa, $y=f(x)$ funksiyaga teskari funksiya $y=\varphi(x)$ deb yoziladi. Bu $y=f(x)$ egri chiziqning $M_1(x_0;y_0)$ nuqtasi $y=\varphi(x)$ egri chiziqning $M_2(y_0;x_0)$ nuqtasi bo'lishini bildiradi, ammo bu nuqtalar $y=x$ to'g'ri chiziqqa nisbatan simmetrik bo'ladi (6-shakl).



6-shakl

Shu sababli *o'zaro teskari* $y=f(x)$ *va* $y=\varphi(x)$ *funksiyalarning grafiklari I va III choraklar koordinata burchakla-rining bissektrisalariga nisbatan simmetrik* bo'ladi.

Misol. $f(x)=\log_3(x+\sqrt{1+x^2})$ funksiyaga teskari funksiyani topamiz. $\sqrt{1+x^2}>|x|$ bo'lgani sababli berilgan funksiya $(-\infty;+\infty)$ intervalda aniqlangan. Bu funksiya uchun $f(x)+f(-x)=0$, ya'ni funksiya toq. Funksiya $x\geq 0$ da o'sadi. Demak, berilgan funksiya $x\in(-\infty;\infty)$da qat'iy monoton va unga teskari funksiya mavjud.

$y=f(x)$ desak, $y=\log_3(x+\sqrt{1+x^2})$ bo'ladi. Bu tenglikni $x$ga nisbatan yechamiz:

$3^y=x+\sqrt{1+x^2}$, $3^{-y}=-x+\sqrt{1+x^2}$ (chunki funksiya toq).

Bundan $x=\frac{1}{2}(3^y+3^{-y})$ yoki $y=\frac{1}{2}(3^x+3^{-x})$.

Murakkab funksiya

X to'plamda qiymatlar sohasi Z bo'lgan $z=\varphi(x)$ funksiya aniqlangan bo'lsin. Agar Z to'plamda $y=f(z)$ funksiya aniqlangan bo'lsa, u holda X to'plamda $y=f(\varphi(x))$ *murakkab funksiya* (yoki $z=\varphi(x)$ va $y=f(z)$ funksiyalarning superpozitsiyasi) aniqlangan deyiladi.

$z=\varphi(x)$ o'zgaruvchi *murakkab funksiyaning oraliq argumenti* deb ataladi. Murakkab funksiyaning oraliq argumentlari bir nechta bo'lishi ham mumkin.

Masalan, $y=\cos 5x$ murakkab funksiya, chunki u $y=f(z)=\cos z$ va $z=\varphi(x)=5x$ funksiyalarning superpozitsiysidan iborat.

11.2. Asosiy elementar funksiyalar

Quyida keltirilgan funksiyalarga *asosiy elementar funksiyalar* deyiladi.

1. **O'zgarmas funksiya** $y=C$ ($C\in R$).

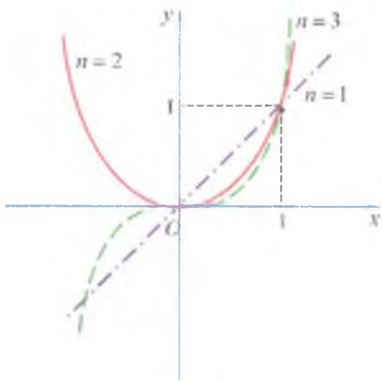
O'zgarmas funksiya: $D(f)=(-\infty;+\infty)$dan, $E(f)=\{C\}$ dan iborat, chegaralangan, juft, davri ixtiyoriy T.

O'zgarmas funksiyaning grafigi abssissalar o'qiga parallel to'g'ri chiziqdan iborat bo'ladi.

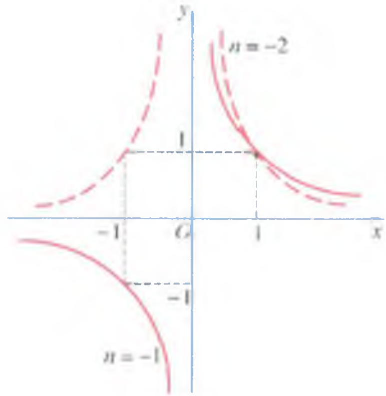
2. **Darajali funksiya** $y=x^{\alpha}$, bunda $\alpha \in R, \alpha \neq 0$.

Darajali funksiyaning hamma grafiklari (1;1) nuqtadan o'tadi.

1) $\alpha = n$, $n-$butun musbat son. Bunda funksiyaning grafigi koordinatalar boshida abssissalar o'qiga urunadi ($n \geq 2$ da); n juft son bo'lganda ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, n toq son bo'lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (7-shakl). $n=1$ da *I va III* choraklar koordinata burchaklari bissektrisalarining grafigini ifodalaydi 7-shakl.



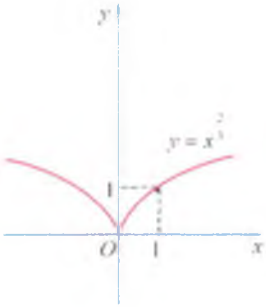
7-shakl



8-shakl

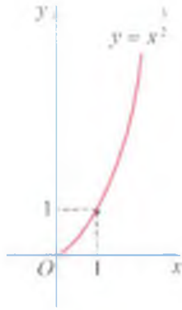
2) $\alpha = -n$, $n-$butun musbat son. Bunda funksiyaning grafigi n juft son bo'lganda ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik, n toq son bo'lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi, $n=1$ da teskari proporsional bog'lanish grafigini ifodalaydi (8-shakl).

3) $\alpha = r$, $r=\frac{m}{n}$, m va $n-$o'zaro tub butun sonlar. Bunda n juft son bo'lganda $D(f)=[0;+\infty)$, n toq son bo'lganda $D(f)=(-\infty;+\infty)$. Funksiyaning grafigi n toq va m juft son bo'lganda ordinatalar o'qiga nisbatan simmetrik (9-shakl), n va m toq sonlar bo'lgnida koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi (10-shakl). $r<1$ da grafik koordinatalar boshida ordinatalar o'qiga urunadi(9,10-shakl), $r>1$ da grafik koordinatalar boshida abssissalar o'qiga urunadi 11-shakl.



9-shakl

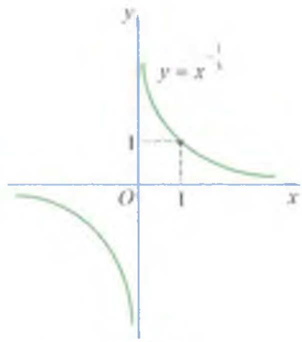
10-shakl



11-shakl

4) $\alpha = q$, $q = \frac{m}{n} < 0, m$ va n – o‘zaro tub butun sonlar, $n \neq -1$. Bunda n juft son bo‘lganda $D(f) = (0;+\infty)$ (12-shakl), n toq son bo‘lganda $D(f) = (-\infty;0) \cup (0;+\infty)$. Funksiyaning grafigi n toq va m juft son bo‘lganda ordinatalar o‘qiga nisbatan simmetrik, n va m toq sonlar bo‘lganda esa koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi 13-shakl.

12-shakl



13-shakl

3. **Ko‘rsatkichli funksiya** $y = a^x$, bunda $a \in R, a > 0, a \neq 1$.

Ko‘rsatkichli funksiya: $D(f) = (-\infty;+\infty)$ dan, $E(f) = (0;+\infty)$ dan iborat; $a > 1$ da monoton o‘suvchi, $0 < a < 1$ da monoton kamayuvchi.

Ko‘rsatkichli funksiyaning grafiklari (0;1) nuqtadan o‘tadi.

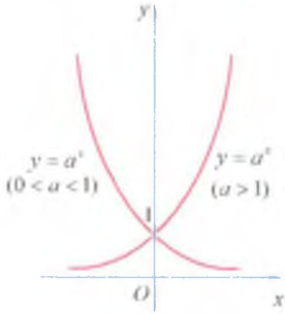
Ko‘rsatkichli funksiyaning $a > 1$ uchun va $0 < a < 1$ uchun grafiklari 14-shaklda keltirilgan.

4. **Logaifmik funksiya** $y=\log_a x$, bunda $a \in R,\ a>0,\ a \neq 1$.

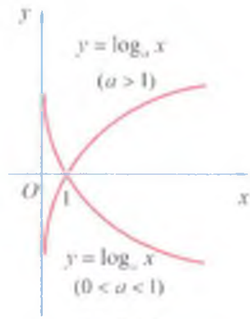
Logarifmik funksiya: $D(f)=(0;+\infty)$ dan, $E(f)=(-\infty;+\infty)$ dan iborat; $a>1$da monoton o‘suvchi, $0<a<1$da monoton kamayuvchi; $y=a^x$ga teskari funksiya.(14-shakl.)

Logarifmik funksiyaning grafiklari (1;0) nuqtadan o‘tadi.

Logarifmik funksiyaning $a>1$uchun va $0<a<1$uchun grafiklari 15-shaklda keltirilgan.



14-shakl

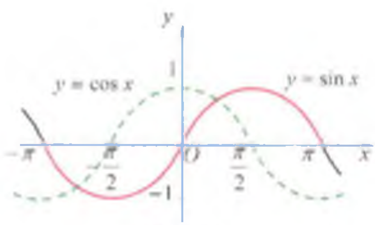


15-shakl

5.Trigonometrik funksiyalar

$-\ y=\sin x$: $D(f)=(-\infty;+\infty)$ daniborat,chegaralangan, toq, davri 2π (16-shakl);

$-\ y=\cos x$: $D(f)=(-\infty;+\infty)$dan, $E(f)=[-1;1]$ dan iborat, chegaralangan, juft, davri 2π (16-shakl);

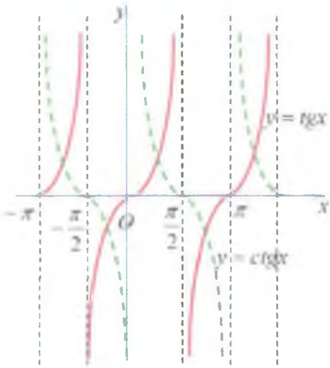


16-shakl

$-\ y=tgx$:

$D(f)=\left((2n-1)\frac{\pi}{2};(2n+1)\frac{\pi}{2}\right), n \in Z$ dan, $E(f)=(-\infty;+\infty)$ dan iborat, toq, davri π (17-shakl);

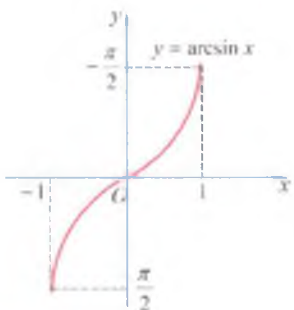
$-\ y = ctgx:\quad D(f) = (n\pi;(n+1)\pi), n \in Z$ dan, $\quad E(f) = (-\infty;+\infty)$ dan iborat, toq, davri π (17-shakl).



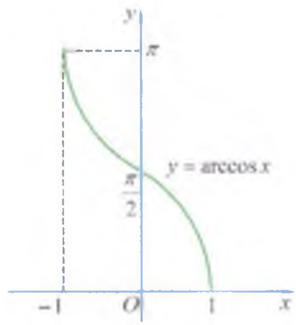
17-shakl

1. Teskari trigonometrik funksiyalar

$-\ y = \arcsin x:\ D(f) = [-1;1]$ dan, $\ E(f) = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ dan iborat, hegaralangan, toq, monoton o'suvchi (18-shakl);



18-shakl

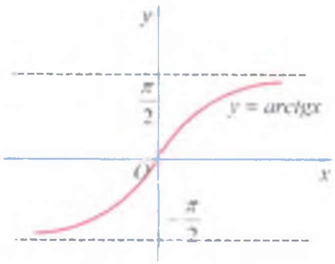


19-shakl

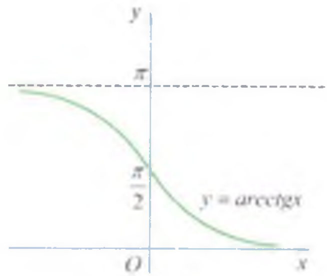
$-\ y = \arccos x:\ E(f) = [-1;1]$ dan, $E(f) = [0;\pi]$ dan iborat, chegaralangan, monoton kamayuvchi(19-shakl);

$-\ y = arctgx$: $D(f) = (-\infty;+\infty)$ dan, $E(f) = \left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ dan iborat, toq, monoton o'suvchi (20-shakl);

$-\ y = arcctgx$: $D(f) = (-\infty;+\infty)$ dan, $E(f) = (0;\pi)$ oraliqdan iborat, monoton kamayuvchi(21-shakl).



20-shakl



21-shakl

Asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi arifmetik amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish) va superpozitsiyalash yordamida hosil qilingan bitta formula bilan berilgan funksiyaga *elementar funksiya* deyiladi.

Masalan, ushbu $y = P_m(x) = a_0x^m + a_1x^{m-1} + ... + a_{m-1}x + a_m$,

$y = \lg^2(\sin 2x) + e^{2x}$, $y = \arccos\frac{1}{x} + \sqrt[3]{x^2}$ funksiyalar elementar funksiyalar bo'ladi.

*Elementar bo'lmagan funksiyalar*ga quyidagi funksiyalar misol bo'ladi:

$$y = signx = \begin{cases} 1, & agar\ x > 0, \\ 0, & agar\ x = 0, \\ -1, & agar\ x < 0, \end{cases} \qquad y = \begin{cases} \frac{1}{x^3}, & agar\ x > 0, \\ x^3, & agar\ x \le 0, \end{cases}$$

$$y = 1 - \frac{x^3}{3!\cdot 3} + \frac{x^5}{5!\cdot 5} - \frac{x^7}{7!\cdot 7} + ... + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!(2n+1)} + ...$$

Oshkormas va parametrik ko'rinishda berilgan funksiyalar

$y = f(x)$ funksiyaning oshkor ko'rinishdagi berilishi hisoblanadi. Shuningdek, ayrim hollarda funksiyaning oshkormas ko'rinishidan foydalanishga to'g'ri keladi.

Funksiya X to'plamda aniqlangan bo'lsin. Agar har bir $x \in X$ elementga mos qo'yilgan yagona funksiya qandaydir $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantirsa, *funksiya* $F(x,y)=0$ *tenglama bilan oshkormas berilgan* deb ataladi. Bunda funksiyaga oshkormas funksiya deyiladi. Oshkormas funksiyaning grafigi deb Oxy koordinatalar tekisligining $F(x,y)=0$ tenglamani qanoatlantiruvchi barcha nuqtalari to'plamiga aytiladi.

$X \subset R$ to'plamda ikkita $x = x(t)$ va $y = y(t)$ funksiyalar berilgan bo'lsin.

U holda Oxy koordinatalar tekisligining koordinatalari $(x(t); y(t))$ bo'lgan barcha nuqtalari to'plamiga parametrik ko'rinishda berilgan chiziq (egri chiziq yoki to'g'ri chiziq) deyiladi. Bunda t parametr deb ataladi.

Agar parametrik ko'rinishda berilgan chiziq $y = f(x)$ funksiyaning grafigini ifodalasa, bu funksiyaga *parametrik ko'rinishda berilgan funksiya* deyiladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Funksiya tushunchasiga olib keluvchi qanday masalalarni bilasiz?
2. O'zgaruvchi va o'zgarmas miqdorlar nima? Funksiyaning ta'rifi?
3. Funksiyaning o'zgarish va aniqlanish sohalari?
4. Berilgan nuqtadan aniqlanmagan funksiyaga misol keltiring?
5. Funksiya qanday usullarda berilishi mumkin?
6. Quyida berilgan funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

   a) $f(x) = \lg(1-x) + \sin(3x+1)$ b) $f(x) = \lg(x+3) + \sqrt{x^2-25}$

   s) $f(x) = \sqrt{x^2-9} + \lg(x-2)$ d) $f(x) = 1 - \lg x$
7. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toq ekanini aniqlang:

   a) $y = \sin 5x$ b) $y = \lg\cos 2x$

8. Agar $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\frac{3}{2}\pi < \alpha < 2\pi$ bo'lsa, $\sin\alpha$ ni toping.

9. Ifodani soddalashtirihg:

a) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\cos^2\alpha}$; b) $\frac{\sin 2\alpha}{1-\sin^2\alpha}$; s) $\frac{\sin\alpha - tg\alpha}{\cos\alpha - 1}$; d) $\frac{\cos\alpha - ctg\alpha}{\sin\alpha - 1}$;

10. Berilgan funksiyaga teskari funksiyani toping:

a) $y=-5x+4$; b) $y=\frac{3x-1}{2}$; s) $y=x^3-3$; d) $y=\log_{0,5}x$.

11.Quyida berilgan funksiyalarning aniqlanish sohasini toping.

a) $f(x)=\sqrt{3+x}+\sqrt[4]{7-x}$ b) $f(x)=\sqrt{x^2-25}+\frac{1}{\sqrt{100-x^2}}$

s) $y=\lg x-\frac{\sqrt{4-x}}{x}$ d) $f(x)=\sqrt{2-3x}+\lg x$

12. Quyidagi funksiyalarning juft yoki toqligini aniqlang:

a) $y=\sqrt[3]{(1-x)^2}+\sqrt[3]{(1+x)^2}$ b) $y=\ln\frac{1-x}{1+x}$

13.a) $\sin\alpha=\frac{2ab}{a^2+b^2}$, $a>0,\ b>0,\ 0\le\alpha\le\frac{\pi}{2}$ bo'lsa, $\cos\alpha$ va $tg\alpha$ ni toping.

b)Ayniyatni isbotlang: $\frac{tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}{tg\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)+tg\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)}=\sin 2\alpha$;

14. $y=\log_3 x$ va $y=\log_{\frac{1}{3}}x$ funksiyalarning grafiklarini yasang.

15. Berilgan funksiyaga teskari funksiyaning aniqlanish sohasini va qiymatlar to'plamini toping:

1) $y=\frac{1}{4}x-7$; 2) $y=(x-1)^3$; 3) $y=\frac{3}{x-4}$.

12-§.Funksiya limitini hisoblash. Ajoyib limitlar

Tayanch va so'z iboralar: *limit tushunchasi, funksiya limiti, funksiyaning nuqtadagi limiti, cheksiz kichik va cheksiz kata miqdorlar, yigindi, ayirma, ko'paytma va bo'linmaning limiti, ajoyib limitlar, cheksizlik, uzluksizlik, uzilish nuqtalari, uzluksiz funksiyalar,tatbiqlari.*

12.1. Funksiya limiti, limitlar haqida teoremalar

Ta'rif: x argument x_0 nuqtaga intilganda uning funksiyasi f(x) biror A soniga intilsa, A soni $y = f(x)$ funksiyasining x_0 nuqtadagi limiti deyiladi va u $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ ko'rinishda yoziladi.

Agar $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada aniqlangan bo'lsa, u holda $y(x_0)$ ifoda funksiyaning x_0 nuqtadagi qiymati bo'ladi. Agarda funksiyaning x_0 nuqtadagi limiti A, shu x_0 nuqtadagi funksiya qiymatiga teng bo'lsa, ya'ni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ bo'lsa, shu x_0 nuqtada funksiyani uzluksiz deyiladi.

Funksiyaning limiti haqidagi teoremalar:

1. O'zgarmas $y = C$ funksiyaning limiti shu o'zgarmasning o'ziga teng:

$$\lim_{x\to x_0} C = C$$

2. O'zgarmas ko'paytuvchini limit ishorasidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\lim_{x\to x_0}[kf(x)] = k\lim_{x\to x_0} f(x)$$

3. Funksiyalar yig'indisining (ayirmasining) limiti shu funksiyalar limitlarining
yig'indisi (ayirmasiga) teng:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f_1(x)f_2(x)\pm\ldots\pm f_n(x)] = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\pm\lim_{x\to x_0} f_2(x)\pm\ldots\pm\lim_{x\to x_0} f_n(x)}$$

4. Funksiyalar ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarinng ko'paytmasiga teng:

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}[f(x_1)\cdot f(x_2)\cdot\ldots\cdot f_n(x)] = \lim_{x\to x_0} f_1(x)\cdot\lim_{x\to x_0} f_2(x)\cdot\ldots\cdot\lim_{x\to x_0} f_n(x)}$$

Natija: Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} [f(x)]^n = A^n$ bo'ladi,

$A \geq 0$ da $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = A^{1/n}$ bo'ladi.

5. Agar bo'luvchi $f_2(x)$ ning limiti 0 ga teng bo'lmasa, $f_1(x)$ va $f_2(x)$ikki funksiya nisbatining limiti shu funksiyalar limitlarining nisbatiga teng:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} f_2(x)}$$

Limitlarning yuqoridagi teoremalaridan foydalanib, ba'zi funksiyalar limitlarini hisoblaymiz:

1. $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+x+2) = \lim\limits_{x\to 1} x^2 \lim\limits_{x\to 1} x + \lim\limits_{x\to 1} 2 = 1+1+2 = 4$

2. $\lim\limits_{x\to \pi/6} \frac{x}{\operatorname{Sin} x} = \frac{\lim\limits_{x\to\pi/6} x}{\lim\limits_{x\to\pi/6} \operatorname{Sin} x} = \frac{\pi/6}{1/2} = \frac{\pi}{3}$

3. $\lim\limits_{x\to 10}(x^2 \cdot \lg x) = \lim\limits_{x\to 10} x^2 \cdot \lim\limits_{x\to 10} \lg x = 100 \cdot 1 = 100$

Funksiyalarning limitlarini topishga yordam beradigan limitga o'tishning eng sodda qoidalari bilan tanishamiz.

Bunda isbot faqatgina $x \to a$ hol uchun o'tkaziladi ($x \to \infty$ da shunga o'xshash isbotlanadi). Ba'zan qisqalik uchun, $x \to a$ ni ham, $x \to \infty$ ni ham yozmaymiz.

Teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar algebraik yig'indisining limiti qo'shiluvchi funksiyalar limitlarining algebraik yig'indisiga teng, ya'ni

$$\ell im(u_1(x)+u_2(x)+\ldots+u_n(x)) = \ell im\, u_1(x) + \ell im\, u_2(x) + \ldots + \ell im\, u_n(x)$$

Isboti. Mulohazani ikkita qo'shiluvchi bo'lgan hol uchun yuritamiz. $\ell im\, u_1(x) = a$, $\ell im\, u_2(x) = b$ bo'lsin. U holda $\ell im(u_1(x)+u_2(x)) = a+b$ tenglik to'g'ri bo'lishini ko'rsatamiz. CHeksiz kichik funksiyalarning xossalaridagi teoremaning birinchi qismiga asosan $u_1 = a+\alpha$, $u_2 = b+\beta$ deb yozishimiz mumkin, bu erdagi α, β- cheksiz kichik funksiyalar.

Demak, $u_1+u_2 = (a+\alpha)+(b+\beta) = (a+b)+(\alpha+\beta)$ bu tenglikda $a+b$-o'zgarmas son, $\alpha+\beta$-cheksiz kichik funksiya. YAna o'sha 16.5-

teoremaning ikkinchi qismini qo'llasak $\ell im(u_1+u_2)=a+b=\ell im\,u_1+\ell im\,u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

1-misol. $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}2=2+2=4$.

2-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4-5x^2}{x^4}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^4}{x^4}-\frac{5x^2}{x^4}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{5}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^2}=1-0=1$.

Teorema. Chekli sondagi limitga ega funksiyalar ko'paytmasining limiti shu funksiyalar limitlarining ko'paytmasiga teng, ya'ni

$$\ell im(u_1(x)\cdot u_2(x)\cdot\ldots\cdot u_n(x))=\ell im\,u_1(x)\cdot\ell im\,u_2(x)\cdot\ldots\cdot\ell im\,u_n(x)$$

Isboti. Ko'paytmada ikkita funksiya bo'lgan holni qaraymiz. $\ell im u_1=a$, $\ell im u_2=b$ bo'lsin. U holda yuqorida eslatilgan teoremaga binoan $\ell im u_1=a+\alpha$, $\ell im u_2=b+\beta$ bo'ladi, α, β-cheksiz kichik funksiyalar. Demak, $u_1\cdot u_2=(a+\alpha)\cdot(b+\beta)=ab+(\alpha b+a\beta+\alpha\beta)$. Bu tenglikdagi ab-o'zgarmas son, $(\alpha b+a\beta+\alpha\beta)$- cheksiz kichik funksiya. Yana o'sha teoremani ikkinchi qismini qo'llasak $\ell im u_1\cdot u_2=ab=\ell im\,u_1\cdot\ell im u_2$ ekanligi kelib chiqadi.

3-misol. $\lim\limits_{x\to 2}(x+3)(x-4)=\lim\limits_{x\to 2}(x+3)\lim\limits_{x\to 2}(x-4)=[\lim\limits_{x\to 2}x+\lim\limits_{x\to 2}3]\cdot[\lim\limits_{x\to 2}x-\lim\limits_{x\to 2}4]=$
$=(2+3)(2-4)=5\cdot(-2)=-10$.

4-misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\lim\limits_{x\to\infty}\left(2-\frac{1}{x^2}\right)=(1-0)(2+0)=2$

Natija. O'zgarmas C ko'paytuvchini limit belgisidan chiqarish mumkin, ya'ni $\ell im\,C\cdot u(x)=C\,\ell im u(x)$ chunki $\ell im C=C$

Teorema. Ikkita limitga ega funksiya bo'linmasining limiti maxrajning limiti noldan farqli bo'lganda, shu funksiyalar limitlarining bo'linmasiga teng, ya'ni agar $\ell im\,v\neq 0$ bo'lsa, $\ell im\frac{u}{v}=\frac{\ell im\,u}{\ell im\,v}$ bo'ladi.

Isbot. $\ell im\,u(x)=a$, $\ell im\,v(x)=b\neq 0$ bo'lsin. U holda $u=a+\alpha,\ v=b+\beta$ bo'lishini hisobga olsak.

$$\boxed{\frac{u}{v}=\frac{a+\alpha}{b+\beta}=\frac{a}{b}+\left(\frac{a+\alpha}{b+\beta}-\frac{a}{b}\right)=\frac{a}{b}+\frac{ab+\alpha b-ab-a\beta}{b(b+\beta)}=\frac{a}{b}+\frac{\alpha b-a\beta}{b(b+\beta)}}$$

tenglikka ega bo'lamiz, bunda $\frac{a}{b}$-o'zgarmas son, $\frac{\alpha b-a\beta}{b(b+\beta)}$ - cheksiz kichik funksiya, chunki $\alpha b-a\beta$ cheksiz kichik funksiya va $b(b+\beta)\neq 0$.

So‘nggi tenglikka yuqoridagi teoremani 2-qismini qo‘llasak $\ell im\frac{u}{v}=\frac{a}{b}=\frac{\ell im u}{\ell im v}$ tenglik hosil bo‘ladi.

6-misol. $\ell im_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+1}$ ni toping.

Yechish. $\ell im_{x\to 2}(3x+1)=3\cdot 2+1=7\neq 0$. Shuning uchun:

$$\ell im_{x\to 2}\frac{2x+3}{3x+1}=\frac{\ell im_{x\to 2}(2x+3)}{\ell im_{x\to 2}(3x+1)}=\frac{2\cdot 2+3}{3\cdot 2+1}=\frac{7}{7}=1.$$

7-misol. $\ell im_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}$ ni toping.

Yechish. $\ell im_{x\to 3}(x-3)=3-3=0$ bo‘lgani uchun yuqoridagi teoremani qo‘llab bo‘lmaydi. Suratning limiti $\ell im_{x\to 3}(x+1)=3+1=4\neq 0$ bo‘lgani uchun berilgan ifodaning teskarisining limitini topamiz: $\ell im_{x\to 3}\frac{x-3}{x+1}=$ $\frac{\ell im_{x\to 3}(x-3)}{\ell im_{x\to 3}(x+1)}=\frac{3-3}{3+1}=\frac{0}{4}=0$

Bundan $\ell im_{x\to 3}\frac{x+1}{x-3}=\infty$ kelib chiqadi, chunki cheksiz kichik funksiyaga teskari funksiya cheksiz katta funksiya bo‘ladi.

Teorema. Agar a nuqtaning biror atrofiga tegishli barcha x lar uchun $u=f(x)\geq 0$ va $\ell im_{x\to a} f(x)=b$ (b-chekli son) bo‘lsa, u holda $b\geq 0$ bo‘ladi.

Isboti. Teskarisini faraz qilamiz, ya’ni $\ell im_{x\to a} f(x)=b$ bo‘lib b<0 bo‘lsin. U holda $|f(x)-b|\geq|b|>0$ bo‘lishi ravshan. Oxirgi tengsizlik $f(x)-b$ ayirmaning nolga intilmasligini, ya’ni b son $f(x)$ funksiyaning $x\to a$ dagi limiti emasligini ko‘rsatadi. Bu teoremaning shartiga zid, binobarin $b<0$ degan faraz shu ziddiyatga olib keldi. Demak, $f(x)\geq 0$ bo‘lsa $\ell im_{x\to a} f(x)\geq 0$ bo‘lar ekan.

Shunga o‘xshash limitga ega $f(x)\leq 0$ funksiya uchun $\ell im_{x\to a} f(x)\leq 0$ bo‘lishini isbotlash mumkin.

Boshqacha aytganda nomanfiy funksiya limitga ega bo‘lsa uning limiti manfiy son bo‘lolmas ekan va nomusbat funksiya limitga ega bo‘lsa uning limiti musbat son bo‘laolmas ekan.

Teorema. Agar $x\to a$ da limitga ega $f_1(x)$ va $f_2(x)$ funksiyaning mos qiymatlari uchun $f_1(x)\geq f_2(x)$ tengsizlik bajarilsa, u holda $\ell im_{x\to a} f_1(x)\geq \ell im_{x\to a} f_2(x)$ bo‘ladi.

Isboti. Shartga ko‘ra $f_1(x) \geq f_2(x)$, bundan $f_1(x) - f_2(x) \geq 0$. Oldingi teoremaga binoan $\lim\limits_{x\to a} [f_1(x) - f_2(x)] \geq 0$ yoki $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) - \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \geq 0$. Bundan $\lim\limits_{x\to a} f_1(x) \geq \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$ tengsizlik kelib chiqadi. Teorema isbot bo‘ldi. Bu teoremaga ko‘ra tengsizlikda limitga utish mumkin ekan.

Teorema (oraliq funksiyaning limiti haqida). Agar $x \to a$ da limitga ega bo‘lgan $u(x)$, $v(x)$ va $z(x)$ funksiyalarning mos qiymatlari uchun $u(x) \leq v(x) \leq z(x)$

tengsizliklar bajarilsa va $\lim\limits_{x\to a} u(x) = \lim\limits_{x\to a} z(x) = b$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b$ bo‘ladi.

Isboti. Shartga ko‘ra $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b$ va $\lim\limits_{x\to a} z(x) = b$, demak istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun a nuqtaning δ_1-atrofi mavjudki, undagi barcha x lar uchun $|u(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. SHunga o‘xshash $\varepsilon > 0$ son uchun a ning δ_2-atrofi mavjud bo‘lib undagi barcha x lar uchun $|z(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi. Agar δ orqali δ_1 va δ_2 sonlarning kichigini belgilasak a nuqtaning δ-atrofidagi barcha x lar uchun $|u(x) - b| < \varepsilon$ va $|z(x) - b| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi.
Bular

$$-\varepsilon < u(x) - b < \varepsilon \quad \text{va} \quad -\varepsilon < z(x) - b < \varepsilon \qquad (*)$$

tengsizliklarga teng kuchli.
Endi teorema shartidagi $u(x) \leq v(x) \leq z(x)$ tengsizliklarni unga teng kuchli $u(x) - b \leq v(x) - b \leq z(x) - b$ tengsizliklar bilan almashtiramiz (barchasidan bir xil b son ayirildi).

Bunga (*) tengsizliklarni qo‘llasak $-\varepsilon < u(x) - b \leq v(x) - b \leq z(x) - b < \varepsilon$ yoki bundan $-\varepsilon < v(x) - b < \varepsilon$ tengsizlikka ega bo‘lamiz. SHunday qilib a nuqtaning δ- atrofidagi barcha x lar uchun $-\varepsilon < v(x) - b < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli ekan. Bu $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b$ ekanini bildiradi.

Bu teoremani hazillashib «Ikki milisioner haqidagi teorema» deb atashadi. Nima uchun shunday deb atalishini o‘ylab ko‘rishni o‘quvchiga havola etamiz.

12.2.Ajoyib limitlar.

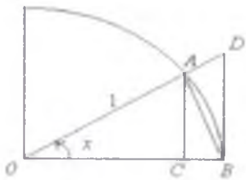
Birinchi ajoyib limit.

$\frac{\sin x}{x}$ funksiya faqat x=0 nuqtada aniqlanmagan, chunki bu nuqtada kasrning surati ham, mahraji ham 0 ga aylanib uni o‘zi $\frac{0}{0}$ ko‘rinishga ega bo‘ladi. Shu funksiyaning $x\to 0$ dagi limitini topamiz. Bu limit **birinchi ajoyib limit** deb ataladi.

Teorema. $\boxed{\frac{\sin x}{x}}$ funksiya $x\to 0$ da 1 ga teng limitga ega.

Isbot. Radiusi 1 ga teng aylana olib AOB markaziy burchakni x bilan belgilaymiz va u $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ intervalda yotadi deb faraz qilamiz

1-chizma.



Chizmadan ko‘rinib turibdiki,Δ AOB yuzi<AOB sektr yuzi<Δ DOB yuzi (**).

Biroq,Δ AOB yuzi S=$\frac{1}{2}OA\cdot OB\cdot\sin x=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\sin x=\frac{1}{2}\sin x$

(uchburchakning yuzi ikki tomoni va ular orasidagi burchak sinusi ko‘paytmasining yarmiga teng).

AOV sektor yuzi S = $\frac{1}{2}OB^2\cdot \breve{AB}=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot x=\frac{1}{2}x$,

Δ DOB yuzi S=$\frac{1}{2}OB\cdot BD=\frac{1}{2}OB\cdot\frac{BD}{1}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot tgx=\frac{1}{2}tg\,x$.

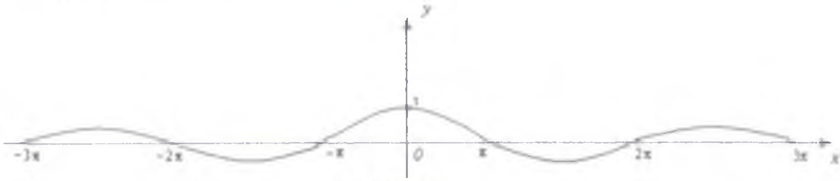
Shu sababli tengsizliklar $\frac{1}{2}\sin x<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}tgx$ ko‘rinishni yoki $\frac{1}{2}$ ga qisqartirilgandan so‘ng $\sin x<x<tgx$ ko‘rinishni oladi. Buning barcha hadlarini sin$x$>0 ga bo‘lamiz $\left(0<x<\frac{\pi}{2}\right)$. U holda $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$ yoki $1>\frac{\sin x}{x}>\cos x$

tengsizliklarga ega bo'lamiz. Bu tengsizliklar $x>0$ deb faraz qilinib chiqarildi. $\frac{\sin(-x)}{(-x)}=\frac{\sin x}{x}$, $\cos(-x)=\cos x$ ekanligini e'tiborga olib, bu tengsizliklar $x<0$ bo'lganda ham to'g'ri degan xulosaga kelamiz. Ammo $\lim\limits_{x\to 0} 1=1$ va $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Demak, $\frac{\sin x}{x}$ funksiya shunday ikki funksiya orasidaki, ularning ikkalasi ham bir xil 1 ga teng limitga intiladi. SHuning uchun oraliq funksiyaning limiti haqidagi teoremaga binoan oraliqdagi $\frac{\sin x}{x}$ funksiya ham ana shu 1 limitga intiladi, ya'ni

$$\boxed{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}.$$

$y=\frac{\sin x}{x}$ funksiyaning grafigi chizmada tasvirlangan.



2-chizma.

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin x}{\cos x}}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}=1\cdot\frac{1}{1}=1$.

Misol. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{\sin\beta x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\sin\alpha x}{x}}{\frac{\sin\beta x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\alpha x}{x}}{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin\beta x}{x}}=\frac{\alpha}{\beta}$

Ikkinchi ajoyib limit.

Ushbu $\{x_n\}=\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$ sonli ketma-ketlikni qaraymiz, bunda n-natural son.

Teorema. Umumiy hadi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik $n\to\infty$ da 2 bilan 3 orasida yotadigan limitga ega.

Isboti. Nyuton binomi formulasi

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1}a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots +$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}b^n$$

dan foydalanib ketma-ketlikni x_n va x_{n+1} hadlarini qo‘yidagi ko‘rinishda yozamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\left(\frac{1}{n}\right)^3+\ldots+$$
$$+\frac{n(n-1)(n-2)\ldots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}\left(\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n}\right),$$

$$x_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)+\ldots+$$
$$+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\ldots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$$

x_n bilan x_{n+1} ni taqqoslasak, x_{n+1} had x_n haddan bitta musbat qo‘shiluvchiga ortiqligini ko‘ramiz.

$1-\frac{k}{n+1} > 1-\frac{k}{n}$ $\quad (k=1,2,3\ldots,n-1)$ bo‘lgani uchun uchinchi haddan boshlab x_{n+1} dagi har bir qo‘shiluvchi x_n dagi unga mos qo‘shiluvchidan katta. Demak, istalgan n uchun $x_{n+1} > x_n$ va umumiy hadi $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo‘lgan ketma-ketlik monoton o‘suvchi.

Endi berilgan ketma-ketlikni chegaralanganligini ko‘rsatamiz. Istalgan k=1,2,3,… uchun $1-\frac{k}{n}<1$ ekanini hisobga olib formuladan

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}$$

tengsizlikni hosil qilamiz.

So‘ngra $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}<\frac{1}{2^2}$, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}<\frac{1}{2^3}$, …, $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}<\frac{1}{2^{n-1}}$

ekanligini ta’kidlab tengsizlikni

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots\right)$$

ko‘rinishda yozamiz. Qavsga olingan yig‘indi birinchi hadi a=1 va maxraji $q=\frac{1}{2}$ bo‘lgan geometrik progressiyaning hadlari yig‘indisini ifodalanganligi uchun cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning hadlari yig'indisini topish formulasi $S=\frac{a}{1-q}$ ga asosan $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=1+2=3$ tengsizlikka ega bo'lamiz. Ketma-ketlik monoton o'suvchi bo'lganligi sababli uning birinchi hadi $x_1=\left(1+\frac{1}{1}\right)^1=2$ uning qolgan barcha hadlaridan kichik bo'ladi.

Demak, barcha n uchun $2\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<3$ o'rinli, ya'ni umumiy hadi $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ bo'lgan ketma-ketlik monoton o'suvchi va chegaralangan. SHu sababli u monoton chegaralangan ketma-ketlikning limiti mavjudligi haqidagi teoremaga ko'ra chekli limitga ega. Bu limitni e harfi bilan belgilaymiz, ya'ni

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e}$$

e-irrasional son. Keyinroq uni istalgan darajada aniqlik bilan hisoblash usuli ko'rsatiladi.

Teorema. $\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ funksiya $x\to\infty$ da e songa teng limitga ega:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e \qquad (***).$$

Isboti. 1) $x\to\infty$ deylik U holda $n\le x<n+1$; $\frac{1}{n}\ge\frac{1}{x}>\frac{1}{n+1}$,

$1+\frac{1}{n}\ge1+\frac{1}{x}>1+\frac{1}{n+1}$, $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\left(1+\frac{1}{x}\right)^x>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ bo'ladi. Agar $x\to+\infty$, u holda $n\to\infty$ va $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\ge\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ge\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n$ yoki

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)\ge\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ge\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-1}$$

$e\cdot1\ge\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\ge e\cdot1$ bundan $\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$ kelib chiqadi.

2) $x\to-\infty$ deylik. Yangi $t=-(x+1)$ yoki $x=-(t+1)$ o'zgaruvchini kiritamiz. $t\to+\infty$ da $x\to-\infty$ va

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t+1}\right)^{-(t+1)}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t}{t+1}\right)^{-(t+1)}=$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t+1}=\lim_{t\to+\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)=e\cdot 1=e$$

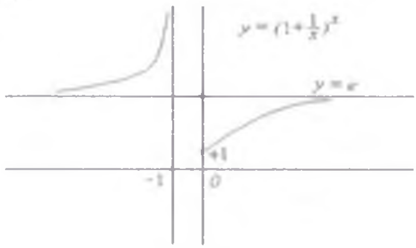
Shunday qilib, $\lim_{x\to\pm\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e$ ekanini isbotladik. Bu limit **ikkinchi ajoyib limit** deb yuritiladi.

Agar bu tenglikda $\frac{1}{x}=\alpha$ deb faraz qilinsa, u holda $x\to\infty$ da $\alpha\to 0$ $(\alpha\neq 0)$ va

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu ikkinchi ajoyib limitning yana bir ko'rinishi

$y=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$ funksiyaning grafigi chizmada tasvirlangan.



3-chizma.

3-Chizmadan ko'inib turibdiki bu funksiya (-1,0) intervalda aniqlanmagan, ya'ni $1+\frac{1}{x}<0$.

Izoh. Asosi e bo'lgan $y=e^{x}$ ko'ursatkichli funksiya eksponental funksiya deb ataladi. Bu funksiya mexanikada (tebranishlar nazariyasida), elektrotexnikada va radiotexnikada, radioximiyada va hakozolarda turli hodisalarni o'rganishda katta rol o'ynaydi.

Izoh. Asosi $e=2{,}7182818284..$ sondan iborat logarifmlar natural logarifmlar yoki Niper logarifmlari deb ataladi va $\log_e x$ o'rniga $\ln x$ deb yoziladi. Bir asosdan ikkinchi asosga o'tish formulasi $\log_a b=\frac{\log_c b}{\log_c a}$ dan foydalanib o'nli va natural logarifmlar orasida bog'lanish o'rnatish mumkin:

$$\ell g\, x = \frac{\ell n\, x}{\ell n 10} = \frac{1}{\ell n 10}\ell n\, x = 0{,}434294\,\ell n\, x \quad \text{yoki} \quad \ell n\, x = \ell n 10\ \ell g\, x = 2{,}302585\ell g\, x\,.$$

Misol.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+8} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{8} = e(1+0)^8 = e\,.$$

Misol. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x}$ topilsin.

Yechish. $x=3t$ desak, $x\to\infty$ da $t\to\infty$ va

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^{x} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{3t} = \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} =$$

$$= \lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t}\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^{t} = e\cdot e\cdot e = e^3 \qquad \text{bo‘ladi.}$$

Limitlarni hisoblashga namunalar:

1- misol. $\lim\limits_{x\to2}\frac{4x-3}{x^2+1} = \frac{4\cdot2-3}{2^2+1} = \frac{8-3}{4+1} = \frac{5}{5} = 1$

2-misol. $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4}$ bu misolda kasrning surati ham, mahraji ham $x\to2$ da nolga intiladi. 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslikbo‘ladi. Kasrning surati va maxrajini ko‘paytuvchilarga ajratsak,

$$\lim_{x\to2}\frac{x^2-5x+6}{x^2-4} = \lim_{x\to2}\frac{(x-3)(x-2)}{(x-2)(x+2)} = \lim_{x\to2}\frac{x-3}{x+2} = \frac{2-3}{2+2} = -\frac{1}{4}$$

3-misol. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}$

Bu misolda ham 0/0 ko‘rinishdagi aniqmaslikdagi limit, shuning uchun aniqmaslikdan qutilish uchun kasrninng surati va maxrajiga $(\sqrt{x+3}+2)$ni ko‘paytiramiz.

$$\lim_{x\to1}\frac{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to1}\frac{x+3-4}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt{x+3}+2)} = \lim_{x\to1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{1}{2+2} = \frac{1}{4}$$

4-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{x} = \lim\limits_{x\to0}\frac{5\sin 5x}{5x} = 5\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin 5x}{5x} = 5\cdot1 = 5$

5-misol.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{2x+1}{2}}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}8x}=$$

$$=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x}{2x+1}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{16x}{2x+\frac{1}{x}}}=e^{8}$$

6-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{4^x}{x}=\ln4$

7-misol. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+2x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{2\ln(1+2x)}{2x}=2\cdot1=2$

O‘z-o‘zinin tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Funksiyaning limitini ta’riflang.
2.Chekli va cheksiz limit deyilganda nimani tushinasiz.
3.Ajoyib limitlarni tushintiring.
4.O‘zgarmas funksiyaning limiti.
5.Limitlar haqidagi teoremalar.
6.Quyidagi limitlarni hisoblang:

1. $\lim\limits_{x\to3}\frac{x^2-9}{x^2-2x-3}$ 2. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x-\cos x}{\cos2x}$ 3. $\lim\limits_{h\to0}\frac{Sin(x+h)-Sin(x-h)}{h}$

4. $\lim\limits_{x\to0}\frac{Sin4x}{x}$ 5. $\lim\limits_{x\to5}\frac{\sqrt{6-x}-1}{3-\sqrt{4+x}}$ 6. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-Cos2x}{xSinx}$ 7. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)^{2x}$

8. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$ 9. $\lim\limits_{x\to3}\frac{9-x^2}{\sqrt{3x}-3}$ 10. $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-x-2}{x^3+1}$ 11. $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$

12. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{1+mx}-1}{x}$ 13. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$ 14. $\lim\limits_{x\to\pi}\frac{\sqrt{1-tgx}-\sqrt{1+tgx}}{Sin2x}$

15. $\lim\limits_{x\to0}\frac{1-Cosx}{x^2}$ 16. $\lim\limits_{x\to0}\frac{Sin4x}{\sqrt{x+1}-1}$ 17. $\lim\limits_{x\to0-0}\frac{\sqrt{1-Cos2x}}{x}$ 18. $\lim\limits_{x\to0}(1-4x)^{\frac{1-x}{x}}$

19. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+8}{x-2}\right)^{x}$ 20. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-2x+1}{x^2-4x+1}\right)^{x}$

13-§.Funksiyaning uzluksizligi va uning xossalari

Tayanch so'zlar: *funksiya, moslik, akslantirishlar, aniqlanish va o'zgarish sohalari, funksiyaning uzluksizligi, teoremalar, xossalari, funksiya turlari, elementer funksiyalar, juft, toq, davriy funksiyalar, chiziqli, darajali, ko'rsatkichli, trigonometrik funksiyalar.*

13.1. Funksiyaning uzluksizligi va uning xossalari.

Aytaylik, $f(x)$ funksiya (a, b) da $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ berilgan bo'lib, $x_0 \in (a, b)$ bo'lsin.Ma'lumki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi o'ng va chap limitlari

$$f(x_0+0),\ f(x_0-0) \tag{1}$$

mavjud bo'lib,

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0) \tag{2}$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lar edi. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lmasa, unda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **uzilish nuqtasi** deyiladi.

ta'rif. Agar (3) limitlar mavjud va chekli bo'lib, (2) tengliklarning birortasi o'rinli bo'lmasa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **birinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.Bunda

$$f(x_0+0)-f(x_0-0)$$

ayirma **funksiyaning** x_0 **nuqtadagi sakrashi** deyiladi.

Masalan, $f(x)=[x]$ funksiya $x=p$ $(p \in Z)$ nuqtada birinchi tur uzilishga ega, chunki $f(p+0)=p$, $f(p_0-0)=p-1$ bo'lib,

$$f(p+0) \neq f(p_0-0) \text{ bo'ladi.}$$

Agar hech bo'lmaganda (1) limitlarning birortasi mavjud bo'lmasa yoki cheksiz bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning **ikkinchi tur uzilish nuqtasi** deyiladi.

Masalan, ushbu

$$f(x)=\begin{cases} \sin\frac{1}{x}, & \text{agar } x \neq 0 \text{ bo'lsa,} \\ 0, & \text{agar } x=0 \text{ bo'lsa,} \end{cases}$$

funksiya $x=0$ nuqtada ikkinchi tur uzilishga ega bo'ladi, chunki bu funksiyaning $x=0$ nuqtadagi o'ng va chap limitlari mavjud emas

Uzluksiz funksiyaning xossalari

Berilgan $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar X to'plamda aniqlangan bo'lib, $x_0 \in X$ nuqta X to'plamning limit nuqtasi bo'lsin.

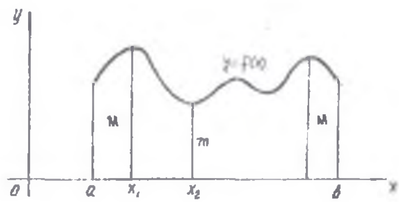
1-teorema. Agar $f(x)$ va $q(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa u holda $f(x) \pm q(x)$, $f(x) \cdot q(x)$, $\frac{f(x)}{q(x)}$: $(q(x) \neq 0)$, $\forall x \in X$ funksiyalar ham x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-misol. Ushbu $f(x)=3x^3+\sin^2 x$ funksiyaning $x=R$ da uzluksizligini ko'rsating.

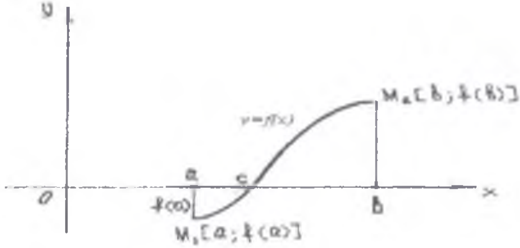
Yechish. $\varphi(x)=x$, $q(x)=\sin x$ funksiyalar R uzluksiz. Bunda $f(x)$ funksiyani $f(x)=3 \cdot x \cdot x \cdot x+\sin x \cdot \sin x$ ko'rinishda yozamiz, u holda uzluksiz funksiyalar ustidagi arifmetik amallarga ko'ra, $f(x)$ funksiyaning R da uzluksizligi kelib chiqadi.

2-teorema. Agar *y=f(x)* funksiya *[a,b]* kesmada uzluksiz bo'lsa, u holda *[a;b]* kesmada funksiya o'zining eng kichik va eng katta qiymatiga erishadi, ya'ni shunday $x_1, x_2 \in (a,b)$ nuqtalar mavjudki, barcha $x \in (a,b)$ lar uchun $f(x_1) \geq f(x)$ va $f(x_2) \leq f(x)$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

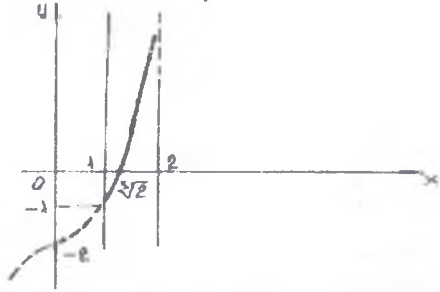
Funksiyani $f(x_1)$ qiymatini *y=f(x)* funksiyaning *[a,b]* kesmadagi eng katta qiymati deb, $f(x_2)$ ni esa eng kichik qiymati deb ataymiz. Bu teorema qisqacha bunday ifodalanadi: kesmada uzluksiz funksiya hech bo'lmaganda bir marta eng katta *M* qiymatga va eng kichik *m* qiymatga erishadi.



3-teorema. Agar *y=f(x)* funksiya *[a,b]* kesmada uzluksiz bo'lib, bu kesmaning uchlarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, u holda *[a,b]* kesmada hech bo'lmaganda shunday bir *x=c* nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya nolga aylanadi *f(c)=0; a<c<b*.

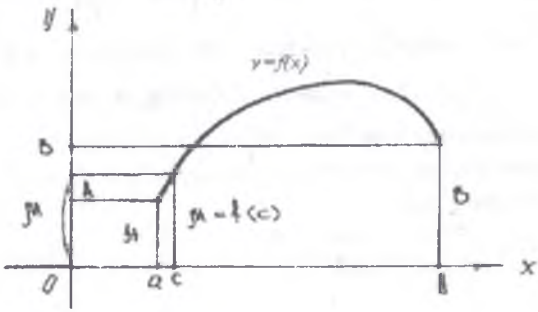


Misol. $y = x^3 - 2$ funksiya berilgan. Bu funksiya [1,2] kesmada uzluksiz. Demak, bu kesmada $y = x^3 - 2$ nolga aylanadigan nuqta mavjud. Haqiqatdan ham $x = \sqrt[3]{2}$ da $y=0$



4-Teorema. $y=f(x)$ funksiya [a,b] kesmada aniqlangan va uzluksiz bo'lsin. Agar kesmaning uchlarida funksiya teng bo'lmagan $f(a)=A$, $f(b)=B$ qiymatlarni qabul qilsa, u holda funksiya A va B sonlar orasidagi barcha qiymatlarni qabul qiladi. U holda $A< \mu <B$ shartni qanoatlantiradigan ixtiyoriy μ son uchun kamida bitta $c\in[a;b]$ nuqta mavjudki, unda $f(c)=\mu$ tenglik to'g'ri bo'ladi.

3 - teorema bu teoremaning xususiy holi, chunki A va B lar turli ishoralarga ega bo'lsa, u holda μ ni o'rnida O ni olish mumkin.



13.2. Uzluksiz funksiyalarga doir teoremalar va turlariga doir misollar

1. x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida funksiya chegaralangan bo'ladi.

2. Agar $f(x_0)\neq 0$ bo'lsa, x_0 nuqtaning yetarli kichik atrofida $f(x)$ o'z ishorasini saqlaydi.

Aytaylik, $y=f(x)$ funksiya X to'plamda va $z=\varphi(y)$ funksiya Y to'plamda aniqlangan bo'lib, ular yordamida $z=\varphi(f(x))$ murakkab funksiya tuzilgan bo'lsin.

Teorema *(murakkab funksiya uzluksizligi haqida).* Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada, $z=\varphi(y)$ funksiya x_0 ga mos kelgan $f(x_0)$ nuqtada uzluksiz bo'lsa $z=\varphi(f(x))$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Teorema *(Boltsano-Koshining 1-teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lib, segmentning a va b nuqtalarida har xil ishorali qiymatlarga ega bo'lsa, u holda shunday c $(a<c<b)$ nuqta topiladiki, u nuqtada funksiya 0 ga aylanadi, $f(c)=0$.

Teorema *(Veyershtrassning 1-teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, u holda shu segmentda chegaralangan bo'ladi.

Teorema *(Veyershtrassning 2-teoremasi).* Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ segmentda aniqlangan va uzluksiz bo'lsa, funksiya shu segmentda o'zining aniq yuqori hamda aniq quyi chegaralariga erishadi.

Misol. Ushbu $f(x)=\frac{|x|-x}{x^2}$ funksiyani uzluksizlikka tekshiring

Yechish. Ma'lumki, $|x|=\begin{cases} x & agar \quad x\geq 0 \quad bo'lsa \\ -x & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$

bundan foydalanib, $f(x)=\begin{cases} 0, & agar \quad x>0 \quad bo'lsa \\ -\frac{2}{x} & agar \quad x<0 \quad bo'lsa \end{cases}$

$x=0$ nuqtada funksiya aniqlanmagan bo'lib, $\lim\limits_{x\to+0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to-0} f(x)=+\infty$ munosabatlar o'rinlidir, bu esa ta'rifga ko'ra $x=0$ nuqta $f(x)$ funksiya uchun 2 tur uzilish nuqtasi ekanligini bildiradi.

1-misol. Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan nuqtalarida bir tomonli limitlarini toping:

$f(x)=\begin{cases} x+1, & agar \ 0<x<1 \\ 3x+1, & agar \ 1\leq x\leq 3 \end{cases}$ $\qquad x=1$ nuqtada

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1-0}(x+1)=2$$
$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=\lim_{x\to 1+0}(3x+1)=4$$

2-misol. Quyidagi funksiyalarning uzluksizligini ta'rifga binoan isbotlang.

$f(x)=x^2+x-2$ barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ larda

$$\lim_{\Delta x\to 0}(f(x+\Delta x)-f(x))=\lim_{\Delta x\to 0}((x+\Delta x)^2+(x+\Delta x)-2-(x^2+x-2))=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}(2x\cdot\Delta x+\Delta x^2+\Delta x)=0$$

Demak, *f(x)* barcha $x\in(-\infty;+\infty)$ larda uzluksiz.

3-misol. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalari va ularning turlarini aniqlang.

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & agar \quad -\infty<x\le 0 \\ (x-1)^2, & agar \quad 0<x\le 2 \\ 5-x, & agar \quad 2<x<\infty \end{cases}$$

f(x) funksiya $(-\infty;0)$, $(0;2)$ va $(2;+\infty)$ intervallarda aniqlangan va uzluksiz bo'lgan elementar funksiyalar bilan berilgan. Demak, faqat $x_1=0$ *va* $x_2=2$ nuqtalarda uzulishga ega bo'lishi mumkin.

$x_1=0$ nuqta uchun chap va o'ng limitlarni hisoblaymiz:

$$\lim_{x\to 0-0} f(x)=\lim_{x\to 0-0} x^2=0;$$
$$\lim_{x\to 0+0} f(x)=\lim_{x\to 0+0}(x-1)^2=1; \quad f(0)=0$$

Bu esa $x_1=0$ nuqtada *f(x)* fuksiya birinchi tur uzilishga ega bo'lishini bildiradi. $x_2=2$ nuqta uchun:

$$\lim_{x\to 2-0} f(x)=\lim_{x\to 2-0}(x-1)^2=1$$
$$\lim_{x\to 2+0} f(x)=\lim_{x\to 2+0}(5-x)=3 \quad f(2)=1$$
bo'ladi.

$x_2=2$ nuqtada funksiya 1-tur uzilishga ega bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Uzluksiz tushunchasini qanday tasavvur qilasiz?
2. Uzluksizlik ta'rifini limit ta'rifi bilan solishtiring, qaysi biri umumiyroq?
3. Berilgan nuqadan uzluksiz funksiyaga misol keltiraolasizmi?
4. Qachon funksiyani chekli kesmadan uzluksiz deyiladi?
5. Uzluksiz funksiyaga misollar.

6.Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan nuqtalarida bir tomonli limitlarini toping:

$$f(x)=\begin{cases}3x, & agar\ -1\le x\le 1\\ 2x, & agar\ \ 1<x\le 3\end{cases}$$ $x=1$ $x=2$ nuqtalarda

7. Funksiyalarning uzluksizligini ta'rifga binoan isbotlang:

a) $f(x)=x^3-3$ b) $f(x)=Cos(2x+1)$

8. Funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va uzilish turlarini aniqlang:

1. $y=\dfrac{4}{4-x^2}$ 2. $y=5^{\frac{4}{1-x}}+1$

9. Quyidagi funksiyalarning uzilish nuqtalari va uzilish turlarini aniqlang:

$$f(x)=\begin{cases}2, \ agar\ x=0\ va\ x=\pm 2\\ 4-x^2, \ agar\ |x|<2\\ 4, \ agar\ |x|>2\end{cases}$$

10. Quyidagi funksiyalar ko'rsatilgan kesmalarda chegaralanganligini isbotlang:

$x^5-6x^2+3x-7=0;\quad [0;2]$

11. Quyidagi funksiyalarning ko'rsatilgan nuqtalarida bir tomonli limitlarini toping: $f(x)=\dfrac{3x+1}{x-1}$, $x=1$ nuqtada

12. Funksiyalarning uzilish nuqtalarini toping va uzilish turlarini aniqlang: 1. $y=\dfrac{x+5}{x-3}$ 2. $f(x)=9^{\frac{1}{2-x}}$

13. Funksiyaning x_0 nuqtadagi uzilish turini aniqlang:

1) $f(x)=\dfrac{3x+4}{x-3}$, $x_0=3$; 2) $f(x)=\dfrac{x^2-9}{x+3}$, $x_0=-3$;

3) $f(x)=arctg\dfrac{5}{2x-1}$, $x_0=\dfrac{1}{2}$; 4) $f(x)=\dfrac{3}{4^{x-3}-1}$, $x_0=3$.

14.Quyidagi funksiyalar ko'rsatilgan kesmalarda chegaralanganligini isbotlang: $f(x)=\sqrt{x^2+3x+1}\cdot Cos^7x$, $[0;2\pi]$

15.Quyidagi tenglamalar ko'rsatilgan kesmalarda yechimga ega ekanligin ko'rsating:

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2+3x+1}}{x-1},\ [2;7]$$

14-§.Funksiya hosilasi

Tayanch so'z va iboralar: *hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar, hosila tushunchasi, uning geometrik va fizik ma'nolari, hosilani hisoblash qoidalari, yuqori tartibli hosilalar, tatbiqlari.*

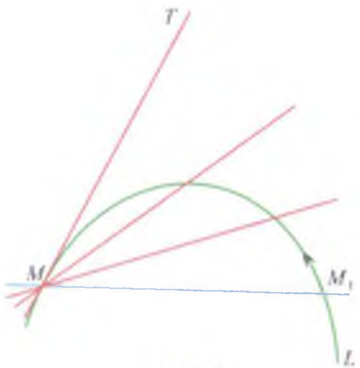
14.1. Hosila tushunchasiga olib keluvchi masalalar

Hosila matematikaning asosiy tushunchalaridan biri hisoblanadi. Hosila matematika, fizika va boshqa fanlarning bir qancha masalalarini yechishda,

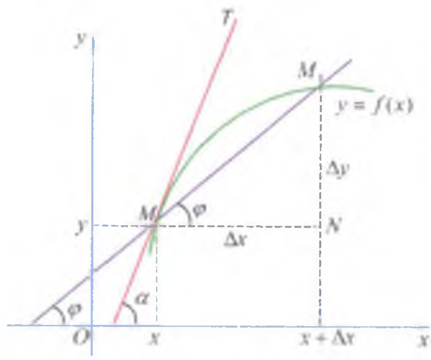
xususan har xil jarayonlarning tezliklarini o'rganishda keng qo'llaniladi.

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma

Avval egri chiziqqa o'tkazilgan urunmaning umumiy ta'rifini beramiz. Uzluksiz L egri chiziqda M va M_1 nuqtalarni olamiz 1-shakl.



1-shakl



2-shakl

M va M_1 nuqtalar orqali o'tuvchi MM_1 to'g'ri chiziqqa *kesuvchi* deyiladi. M_1 nuqta L egri chiziq bo'ylab siljib, M nuqtaga cheksiz yaqinlashsin. U holda kesuvchi M nuqta atrofida aylangan holda qandaydir MT limit holatiga intiladi.

Berilgan L egri chiziqqa berilgan M nuqtada o'tkazilgan urinma deb, MM_1 kesuvchining M_1 nuqta L egri chiziq bo'ylab siljib M nuqtaga cheksiz yaqinlashgandagi MT limit holatiga aytiladi.

Endi $M(x;y)$ nuqtada vertikal bo'lmagan urinmaga ega bo'lgan $y=f(x)$ uzluksiz egri chiziq grafiini qaraymiz va uning $k=tg\alpha$ burchak koeffitsiyentini topamiz, bu yerda α – urinmaning Ox o'q bilan tashkil qilgan burchagi. Buning uchun M nuqta va grafikning $x+\Delta x$ abssissali M_1 nuqtasi orqali kesuvchi o'tkazamiz (2-shakl). Kesuvchining Ox o'q bilan tashkil qilgan burchagini φ bilan belgilaymiz. 2-shakldan topamiz:

$$tg\varphi=\frac{|M_1N|}{|MN|}=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

$\Delta x\to 0$ da funksiyaning uzluksizligiga asosan Δy ham nolga intiladi. Shu sababli M_1 nuqta egri chiziq bo'ylab siljib, M nuqtaga cheksiz yaqinlashadi. Bunda MM_1 kesuvchi M nuqta atrofida aylangan holda MT urinmaga yaqinlashib boradi, ya'ni $\varphi\to\alpha$. Bundan $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\varphi=\alpha$ yoki $\lim\limits_{\Delta x\to 0}tg\varphi=tg\alpha$.

Shuning uchun urinmaning burchak koeffitsiyenti

$$\boxed{k=tg\alpha=\lim_{\Delta x\to 0}tg\varphi=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.} \qquad (1)$$

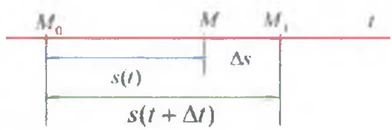
To'g'ri chiziqli harakat tezligi

M material nuqta (biror jism) qandaydir to'g'ri chiziq bo'ylab tekis harakat qilayotgan bo'lsin. Vaqtning har bir t qiymatiga boshlang'ich M_0 holatdan M nuqtagacha bo'lgan muayyan $s=M_0M$ masofa mos keladi. Bu masofa t vaqtga bog'liq, ya'ni s masofa vaqtning funksiyasi bo'ladi: $s=s(t)$.

$s(t)$ funksiyaga *nuqtaning harakat qonuni* deyiladi.

Nuqtaning t vaqtdagi harakat tezligini aniqlash masalasini qo'yamiz.

Agar biror t vaqtda nuqta M holatda bo'lsa, u holda $t+\Delta t$ (Δt – vaqtning orttirmasi) vaqtda nuqta M_1 holatga o'tadi, bu yerda $M_0M_1=s+\Delta s$ (Δs – masofaning orttirmasi) (3-shakl). Demak, M nuqtaning Δt vaqt oralig'idagi ko'chishi $\Delta s=s(t+\Delta t)-s(t)$ ga teng bo'ladi.



3-shakl

$\frac{\Delta s}{\Delta t}$ nisbat ***nuqtaning*** Δt ***vaqt oralig'idagi o'rtacha tezligini*** ifodalaydi: $v_{o'r}=\frac{\Delta s}{\Delta t}$. Bunda o'rtacha tezlik Δt qiymatga bog'liq bo'ladi: Δt qancha kichik bo'lsa, o'rtacha tezlik nuqtaning berilgan t vaqtdagi tezligini shuncha aniq ifodalaydi.

Harakat o'rtacha tezligining Δt vaqt oralig'i nolga intilgandagi limitiga *nuqtaning berilgan vaqtdagi harakat tezligi* (yoki *oniy tezligi*) deyiladi. Bu tezlikni v bilan belgilaymiz. U holda

$$\boxed{v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} \quad \text{yoki} \quad v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}.} \tag{2}$$

Shunday qilib, nuqtaning berilgan t vaqtdagi harakat tezligini aniqlash uchun (2) limitni hisoblash kerak bo'ladi.

(1) va (2) ko'rinishdagi limitlarni topishga tabiatning turli sohalariga

tegishli ko'pchilik masalalar olib keladi. Bunday masalalardan ayrimlarini keltiramiz:

1) agar $Q=Q(t)$ o'tkazgichning ko'ndalang kesimi orqali t vaqt ichida o'tuvchi elektr toki bo'lsa, u holda *elektr tokining t vaqtdagi momenti*

$$\boxed{I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{Q(t+\Delta t)-Q(t)}{\Delta t};} \tag{3}$$

2) agar $N=N(t)$ t vaqt ichida reaksiyaga kirishuvchi kimyoviy modda miqdori bo'lsa, u holda *kimyoviy moddaning t vaqtdagi reaksiyaga kirishish tezligi*

$$\boxed{V=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta N}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{N(t+\Delta t)-N(t)}{\Delta t};} \tag{4}$$

3) agar $m=m(x)$ bir jinsli bo'lmagan sterjenning $O(0;0)$ va $M(x;0)$ nuqtalar orasidagi massasi bo'lsa, u holda *sterjenning x nuqtadagi zichligi*

$$\boxed{\gamma=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta m}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{m(x+\Delta x)-m(x)}{\Delta x}.} \tag{5}$$

Ko'rilgan masalalar fizik mazmuninig turliligiga qaramasdan,

(1-5) limitlar bir xil ko'rinishga ega: ularda funksiya orttirmasining argument orttirmasiga nisbatining argument orttirmasi nolga intilgandagi limitini topish talab qilinadi.

Hosilaning ta'rifi, geometrik va mexanik ma'nolari

Hosilaning ta'riflari

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lsin. Ixtiyoriy $x_0\in(a;b)$ nuqtani olamiz va bu nuqtada x argumentga Δx orttirma ($x_0+\Delta x\in(a;b)$) beramiz. Bunda funksiya $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ orttirma oladi.

1-ta'rif. Agar $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ limit mavjud va chekli bo'lsa, bu limitga $f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi hosilasi* deyiladi $f'(x_0)$ (yoki $y'(x_0)$ yoki $y'|_{x=x_0}$) kabi belgilanadi. Shunday qilib,

$$\boxed{f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}}. \tag{6}$$

Agar x_0 ning biror qiymatida $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=+\infty$ $\left(\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=-\infty\right)$ bo'lsa, u holda funksiya x_0 nuqtada musbat ishorali (manfiy ishorali) cheksiz hosilaga ega deyiladi. Shu sababli 1-ta'rif bilan aniqlanadigan hosila chekli hosila deb yuritiladi.

Misollar. 1. $f(x)=x^3$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasini topamiz. Buning uchun x_0 nuqtada x argumentga Δx orttirma beramiz va funksiyaning mos orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=(x_0+\Delta x)^3-x_0^3=$$

$$=(x_0+\Delta x-x_0)(x_0^2+2x_0\Delta x+\Delta x_0^2+x_0^2+x_0\Delta x+x_0^2)=\Delta x(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2)$$

Orttirmalar nisbatini tuzamiz:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2.$$

Bu nisbatning $\Delta x\to 0$ dagi limitini topamiz:

$$y'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}(3x_0^2+3x_0\Delta x+\Delta x^2)=3x_0^2.$$

2. $f(x)=tg\,ax$, $x_0=x$ funksiyaning hosilasini hosila ta'rifini va tangenslar ayirmasi formulasini qo'llab, topamiz:

$$f'(x)=(tgax)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{tg(ax+a\Delta x)-tgax}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin a\Delta x}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\cos(ax+a\Delta x)\cos ax}=a\cdot\frac{1}{\cos^2 ax}=\frac{a}{\cos^2 ax}.$$

2-ta'rif. $y=f(x)$ *funksiyaning* x_0 *nuqtadagi o'ng (chap) hosilasi* deb $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ $\left(f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ limitga aytiladi.

Misol. $f(x)=|x-3|$ funksiyaning $x_0=3$ nuqtadagi o'ng va chap hosilalarini topamiz. Berilgan funksiyaning $x_0=3$ nuqtadagi orttirmasini topamiz:

$$\Delta y=f(3+\Delta x)-f(3)=|3+\Delta x-3|-|3-3|=|\Delta x|.$$

U holda

$$\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0+}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1,\qquad \lim_{\Delta x\to 0-}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0-}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1.$$

Bu misolda $f'_+(0)\neq f'_-(0)$. Shu sababli $f(x)=|x-3|$ funksiya uchun $\Delta x\to 0$da $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{|\Delta x|}{\Delta x}$ nisbatning limiti mavjud emas va $f(x)=|x-3|$ funksiya $x_0=3$ nuqtada hosilaga ega bo'lmaydi.

Funksiya hosilasining yuqorida keltirilgan ta'riflaridan ushbu tasdiqlar kelib chiqadi: agar funksiya x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada bir-biriga teng bo'lgan o'ng va chap hosilalarga ega bo'lib, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$ bo'ladi; agar funksiya x_0 nuqtada o'ng va chap hosilalarga ega bo'lib, $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$ bo'lsa, funksiya shu nuqtada hosilaga ega va $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)=f'(x_0)$ bo'ladi.

Funksiyaning hosilasini topishga *funksiyani differensiallash* deyiladi. Agar $y=f(x)$ funksiya biror oraliqda aniqlangan bo'lsa va $f'(x)$ hosila bu oraliqning har bir nuqtasida mavjud bo'lsa, u holda

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

formula $f'(x)$ hosilani x ning funksiyasi sifatida aniqlaydi. Bundan keyin, agar $y=f(x)$ funksiyani differensiallashda nuqta ko'rsatilmagan bo'lsa, hosilani x ning mumkin bo'lgan barcha qiymatlarida topamiz va $y'(x)$ deb yozamiz.

Hosilaning geometrik va mexanik ma'nolari

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma haqidagi masalada urinmaning burchak koeffitsiyenti uchun ushbu

$$k=tg\alpha==\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

tenglik hosil qilingan edi. Bu tenglikni $f'(x) = tg\alpha = k$ ko'inishda yozamiz, ya'ni $f'(x)$ hosila $y = f(x)$ funksiya grafigiga $M(x, f(x))$ nuqtada o'tkazilgan urinmaning burchak koeffitsiyentiga teng. Bu jumla hosilaning *geometrik ma'nosini* ifodalaydi.

To'g'ri chiziqli harakat haqidagi masalada ushbu

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

limit hosil qilingan edi. Bu limitni $v = s'_t$ ko'rinishda yozamiz, ya'ni material nuqta harakat qonunidan t vaqt bo'yicha olingan hosila material nuqtaning t vaqtdagi to'g'ri chiziqli harakat tezligiga teng. Bu jumla *hosilaning mexanik ma'nosini* ifodalaydi.

Umulashtirgan holda, agar $y = f(x)$ funksiya biror fizik jarayonni ifodalasa, u holda y' hosila bu jarayonnig ro'y berish tezligini ifodalaydi deyish mumkin. Bu jumla *hosilaning fizik ma'nosini* anglatadi.

Egri chiziqqa o'tkazilgan urinma va normal tenglamalari

$y = f(x)$ funksiya bilan aniqlangan egri chiziqqa $M(x_0; y_0)$ (bu yerda $y_0 = f(x_0)$) nuqtada o'tkazilgan urinma tenglamasini hosilaning geometrik ma'nosidan keltirib chiqaramiz.

Urinma $M_0(x_0; y_0)$ nuqtadan o'tadi. Shu sababli uning tenglamasini $y - y_0 = k(x - x_0)$ ko'rinishda izlaymiz. Hosilaning geometrik ma'nosiga ko'ra

$$k_{ur} = f'(x_0).$$

Bundan

$$\boxed{y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0)} \qquad (7)$$

urinma tenglamasi kelib chiqadi. *Egri chiziqqa o'tkazilgan normal* deb, urinish nuqtasida urinmaga perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziqqa aytiladi. Egri chiziqqa $M_0(x_0; y_0)$ nuqtada o'tkazilgan normal shu nuqtada o'tkazilgan urinmaga perpendikulyar bo'lgani sababli

$$k_{norm.} = -\frac{1}{k_{ur}} = -\frac{1}{f'(x_0)}.$$

Bundan

$$\boxed{y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0)} \qquad (8)$$

normal tenglamasi kelib chiqadi (agar $f'(x_0)\neq 0$ bo'lsa).

14.2 Differensiallah qoidalri va formulalari

Yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani differensiallash

Funksiyaning hosilasi ta'rifidan foydalanib ikki funksiya yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasini differensiallash qoidalarini keltirib chiqaramiz.

3-teorema. Agar $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar x nuqtada differensiallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiyalarning yig'indisi, ayirmasi, ko'paytmasi va bo'linmasi (bo'linmasi $v(x)\neq 0$ shart bajarilganda) ham x nuqtada differensiallanuvchi va quyidagi formulalar o'rinli bo'ladi:

1. $(u\pm v)'=u'\pm v'$; 2. $(u\cdot v)'=u'v+v'u;$

3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-v'u}{v^2}$, $(v\neq 0)$.

Isboti. 1. Funksiyaning hosilasi va limitlar haqidagi teoremalardan foydalanib topamiz:

$$(u\pm v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x+\Delta x)\pm v(x+\Delta x))-(u(x)\pm v(x))}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}\right)=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v(x+\Delta x)-v(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}=u'\pm v'.$$

2. Formulani isbotlashda 2-teoremadan foydalanamiz: x nuqtada differensiallanuvchi $u=u(x)$ va $v=v(x)$ funksiyalar shu nuqtada uzluksiz bo'ladi.

Shu sababli $\Delta x\to 0$ da $\Delta u\to 0$ va $\Delta v\to 0$.

$$(u\cdot v)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)\cdot v(x+\Delta x)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(u(x)+\Delta u)\cdot(v(x)+\Delta v)-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot\Delta v+v(x)\cdot\Delta u+\Delta u\cdot\Delta v-u(x)\cdot v(x)}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\left(v(x)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\cdot\frac{\Delta v}{\Delta x}+\Delta v\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=v(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+u(x)\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta x}+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}\Delta v\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=u'\cdot v+u\cdot v'+0\cdot u'=u'v+v'u.$$

3. $$\left(\frac{u}{v}\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v}-\dfrac{u(x)}{v(x)}}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x)\cdot v(x)+v(x)\cdot\Delta u-u(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot\Delta v}{\Delta x\cdot(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\Delta u-u\cdot\Delta v}{\Delta x\cdot(v^2+v\cdot\Delta v)}=$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{v\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\cdot\Delta v}=\frac{v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta u}{\Delta x}-u\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta v}{\Delta x}}{v^2+v\cdot\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta v}=\frac{u'v-v'u}{v^2}.$$

14.3.Asosiy elementar funksiyalarning hosilalari

Asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini topishda yuqorida keltirilgan ekvivalent cheksiz kichik funksiyalardan, teskari va murakkab funksiyalarni differensiallash formulalaridan hamda yig'indi, ayirma, ko'paytma va bo'linmani differensiallash qoidalaridan foydalanamiz.

1. ***O'zgarmas funksiya***: $y=C\,(C\in R)$. O'garmas funksiya butun sonlar o'qida o'zgarmas qiymatini saqlagani uchun ixtiyoriy nuqtada uning orttirmasi nolga teng bo'ladi. Shu sababli

$$(C)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

2. ***Darajali funksiya***: $y=x^{\alpha}$, bunda $\alpha\in R,\alpha\neq 0$. Bu funksiya uchun $x>0$ da

$$\Delta y=(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}=x^{\alpha}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right)$$

bo'ladi. Bundan

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\alpha}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}.$$

$\Delta x\to 0$ da $\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\sim\alpha\dfrac{\Delta x}{x}$ ni hisobga olib, topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1}{\Delta x}=x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha\Delta x}{\Delta x\cdot x}=x^{\alpha}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha}{x}=\alpha x^{\alpha-1}.$$

Demak,

$$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}.$$

Xususan, $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$, $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

3. ***Korsatkichli funksiya***: $y = a^x$, bunda $a \in R, a > 0, a \neq 1$. Bu funksiyaning orttirmasi $\Delta y = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1)$ ga teng bo'lib,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} \text{ bo'ladi.}$$

Bundan $\Delta x \to 0$ da $a^{\Delta x} - 1 \sim \Delta x \ln a$ ni hisobga olib, topamiz:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} a^x \cdot \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x \ln a}{\Delta x} = a^x \ln a.$$

Demak,

$$(a^x)' = a^x \ln a.$$

Xususan, $(e^x)' = e^x$.

4. ***Logorifmik funksiya***: $y = \log_a x$, bunda $a \in R$, $a > 0$, $a \neq 1$. $y = \log_a x$ funksiya $x = a^y$ funksiyaga teskari funksiya. Bunda

$$x'(y) = a^y \ln a.$$

U holda

$$y'(x) = \frac{1}{x'(y)} = \frac{1}{a^y \ln a} = \frac{1}{x \ln a}.$$

Demak,

$$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}.$$

Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. ***Trigonometrik funksiyalar***. $y = \sin x$ funksiyaning orttirmasi

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) \quad \text{bo'lib,}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}.$$

Bu tenglikdan $\Delta x \to 0$ da $\sin\frac{\Delta x}{2} \sim \frac{\Delta x}{2}$ ni hisobga olib, topamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos(x+0)=\cos x.$$

Demak,

$$(\sin x)'=\cos x.$$

$y=\cos x$ funksiyaning hosilasini murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(\cos x)'=\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\left(\frac{\pi}{2}-x\right)'=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot(-1)=-\sin x.$$

Demak,

$$(\cos x)'=-\sin x.$$

$y=tgx$ funksiyaning hosilasini bo'linmaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(tgx)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Demak,

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

$y=ctgx$ funksiyaning hosilasini topishda murakkab funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanamiz:

$$(ctgx)'=\left(tg\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right)'=\frac{1}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)}\cdot(-1)=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Demak,

$$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

6. ***Teskari trigonometrik funksiyalar***. $y=\arcsin x$ funksiya $x=\sin y$ funksiyaga teskari. Bunda $x'(y)=\cos y=\sqrt{1-\sin^2 y}=\sqrt{1-x^2}$.

U holda

$$y'(x)==\frac{1}{x'(y)}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demak,

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$y = \arccos x$ funksiyaning hosilasini $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ formuladan foydalanib topamiz:

$$(\arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin x\right)' = -(\arcsin x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Demak,

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$y = arctgx$ funksiyaning hosilasini teskari funksiyaning hosilasi formulasidan foydalanib topamiz:

$$(arctgx)' = \frac{1}{(tgy)'} = \cos^2 y = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Demak,

$$(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$arctgx$ va $arcctgx$ funksiyalar $arctgx + arcctgx = \frac{\pi}{2}$ bog'lanishga ega.

Bundan

$$(arcctgx)' = \left(\frac{\pi}{2} - arcctgx\right)' = -(arctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Demak,

$$(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

Misol.

Differensiallash qoidalari va $y = e^x$ funksiyaning hosilasidan foydalanib, giperbolik funksiyalarning hosilalarini topamiz:

$$(shx)' = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = chx, \text{ ya'ni } (shx)' = chx;$$

$$(chx)' = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)' = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = shx, \text{ ya'ni } (chx)' = shx;$$

$$(thx)' = \left(\frac{shx}{chx}\right)' = \frac{(shx)'chx - shx(chx)'}{ch^2 x} = \frac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \frac{1}{ch^2 x};$$

$$(cthx)' = \left(\frac{chx}{shx}\right)' = \frac{sh^2 x - ch^2 x}{sh^2 x} = -\frac{1}{sh^2 x}, \text{ ya'ni } (cthx)' = -\frac{1}{sh^2 x}.$$

Differensiallash qoidalari va hosilalar jadvali

Keltirib chiqarilgan differensiallash qoidalarini va asosiy elementar funksiyalarning hosilalari formulalarini jadval ko'rinishida yozamiz.Amalda ko'pincha murakkab funksiyalarning hosilalarini topishga to'g'ri keladi. Shu sababli quyida keltiriladigan formulalarda "x" argument "u" oraliq argumentga almashtiriladi.

Differensiallash qoidalari:

1. $(u \pm v)' = u' \pm v'$, $u = u(x), v = v(x)$ – differensiallanuvchi funksiyalar;
2. $(u \cdot v)' = u'v + uv'$, xususan $(Cu)' = Cu'$, C – o'zgarmas son;
3. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, xususan $\left(\frac{C}{v}\right)' = -\frac{Cv'}{v^2}$;
4. $y'_x = \frac{1}{x'_y}$, agar $y = f(x)$ va $x = \varphi(y)$;
5. $y'_x = y'_u u'_x$, agar $y = f(u)$ va $u = \varphi(x)$.

14.3.Asosiy elementar funksiyalarning hosilalar jadvali:

1. $(C)' = 0$;
2. $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1} \cdot u'$, xususan $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$, $(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$;
3. $(a^u)' = a^u \ln a \cdot u'$, xususan $(e^u)' = e^u \cdot u'$;
4. $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$, xususan $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$;
5. $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$;
6. $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$;
7. $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$;
8. $(ctgu)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$;
9. $(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
10. $(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$;
11. $(arctgu)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
12. $(arcctgu)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$;
13. $(shu)' = chu \cdot u'$;
14. $(chu)' = shu \cdot u'$;
15. $(thu)' = \frac{1}{ch^2 u} \cdot u'$;
16. $(cthu)' = -\frac{1}{sh^2 u} \cdot u'$.

Keltirilgan diferensiallash qoidalari va asosiy elementar funksiyalarning hosilalar jadvali bir o‘zgaruvchi funksiyasi differensial hisobining asosini tashkil qiladi, ya’ni ularni bilgan holda qiyinchilik darajasi qanday bo‘lishidan qat’iy nazar har qanday elementar funksiyaning hosilasini topish mumkin. Bunda yana elementar funksiya hosil bo‘ladi. Shunday qilib, differensiallash jarayonida elementar funksiyalar sinfidan tashqariga chiqilmaydi.

Misol. $f(x) = 5^x + \arcsin x + x\ln x$ funksiyaning hosilasini topamiz:

$$f'(x) = (5^x + \arcsin x + x\ln x)' = (5^x)' + (\arcsin x)' + (x\ln x)' = 5^x\ln 5 +$$
$$+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + x'\ln x + x(\ln x)' = 5^x\ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln x + x\cdot\frac{1}{x} =$$
$$\frac{1}{x} = 5^x\ln 5 + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \ln x + 1.$$

Hosilani topishda differensiallashning 1,2 qoidalari va 3,4,9 formulalaridan foydalanildi.

Parametrik va oshkormas ko‘rinishda berilgan funksiyalarni differensiyallash

T intervalda t o‘zgaruvchining $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ funksiyalari biror $(\alpha;\beta)$ intervalda aniqlangan bo‘lib, bu intervalda $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$ hosilalar va $x=\varphi(t)$ funksiyaga teskari $t=\phi(x)$ funksiya mavjud bo‘lsin. Agar $x=\varphi(t)$ funksiya qat’iy monoton bo‘lsa, $t=\phi(x)$ teskari funksiya bir qiymatli, uzluksiz va qat’iy monoton bo‘ladi. Shu sababli $y=\psi(\phi(x))$ murakkab funksiya mavjud bo‘ladi. Bunda $y=f(x)$ funksiya $x=\varphi(t)$ va $y=\psi(t)$ tenglamalar bilan *parametrik ko‘rinishda* (t parametrli) berilgan deyiladi.

$y=f(x)$ funksiya

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t), \ t\in T \end{cases}$$

parametrik tenglamalar bilan berilgan bo‘lsin. U holda $t=\phi(x)$ teskari funksiya mavjud va uning hosilasi $\phi'(x)=\dfrac{1}{\varphi'(t)}$. Shuningdek $y=\psi(\phi(x))$ murakkab funksiya hosilasi $y'_x=\psi'(\phi(x))\phi'(x)$ bo‘ladi.

Bundan

$$\boxed{y'(x)=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)} \quad \text{yoki} \quad y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}} \qquad (1)$$

Misol. $\begin{cases} x = 3\cos t, \\ y = 4\sin t \end{cases}$ funksiya uchun y'_x ni topamiz:

$$y'_x = \frac{(3\cos t)'_t}{(4\sin t)'_t} = -\frac{3\sin t}{4\cos t} = -\frac{3}{4}ctgt.$$

Agar funksiya $y$ga nisbatan yechilmagan, ya'ni $F(x,y)=0$ ko'rinishda berilgan bo'lsa, funksiya *oshkormas ko'rinishda* berilgan deyiladi.

Oshkor berilgan har qanday $y=f(x)$ funksiyani oshkormas ko'rinishda $f(x)-y=0$ kabi yozish mumkin, ammo teskarisini hamma vaqt bajarib bo'lmaydi, $F(x,y)=0$ tenglamani $y$ga nisbatan yechish hamma vaqt ham oson emas, ayrim hollarda esa umuman mumkin emas.

Funksiya oshkormas ko'rinishda berilgan bo'lsa, $y=y(x)$ funksiya $x$ning murakkab funksiyasi deb qaraladi va $F(x,y)=0$ tenglikning chap va o'ng tomoni

x bo'yicha differensiyalanadi, so'ngra hosil bo'lgan tenglamadan y' topiladi.

Misol. $y - \operatorname{arctg} y - x^3 = 0$ funksiya uchun y'ni topamiz. Bunda tenglikning har ikkala tomonini x bo'yicha differensiallaymiz:

$$y' - \frac{1}{1+y^2}y' - 3x^2 = 0.$$

Bundan

$$y'\left(1 - \frac{1}{1+y^2}\right) = 3x^2, \quad y'\frac{y^2}{1+y^2} = 3x^2 \text{ yoki } y' = 3x^2\left(1+\frac{1}{y^2}\right).$$

Yuqori tartibli hosila

$f(x)$ funksiya biror $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo'lib, shu intervalda differensiyallanuvchi bo'lsin. U holda $f'(x)$ hosila $x\in(a;b)$ ning funksiyasi bo'ladi. Shu sababli bu funksiya uchun hosilaning mavjudligi va uni hisoblash masalasini qo'yish mumkin.

$f'(x)$ ga *birinchi tartibli hosila* deyiladi. $f'(x)$ funksiyaning hosilasidan olingan hosilaga *ikkinchi tartibli hosila* deyiladi. Ikkinchi tartibli hosila mavjud bo'lsa, bu hosiladan olingan hosila *uchinchi tartibli hosila* deyiladi va hokazo. Hosilalar ikkinchi tartiblidan boshlab *yuqori tartibli hosila* deyiladi va $y'', y''', y^{(4)}, \ldots, y^{(n)}, \ldots$ (yoki $f''(x), f'''(x), f^{IV}(x), \ldots, f^{(n)}(x), \ldots$

Yoki $\left(\frac{d^2y}{dx^2}, \frac{d^3y}{dx^3}, ..., \frac{d^ny}{dx^n}, ...\right)$ kabi belgilanadi.

Misol. $y = x^3 \ln x$ bo'lsa, $y^{(4)}(3)$ ni topamiz:

$$y' = (x^3)'\ln x + x^3(\ln x)' = 3x^2\ln x + x^3\frac{1}{x} = x^2(3\ln x + 1);$$

$$y'' = (x^2(3\ln x + 1))' = (x^2)'(3\ln x + 1) + x^2(3\ln x + 1)' =$$
$$= 2x(3\ln x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} = x(6\ln x + 5);$$

$$y''' = (x(6\ln x + 5))' = x'(6\ln x + 5) + x(6\ln x + 5)' = 6\ln x + 5 + x \cdot \frac{6}{x} = 6\ln x + 11;$$

$$y^{(4)} = (6\ln x + 11)' = \frac{6}{x}. \quad \text{Bundan} \quad y^{(4)}(3) = \frac{6}{3} = 2.$$

Funksiyaning yuqori tartibli hosilasini topish uchun uning barcha oldingi hosilalarini topish kerak bo'ladi. Biroq, ayrim funksiyalarning n-tartibli hosilalarini bir yo'topish imkonini beruvchi formulalar mavjud. Masdalan, quyida keltiriladigan formulalar bunday formulalar qatoriga kiradi:

1. $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a \ (a > 0), \ (e^x)^{(n)} = e^x;$
2. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$
3. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}, \alpha \in R;$
4. $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right);$
5. $(\ln x)^{(n)} = \frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n};$
6. $(u \pm v)^{(n)} = u^{(n)} \pm v^{(n)};$
7. $(Cu)^{(n)} = Cu^{(n)};$
8. $(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} \cdot v^{(n-k)}.$

Formulalardan ayrimlarining isbotini keltiramiz.

3. $(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}, \alpha \in R$ ning *isboti.*

$$y = x^\alpha, \qquad y' = \alpha x^{\alpha-1}, \qquad y'' = \alpha(\alpha - 1)x^{\alpha-2},$$
$$y''' = \alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2)x^{\alpha-3}, \ ..., \qquad y^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)x^{\alpha-n}.$$

Shunday qilib,

$$(x^\alpha)^{(n)} = \alpha(\alpha - 1)...(\alpha - n + 1)x^{\alpha - n}, \alpha \in R.$$

4. $(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$ ning *isboti.*

$$y=\cos x,\quad y'=-\sin x=\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right),\quad y'''=\sin x=\cos\left(x+3\cdot\frac{\pi}{2}\right),\ldots,$$

$$y^{(n)}=\cos\left(x+(n-1)\cdot\frac{\pi}{2}\right)'=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

Demak,

$$(\cos x)^{(n)}=\cos\left(x+\frac{n\pi}{2}\right).$$

5. $(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}$ ning *isboti.*

$$y=\ln x,\quad y'=\frac{1}{x}=x^{-1},\quad y''=-1\cdot x^{-2},\ y'''=(-1)(-2)x^{-3}=(-1)^2\cdot 1\cdot 2\cdot x^{-3},\ldots,$$

$$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot(n-1)x^{-n}=\frac{(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!}{x^n}.$$

Shunday qilib,

$$(\ln x)^{(n)}=\frac{(-1)^n(n-1)!}{x^n}.$$

Ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosi

M material nuqta $s=f(t)$ qonun bilan to'g'ri chiziqli harakat qilsin. U holda s'_t material nuqtaning t vaqtdagi tezligini ifodalaydi: $s'_t=v.$ Nuqtaning t vaqtdagi tezligi v, $t+\Delta t$ vaqtdagi tezligi $v+\Delta v$ bo'lsin, ya'ni Δt vaqt oralig'ida nuqtaning tezligi Δv ga o'zgarsin.

$\frac{\Delta v}{\Delta t}$ nisbat *to'g'ri chiziqli harakatda nuqtaning Δt vaqt oralig'idagi o'rtacha tezlanishini* ifodalaydi. Bu nisbatning $\Delta t\to 0$ dagi limiti M nuqtaning berilgan t vaqtdagi tezlanishi deyiladi va a bilan belgilanadi: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=a$, ya'ni $v'=a$. Bunda $v=s'_t$. Shu sababli $a=(s'_t)'$, ya'ni $a=s''_t$.

$a=s''_t$, ya'ni material nuqta harakat qonunidan t vaqt bo'yicha olingan ikkinchi tartibli hosila to'g'ri chiziqli harakatda material nuqtaning t vaqtdagi tezlanishiga teng. Bu jumla *ikkinchi tartibli hosilaning mexanik ma'nosini* ifodalaydi.

O‘z-o‘zini tekshirish

1.To‘g‘ri chiziqli notekis harakatning o‘rtacha tezligiga ta’rif.
2.Oniy tezlik nima?
3.Funksiya hosilasini ta’rifini bering. Hosilani belgilanishlari.
4.Hosila qanday geometrik va mexanik manoga ega?
5.Asosiy elementar funksiyalarning hosila jadvalini yozing.
6. Hosila ta’rifidan foydalanib, $y=f(x)$ funksiyalar uchun $y`$ hosilasini toping:

a) $y=\frac{1}{x}$ b) $y=\sqrt{x}$

7. Quyidagi funksiyalarning hosilasini toping: a) $y=x^3 Sinx$ b) $y=Sinx\cdot\ln x$

8. $y=2x^3+5x^2$ funksiyaning orttirmasini va differensialini toping.

9. Quyidagi nuqtalarda f funksiyaning hosilalarini hisoblang:

1) $f(x)=x^2-3x.$ $f'(0), f'(-1), f'(2), f'(x+1)$ ni toping;

2) $f(x)=\frac{3-x}{x+2}.$ $f'(0), f'(-1), f'(-3), f'(2t)$ ni toping;

3) $f(x)=x-4\sqrt{x}.$ $f'(4), f'(9), f'(0{,}01), f'(2-x)$ ni toping.

10.Funksiyaning hosilasini toping:

1) $5e^{\frac{3-x}{5}}-3\sin\frac{1+x}{6}$; 2) $5\sqrt{x}\cdot e^{-5x}$; 3) $\frac{1-\sin 2x}{\sin x-\cos x}$; 4) $\frac{5^{2x}}{\cos 3x+4}$.

11.Hosila ta’rifidan foydalanib, $y=f(x)$ funksiyalar uchun $y`$ hosilasini toping:

a) $y=\frac{1}{x^2}$ b) $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$

12. Quyidagi funksiyalarning hosilasini toping:

$y=\frac{\ln x}{Sinx}+x ctgx$ $y=\frac{x tgx}{1+x^2}$

13. $y=x^2+2x-1$ parabolaning $y=2x^2$ parabola bilan kesishgan nuqtasida o‘tkazilgan urinma va normal tenglamalarini yozing.

14.Funksiyalarning hosilalarini toping:

1) $\sqrt{5x-8}$; 2) $\sqrt[3]{(2x+3)^2}$; 3) $(3x-1)^{15}+(2x+2)^4$; 4) $(5x-2)^{13}-(3x+7)^{20}$.

15. $f(x)=\dfrac{\sin x-\cos x}{\sin x}$ funksiyaning qiymatlari nolga teng bo‘ladigan nuqtalardadagi hosilasining qiymatlarini toping.

16.Quyidagi funksiyalarning hosilalarini toping[10].

1. $\begin{cases} x = t\cos t \\ y = t\sin t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t^2 + 3t \end{cases}$

2. $\begin{cases} x = t+1 \\ y = arctgt \end{cases}$

3. $\begin{cases} x = (t+1)\sin t \\ y = tgt \end{cases}$

4. $\begin{cases} x = t - 3t^2 \\ y = 1 - t \end{cases}$

5. $\begin{cases} x = e^t - t \\ y = e^{2t} + 3t \end{cases}$

6. $\begin{cases} x = t^3 + t \\ y = 5t^2 \end{cases}$

15-§. Funksiyani hosila yordamida tekshirish

Tayanch so‘z va iboralar. *Funksiyani tekshirishdagi teoremalar,o‘suvchi, kamayuvchi funksiya, qavariqligi, botiqligi va egilish nuqtalari, ekstremumlari qiymatlari, manotonlik shartlari, asimtotalar.*

15.1. Differensial hisobning asosiy teoremalari

Ferma teoremasi

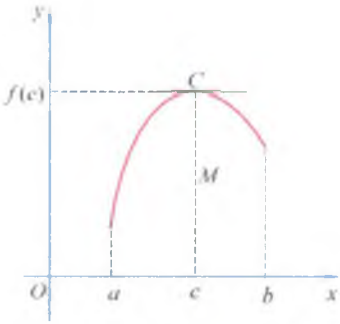
Differensial hisobning nazariy va amaliy ahamiyatga ega bo‘lgan teoremalari bilan tanishamiz.

1-teorema (*Ferma teoremasi*). $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda aniqlangan bo‘lib, bu intervalning biror c nuqtasida o‘zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishsin. Agar funksiya c nuqtada chekli hosilaga ega bo‘lsa, u holda

$$f'(c)=0 \qquad \text{bo‘ladi.}$$

[10] James Stewart Calculus 7E 665-666- bet

Ferma teoremasining geometrik talqini quyidagicha bo'ladi: $y = f(x)$ funksiya c nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishsa, $f(x)$ funksiya grafigiga $M(c;f(c))$ nuqtada o'tkazilgan urinma Ox o'qqa parallel bo'ladi 1-shakl.



1-shakl

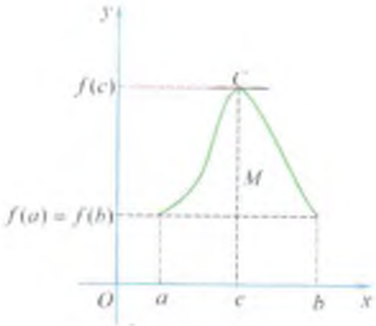
$[a;b]$ kesma uchun Ferma teoremasi hamma vaqt ham o'rinli bo'lmaydi. Masalan, $f(x) = x$ funksiya $[0;1]$ kesmada o'zining eng katta ($x=1$ da) va eng kichik ($x=0$da) qiymatiga erishadi. Bu nuqtalarda hoisla $f'(x)=1\neq 0$.

Roll teoremasi

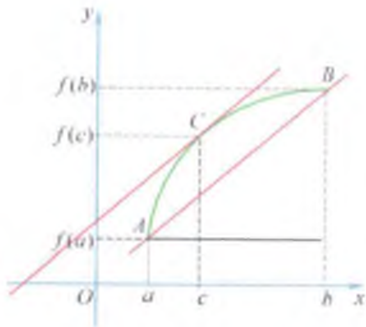
2-teorema (*Roll teoremasi*). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan, uzluksiz va $f(a)=f(b)$ bo'lsin. Agar funksiya $(a;b)$ intervalda chekli hosilaga ega bo'lsa, u holda shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki,

$$f'(c)=0 \qquad \text{bo‘ladi.}$$

Roll teoremasi ushbu geometrik talqinga ega: $[a;b]$ kesmaning ichki nuqtalarida uzluksiz va kesmaning chetki nuqtalarida teng qiymatlar qabul qiluvchi funksiya grafigida chunday $(c;f(c))$ nuqta topiladiki, bu nuqtada funksiya grafigiga o'tkazilgan urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi 2-shakl



2-shakl



3-shakl

Misollar 1. $f(x)=x^2-3x-4$ funksiya uchun $[0;3]$ kesmada Roll teoremasi oʻrinli boʻlishini tekshiramiz. $f(x)=x^2-3x-4$ funksiya $[0;3]$ kesmada uzluksiz, differensiallanuvchi va uning chetki nuqtalarida bir xil qiymatga ega: $f(0)=f(3)=-4$. Shu sababli, bu funksiya uchun Roll teoremasi oʻrinli boʻladi.

x ning $f'(x)=0$ boʻlgan qiymatini topamiz: $f'(x)=4x-3=0$. Bundan $x=\frac{3}{4}$.

2. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya uchun $[-1;1]$ kesmada Roll teoremasi oʻrinli boʻlishini tekshiramiz. $f(x)=\sqrt[3]{x^2}-1$ funksiya $[-1;1]$ kesmada uzluksiz, $f(-1)=f(1)=0$, $f'(x)=\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$. Bu hosila $x=0\in(-1;1)$ nuqtada mavjud emas. Demak, bu funksiya uchun Roll teoremasi oʻrinli boʻlmaydi

Lagranj teoremasi

3-teorema (*Lagranj teoremasi*). $f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz boʻlsin. Agar funksiya $(a;b)$ intervalda chekli hosilaga ega boʻlsa, u holda shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki,

$$\boxed{f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}} \qquad (1)$$

bo‘ladi. $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ qiymat funksiya grafigining $A(a;f(a))$ va nuqtalari orqali o‘tivchi kesuvchining burchak koeffitsiyentini aniqlaydi. Teoremaga ko‘ra shunday $c\in(a;b)$ topiladiki, $C(c;F(c))$ nuqtada funksiya grafigiga o‘tkazilgan urinma AB kesuvchiga parallel bo‘ladi 3-shakl. (1) tenglikdan

$$\boxed{f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)} \qquad (2)$$

kelib chiqadi. Bu formulaga *Lagranj formulasi* yoki *chekli ayirmalar formulasi* deyiladi.

Misol. $y=x^2+6x+1$ parabolaning urinmasi $A(-1;-4)$ va $A(3;28)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB vatarga parallel bo‘lgan nuqtasini topamiz.

$y=x^2+6x+1$ funksiya A va B nuqtalarning abssissalari chetki nuqtalar bo‘lgan $[-1;3]$ kesmada uzluksiz, chekli hosilaga ega. Shu sababli, bu funksiya uchun Lagranj teoremasini qo‘llash mumkin. Teoremaga ko‘ra AB parabolada hech bo‘lmaganda bitta c nuqta topiladiki, funksiya grafigiga bu nuqtada o‘tkazilgan urinma AB vatarga parallel bo‘ladi.

Lagranj formulasidan topamiz:

$f(3)-f(-1)=f'(c)(3-(-1))$ yoki $28+4=(2c+6)\cdot 4$.

Bundan $c=1$. U holda $f(c)=8$.

Demak, $M(1;8)$ nuqtada berilgan parabolaning urinmasi $A(-1;-4)$ va $A(3;28)$ nuqtalarni tutashtiruvchi AB vatarga parallel bo‘ladi.

1-natija. Agar biror intervalda funksiyaning hosilasi nolga teng bo‘lsa, funksiya shu intervalda o‘zgarmas bo‘ladi.

2-natija. Agar biror intervalda ikkita funksiya teng hosilalarga ega bo‘lsa,funksiyalar bir-biridan o‘zgarmas qo‘shiluvchiga farq qiladi.

Misol. $arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2}$, $x\in R$ ekanini ko‘rsatamiz. Bunda $f(x)=arctgx+arcctgx$ deb olsak, $x\in R$ da $f'(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2}=0$ bo‘ladiU holda natijaga ko‘ra $f(x)=C$, ya’ni $arctgx+arcctgx=C$ bo‘ladi. C ni topish uchun x ga biror qiymatni, masalan, $x=1$ ni qo‘yamiz:

$arctg1+arcctg1=C$ yoki $\frac{\pi}{2}=C$. Bundan $arctgx+arcctgx=\frac{\pi}{2}$, $x\in R$

Koshi teoremasi

4-teorema (*Koshi teoremasi*). $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $[a;b]$ kesmada aniqlangan va uzluksiz bo‘lsin. Agar funksiyalar $(a;b)$ intervalda chekli hosilaga ega bo‘lib, $\forall x\in(a;b)$ uchun $g'(x)\neq 0$ bo‘lsa, u holda shunday $c\in(a;b)$ nuqta topiladiki,

$$\boxed{\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}} \tag{3}$$

bo‘ladi.

Lopital teoremasi

5-teorema

$\left(\frac{0}{0}\ \textit{ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi}\right)$

x_0 nuqtaning biror atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalkar uzluksiz, differensiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$ bo‘lsin.Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ bo‘lib, $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=k$ (chekli yoki cheksiz) limit mavjud bo‘lsa, u holda

$$\boxed{\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}} \tag{4}$$

bo‘ladi.

Izohlar: 1. 1- teorema $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalkar $x=x_0$ da aniqlanmagan, ammo $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ bo‘lganda ham o‘rinli bo‘ladi. Bunda $f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ va $g(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ deb olish etarli.

2. 1-teorema $x\to\infty$ da ham o‘rinli bo‘ladi. Haqiqatan ham $x=\frac{1}{z}$ deb, topamiz:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{z\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{z}\right)}{g\left(\frac{1}{z}\right)}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(f\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}{\left(g\left(\frac{1}{z}\right)\right)'}=\lim_{z\to 0}\frac{f'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{z}\right)\cdot\left(-\frac{1}{z^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

3. $f'(x)$ va $g'(x)$ funksiyalar 1-teoremaning shartlarini qanoatlantirsa teorema takror qo'llanishi mumkin:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{g''(x)} \text{ va hokazo.}$$

Misol. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}$ limitni topamiz.

$f(x)=x^2-1+\ln x,\quad g(x)=e^x-e$ funksiyalar $x=1$ nuqta atrofida aniqlangan. $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}g(x)=0$, ya'ni $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmaslik hosil bo'ladi. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x+\frac{1}{x}}{e^x}=\dfrac{3}{e}$ mavjud va $g'(x)=e\neq 0$,

U holda 1-teoremaga ko'ra

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demak,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1+\ln x}{e^x-e}=\frac{3}{e}.$$

1-teorema $\dfrac{0}{0}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish imkonini beradi.

$\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochish haqidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

6-teorema

($\dfrac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi aniqmasliklarni ochishning Lopital qoidasi)

x_0 nuqtaning biror atrofida $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalkar uzluksiz, differensiallanuvchi va $g'(x)\neq 0$ bo'lsin. Agar $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$ bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ bo'ladi.

Misol. $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}$ limitni topamiz.

$$\lim_{x\to a}\frac{\ln(x-a)}{\ln(e^x-e^a)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{x-a}}{\frac{e^x}{e^x-e^a}}=\lim_{x\to a}\frac{e^x-e^a}{e^x(x-a)}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{e^x}{e^x(x-a)+e^x}=\lim_{x\to a}\frac{1}{1+(x-a)}=\frac{1}{1+(a-a)}=\frac{1}{1+0}=1.$$

$\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko‘rinishdagi aniqmasliklarga asosiy aniqmasliklar deyiladi.

$0\cdot\infty$ yoki $\infty-\infty$ ko‘rinishdagi aniqmasliklar algebraik almashtirishlar yordamida asosiy aniqmasliklarga keltiriladi. 0^0, ∞^0 yoki 1^∞ ko‘rinishdagi aniqmasliklardan $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ formula yordamida asosiy aniqmasliklar hosil qilinadi. Hosil qilingan asosiy aniqmasliklar yuqorida keltirilgan teoremalar yordamida ochiladi.

Misollar:

1. $\lim\limits_{x\to0}x^3\ln x=(0\cdot\infty)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x^3}}=\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-3\dfrac{1}{x^4}}=-\dfrac{1}{3}\lim\limits_{x\to0}x^3=0.$

2. $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}-ctgx\right)=(\infty-\infty)=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{\sin x-x\cos x}{x\sin x}\right)=\left(\dfrac{0}{0}\right)=$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\cos x-\cos x+x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{x\sin x}{\sin x+x\cos x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x+x\cos x}{\cos x+\cos x-x\sin x}=\frac{0}{2}=0.$$

3. $\lim\limits_{x\to0}x^{\sin x}=(0^0)=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln x^{\sin x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\sin x\ln x}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}}=$

$$=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{\cos x}{\sin^2 x}}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin^2 x}{x\cos x}}=e^{-\lim\limits_{x\to0}\left(tgx\frac{\sin x}{x}\right)}=e^0=1.$$

4. $\lim\limits_{x\to+0}\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)^x=(\infty^0)=e^{\lim\limits_{x\to+0}x\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)(0\cdot\infty)}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{\frac{1}{x}}\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}=$

$$=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\left(\ln\left(\ln\left(\frac{1}{x}\right)\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(-\frac{1}{x^2}\right)}}=e^{\lim\limits_{x\to+0}\frac{1}{\ln\left(\frac{1}{x}\right)}}=e^{\frac{1}{\infty}}=e^0=1.$$

5. $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{ctgx}=(1^\infty)=e^{\lim\limits_{x\to0}ctgx\ln(1+\sin x)(\infty\cdot0)}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{tgx}\left(\frac{0}{0}\right)}=$

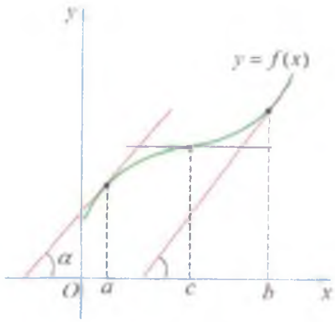
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln(1+\sin x))'}{(\operatorname{tg}x)'}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\cos x\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin x}} = e^{1\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{\cos x}{1+\sin x}}{\cos x}} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{1+\sin x}} = e^{1} = e.$$

Funksiyaning monotonlik shartlari

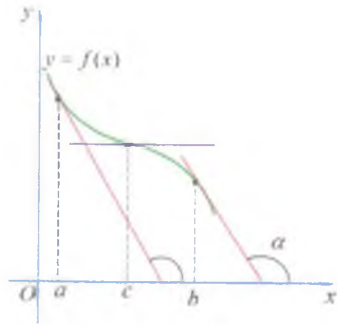
7-teorema (*funksiya monoton bo'lishining zaruriy sharti*). Agar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya shu intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lsa, u holda $\forall x\in(a;b)$ da

$$f'(x)\geq 0 \quad (f'(x)\leq 0)$$

bo'ladi. $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda kamayuvchi bo'lganda teorema shu kabi isbotlanadi. Bu teorema ushbu geometrik talqinga ega: biror intervalda differensiallanuvchi bo'lgan o'suvchi (kamayuvchi) funksiya grafigiga o'tkazilgan urinmalar Ox o'qning musbat yo'nalishi bilan o'tkir (o'tmas) burchak tashkil qiladi yoki ayrim nuqtalarda Ox o'qiga parallel bo'ladi (4-shakl) ((5-shakl)).



4-shakl



5-shakl

8-teorema (*funksiya monoton bo'lishining etarli sharti*). Agar $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun $\forall x\in(a;b)$ da $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda o'sadi (kamayadi).

Funksiya o'suvchi va kamayuvchi bo'lgan intervallar funksiyaning *monotonlik intervallari* deb ataladi.

Misol. $f(x)=x^3-12x+5$ funksiyaning monotonlik intervallarini topamiz. $D(f)=R.$ $f'(x)=3x^2-12=3(x^2-4)$.

U holda: $f'(x)>0$ dan $x^2-4>0$ yoki $|x|>2$; $f'(x)<0$ dan $x^2-4<0$ yoki $|x|<2$. Demak, $f(x)$ funksiya $(-\infty;-2)\cup(2;+\infty)$ intervalda o'sadi, $(-2;2)$ intervalda kamayadi.

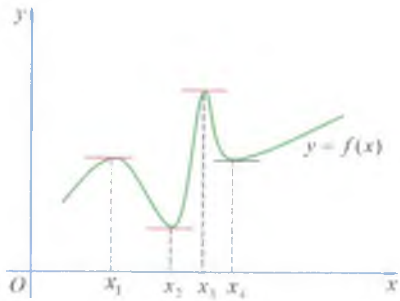
Funksiyaning ekstremumlari

1- ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shundav δ atrofi topilsaki, bu atrofning barcha $x\neq x_0$ nuqtalarida

$f(x)<f(x_0)$ $(f(x)>f(x_0))$ tengsizlik bajarilsa, x_0 nuqtaga $f(x)$ funksiyaning *maksimum* (*minimum*) nuqtasi deyiladi.

Funksiyaning maksimum va minimum nuqtalariga *ekstremum* nuqtalar deyiladi. Funksiyaning ekstremum nuqtadagi qiymati *funksiyaning ekstremumi* deb ataladi

Ekstremum tushunchasi funksiya aniqlanish sohasining biror atrofi bilan bog'liq. Shu sababli funksiya ekstremumga aniqlanish sohasining faqat ichki nuqtalarida erishadi. Shu bilan birga funksiya o'zining aniqlanish sohasida bir nechta minimumga yoki maksimumga erishishi va bunda maksimumlardan ayrimlari qandaydir minimumdan kichik bo'lishi mumkin (6-shakl).

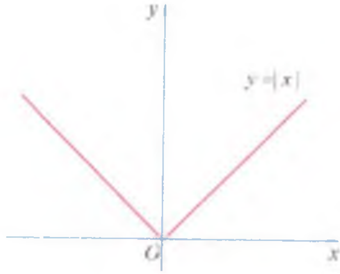


6-shakl

9-teorema (*ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy sharti*). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differensiallanuvchi bo'lib, shu nuqtada ekstremumga ega bo'lsa, u holda $f'(x_0)=0$ bo'ladi.

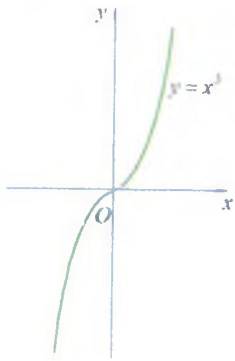
Bu teorema quyidagicha geometrik talqinga ega. Agar x nuqta $f(x)$ funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa (masalan, 6-shaklda x_1 nuqta), funksiya grafigiga shu nuqtada urinma o'tkazish mumkin va bu urinma Ox o'qiga parallel bo'ladi.

Bu teorema $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lib, differensiallanuvchi bo'lmasa ham o'rinli bo'ladi. Masalan, uzluksiz $y=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $x=0$ minimum nuqta (7-shakl).



7-shakl

$f'(x_0)$ hosila nolga teng bo'lgan yoki mavjud bo'lmagan x_0 nuqtaga *birinchi tur kritik* nuqta deyiladi. Hamma birinchi tur kritik nuqta ham ekstremum nuqta bo'lmaydi. Masalan, $f(x)=x^3$ funksiya uchun $x=0$ da $f'(x)=3x^2=0$. Demak, $x=0$ kritik nuqta, ammo u ekstremum nuqta emas (8-shakl).



8-shakl

Shunday qilib, $f'(x_0)=0$ shart ekstremum mavjud bo'lishligining zaruriy sharti boladi.

10-teorema (*ekstremum mavjud bo'lishining etarli harti*). Agar $f(x)$ funksiya x_0 birinchi tur kritik nuqtaning biror δ atrofida differensiallanuvchi bo'lib, x_0 nuqtadan chapdan o'ngga o'tganida $f'(x)$ hosila: ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa x_0 nuqta maksimum nuqta bo'ladi; manfiydan musbatga o'zgartirsa x_0 nuqta minimum nuqta bo'ladi; ishorasini o'zgartirmasa x_0 nuqtada ekstremum mavjud bo'lmaydi. Funksiyani ekstremumga tekshirish - bu funksiyaning barcha ekstremumlarini topish demakdir. Ekstremum mavjud bo'lishining zaruriy va yetarli shartlaridan

quyidagi funksiyani ekstremumga tekshirish qoidasi kelib chiqadi:

1°. $y=f(x)$ funksiyaning birinchi tur kritik nuqtalari topiladi;

2°. bu nuqtalardan funksiyaning aniqlanish sohasiga tegishli bo'lganlari tanlanadi;

3°. tanlangan nuqtadan chapdan o'ngga o'tishda $f'(x)$ hosilanig ishorasi tekshiriladi;

4°. 4- teoremaga asosan funksilaning ekstremum nuqtalari (agar ular bor bo'lsa) aniqlanadi va funksiyaning bu nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi.

Misol.

$f(x)=\sqrt[3]{x^2}-\frac{x}{3}$ funksiyaning ekstremumlarini topamiz.

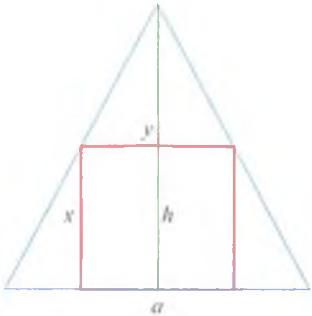
$D(f)=R.$ $f'(x)=\frac{2}{3\cdot\sqrt[3]{x}}-\frac{1}{3}$, ya'ni $f'(x)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2-\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{x}}$. Hosila $x_1=0$ nuqtada mavjud emas va $x_2=8$ nuqtada nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini uchta

$(-\infty;0)$, $(0;8)$, $(8;+\infty)$ intervallarga ajratadi. Hosilaning har bir kritik nuqtadan chapdan o'ngga o'tishdagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:

Demak, $x_1=0$ minimum nuqta, $y_{min}=f(0)=0$ va $x_2=8$ maksimum nuqta, $y_{max}=f(8)=\frac{4}{3}$.

Misol. Asosi a ga va balandligi h ga teng uchburchakka eng katta yuzaga ega bo'lgan to'g'ri to'rtburchak ichki chizilgan. Bu to‘rtburchakning yuzasini topamiz. To‘g‘ri to‘rtburchakning tomonlari x va y bo‘lsin.

Uchburchaklarning o‘xshashlik alomatidan topamiz 9-shakl.



9-shakl

$\frac{y}{a}=\frac{h-x}{h}$. U holda $y=\frac{a}{h}(h-x)$ va $S=xy=\frac{a}{h}(hx-x^2)$.

$$S'_x=\frac{a}{h}(h-2x)=0 \text{ dan } x=\frac{h}{2}.$$

Bu qiymatda $S''_x=-\frac{2a}{h}<0$ va to‘g‘ri to‘rtburchak eng katta yuzaga ega bo‘ladi.

$x=\frac{h}{2}$ da $y=\frac{a}{h}\left(h-\frac{h}{2}\right)=\frac{a}{2}$ va eng katta to‘g‘ri to‘rtburchak yuzasi

$$S=xy=\frac{a}{2}\cdot\frac{h}{2}=\frac{ah}{4} \text{ (yuza.b)}$$

Kesmada uzluksiz funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

$y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada uzluksiz bo‘lsin. U holda funksiya bu kesmada o‘zining eng katta va eng kichik qiymatlariga erishadi. Bu qiymatlarni funksiya $[a;b]$ kesmaning yoki ichki x_0 nuqtasida yoki chegarasida ($x_0=a$ yoki $x_0=b$ da nuqtalarda) erishadi. Agar $x_0\in(a;b)$bo‘lsa, bu nuqtani kritik nuqtalar orasidan izlashga to‘g‘ri keladi.

Shunday qilib, $[a;b]$ kesmada uzluksiz $y=f(x)$ funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari quyidagicha aniqlanadi:

1^o. $y=f(x)$ funksiyaning $(a;b)$ intervaldagi birinchi tur kritik nuqtalari topiladi;

2^o. funksiyaning topilgan nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi;

3^o. funksiyaning kesmaning chegarasidagi, ya'ni $x=a$ va $x=b$ nuqtalardagi qiymatlari hisoblanadi;

4^o. hisoblangan qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigi tanlanadi.

Izohlar: 1. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada faqat bitta kritik nuqtaga ega bo'lib, u maksimum (minimum) nuqta bo'lsa, bu nuqtada funksiya o'zining eng katta (eng kichik) qiymatiga erishadi,

ya'ni $f_{eng\ katta}=f_{max}=f(x_0)$ ($f_{eng\ kichik}=f_{min}=f(x_0)$) bo'ladi.

2. Agar $y=f(x)$ funksiya $[a;b]$ kesmada kritik nuqtaga ega bo'lmasa, bu funksiyaning kesmada monoton o'sishi yoki monoton kamayishini bildiradi.

Misol

$y=x^3-3x$ funksiyaning $[0,2]$ kesmada eng katta va eng kichik qiymatlarini topamiz:

1^o. $f'(x)=3x^2-3=0$ dan $x_1=-1$, $x_2=1$, $x_2\in[0,2]$;

2^o. $f(1)=-2$;

3^o. $f(0)=0$, $f(2)=2$

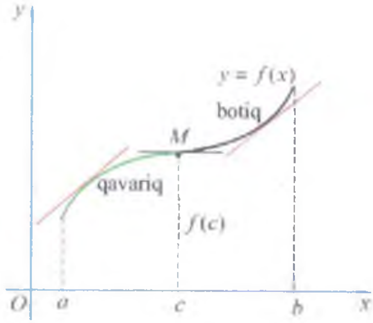
4^o. $y_{eng\ katta}=f(2)=2$; $y_{eng\ kichik}=f(1)=-2$.

Funksiya grafigining botiqligi, qavariqligi va egilish nuqtalari

$y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda differensiallanuvchi bo'lsin. U holda $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x;f(x))$, $\forall x\in(a,b)$ nuqtada urinmasi mavjud bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $(a;b)$ intervalning istalgan nuqtasida $y=f(x)$ funksiya grafigi unga o'tkazilgan urinmadan yuqorida (pastda) yotsa, funksiya grafigi $(a;b)$ intervalda *botiq* (*qavariq*) deyiladi.

Funksiya grafigining botiq qismini qavariq qismidan ajratuvchi $M(c;f(c))$ nuqta funksiya grafigining *egilish nuqtasi* deb ataladi (10-shakl).



10-shakl

11-teorema. Agar $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda ikkinchi tartibli hosilaga ega va $\forall x\in(a;b)$ da $f''(x)<0$ $(f''(x)>0)$ bo'lsa, u holda $y=f(x)$ funksiya grafigi $(a;b)$ intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.

Funksiya grafigining egilish nuqtasini topish quyidagi teoremalarga asoslanadi.

12-teorema (*egilish nuqta mavjud bo'lishining zaruriy sharti*). Agar $y=f(x)$ funksiya $(a;b)$ intervalda uzluksiz ikkinchi tartibli hosilaga ega va $M(x_0;f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x_0)=0$ bo'ladi.

13-teorema (*egilish nuqta mavjud bo'lishining etarli sharti*) $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lsin. Agar δ atrofning x_0 nuqtadan chap va o'ng tomonlarida $f''(x)$ hosila har xil ishoraga ega bo'lsa, u holda $M(x_0;f(x_0))$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo'ladi.

Bu teorema $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biror δ atrofida ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lib, x_0 nuqtada $f''(x)$ mavjud bo'lmasa ham o'rinli bo'ladi. Shu sababli egilish nuqtalarni ikkinchi tartibli hosila nolga teng bo'lgan

yoki uzilishga ega bo'lgan nuqtalar, ya'ni ikkinchi tur kritik nuqtalar orasidan izlash kerak.

Misol. $y=\dfrac{x}{1-x^2}$ funksiya grafigini botiq va qavariqlikka tekshiramiz.

$$D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;\infty).$$

$$y'=\left(\frac{x}{1-x^2}\right)'=\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2},\qquad y''=\left(\frac{x^2+1}{(1-x^2)^2}\right)'=\frac{2x(x^2+3)}{(1-x^2)^3}.$$

Ikkinchi tartibli hosila $x_1=-1,\ x_2=0,\ x_3=1$ nuqtalarda nolga teng va mavjud emas.

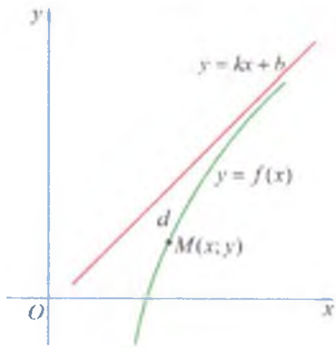
$f''(x)$ hosilaning bu nuqtalardan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini tekshiramiz:

Demak, funksiyaning grafigi $(-1;0)$ va $(1;\infty)$ intervallarda qavariq, $(-\infty;-1)$ va $(0;1)$ intervallarda botiq bo‘ladi. $O(0;0)$ nuqta funksiya grafigining egilish nuqtasi bo‘ladi.

Funksiya grafigining asimptotalari

Egri chiziqning asimptotasi deb shunday to‘g‘ri chiziqqa aytiladiki, egri chiziqda yotuvchi M nuqta egri chiziq bo‘ylab harakat qilib koordinata boshidan cheksiz uzoqlashgani sari M nuqtadan bu to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofa nolga intiladi.

Bunda M nuqta asimptotaga juda yaqinlashib boradi, lekin uni kesib o‘tmaydi 11-shakl.



11-shakl

Uch turdagi, ya’ni vertikal, gorizontal va og‘ma asimptotalar mavjud.

Agar $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$ limitlardan hech bo'lmaganda bittasi cheksiz ($+\infty$ yoki $-\infty$) bo'lsa, $x=x_0$ to'g'ri chiziqqa $y=f(x)$ funksiya grafigining *vertikal asimptotasi* deyiladi.

Masalan, $f(x)=\frac{1}{x}$ funksiya grafigi uchun $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota, chunki $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=+\infty$ va $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=-\infty$.

Agar shunday k va b sonlari mavjud bo'lib, $x\to\infty$ $(x\to-\infty)$ da $f(x)$ funksiya

$$f(x)=kx+b+\alpha(x),\ \lim_{x\to\pm\infty}\alpha(x)=0$$

ko'rinishda ifodalansa $y=kx+b$ to'g'ri chiziqqa $y=f(x)$ funksiya grafigining *og'ma asimptotasi* deyiladi.

14-teorema. $y=f(x)$ funksiya grafigi $y=kx+b$ og'ma asimptotaga ega bo'lishi uchun

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=k,\qquad \lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)=b$$

bo'lishi zarur va etarli. Agar $k=0$ bo'lsa, $b=\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ bo'ladi. Bunda $y=b$ to'g'ri chiziqqa $f(x)$ funksiya grafigining *gorizontal asimptotasi* deyiladi.

Izoh. $y=f(x)$ funksiya grafigining asimptotalari $x\to+\infty$ da va $x\to-\infty$ da har xil bo'lishi mumkin. Shu sababli $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)-kx)$ limitlarni aniqlashda $x\to+\infty$ va $x\to-\infty$ hollarini alohida qarash lozim.

Misol

$y=\frac{x^2-3}{x}$ funksiya grafigining asimptotalarini topamiz.

$$\lim_{x\to0+}\frac{x^2-3}{x}=-\infty,\quad \lim_{x\to0-}\frac{x^2-3}{x}=+\infty.$$

Demak, $x=0$ to'g'ri chiziq vertikal asimptota.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-3}{x}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-3}{x}=0.$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-3}{x^2}=1,$$

$$b=\lim_{x\to\infty}[f(x)-kx]=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-3}{x}-x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-3}{x}=0$$

Bundan $y=kx+b=x$. Demak, $y=x$ to‘g‘ri chiziq og‘ma asimptota.

15.2.Funksiyani to‘la tekshirish va grafigini yasash

Funksiyani tekshirish va grafigini chizish ma’lum tartibda (sxema asosida) bajariladi. Shunday sxemalardan birini keltiramiz.

1^o. Funksiyaning aniqlanish sohasini topish.

2^o. Funksiya grafigining koordinata o‘qlari bilan kesishadigan nuqtalarini (agar ular mavjud bo‘lsa) aniqlash.

3^o. Funksiyaning ishorasi o‘zgarmaydigan oraliqlarni ($f(x)>0$ yoki $f(x)<0$ bo‘ladigan oraliqlarni) aniqlash.

4^o. Funksiyaning juft-toqligini tekshirish.

5^o. Funksiya grafigining asimptotalarini topish.

6^o. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlash va ekstremumlarini topish.

7^o. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlash.

8^o. 1^o-7^o bandlardagi tekshirishlar asosida funksiyaning grafigi chiziladi.

Keltirilgan sxemaning hamma bandlari albatta bajarilishi shart emas. Soddaroq hollarda keltirilgan bandlardan ayrimlarini, masalan $1^o,2^o,6^o$ni bajarish etarli bo‘ladi. Agar funksiya grafigi juda tushunarli bo‘lmasa 1^o-7^o bandlardan keyin funksiyaning davriyligini tekshirish, funksiyaning bir nechta qo‘shmcha nuqtalarini topish va funksiyaning boshqa xususiyatlarini aniqlash bo‘yicha qo‘shmcha tekshirishlar o‘tkajish mumkin.

Misollar

1. $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ funksiyani tekshiramiz va grafigini chizamiz.

1^o.Funksiyaning aniqlanish sohasi:
$D(f)=(-\infty;-1)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

2^o. $x=0$ da $y=-1$ bo‘ladi. Funksiya Oy o‘qini $(0;-1)$ nuqtada kesadi. $y\neq 0$ bo‘lgani uchun funksiya Ox o‘qini kesmaydi.

3°. Funksiya $(-\infty;-1)$ va $(1;+\infty)$ intervallarda musbat ishorali va $(-1;1)$ intervalda manfiy ishorali.

4°. Funksiya uchun $f(-x)=f(x)$ bo‘ladi. Demak, u juft.

5°. $\lim\limits_{x\to-1-0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to-1+0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to1-0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=-\infty$,

$\lim\limits_{x\to1+0}\dfrac{x^2+1}{x^2-1}=+\infty.$

Demak, $x=-1$ va $x=1$ to‘g‘ri chiziqlar vertikal asimptotalar bo‘ladi.

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x^2-1)}=0(\,x\to+\infty \text{ da ham } x\to-\infty \text{ da ham}$$

$$k=0),\qquad b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}-0\cdot x\right)=1.$$

Demak, $y=1$ to‘g‘ri chiziq $x\to+\infty$ da ham $x\to-\infty$ da ham gorizontal asimptota bo‘ladi.

6°. Funksiyaning monotonlik oraliqlarini aniqlaymiz va ekstremumlarini topamiz.

$$y'=\frac{2x(x^2-1)-2x(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=-\frac{4x}{(x^2-1)^2}.$$

Birinchi tartibli hosila $x=-1$ va $x=1$ da mavjud emas va $x=0$ da nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini to‘rtta $(-\infty;-1)$, $(-1;0)$, $(0;1)$, $(1;+\infty)$

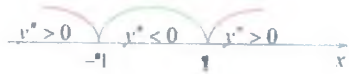
intervallarga ajratadi. Hosilaning bu intervallardagi va har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:

Demak, funksiya $(-\infty;0)$ intervalda o‘sadi va $(0;+\infty)$ intervalda kamayadi. $x=0$ maksimum nuqta, $y_{max}=f(0)=-1$.

7°. Funksiyaning qavariqlik va botiq-lik oraliqlarini hamda egilish nuqtalarini aniqlaymiz.

$$y''=\left(-\frac{4x}{(x^2-1)^2}\right)'=-4\frac{(x^2-1)^2-x\cdot2(x^2-1)\cdot2x}{(x^2-1)^4}=\frac{4(1+3x^2)}{(x^2-1)^3}$$

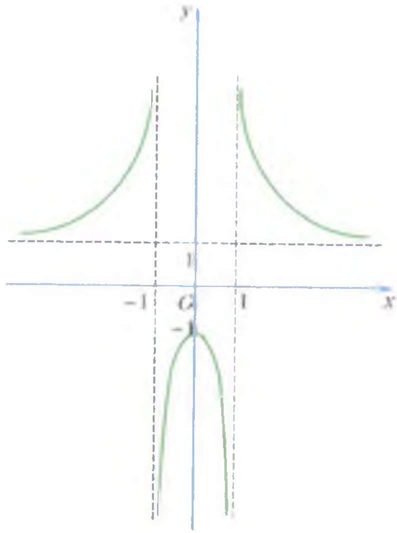
Ikkinchi tartibli hosila $x_1=-1$ va $x_3=1$ nuqtalarda mavjud emas. y'' hosilaning $(-\infty;-1)$, $(-1;1)$, $(1;+\infty)$ intervallardagi



va har bir ikkinchi tur kritik nuqtalardan chapdan o‘ngga o‘tishdagi ishoralarini tekshiramiz:

Demak, funksiyaning grafigi $(-1;1)$ intervalda qavariq, $(-\infty;-1)$ va $(1;+\infty)$ intervallarda botiq bo‘ladi. Funksiya grafigining egilish nuqtasi yo‘q.

8^o. 1^o-7^o bandlar asosida funksiya grafigini chizamiz 12-shakl.



12-shakl

2. $y=x^2e^{-x}$ funksiyani tekshiramiz va grafigini chizamiz.

1^o. Funksiyaning aniqlanish sohasi: $D(f)=R$.

2^o. $x=0$ da $y=0$ bo‘ladi. Funksiya Ox va Oy o‘qlarini $O(0;0)$ nuqtada kesadi.

3^o. Funksiya $(-\infty;0)$ va $(0;+\infty)$ intervallarda musbat ishorali.

4^o. Funksiya uchun $f(-x)\neq f(x)$ va $f(-x)\neq -f(x)$ bo‘ladi. Demak, u umumiy ko‘rinishdagi funksiya.

5°. Funksiya aniqlanish sohasida uzluksiz bo'lgani uchun u vertikal asimptotaga ega emas.

$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0;$$

$$b=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x}-0\cdot x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=2\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0.$$

Demak, $x\to+\infty$ da $y=0$ to'g'ri chiziq gorizontal assimptota.

$$k=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2e^{-x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}xe^{-x}=-\infty.$$

Demak, $x\to-\infty$ da funksiya assimptotaga ega emas.

6°. Funksiyaning monotonlik intervallarini aniqlaymiz va ekstremumlarini topamiz.

$$y'=2xe^{-x}-x^2e^{-x}=e^{-x}(2x-x^2).$$

Hosila $x=0$ va $x=2$ da nolga teng. Bu nuqtalar berilgan funksiyaning aniqlanish sohasini uchta $(-\infty;0)$, $(0;2)$, $(2;+\infty)$ intervallarga ajratadi.

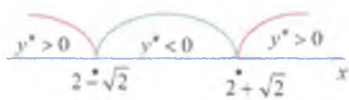
Hosilaning bu intervallardagi va har bir birinchi tur kritik nuqtadan chapdan o'ngga o'tgandagi ishoralarini chizmada belgilaymiz:

Demak, funksiya $(0;2)$ intervalda o'sadi va $(-\infty;0)$ va $(0;+\infty)$ intervallarda kamayadi. $x=0$ minimum nuqta, $y_{min}=f(0)=0$ va $x=2$ maksimum nuqta $y_{max}=f(2)=4e^{-2}$.

7°. Funksiyaning qavariqlik va botiqlik intervallarini hamda egilish nuqtalarini aniqlaymiz.

$$y''=(e^{-x}(2x-x^2)'=e^{-x}(x^2-2x)+e^{-x}(2-2x)=e^{-x}(x^2-4x+2).$$

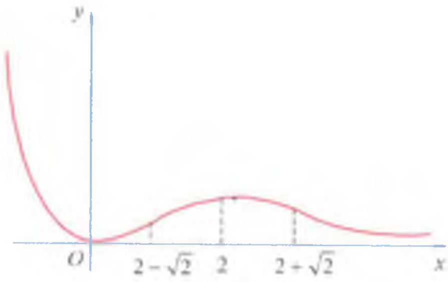
Ikkinchi tartibli hosila $x_3=2-\sqrt{2}$ va $x_4=2+\sqrt{2}$ nuqtalarda nolga teng.



Bu nuqtalar funksiyaning aniqlanish ohasini $(-\infty;2-\sqrt{2}),(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2}),\ (\sqrt{2};+\infty)$ Intervallarga ajratadi. y'' hosilaning bu intervallardagi va ikkinchi tur kritik nuqtalardan chapdan o'ngga o'tgandagi ishora- larini chizmada belgilaymiz:

Demak, funksiyaning grafigi $(2-\sqrt{2};2+\sqrt{2})$ intervalda qavariq, $(-\infty;2-\sqrt{2})$ va $(\sqrt{2};+\infty)$ intervallarda botiq bo'ladi, $M_1(2-\sqrt{2};0,2)$ va $M_1(2+\sqrt{2};0,4)$ funksiya grafigining egilish nuqtalari.

8°. 1° – 7° bandlar asosida funksiya grafigini chizamiz 13-shakl.



13-shakl

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Funksiyaning kritik nuqtalari qanday topiladi?
2.Funksiyaning o'sish va kamayish oraliqlari.
3.Funksiyaning ekstremumlari.
4.Funksiyaning egilish nuqtalari qanday topiladi?
5.Og'ma, vertical asimtotalarni topish qonuniyatlari.
6.Funksiyani to'la tekshirish sxemasi.

7. Funksiyaning kritik nuqtasini aniqlang $y=\frac{x^2+x+1}{x}$:

8. Funksiyaning o'sish oralig`ini aniqlang $y=\frac{x^3}{6}-x^2$:

9. Funksiyaning kamayish oralig`ini aniqlang $y=\frac{x}{x^2+9}$:

10. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini toping:

a) $y=3x^2+36x-1$; b) $y=\frac{4}{x}+\frac{x}{16}$;

11. $y=x^3-3x^2+2$ funksiyaning grafigini [-1;3] kesmada yasang.

12. Funksiyaning grafigini yasang:

a) $y = 2 + 3x - x^3$; b) $y = x^3 + 6x^2 + 9x$;

13. $y = \dfrac{x^2}{2 - 2x}$ Funksiyaning kritik nuqtasini aniqlash:

14. Funksiyaning o'sish oralig'ini aniqlang $y = \dfrac{x^2}{x - 2}$;

15. Funksiyaning kamayish oralig'ini aniqlang $y = \dfrac{x}{x^2 + 1}$;

16. Funksiyaning ekstremum nuqtalarini va uning shu nuqtalardagi qiymatlarini toping: a) $y = x^4 - 8x^2 + 3$; b) $y = 2\cos x + x$.

16-§.ANIQMAS INTEGRAL

Tayanch so'z va iboralar: *boshlang'ich funksiya va aniqmas integral tushunchalari, integralning sodda xossalari, integral hisoblashning sodda qoidalari, aniqmas integrallar jadvali, integrallash usullari, tatbiqlari.*

16.1. Boshlang'ich funksiya va uni topish qoidalari

Bizga biror funksiya berilgan bo'lsa, ma'lum formulaga yoki qoidaga ko'ra bu funksiyaning hosilasini topishni bilamiz.

Masalan $F(x)=x^3$ bo'lsa, $F'(x)=3x^2$; $F(x)=\sin x$ bo'lsa, $F'(x)=\cos x$.

Endi bu masalaning teskarisini ya'ni hosilasiga ko'ra funksiyaning o'zini topish masalasini ko'raylik. Boshqacha aytganda differensiallash amaliga teskari bo'lgan masalani yechishga to'g'ri keladi.

1-ta'rif. Agar $F(x)$ funksiya (a,b) oraliqda uzluksiz va differensiallanuvchi bo'lib, $\forall x \in (a,b)$ nuqtada $F'(x)=f(x)$ (yoki $dF(x)=f(x)dx$) tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiyani shu oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deyiladi.[11]

Yuqoridagi misollardan x^3 funksiya $3x^2$ ning, $\sin x$ esa $\cos x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasidir.

Boshlang'ich funksiyaning ta'rifiga ko'ra quyidagi ikkita savol tug'iladi:

1. Qanday funksiyalarning boshlang'ich funksiyalari mavjud bo'ladi?

---

[11] James Stewart Calculus 7E 321-327 betlar

[2]K.F.Riley,M.P.Hobson Matematik for Physis and Engineering 2006p.70-82

2. Agar berilgan funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lsa, u yagona bo'ladimi?

1-teorema. [a,b] kesmada uzluksiz bo'lgan ihtiyoriy f(x) funksiyaning shu kesmada boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'ladi (teoremaning isboti Nyuton-Leybnis formulasida ko'riladi).

Agar f(x) funksiya boshlang'ich funksiyaga ega bo'lsa, uning boshlang'ich funksiyasi cheksiz ko'p bo'lishini misolda osongina ko'rish mumkin: $F_1(x)=\frac{x^4}{4}, F_2(x)=\frac{x^4}{4}+7, F_3(x)=\frac{x^4}{4}+C$ (C-o'zgarmas) funksiyalar $f(x)=x^3$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasidir.

2-teorema. Agar $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar [a,b] kesmada f(x) funksiya uchun boshlang'ich funksiyalar bo'lsa, u holda $F_1(x)$, $F_2(x)$ lar bir-biridan o'zgarmas songa farq qiladi:

$F_1(x)-F_2(x)=C$, C- ixtiyoriy o'zgarmas.

Isboti. $\varphi(x)= F_1(x)- F_2(x)$ deylik. Teoremaning shartiga ko'ra, $F'_1(x) = f(x)$, $F'_2(x) = f(x)$ bo'lgani uchun differensiallash qoidasiga ko'ra $\varphi'(x) = [F_1(x) - F_2(x)]' = F'_1(x) - F'_2(x) = f(x) - f(x) = 0 \Rightarrow \varphi'(x) = 0 \Rightarrow [F_1(k) - F_2(x)]' = 0 \Rightarrow F_1(x) - F_2(x) = C$.

3-teorema Agar F(x) funksiya f(x) funksiyaning [a,b] dagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda f(x) funksiyaning shu kesmadagi har qanday boshqa boshlang'ich funksiyasi F(x)+C ko'rinishda bo'ladi.

Isbot. Agar f(x) funksiyaning [a,b] dagi ixtiyoriy boshqa boshlang'ich funksiyasini $F_1(x)$ desak, 2-teoremaning isbotidan kelib chiqadi. $[F_1(x)-F(x)]' = 0 \Rightarrow F_1(x) = F(x) + C$

2-ta'rif. Agar F(x) funksiya f(x) funksiyaning [a,b] dagi boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda f(x) funksiyaning shu kesmadagi barcha boshlang'ich funksiyalari to'plami F(x)+C ga funksiyaning shu kesmadagi aniqmas integrali deyiladi va odatda $\int f(x)dx$ simvol bilan belgilanadi.

Shunday qilib ta'rifga ko'ra $F'(x)=f(x)$ bo'lsa $\int f(x)dx = F(x) + C$ bo'ladi. Bu yerda f(x) ga - integral ostidagi funksiya, f(x)dx ga integral ostidagi ifoda deyiladi. Berilgan f(x) funksiyaning aniqmas integralini topish integrallash amali deyiladi.

Shunday qilib berilgan f(x) funksiyaning aniqmas integrali y=F(x)+C funksiyalar to'plamidan iborat bo'lib, geometrik nuqtai nazardan esa aniqmas integral egri chiziqlar to'plamidan (oilasidan) iborat bo'lib , ularning hammasi bir-biridan ixtiyoriy C masofaga farq qilib o'zaro parallel joylashgan bo'ladi.

1. $(\int f(x)dx)' = f(x)$
2. $\int dF(x) = F(x) + c$
3. $d[\int f(x)dx] = f(x)dx$
4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx$ (k-o‘zgarmas)
5. $\int [f(x) \pm \varphi(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int \varphi(x)dx$

Aniqmas integrallarni hisoblaganda yuqoridagi xossalardan tashqari quyidagi uchta muhim qoidani nazarda tutish amaliy mashg‘ulotlar uchun katta ahamiyatga ega.

Agar $\int f(x)dx = F(x)+C$ bo‘lsa

1. $\int f(ax)\, dx = \frac{1}{a}F(ax) + C$
2. $\int f(x+b)\, dx = F(x+b) + C$
3. $\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C$

16.2. Aniqmas integrallar jadvali.

Bu formulalarning to‘g‘riligini ularning o‘ng tomonidagi

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \; (n \neq -1)$	11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{-arctg}x + C$
2. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\text{arctg}\frac{x}{a} + c$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	13. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{a+x}{a-x}\right\rvert + C$
4. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left\lvert\frac{x-a}{x+a}\right\rvert + C$
5. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	15. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
6. $\int \cos x dx = \sin x + C$	16. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$
7. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \text{tg}x + C$	17. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right\rvert + C$
8. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \text{-ctg}x + C$	a, c –larixtiyoriy o‘zgarmas sonlar.
9. $\int \text{tg}x\, dx = -\ln\lvert\cos x\rvert + C$	
10. $\int \text{ctg}x dx = \ln\lvert\sin x\rvert + C$	

ifodalarni bevosita differensiallash bilan ko‘rsatish mumkin.[12]

[12] James Stewart Calculus 7E 322- bet

Misollar.

1-misol sifatida 14-formulani ko'raylik

$$d\left(\frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C\right)/dx=\frac{1}{2a}\cdot\frac{x+a}{x-a}\cdot\frac{x+a-x+a}{(x+a)^2}=\frac{1}{x^2-a^2}$$

2-misol. $\int(2x^3+5\sqrt{x})dx=\frac{1}{2}x^4+\frac{10}{3}x\sqrt{x}+C$

3-misol. $\int\frac{dx}{3x+6}=\frac{1}{3}\ln|3x+6|+C$

4-misol. $\int\cos10xdx=\frac{1}{10}\sin10x+C$

16.3. Integrallashni hisoblash usullari.

Aniqmas integralni bevosita integrallar jadvalidan va aniqmas integralning xossalaridan foydalanib integrallashga bevosita integrallash usuli deyiladi.Ba'zi hollarda integral ostidagi funksiyani iloji boricha yig'indiga yoyib so'ngra bevosita integrallash maqsadga muvofiq bo'ladi.

1-misol

$$\int\left(3-4x^3+7\cos x-\frac{6}{x}-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=3\int dx-4\int x^3dx+7\cos xdx-6\int\frac{dx}{x}-\int\frac{dx}{x^2+1}=$$

$$=3x-x^4+7\sin x-6\ln x|x|-\mathrm{arctg}x+C$$

2-misol.

$$\int(x^2-2x)^2dx=\int(x^4-4x^3+4x^2)dx=\int x^4dx-4\int x^3dx+4\int x^2dx=$$

$$\frac{x^5}{5}-x^4+\frac{4}{3}x^3+C$$

Differensial belgisi ostiga kiritib integrallash

Differensial belgisi ostiga kiritib integrallash usuli esa integral ostidagi ifodani almashtirishdan iboratdir.

1-misol. $\int e^{\sin x}\cos xdx=|\cos xdx=d(\sin x)$, desak$|$ $=\int e^{\sin x}d(\sin x)=e^{\sin x}+C$

2-misol. $\int\sin^8x\cos xdx=|\cos xdx=d(\sin x)|=\int\sin^8xd(\sin x)=\frac{1}{9}$ $\sin^9x+C$

3-misol $\int e^{\mathrm{arctg}x}\cdot\frac{dx}{1+x^2}=\left|\frac{dx}{1+x^2}=d(\mathrm{arctg}x)\right|=\int e^{\mathrm{arctg}x}d(\mathrm{arctg}x)=e^{\mathrm{arctg}x}+C$

4-misol. $\int xe^{x^2}dx = \left| xdx = \frac{1}{2}d(x^2) \right| = \frac{1}{2}\int e^{x^2}d(x^2) = \frac{1}{2}e^{x^2} + C$

5-misol $\int \frac{dx}{x+5} = \int \frac{d(x+5)}{x+5} = \ln|x+5| + C$

Aniqmas integralda o'zgaruvchilarmi alnashtirib integrallash.

Integrallar jadvaliga kirmagan $\int f(x)dx$ integralni hisoblash uchun, ya'ni $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini topish uchun $x = \varphi(t)$ (1) almashtirish bajarib, $\varphi(t)$ funksiyani uzluksiz va uzluksiz $\varphi'(t)$ hosilaga ega hamda unga teskari bo'lgan $t = \psi(x)$ funksiya mavjud deb faraz qilamiz.

Bu holda (1) dan $dx=\varphi'(t)dt$ ekanligini e'tiborga olsak berilgan integral

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt \qquad (2)$$

ko'rinishda bo'ladi. (2) ga aniqmas integralda o'zgaruvchini almashtirish formulasi deyiladi.

Bu yerda $\varphi(t)$ ni shunday tanlash kerakki natijada (2) ning o'ng tomonidagi integral chap tomonidagi integraldan soddaroq bo'lsin. Aniqmas integralda o'zgaruvchilarni almashtirib integrallaganda chiqqan natija yangi o'zgaruvchidan dastlabki o'zgaruvchiga qaytish shart.[13]

1-misol.

$$\int \frac{xdx}{1+x^2} = \left| \begin{matrix} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \end{matrix} \right| = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln t + C = \frac{1}{2}\ln\left|1+x^2\right| + C$$

2-misol.

$$J = \int \sqrt{R^2 - x^2}dx = \left| \begin{matrix} x = R\sin t \\ dx = R\cos t d \\ \sqrt{R^2 - x^2} = R\cos t \end{matrix} \right| = R^2\int \cos^2 t dt = R^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt = \frac{R^2}{2}[t + \int \cos 2t \ dt] =$$

$$= \frac{R^2}{2}t + \frac{R^2 \sin 2t}{4} + C$$

Eski o'zgaruvchi x ga qaytsak $x= R\sin t \Rightarrow \frac{x}{R} = \sin t \Rightarrow$

[13] James Stewart Calculus 7E -330-333 betlar

$t = \arcsin\frac{x}{R}$

$R^2\sin 2t = 2(R\sin t)(R\cos t) = 2x\sqrt{R^2 - x^2}$.

$J = \frac{R^2}{2}\arcsin\frac{x}{R} + \frac{x}{2}\sqrt{R^2 - x^2} + C.$

Bo'laklab integrallash.

Agar x bo'yicha differensiallanuvchi bo'lgan u(x) , v(x) funksiyalar berilgan bo'lsa, u holda **uv** ko'paytmaning differensiali quyidagi formula bilan hisoblanar edi :

$\boxed{d(uv)=udv+vdu}$ (1)

(1) ning har ikkala tomonini integrallasak:

$\boxed{\int d(uv) = \int udv+\int vdu \Rightarrow \int udv= uv-\int vdu \qquad (2)}$ (2)

(2) formulaga bo'laklab integrallash formulasi deyiladi. (2) formula $\int vdu$ integralni hisoblash $\int udv$ integralni hisoblashdan osonroq bo'lgan holda foydalaniladi.[14]

Bo'aklab integrallash usuli bilan hisoblanadigan ayrim integrallarni ko'rib o'taylik.

I. $\int P(x)e^{kx}dx$, $\int p(x)\sin kxdx$, $\int P(x)\cos kxdx$, (P(x)- ko'phad, k esa biror o'zgarmas son) ko'rinishdagi integrallarni bo'laklab integrallaganda u=P(x), qolganlarini dv deb olish maqsadga muvofiq bo'ladi.

II. $\int P(x)\ln xdx$, $\int P(x)\arcsin xdx$, $\int P(x)\arccos xdx$, $\int P(x)\mathrm{arctg}xdx$, $\int P(x)\mathrm{arcctg}xdx$, ko'rinishdagi integrallarni integrallaganda u deb lnx, arcsinx, arccosx, arctgx, arcctgx larni olish kerak.

III. $\int e^{ax}\sin bxdx$, $\int e^{ax}\cos bxdx$, ko'rinishdagi integrallar ikki marta bo'laklab integrallanadi.

1-misol. $\int xe^x dx = \left| \begin{array}{l} u = x, du = dx \\ dv = e^x dx, v = e^x \end{array} \right| = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$

2-misol. $\int x^2 \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \frac{dx}{x} \\ dv = x^2 dx, v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{dx}{x} = \frac{1}{3}x^3\ln x - \frac{1}{9}x^3 + C$

3-misol.

$\int e^x\cos xdx = \left| \begin{array}{l} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \cos xdx, v = \sin x \end{array} \right| = e^x\sin x - \int e^x\sin xdx$

[14] James Stewart Calculus 7E 488-490- betlar

$$\int e^x \sin x dx = \left| \begin{matrix} u = e^x, du = e^x dx \\ dv = \sin x dx, v = -\cos x \end{matrix} \right| = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx \Rightarrow 2\int e^x \cos x dx = e^x(\sin x + \cos x) + C$$

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x(\sin x + \cos x) + C$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Boshlang'ich funksiya nima? Misollar bilan tushuntiring.

2.Aniqmas integral qanday ta'riflanadi?

3. Integrallashning qanday usullarini bilasiz?

4. Differensial ostiga kiritib integrallash.

5. O'zgaruvchilarni almashtirish uslubining mohiyati nimada?

6. Bo'laklab integrallashning ma'nosini qanday tushunasiz?

7. $F(x)$ funksiyaning $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lishini isbot qiling: $F(x) = arctg^2 2x,\quad f(x) = \frac{4arctg2x}{1+4x^2}$

8. $f(x)$ funksiya uchun $M(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tuvchi boshlang;ich funksiyani toping: $f(x) = 2x+1,\ M(1;3);$

9. Aniqmas integrallarni hisoblang:

1. $\int (5x^4 - \sqrt[5]{x^2})dx;$ 2. $\int 5^x dx;$ 3. $\int \frac{6}{x} dx;$ 4. $\int \frac{7}{\sin^2 x} dx;$

10. Quyidagi aniqmas integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish usuli yordamida hisoblang:

1. $\int \sqrt{5x+3}dx;$ 2. $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{5-4x}};$ 3. $\int (x^4-3)^6 x^3 dx;$ 4. $\int \frac{3xdx}{5+x^2};$

11. Quyidagi aniqmas integrallarni bo'laklab integrallash usuli yordamida hisoblang:

1. $\int x\cos x dx;$ 2. $\int (x-1)e^{2x}dx;$ 3. $\int e^x \sin x dx;$

12. $F(x)$ funksiyaning $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'lishini isbot qiling: $F(x) = \arcsin(x^8),\ f(x) = \frac{8x^7}{\sqrt{1-x^{16}}};$

13. $f(x)$ funksiya uchun $M(x_0;y_0)$ nuqtadan o'tuvchi boshlang;ich funksiyani toping: $f(x) = \sqrt{x},\ M(9,10).$

14. Aniqmas integrallarni hisoblang:

$$a)\ \int\left(5\sin x-\frac{4}{1+x^2}\right)dx;\quad b)\ \int\left(\frac{5}{\cos^2 x}+\frac{2}{\sqrt{1-x^2}}\right)dx,\ |x|<1.$$

15. Quyidagi aniqmas integrallarni o'zgaruvchilarni almashtirish usuli yordamida hisoblang:

$$1.\int\frac{3\cos dx}{\sqrt{2+3\sin x}};\quad 2.\int 5^{3x^2}xdx;\quad 3.\int x\cos(x^2+5)dx;\quad 4.\int\frac{3x^2dx}{\sin^2(x^2-3)}.$$

16. Quyidagi aniqmas integrallarni bo'laklab integrallash usuli yordamida hisoblang:

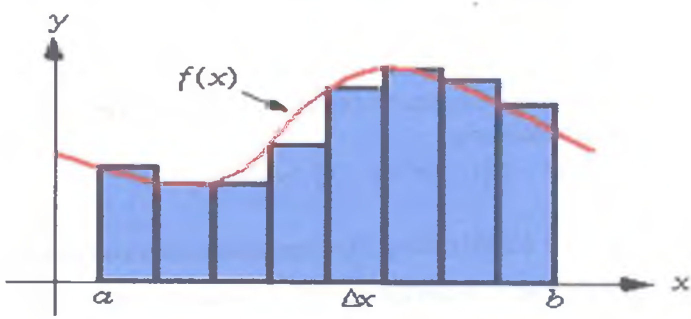
$$1.\int x\cdot 4^x dx;\quad 2.\int e^{2x}\cos xdx;\quad 3.\int arctgxdx$$

17- §. Aniq integral

Tayanch so'z va iboralar: *egri chiziqli trapetsiya, yuza,aniq integral va uning xossalari, mexanik , geometrik ma'nolari N'yuton-leybnits formulasi, uzluksiz, chegaralangan, hisoblash turlari va ularni tatbiqlari.*

17.1. Egri chiziqli trapetsiyaning yuzini topish.

Yuqoridan tenglamasi y=f(x) egri chiziq bilan, pastdan OX o'qibilan, yon tomonlaridan x=a, x=b to'gri chiziqlari bilan chegaralanganegri chiziqli trapesiyaning yuzini toping[15].1-shakl.

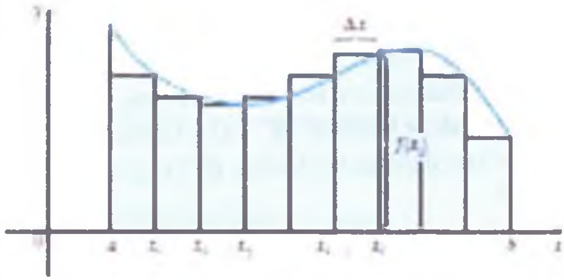


1-shakl

[15] Wolfgang Ertel. Advanced Mathematics for Engineers.Hochshule. Ravensburg-Weingarten. 2012.198-205 b

[2]K.F.Riley,M.P.Hobson Matematik for Physis and Engineering 2006p70-82

Faraz qilaylik [a,b] kesmada y=f(x) funksiya aniqlangan, uzuliksiz va f(x)≥0 bo'lsin. [a.b] kesmasini $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ nuqtalar bilan n $[x_{i-1}, x_i]$,$(i=\overline{1,n})$ta bo'lakchalarga bo'lib 229 abo'linish nuqtalaridan **OY** o'qiga parallel to'gri chiziqlar o'tkazsak natijada **acdb** egri chiziqli trapesiyamiz n ta kichik egri chiziqli trapesiyalarga (trapesiyachalarga) ajraladi.(1-rasm) Endi har bir $[x_{i-1},x_i]$ kesmada ixtiyoriy ξ_i, $(i=\overline{1,n})$ nuqta tanlab olinib, f(x) funksiyaning bu ξ_i nuqtalaridagi qiymatlari $f(\xi_i)$ni hisoblaylik, asosi $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$ balandligi $f(\xi_i)$ bo'lgan to'gri to'rtburchakning yuziga ega bo'lamiz: 2-shakl.



2-shakl

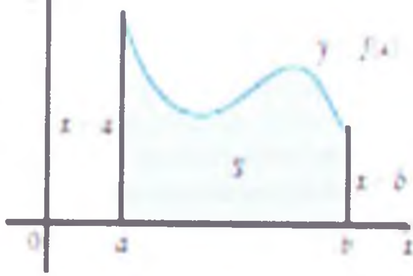
Butun ya`ni **acdb** egri chiziqli trapesiyaning yuzi taxminan hamma kichik egri chiziqli trapesiyalar yuzlarining yigindisiga teng bo'ladi:

$$S\approx f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+\ldots+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (1)$$

Agar $[x_{i-1},x_i]$ kesmalar uzunliklarining eng kattasini λ 0 da [a,b] kesmaning mayda bo'lakchalarga bo'linish soni cheksiz o'sadi, natijada (1) yuza berilgan **acdb** egri chiziqli trapesiya yuziga cheksiz yaqinlashib boradi. Shuning uchun **acdb** egri chiziqli trapesiyaning yuzini

$$S=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}(\xi_i)\Delta x_i \qquad (2)$$

desak bo'ladi. 3-shakl.

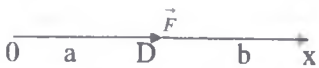


3-shakl.

Kuch ta`sirida bajarilgan ishni hisoblash masalasi

Faraz qilaylik biror D moddiy nuqtaga OX o‘qi yo‘nalishida biror o‘zgaruvchan F=f(x) kuch ta`sir qilinsin. Moddiy D nuqtaning F kuch ta`sirida biror a nuqtadan b nuqtagacha harakatlangandagi bajargan ishini hisoblaylik. [a,b] kesmasini n ta $[x_{i-1}, x_i]$ $(i=\overline{1,n})$

bo‘lakchalarga bo‘lib har bir $[x_{i-1},x_i]$ bo‘lakchada F kuchini deyarli



o‘zgarmas deb hisoblasak u holda har bir bo‘lakchada bajarilgan ish taxminan $A_i \approx f(\xi_i)\Delta x_i$ bo‘ladi . Bu erda $\xi_i \in [x_{i-1}; x_i]$, $f(\xi_i)$ esa kesmadagi ta`sir etayotgan kuch.

U holda [a,b] da F=f(x) kuch ta`sirida bajarilgan ish taxminan

$$A \approx f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Agar $\max\{\Delta x_i\} = \lambda$ desak va $\lambda \to 0$ b`lsa, u holda bajarilgan ish quyidagicha bo‘ladi:

$$A = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} (\xi_i)\Delta x_i \quad (3)$$

Juda ko‘p texnika, mexanika va fizika masalalarini yechshda (2),(3) ko‘rinishdagi yigindilarning limitini hisoblashga to‘gri keladi.

Aniq integral va uning ta`rifi.

y=f(x) funksiya [a,b] kesmada aniqlangan bo‘lsin. [a,b] ni $a=x_0< x_1< \ldots <x_n=b$ nuqtalar bilan n ta bo‘lakchalarga ajratib va har bir $[x_{i-1};x_i]$ $(i=\overline{1,n})$ kesmada ixtiyoriy ξ_i, $(i=\overline{1,n})$ nuqta olib bu nuqtalardagi funksiyasining qiymatlari $f(\xi_i)$ni hisoblaylik, $[x_{i-1}; x_i]$ kesmalarning

uzunliklarini $\Delta x=x_i-x_{i-1}$ deb belgilab quyidagi ko'paytmalar yigindisini tuzaylik:[16]

$$\boxed{s=f(\xi_1)\Delta x_1+f(\xi_2)\Delta x_2+...+f(\xi_n)\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i} \quad (1)$$

(1)ga funksiyaning [a,b kesmadagi integral yigindisi deyiladi.

***Ta`rif.*** Agar [a,b] da aniqlangan f(x) funksiya uchun tuzilgan (1) integral yigindi, $\lambda\to 0$ da [a,b] ni ixtyoriy n ta bo'lakchalarga bo'lish usuliga va har bir $[x_{i-1};x_i]$ bo'lakchada ixtiyoriy $\xi_1$ nuqtani tanlab olish usuliga bog`liq bo'lmagan limitga ega bo'lsa, bu limitga [a,b] kesmada f(x) funksiyadan olingan aniq integtal deyiladi va

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx}$$

ko'rinishida yoziladi.[17] Shunday qilib ta`rifga ko'ra

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1)\Delta x_i} \quad (2)$$

a,b-larga mos ravishda untegralning quyi va yuqori chegarasi, [a,b]ga integrallash sohasi deyiladi.

Agar f(x) funksiya uchun (2) limit mavjud bo'lsa f(x) funksiyani [a,b] kesmada integrallanuvchi funksiya deyiladi.

Aniq integralning geometric ma`nosi yuqoridagi

1-masaladagi egri chiziqli trapesiyaning yuzini beradi:

$$s=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\int_a^b f(x)dx$$

2- masalada esa bajarlgan ish F=f(x) kuchdan olingan integralga teng:

$$\boxed{A=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta_i=\int_a^b f(x)dx}$$

[16] James Stewart Calculus 7E 2-95-298 betlar

[17] James Stewart Calculus 7E 296-310- betlar

Aniq integrallning xossalari.

1-xossa. O`zgarmas ko'paytuvchini aniq integral belgisidan tashqariga chiqarish mumkin:

$$\boxed{\int_a^b Af(x)dx = A\int_a^b f(x)dx}$$ (A-o'zgarmas son)

Isboti. $\int_a^b Af(x)dx = \begin{pmatrix} aniq\,integral \\ ta`rifiga\,ko`ra \end{pmatrix} = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} Af(\xi_i)\Delta x_i = \begin{pmatrix} limitning \\ xossasiga\,ko`ra \end{pmatrix} =$

$$= A \lim_{\lambda \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \mathbf{A}\int_a^b f(x)dx$$

Keyingi xossalari ham aniq integralning ta`rifidan va limitning xossalaridan foydalanib osongina isbotlanadi. Shuning uchun biz ularning isbotini o'qituvchilarga havola qilib, ba`zilarining geometric ma`nosini ko'rsatib beramiz.

2-xossa

$$\boxed{\int_a^b [f_1(x) \pm f_2(x)]dx = \int_a^b f_1(x)dx \pm \int_a^b f_2(x)dx}$$

3-xossa Agar [a,b] da f(x) va φ(x) funksiyalar f(x)$\le \varphi(x)$ tengsizlikni qanoatlantirsalar, u holda

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b \varphi(x)dx}$$

munosabat o'rinli bo'ladi.

4-xossa. Agar f(x) funksiya [a,c],[c,b] (a<c<b) kesmalarning har biriga integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu [a,b] da ham integrallanuvchi bo'lib.

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx}$$

bo'ladi

Bu hossaning geometrik ma`nosi: asosi [a,b] bo'lgan egri chiziqli trapcsiyaning yuzi asoslari [a,c] va [c,b] bo'lgan egri chiziqli trapesiyalar yuzlarining yigindisiga teng bo'ladi.

17.2 Aniq integralni hisoblash usullari. O'zgaruvchini almashtirish usuli

Faraz qilaylik bizda [a,b] kesmada integrallanuvchi bo'lgan funksiya f(x) berilgan bo'lib, undan shu kesmada olingan $\int_a^b f(x)dx$ (1) aniq integral mavjud bolsin.

Bizning maqsad shu (1) aniq integralni hisoblash uchun o'zgaruvchini shunday almashtiraylikki natijada hosil bo'lgan aniq integral berilgan aniq integralga nisbatan ancha sodda bo'lsin.

Teorema. Agar (1) da x=$\varphi(t)$ (2) almashtirish bajarganimizda φ(t) funksiya quyidagi shartlarni qanoatlantirsa:

1.φ(t) funksiya [c,d] kesmadagi aniqlangan va uzluksiz φ`(t) hosilaga ega bo'lsin.

2. yangi o'zgaruvchi t [c,d] kesmada o'zgarganda φ(t) funksiyaning qiymati [a,b] dan chiqmasin.

3. φ(c)=a, φ(d)=b bo'lsin, bu holda

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f(\varphi(t))\varphi`(t)dt} \quad (3)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isboti. f(x) funksiya [a,b] da uzluksiz bo'lgani uchun uning shu kesmadagi boshlang`ich funksiyasini F(x) desak u holda N'yuton-Leybnis formulasiga ko'ra $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)}$ (4).

Tenglik o'rinli bo'ladi. Agar x=φ(t) desak F(x)=F(φ(t)) funksiyaning

f(φ(t)) φ`(t) funksiya uchun boshlang`ich funksiya ekanligini ko'rish qiyin emas.Haqiqattan

$$[F[\varphi(t)]]` = \begin{pmatrix} murakkab \\ funksiyaning \\ hosilasigdko`ra \end{pmatrix} = F`[\varphi(t)]\varphi`(t) = f[\varphi(t)]\varphi`(t) \text{ chunki}$$

F`(x)=f(x)

x=φ(t) desak $F`(\varphi(t)) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$

demak N`yuton-leybnis formulasiga ko'ra

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi`(t)dt = F[\varphi(t)]\Big|_c^d = F(\varphi(d)) - F(\varphi(c)) = F(b) - F(a) = (4ga\,ko`ra) \Rightarrow$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_c^d f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$$

Misol yechganda integral ostidagi funksiya yuqoridagi shartlarni qanoatlantirishi shart.

Misol. 1)

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \left| \begin{array}{l} x=\sin t \\ 0 \le t \le \frac{\pi}{2} \\ dx=\cos tdt \end{array} \right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos tdt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1+\cos 2t)dt = \frac{\pi}{4}$$

$$2)\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} \left| \begin{array}{l} x+1=t^2 \\ dx=2tdt \\ x=3.da.t=2 \\ x=8.da.t=3 \end{array} \right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 10\frac{2}{3};$$

Bo'laklab integrallash usuli.

Teorema. Agar u(x), v(x) funksiyalar [a,b] kesmada uzluksiz bo'lgan u`(x) va v`(x) hosilalarga ega bo'lsa, u holda

$$\boxed{\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu} \qquad (1)$$

formula o'rinli bo'ladi.

Isboti. Haqiqitan [u(x) v(x)]`=u`(x)v(x)+u(x)v`(x) dan ko'rinadiki N'yuton-Leybnis formulasiga ko'ra

$$\boxed{\int_a^b [u'(x)v(x)+u(x)v'(x)]dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b}$$

yoki $\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx$ yoki $\int_a^b udv = (uv)\Big|_a^b - \int_a^b vdu$

Bu erdagi asosiy maqsad $\int_a^b udv$ integralda u va dv larni shunday tanlash kerakki natijada $\int_a^b udv$ integralga nisbatan ancha sodda bo'lishi kerak.

Talabalarda aniq integral va uni hisoblashga ko'nikma hosil qilish.

Namuna

Misol. 1) $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \left|\begin{array}{l} x=\sin t \\ 0\le t\le \frac{\pi}{2} \\ dx=\cos t dt \end{array}\right| = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2t)dt = \frac{\pi}{4}$

2) $\int_3^8 \frac{xdx}{\sqrt{x+1}} \left|\begin{array}{l} x+1=t^2 \\ dx=2tdt \\ x=3.da.t=2 \\ x=8.da.t=3 \end{array}\right| = \int_2^3 \frac{t^2-1}{t}\cdot 2tdt = 2\int_2^3 (t^2-1)dt = 10\frac{2}{3};$

3) $\int_0^1 arctgxdx = \left|\begin{array}{l} u=arctgx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx \\ v=x \end{array}\right| = x\cdot arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$

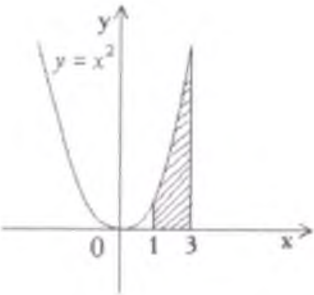
4) $\int_1^2 xe^x dx = \left|\begin{array}{l} u=x, e^x dx=dv \\ du=dx, v=e^x \end{array}\right| = (xe^x)\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = (e^x(x-1)\Big|_1^2 = e^2$

5) $\int_0^1 arctgxdx = \left|\begin{array}{l} u=arctgx \\ du=\dfrac{dx}{1+x^2} \\ dv=dx \\ v=x \end{array}\right| = x\cdot arctgx\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{xdx}{1+x^2} = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \ln 2$

6) $\int_1^2 xe^x dx = \left|\begin{array}{l} u=x, e^x dx=dv \\ du=dx, v=e^x \end{array}\right| = (xe^x)\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = e^x(x-1)\Big|_1^2 = e^2$

17.3. Aniq integralni tatbiqlari.
Aniq integralni tatbiqlarini quyidagi aniq misollar yordamida ko'rib chiqaylik

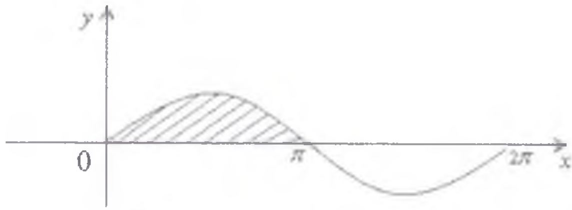
1. Yuqoridan $y=x^2$ funksiya grafigi, $x=1$, $x=3$, pastdan $[1;3]$ kesma bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini toping.



$$S=\int_1^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_1^3 = \frac{3^3}{3}-\frac{1^3}{3} = \frac{27}{3}-\frac{1}{3} = \frac{26}{3} = 8\frac{2}{3}$$

Javob: $8\frac{2}{3}$

2) $y=\sin x$ funksiya grafigi va Ox o‘qi bilan chegaralangan figuraning yuzini $[0;\pi]$ kesma uchun toping.

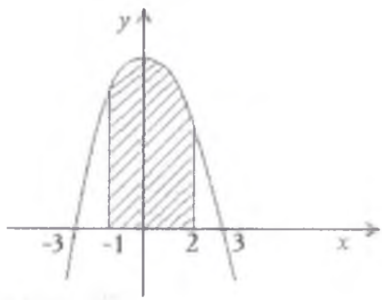


$$\int_0^{\pi}\sin x dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=-\cos\pi-(-\cos 0)=1+1=2$$ kv.birlik

Javob: S=2 kv.birlik

3) OX o‘qi, $x=-1, x=2$ to‘g‘ri chiziqlar va $y=9-x^2$ parabola bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini hisoblang.

Yechish. Masalaning shartga ko‘ra chizmani chizamiz. Yuzani quyidagicha topamiz:

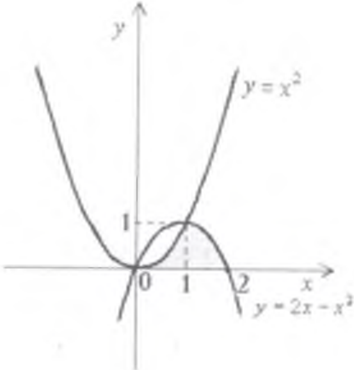


$$S=\int_{-1}^{2}(9-x^2)dx=\left(9x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=\left(9\cdot 2-\frac{2^3}{3}\right)-$$

$$\left(9\cdot(-1)-\frac{(-1)^3}{3}\right)=18-\frac{8}{3}+9-\frac{1}{3}=27-3=24$$ Javob: S=24 kv.birlik

4-masala: $y=x^2$, $y=2x-x^2$ parabolalar va OX o‘qi bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

Yechish: $y=x^2$, $y=2x-x^2$ funksiyalarning grafiklarini yasaymiz. $x^2=2x-x^2$ tenglamadan bu grafiklarning kesishmasi nuqtalari (0;0) va (1;1) larni topamiz.



Demak, izlayotgan yuza bu trapetsiyalarning yuzalari yig'ndisiga teng:

$$S=\int_0^1 x^2dx+\int_1^2(2x-x^2)dx=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1+(x^2-\frac{x^3}{3})\Big|_1^2=$$

$$=\frac{1}{3}+2^2-\frac{2^3}{3}-1^2+\frac{1}{3}=3+\frac{2}{3}-\frac{8}{3}=3-\frac{6}{3}=3-2=1$$

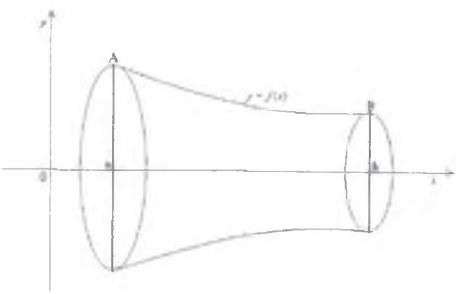
Javob: S=1 kv.birlik

<u>5–masala:</u> Ox o'qining $\left[\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{2}\right]$ kesmasi va $y=\cos x$ funksiyaning bu kesmadagi grafigi bilan chegaralangan figuraning yuzini toping.

<u>6–masala:</u> $y=x^2+1$ parabola va $y=x+3$ to'g'ri chiziq bilan chegaralangan figuraning S yuzini toping.

Agar jismning Ox o'qqa perpendikulyar bo'lgan ko'ndalang kesimining $S(x)$ yuzi ma'lum bo'lsa, uning hajmini

$V=\int_a^b S(x)dx$ (1) formula yordamida hisoblash mumkin.



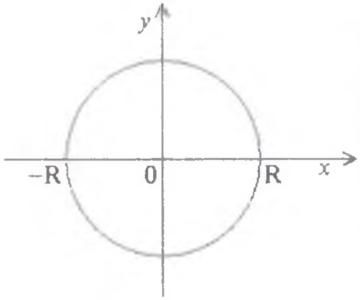
Agar jism yuqoridan $y=f(x)$ uzluksiz $(a<x<b)$ funksiya grafigining AB yoyi bilan chegaralangan aABb egri chiziqli trapetsiya Ox o'q atrofida aylantirishdan hosil qilingan bo'lsa, uning hajmi $S(x)=\pi r^2=\pi y^2=\pi f^2(x)$ bo'lgani uchun $V_x=\pi\int_a^b y^2dx$ y

$V_x = \pi \int_a^b f^2(x)dx$ (2) formula

yordamida hisoblanadi.

Masala: R radiusli sharning hajmini toping.

Yechish: Shar markazini koordinatalar boshi uchun qabul qilamiz.



xy tekislik R radiusli sharni $x^2 + y^2 = R^2$ tenglama bilan beriladigan aylana bo'yi ga kesadi. x o'qidan yuqorida joylashgan yarim aylana $y = f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, $-R \le x \le R$ tenglama bilan ifodalanadi. Shuning uchun shar hajmi: $V = \pi \int_{-R}^{R} \left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx =$

$$= \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx = \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3} \right)\Bigg|_{-R}^{R} =$$

$$= \pi \left(R^2 \cdot R - \frac{R^3}{3} \right) - \pi \left(R^2 \cdot (-R) - \frac{(-R)^3}{3} \right) = \pi \left(R^3 - \frac{R^3}{3} + R^3 - \frac{R^3}{3} \right) = \pi \left(\frac{2R^3}{3} + \frac{2R^3}{3} \right) = \frac{4}{3}\pi R^3$$

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Aniq integral tushunchasi qanday paydo bo'lgan?
2. Egri chiziqli trapetsiya nima?
3. Kuch ta'sirida bajarilgan ish qanday hisoblanadi?
4. Aniq integralning ta'rifi?
5. Aniq integralning xossalarini keltirib o'ting.
6. N'yuton - Leybnis formulasi.
7. Aniq integralni hisoblash usullari, ularni aniqmas integraldan farqi.
8. Aniq integralning qanday hisoblash usullarini bilasiz?
9. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyani tasvirlang:

a) $y = 2x - x^2$ funksiya grafigi va Ox o'q;

b) $y = \sqrt{x}$ funksiya grafigi , Ox o'q va $x = 4$ to'g'ri chiziq .

10. Aniq integrallarni hisoblang:

1. $\int_0^{\ln 2} e^x dx$; 2. $\int_{-2\pi}^{\pi} \sin x dx$; 3. $\int_{-3\pi}^{0} \cos 3x dx$; 4. $\int_0^2 (3x^2 - 4x + 5)dx$;

11. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzalarini hisoblang:

a) $y=4-x^2$ parabola, $y=x+2$ to‘g‘ri chiziq va Ox o‘q;

12. Asos radiusi R, balandligi H bo‘lgan konus hajmini topish uchun formula chiqaring

13. $x=a,\ x=b$ to‘g‘ri chiziqlar, Ox o‘q va $y=f(x)$ funksiya grafigi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzini toping:

a) $a=3,\ b=4,\ f(x)=x^2;$

b) $a=0,\ b=2,\ f(x)=x^3+1;$

c) $a=-\frac{\pi}{6},\ b=0,\ f(x)=\cos x.$

14. Aniq integrallarni hisoblang:

1. $\int\limits_1^9\left(2x-\frac{3}{\sqrt{x}}\right)dx;$ 2. $\int\limits_1^3\frac{3x-1}{\sqrt{x}}dx;$ 3. $\int\limits_0^1\frac{4}{3x+2}dx;$ 4. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx.$ 5. $\int\limits_1^e\ln^2 x\,dx$

15. Quyidagi chiziqlar bilan chegaralangan shakllarning yuzalarini hisoblang:

a) $y=x^3,\ y=2x-x^2$ funksiyalar grafiklari va Ox o‘q;

b) $y=\sin x,\ y=\cos x$ funksiyalar grafiklari va Ox o‘qdagi $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ kesma.

16. $y=\sin x,\ y=0,\ x=0\ va\ x=\pi$ chiziqlar bilan chegaralangan shaklning Ox o‘q atrofida aylanishidan hosil bo‘lgan jismning hajmini toping.

17. a) $\int\limits_{-1}^{0}\arccos x\,dx$ b) $\int\limits_0^2\frac{x\,dx}{\sqrt{9-x^2}}$

18. a) $\int\limits_{?}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4-3x}}$ b) $\int\limits_0^1 x\,\mathrm{arcctg}\,x\,dx$ s) $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\cos 7x\,dx$

4-modul. KOMBINATORIKA, EHTIMOLLAR NAZARIYASI VA MATEMATIK STATISTIKA. MATEMATIK MODELLAR VA ALGORITMLAR

18-§.KOMBINATORIKA MASALALARI

Tayanch iboralar: *kombinatorika elementlari, kombinatorikaning asosiy qoida va teoremalari, qo'shish (jamlash) qoidasi, kiritish-chiqarish qoidasi, ko'paytirish qoidasi, guruhlashlar va o'rinlashtirishlar, birikmalar, elementlar, takrorlanuvchi o'rinlashtirishlar, takrorlanuvchi guruhlashlar va ularning tatbiqlari*

18.1 Kombinatorika tushunchasi. O'rinlashtirish

O'rin almashtirish, Gruppalash va ularning sonini aniqlash.

Qator masalalar ob'yektlarning biror majmuasidan biror xossaga ega elementlarni tanlash, ularni biror tartibda joylashtirish kabi kombinatorik amallarni bajarishga keladi, bu xil masalalarga kombinatorik masalalar deyiladi. Ular bilan matematikaning sohalaridan biri bo'lgan kombinatorika shug'ullanadi

Misollar:

1) 4 xil bolt va 3 xil gaykadan bittadan olinib juftlik tuzish talab qilinadi. Bunday juftliklar necha hil usul bilan tanlanishi mumkin.

2) Abonent telefon qilayotib, oxirgi ikkita raqamni unutib qo'ydi. Albatta telefon qilishi uchun telefonni qo'li bilan necha marta terishi kerak.

Ta'rif: Qandaydir to'plamlarning elementlaridan tuzilgan va bir–biridan shu elementlarning tartibi yoki o'zi bilan farq qiluvchi gruppalar(qism to'plamlar) birlashmalar(kombinatorika) deyiladi.

Misol. $A=\{1,2,3\}$ va $B=\{a,b\}$ to'plamlar berilgan bo'lsin. Shunday juftliklar tuzaylikki, ulardagi birinchi o'rinda tartib bilan A ning elementi, ikkinchi o'rinda B ning elementi yoziladigan bo'lsin. Bunday juftliklar quyidagilardir:

(1;a), (2;a), (3;a), (1;b), (2;b), (3;b)

Birlashmalar uch xil bo'ladi: o'rinlashtirish, o'rin almashtirish va guruhlash.

Ta'rif. O'rinlashtirsh deb n elementdan iborat to'plamning k ta elementdan tarkib topgan tartiblangan har qanday qism to'plamiga aytiladi.

Agar ikki o'rinlashtirish elementlarining tarkibi bilan yoki elementlarining tartibi bilan farq qilsa, bu o'rinlashtirishlar turli deb hisoblanadi.

n ta elementdan k talab tuzilgan turli xil o'rinlashtirishlar soni A_n^k simvol bilan belgilanadi va quyidagi formula yordamida topiladi:

$$A_n^k = n(n-1)(n-2)...(n-k+1)$$

Misol. 1) $B=\{a,b,c\}$ elementlardan 2 tadan o'rinlashtirishlar soni 6 ta, ya'ni ab, ac, bc, ba, ca, cb bo'lib, $A_3^2 = 3\cdot(3-1) = 3\cdot 2 = 6$

2) a,b,c,d,e beshta elementdan 2 tadan o'rinlashtirishlar soni:

$A_5^2 = 5\cdot 4 = 20$ ta

Izoh: Bu yerda 5 dan boshlab qaysi songacha ko'paytirsh kerakligini topish uchun $n-k+1=5-2+1=4$ topib olindi. Agar A_5^3 hisoblanishi kerak bo'lsa.

$n-k+1=5-3+1=3$ ekanligi kelib chiqadi.

Misol: 1, 2, 3 raqamlari yordamida, agar bu raqamlar bir martadan qatnashsa quyidagi ikki xonali sonlarni yozish mumkin: 12, 13, 23, 21, 31, 32, jami: 6 ta son.

Bunda yana raqamlari takrorlanib keladigan 11, 22, 33 larni ham qo'shib hisoblasak, ular 9 ta bo'ladi. Shunga o'xshash o'rinlashtirishlar takroriy o'rinlashtirishlar deyiladi.

Umumiy holda takroriy o'rinlashtirishlar soni $A_m^n = m^n$ formula yordamida hisoblanadi.

Takroriy o'rinlashtirishdan asosan raqamlar bilan ish ko'rishda foydalaniladi.

Misol. Oxirgi 2 ta raqamni unutgan abonent telefon nomerini topish uchun ko'pi bilan necha marta telefon qilishi kerak: $A_{10}^2 = 10^2 = 100$ marta.

Ta'rif. Faqat elementlarining tartibi bilangina farq qiluvchi o'rinlashtirishlar o'rin almashtirish deyiladi.

Agar to'plam m ta elementdan tuzilgan bo'lsa, undagi o'rin almashtirishlar soni P_m bilan belgilanadi va u quyidagi formula yordamida topiladi:

$$P_m = A_m^m = m(m-1)\ ...\ 2\cdot 1 = m!$$

Isoh: m! ("m faktorial") – 1 dan m gacha sonlar ko'paytmasidan iborat.

1–masala. 5 kishini 5 ta stulga necha hil usulda o'tkazish(joylashtirish) mumkin:

Yechish: $P_5 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$

2–masala. Har xil qiymatli 9 ta (1 dan 9 gacha) raqam bilan nechta 9 xonali son yozish mumkin:

Yechish: $P_9 = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9 = 362880$

Ta'rif: m ta elementli X to'plamning k ta elementli qism to'plamlariga shu to'plam elementlaridan k tadan olingan guruhlashlar deyiladi va C_m^k ko'rinishida belgilanadi. Guruhlashda elementlarning tartibi e'tiborga olinmaydi.

Masalan: $X = \{a,b,c\}$elementlardan tuzilgan to'plam bo'lsin. U holda bu to'plamning 2 ta elementdan tashkil topgan barcha o'rinlashtirishlari: (a,b), (a,c), (b,a), (b,c); (c,a); (c;b) bo'lsa guruhlashlari esa (a,b), (a,c), (b,c) lardan iborat, ya'ni uchta elementdan ikkitadan o'rinlashtirishlar soni 6 ta, guruhlashlar soni esa 3 ta bo'lmoqda.

Teorema: m ta elementdan k tadan guruhlashlar soni

$$C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k} = \frac{m(m-1)(m-2)\ ...(m-k+1)}{k!}$$

formula bilan topiladi.

Isbot. C_m^k ta guruhlanishida har birida mumkin bo'lgan o'rin almashtirishlar soni P_k ta.

Agar P_k o'rin almashtirishlar sonini C_m^k gruppalashlar soniga ko'paytirsak A_m^k o'rinlashtirishlar sonini hosil qilamiz:

$$C_m^k \cdot P_k = A_m^k\text{, bundan } C_m^k = \frac{A_m^k}{P_k}$$

Masala: Biror vazifaga ko'rsatilgan 10 ta nomzoddan 3 kishi saylanishi kerak. Saylovdagi turli nomzodlik guruhi qancha bo'lishi mumkin.

Yechish: $C_{10}^3 = \frac{A_{10}^3}{P_3} = \frac{10\cdot 9\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3} = 10\cdot 3\cdot 4 = 120$ ta

Xossa $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ (1)

Isbot:

$$C_m^k = \frac{m\cdot(m-1)...(m-k+1)}{k!} = \frac{m(m-1)...(m-k+1)(m-k)(m-k-1)...2\cdot 1}{k!(m-k)(m-k-1)...2\cdot 1} = \frac{m!}{k!(m-k)!}$$

1–xossa. $C_m^k = C_m^{m-k}$

Isbot: (1) formulada k o‘rniga $m-k$ ni qo‘yib hisoblaymiz:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = C_m^k$$

2–xossa. $C_{m-1}^n + C_{m-1}^{n-1} = C_m^n$

18.2 Nyuton binomi va uning xossalari

$(a+b)$ ikkihadning manfiy bo‘lmagan butun darajasini uning qo‘shiluvchilarining darajalari yig‘indisi ko‘rinishida ifodalovchi formulaga Nyuton binomi deyiladi. U quyidagi ko‘rinishga ega:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$$

yoki,

$$(x+a)^m = x^m + C_m^1 x^{m-1} a + C_m^2 x^{m-2} a^2 + ... + C_m^{m-1} x a^{m-1} + a^m$$

$C_m^0 = 1; C_m^1; C_m^2; ...; C_m^{m-1}, C_m^m = 1$ larga binomial koeffitsientlar deyiladi.

Nyuton binomi quyidagi xossalarga ega:

1) Har bir haddagi x va a ning ko‘rsatkichlari yig‘indisi m ga teng

2) Yoyilma m+1 ta haddan iborat.

3) Binomial koeffitsientlar yig‘indisi 2^m ga teng:

$C_m^0 + C_m^1 + C_m^2 + ... + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$

4) Yoyilmaning istalgan hadi $T_{n+1} = C_m^n a^n x^{m-n}$ dan iborat

5) Yoyilmaning chetlaridan teng uzoqlikda turgan hadlarining koeffitsientlari o‘zaro teng.

Kombinatorik masalalarni hisoblash usullari.

1. a) $\dfrac{P_{20}}{P_4 P_{16}} = ?$ b) $\dfrac{A_{10}^7 \cdot P_6}{C_8^4 \cdot A_{16}^2} = \dfrac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{\dfrac{8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\cdot16\cdot15} =$

$$= \frac{10\cdot9\cdot4\cdot2\cdot4\cdot6\cdot2\cdot3\cdot4}{16} = 10\cdot9\cdot2\cdot4\cdot36 = 90\cdot8\cdot36 = 720\cdot36 = 25920$$

2.1) $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{a}\right)^6$ ni hisoblang:

Yechish: $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{a}\right)^6 = (\sqrt{a})^6 + C_6^1(\sqrt{a})^5\cdot\frac{1}{a} + C_6^2(\sqrt{a})^4\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^2 + C_6^3(\sqrt{a})^3\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^3 +$

$$+C_6^4(\sqrt{a})^2\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^4+C_6^5\sqrt{a}\cdot\left(\frac{1}{a}\right)^5+\left(\frac{1}{a}\right)^6=a^3+6a\sqrt{a}+\frac{6\cdot5}{2}a^2\cdot\frac{1}{a^2}+\frac{6\cdot5\cdot4}{2\cdot3}a\sqrt{a}\cdot\frac{1}{a^3}+$$

$$+\frac{6\cdot5}{2}\cdot\frac{1}{a^3}+6\frac{\sqrt{a}}{a^5}+\frac{1}{a^6}=a^3+6a\sqrt{a}+15+20\frac{\sqrt{a}}{a^2}+\frac{15}{a^3}+\frac{6\sqrt{a}}{a^5}+\frac{1}{a^6}$$

2) $\left(\frac{5}{\sqrt[3]{a}}+\sqrt{a}\right)^{26}$ ning 6–hadini toping.

<u>Yechish:</u> $T_{n+1}=C_m^n a^n x^{m-n}$, $m=26$, $x=\frac{5}{\sqrt[3]{a}}$, $a=\sqrt{a}$, $n=10$

$$T_{11}=C_{26}^{10}(\sqrt{a})^{10}\cdot\left(\frac{5}{\sqrt[3]{a}}\right)^{26-10}=C_{26}^{10}a^5\cdot\left(\frac{5}{\sqrt[3]{a}}\right)^{16}=C_{26}^{10}a^5\cdot\frac{5^{16}}{a^5\cdot\sqrt[3]{a}}=C_{26}^{10}\cdot\frac{5^{16}}{\sqrt[3]{a}}$$

3.1) 1, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 bilan nechta har xil to‘g‘ri kasr tuzish mumkin.

2) 15 ta lotoreya biletining 3 tasiga yutuq chiqadi. 7 ta bilet olinishi kerak. 7 ta biletni kamida 1 tasi yutuqli chiqadigan qilib necha hil usul bilan olish mumkin?

<u>Yechish:</u> Jami variantlar soni $C_{15}^7=6435$ yutuq chiqmaydigan biletlar soni 15–3=12 ta. 12 ta lotoreyadan 7 tadan gruppalashlar soni $C_{12}^7=792$ bo‘ladi. Demak, masalani yechish uchun barcha variantlardan yutuq chiqmaydigan variantlarni ayirib tashlash kerak:

$C_{15}^7-C_{12}^7=6435-792=5643$ ta.

4.1) $\frac{A_x^4 P_{x-4}}{P_{x-2}}=42$ tenglamani yeching.

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)\cdot1\cdot2\ldots(x-4)}{1\cdot2\ldots(x-4)(x-3)(x-2)}=42$$

$x(x-1)=42$ $\quad x^2-x-42=0$, $x_1=-6$, $x_2=7$

Javob: $x=7$

2) $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}}=336$ tenglamani yeching.

<u>Yechish:</u> $C_{x-2}^{x-5}=C_{x-2}^{x-2-(x-5)}=C_{x-2}^{x-2-x+5}=C_{x-2}^3$ dan foydalanish kerak.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Kombinatorik masalalarni tushuntiring.
2.O‘rinlashtirish nima? Qanday topiladi?
3.Takroriy o‘rinlashtirish nima? Qanday topiladi?
4.O‘rin almashtirish va ularning soni qanday topiladi?
5.Gruppalash nima, gruppalashlar soni qanday topiladi?
6.Nyuton binomi formulasini ayting.

7. A={1,2,3,4} to‘plam elementlaridan ikki xonali sonlar tuzing.Ular nechta bo‘ladi?

8. 30 o‘quvchisi bo‘lgan guruhdan boshliq, yordamchi va kotib necha xil usul bilan saylanishi mumkin?

9. $(2a-1)^8$ ifodaning 5–hadini toping.

10. Hisoblang:

a) $\frac{C_5^2 \cdot A_8^3}{P_8}$; b) $\frac{A_9^2 \cdot C_9^7}{C_9^2 \cdot 18}$; c) $\frac{P_{18} \cdot C_6^4}{P_{17}}$.

11. 5 ta turli natural son yordamida nechta har xil to‘g‘ri kasr tuzish mumkin?

12. 2 ta kitob,3 ta daftar va 4 ta qalamdan bittadan olinib necha xil komplekt tuzish mumkin?

13. 0;1;2;3 raqamlaridan qancha to‘rt xonali son tuzish mumkin?

14. $(4+\sqrt{3})^6$ ni hisoblang.

15. . Tenglamalarni yeching:

a) $\frac{C_{2x}^{2x+1}}{C_{2x+1}^{x-1}}=\frac{2}{3}$, $x \in N$; b) $A_{x-1}^2 - C_x^1 = 79$, $x \in N$

16. 36 talik kartalar dastasidan 6 tadan qilib necha hil usulda suzish mumkin?

19-§.Ehtimollar nazariyasi elementlari.Matematik statistika elementlari

Tayanch iboralar: *hodisa, tasodifiy hodisalar, tajriba va sinov tushunchasi, hodisalar orasidagi munosabatlar, ehtimollikning klassik, statistik va geometrik ta’riflari, muqarrar hodisa, mumkin bo‘lmagan hodisa, tasodifiy miqdor, taqsimot funksiyasi, matematik kutilma, dispersiya.*

19.1. Ehtimollar nazariyasining predmeti

Ehtimollar nazariyasi oliy matematikaning bir qismi bo‘lib, “tasodifiy tajribalar”, ya’ni natijasini oldindan aytib bo‘lmaydigan tajribalardagi qonuniyatlarni o‘rganuvchi matematik fandir. Bunda shunday tajribalar qaraladiki, ularni o‘zgarmas (ya’ni, bir xil) shartlar kompleksida hech bo‘lmaganda nazariy ravishda ixtiyoriy sonda takrorlash mumkin, deb hisoblanadi. Bunday tajribalar har birining natijasi *tasodifiy hodisa* ro‘y berishidan iboratdir. Insoniyat faoliyatining deyarli hamma sohalarida shunday holatlar mavjudki, u yoki bu tajribalarni bir xil sharoitda ko'p matra takrorlash mumkin bo'ladi. Ehtimollar nazariyasini sinovdan-sinovga o'tishida natijalari turlicha bo'lgan tajribalar qiziqtiradi. Biror tajribada ro'y berish yoki bermasligini oldindan aytib bo'lmaydigan hodisalar tasodifiy hodisalar deyiladi. Masalan, tanga tashlash tajribasida har bir tashlashga ikki tasodifiy hodisa mos keladi: tanganing gerb tomoni tushishi yoki tanganing raqam tomoni tushishi. Albatta, bu tajribani bir marta takrorlashda shu ikki tasodifiy hodisalardan faqat bittasigina ro'y beradi. Tasodifiy hodisalarni biz tabiatda, jamiatda, ilmiy tajribalarda, sport va qimor o'yinlarida kuzatishimiz mumkin. Umumlashtirib aytish mumkinki, tasodifiyat elementlarisiz rivojlanishni tasavvur qilish qiyindir. Tasodifsiz umuman hayotning va biologik turlarning yuzaga kelishini, insoniyat tarihini, insonlarning ijodiy faoliyatini, sotsial-iqtisodiy tizimlarning rivojlanishini tasavvur etib bo'lmaydi. Ehtimollar nazariyasi esa aynan mana shunday tasodifiy bog'liqliklarning matematik modelini tuzish bilan shug'ullanadi. Tasodiflar insoniyatni doimo qiziqtirib kelgan. Shu sababli ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlar kabi amaliyot talablariga mos ravishda rivojlangan. Ehtimollar nazariyasi boshqa matematik fanlardan farqli o'laroq nisbatan qisqa, ammo o'ta shijoatlik rivojlanish tarixiga ega. Endi qisqacha tarixiy ma'lumotlarni keltiramiz. Ommaviy tasodifiy hodisalarga mos masalalarni sistematik ravishda o'rganish va ularga mos matematik apparatning yuzaga kelishi XVII asrga to'g'ri keladi. XVII asr boshida, mashhur fizik Galiley fizik o'lchashlardagi xatoliklarni tasodifiy deb hisoblab, ularni ilmiy tadqiqot qilishga uringan. Shu davrlarda kasallanish, o'lish, baxtsiz hodisalar statistikasi va shu kabi ommaviy tasodifiy hodisalardagi qonuniyatlarni tahlil qilishga asoslangan sug'urtalanishning umumiy nazariyasini yaratishga ham urinishlar bo'lgan. Ammo, ehtimollar nazariyasi matematik ilm sifatida murakkab tasodifiy jarayonlarni o'rganishdan emas, balki eng sodda qimor o'yinlarini tahlil qilish natijasida yuzaga kela boshlagan. Shu boisdan ehtimollar nazariyasining paydo bo'lishi XVII asr ikkinchi yarmiga mos keladi va u Paskal (1623-1662), Ferma (1601-1665) va Gyuygens (1629-1695) kabi olimlarning qimor o'yinlarini nazariyasidagi tadqiqotlari bilan bog'liqdir. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi katta qadam Yakov Bernulli (1654-1705) ilmiy izlanishlari bilan bog'liqdir. Unga, ehtimollar nazariyasining eng muhim qonuniyati, deb hisoblanuvchi "katta sonlar qonuni" tegishlidir.

Ehtimollar nazariyasi rivojidagi yana bir muhim qadam de Muavr (1667-1754) nomi bilan bog'liqdir. Bu olim tomonidan normal qonun (yoki normal taqsimot) deb ataluvchi muhim qonuniyat mavjudligi sodda holda asoslanib berildi. Keyinchalik, ma'lum bo'ldiki, bu qonuniyat ham, ehtimollar nazariyasida muhim rol' o'ynar ekan. Bu qonuniyat mavjudligini asoslovchi teoremalar "markaziy limit teoremalar" deb ataladi. Ehtimollar nazariyasi rivojlanishida katta hissa mashhur matematik Laplasga (1749-1827) ham tegishlidir. U birinchi bo'lib ehtimollar nazariyasi asoslarini qat'iy va sistematik ravishda ta'rifladi, markaziy limit teoremasining bir formasini isbotladi (Muavr-Laplas teoremasi) va ehtimollar nazariyasining bir necha tadbiqlarini keltirdi. Ehtimollar nazariyasi rivojidagi etarlicha darajada oldinga siljish Gauss (1777-1855) nomi bilan bog'liqdir. U normal qonuniyatga yanada umumiy asos berdi va tajribadan olingan sonli ma'lumotlarni qayta ishlashning muhim usuli – "kichik kvadratlar usuli"ni yaratdi. Puasson (1781-1840) katta sonlar qonunini umumlashtirdi va ehtimollar nazariyasini o'q uzish masalalariga qo'lladi. Uning nomi bilan ehtimollar nazariyasida katta rol' o'ynovchi taqsimot qonuni nomlangandir. XVII va XIX asrlar uchun ehtimollar nazariyasining keskin rivojlanishi va u bilan har tomonlama qiziqish xarakterlidir. Keyinchalik ehtimollar nazariyasi rivojiga V.Ya. Bunyakovskiy (1804-1889), P.L. Chebishev (1821-1894), A.A. Markov (1856-1922), A.M.Lyapunov (1857-1918), A.Ya. Xinchin (1894-1959), V.I.Romanovskiy (1879-1954), A.N.Kolmogorov (1903-1987) va ularning shogirdlari bebaho hissa qo'shdilar. O'zbekistonda ehtimollar nazariyasi bo'yicha butun dunyoga taniqli ilmiy maktabni yuzaga kelishida T.A. Sarimsoqov (1915-1995) va S.X. Sirojiddinov (1920-1988) larning muhim rollarini alohida ta'kidlab o'tish joizdir.

Tasodifiy hodisa. Hodisa tushinchasi, chastotasi, hodisaning ta'riflari va xossalari

Tasodifiy hodisa deyilganda yuz berishi yoki yuz bermasligi mumkin bo'lgan har qanday voqeani tushunamiz. Masalan, tanga tashlashda gerbli tomoni tushishi, o'yin soqqasini tashlashda u yoki bu ochkoni tushishi va boshqalar.

Turli hodisalarni A, B, C, ... harflari bilan belgilaymiz.

Albatta yuz beradigan hodisa muqarrar hodisa deyiladi. Masalan, o'yin soqqasini tashlaganda olti ochkodan ko'p ochko tushmasligi, faqat oq sharlar solingan yashikdan olingan sharning oq bo'lishi va hakazolar.

Mutlaqo yuz bermaydigan hodisa mumkin bo'lmagan hodisa deyiladi. Masalan, qartalar dastasidan to'rttadan ortiq tuz olinishi.

A hodisaga qarama-qarshi hodisa deb, A hodisaning yuz bermasligidan iborat bo'lgan hodisani tushunamiz va $\bar{A}$ orqali belgilaymiz. Masalan, qartalar dastasidan olingan qartaning qizil holli bo'lishi A hodisa bo'lsa, qora holli bo'lishi $\bar{A}$ hodisa bo'ladi.

Hodisalarning yuz berishi yoki yuz bermasligini tajriba o'tkazish yordamida aniqlash mumkin. Masalan, tajribamiz tangani tashlash bo'lsa, gerbli tomonining tushishi hodisa bo'ladi. Yoki tajriba o'yin soqqasini tashlash bo'lsa, hodisa "5" ochkoning tushishi bo'lishi mumkin va xokazo.

Faraz qilaylik n marta tajriba o'tkazilganda A hodisa m marta ro'y bergan bo'lsa, u holda m/n nisbatga A hodisaning chastotasi deyiladi.

Tasodifiy hodisaning chastotasi P*(A) har doim 0 bilan 1 orasidagi qiymatga ega bo'ladi, yani $0 \leq P^*(A) \leq 1$.

Deyarli barcha tasodifiy hodisalar chastotasi turg'unlik hossasiga ega, ya`ni tajribalar qanchalik ko'p o'tkazilgani sari, hodisa chastotasi qandaydir songa yaqinlashib boradi. Masalan, tangani 4040 marta tashlab ko'rilganda 2048 marta gerb tomoni bilan tushgan. Bunda chastota 2048/4040=0,5069. Tangani 12000 marta tashlaganda esa, gerb tomoni 6019 marta tushgan, bunda chastota 6019/12000=0,5016. 24000 marta tashlanganda 12012 marta tushgan, bunda chastota 0,5005 ga teng. Bundan ko'rinib turibdiki gerb tomoni tushushi hodisasi chastotasi 0,5 soniga yaqinlashmoqda.

Tasodifiy hodisaning chastotasi yaqinlashadigan yuqoridagiga o'xshash sonlarga tasodifiy hodisaning ehtimoli deyiladi va A hodisaning ehtimoli P(A) orqali belgilanadi. Demak,

$0 \leq P(A) \leq 1$.

Muqarrar hodisaning ehtimoli 1 ga teng, mumkin bo'lmagan hodisaning ehtimoli 0 ga teng. A va B hodisalardan birining yuz berishi ikkinchisining yuz berishini yo'qqa chiqarsa, u xolda A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar deyiladi.

Ta`rif. Agar har bir sinov natijasida A,V, ..., L hodisalardan hech bo'lmaganda bittasi yuz bersa, u holda bu hodisalar hodisalarning to'la gruppasini tashkil qiladi deyiladi.

Masalan, o‘yin soqqasini tashlashda 1,2, 3,4,5,6 ochkolarning tushishidan iborat bo‘lgan hodisalar to‘la gruppa tashkil qiladi.

Ehtimollikning klassik ta`rifi

Chekli sondagi A_1 , A_2 , … A_n hodisalarni qaraymiz va unga quyidagi shartlarni qo‘yamiz:

1. Bu hodisalar juft-jufti bilan birgalikda emas:
2. A_1, A_2 , … A_n –hodisalarning to‘la gruppasini tashkil qiladi.
3. A_1, A_2, … A_n hodisalar teng imkoniyatli, ya`ni bu hodisalardan birortasining boshqalaridan ko‘proq yuz berishiga yordam beradigan hech qanday ob`ektiv sabablar yo‘q.

Ta`rif. Qaralayotgan n ta A_1, A_2,…, A_n hodisadan m tasi A hodisaning yuz berishiga qulaylik tug‘dirsin. U holda A hodisaning ehtimoli deb, A hodisaning yuz berishiga qulaylik tug‘diruvchi hodisalar sonining teng imkoniyatli barcha hodisalarning jami soniga nisbataniga aytiladi. Agar A hodisaning ehtimolini P(A) orqali belgilasak, u holda ta`rif bo‘yicha

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Ehtimolning statistik ta`rifi

Faraz qilaylik A hodisaning ro‘y berish yoki ro‘y bermasligini kuzatayotgan tajribamizni istalgan songacha takrorlash imkoniyatiga ega bo‘laylik. Tajribamizni n marta takrorlaganimizda A hodisa μ marta ro‘y bersin.

***Ta`rif.*** $\frac{\mu}{n}$ nisbatga A hodisaning nisbiy chastotasi deyilib, $W(A)=\frac{\mu}{n}$ deb belgilanadi. Bu ta`rifdan hodisaning ehtimoli bilan nisbiy chastotasi orasidagi farq yaqqol ko‘rinadi. Ehtimollik tajribagacha hisoblanadi. Nisbiy chastota esa faqat tajribadan keyin hisoblanadi.

Ba`zi bir hodisalarning ro‘y berishini kuzatishlar shuni ko‘rsatadiki, tajribalar soni yetarli katta bo‘lganda, turli seriyalarda A hodisaning nisbiy chastotalari bir-biridan juda kam farq qiladi. Boshqacha aytganda n ning yetarli katta qiymatlarida A hodisaning $\frac{\mu}{n}$ nisbiy chastotalari biror o‘zgarmas p son atrofida tebranadi ya`ni

$\frac{\mu}{n} \approx p$. SHuning uchun n yetarli katta bo'lganda $\frac{\mu}{n} \approx p$ nisbiy chastotani A hodisaning statistik ehtimoli deb qabul qilingan:

$$\boxed{P(A) \approx \frac{\mu}{n} \approx p}$$

Tajribalar soni oshgan sari nisbiy chastota bilan ehtimol orasidagi farq kamayib, bir-biriga yaqinlashib boradi. Shuning uchun yetarli katta n uchun $P(A) \approx \frac{\mu}{n}$ nisbiy chastota ***n*** ning yetarli katta qiymatlarida qandaydir $p, 0 \le p \le 1$ soni atrofida tebranadi.A hodisaning ctatistik ehtimoli sifatida $\omega(\dot{A}) = \frac{\mu}{n} \approx p$ qabul qilingan.

Misol.

Tangani tashlash soni	Gerb tomoni tushish soni	Nisbiy chastota
4040	2048	0,5069
12000	6019	0,5019
24000	12012	0,5005

Ehtimolning geometrik ta`rifi

Faraz qilaylik bizga biror **n** o'lchovli Ω fazo berilgan bo'lib, shu fazoning biror ω qismini ajratib olaylik.

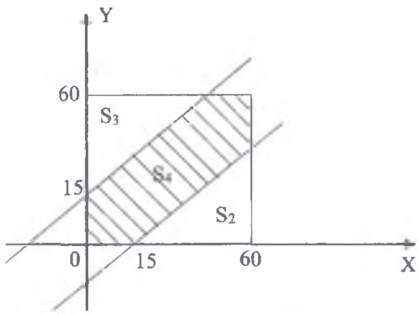
Endi shu Ω fazoga tasodifiy ravishda nuqta tashlaymiz .Shu tashlangan nuqtaning Ω fazoning ω qismiga tushish ehtimolini topish talab qilinsin. Tashlangan nuqta Ω ga tushadi. Lekin ω ga tushishi ham, tushmasligi ham mumkin. Tashlangan nuqtaning ω ga tushish ehtimoli, shu ω ning o'lchamiga proportsional bo'lib, ω formasiga va Ω ning qaerida joylashishiga bog`liq bo'lmas ekan. Shuning uchun izlanayotgan ehtimolni P desak $P = \frac{mes\,\omega}{mes\,\Omega}$ formula bilan hisoblanar ekan. 1-shakl.

1-shakl.

Bu ehtimolning geometrik ta`rifi bo‘ladi. Agar fazomiz uch o‘lchovli bo‘lsa, $Đ=\frac{hajm\ \omega}{hajm\Omega}$ bo‘ladi. Agar fazo ikki o‘lchovli bo‘lsa, $Đ=\frac{yuza\ \omega}{yuza\ \Omega}$. Agar fazo bir o‘lchovli bo‘lsa, $Đ=\frac{uzunlik\ \omega}{uzunlik\ \Omega}$ bo‘ladi.

Misol. Ikkita talaba 12^{00}-13^{00} gacha uchrashadigan bo‘ldi. Lekin bir-birini 15 min. ortiq kutmaydi. Shularning uchrashish ehtimolini toping.

Yechish: Birinchi talaba kelish vaqti x. Ikkinchi talaba kelish vaqtini y desak, x, y larning o‘zgarishlari $\left.\begin{array}{l}0'\le x\le 60\\ 0'\le y\le 60\end{array}\right\}$. Lekin bular uchrashishi uchun



$$|x-y|\le 15,\ |x-y|\le 15\Rightarrow\ -15\le x-y\le 15\Rightarrow \left.\begin{array}{l}y=x+15\\ y=x-15\end{array}\right\}$$

bo‘lishi kerak. $S_1=60\cdot 60=3600$ - kv. yuzi

$$S_2=S_3=\frac{45\cdot 45}{2};\quad S_2+S_3=45\cdot 45=2025;$$

$$S_4=S_1-(S_2+S_3)=3600-2025=1575$$

$$P=\frac{S_4}{S_1}=\frac{1575}{3600}=\frac{7}{16};$$

Misollar: O'yin soqqasini tashlashda 6 ta hodisa mavjud. Ular 1,2,3,4,5,6 raqamlarning tushishidir. Shuning uchun juft raqamlarning tushish ehtimoli $\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ $(m=3,\ n=6)$ bo'ladi, 3 ga karrali raqamning tushish ehtimoli $\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ $(m=2,\ n=6)$ bo'ladi.

A hodisa ehtimoli xossalari

1. $0\leq P(A)\leq 1$.
2. E- muqarrar hodisa bo'lsa, $P(E)=1$.
3. U- mumkin bo'lmagan hodisa bo'lsa, $P(U)=0$.

Misol: Yashikda 3 ta ko'k, 8 ta qizil va 9 ta oq shar bor. Yashikdan bir marta shar olinganda ko'k, qizil va oq shar chiqish ehtimoli qancha.

Yechish: Istalgan sharning chiqishini teng imkoniyatli deb hisoblash mumkin bo'lganligidan, jami $n=3+8+9=20$ ta elementar hodisaga egamiz. Agar ko'k shar chiqish hodisasini A, qizil shar chiqish hodisasini B va oq shar chiqish hodisasini C; m_1, m_2, m_3 orqali esa bu hodisalarga qulaylik tug'diruvchi elementar hodisalar sonini belgilasak, u holda $m_A=3$, $m_B=8$, $m_C=9$ va $P(A)=\frac{3}{20}=0{,}15$; $P(B)=\frac{8}{20}=0{,}4$; $P(C)=\frac{9}{20}=0{,}45$ bo'ladi.

Teorema: Agar A va B birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

Hulosa: A,B,S,…,L, lar birgalikda bo'lmagan hodisalar bo'lsa, u holda

$$P(A+B+S+\ldots+L)=P(A)+P(B)+P(S)+\ldots+P(L)$$

Ta`rif: ikkita A va B tasodifiy hodisalarning kesishmasi (yoki ko'paytmasi) deb ikkala hodisaning ham birgalikda yoki ketma-ket yuz berishidan hosil bo'lgan hodisaga aytiladi va $A\cdot B$ ko'rinishida belgilanadi.

Misol: A hodisa o'yin soqqasini tashlaganda 2,3,4 ochkolarning tushishi, B hodisa esa 3,4,5 ochkolarini tushishi hodisasi bo'lsin, u holda $A\cdot B$ –3,4 ochkolarning tushishi hodisasi bo'ladi.

Ta`rif: B hodisasining A hodisaga nisbatan shartli ehtimoli deb B hodisaning A hodisa yuz berish sharti ostidagi ehtimoliga aytiladi va $P_A(B)$ orqali belgilanadi.

Teorema: A va B hodisalar ko‘paytmasining ehtimoli bu hodisalardan birining ehtimolini ikkinchi hodisaning birinchi hodisa yuz bergandagi shartli ehtimoliga ko‘paytmasiga teng:

$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A(B)$.

Misollar: 1) Birinchi yashikda 2 ta oq va 10 ta qora shar, ikkinchi yashikda 8 ta oq, 4 ta qora shar bor. Har bir yashikdan bittadan shar olinadi. Olingan ikkala sharning ham oq bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: A-birinchi yashikdan oq shar chiqishi, B-ikkinchi yashikdan oq shar chiqishi hodisasi bo‘lsin. U holda A va B hodisalarning ko‘paytmasini topish kerak bo‘lmoqda

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P\,(B)=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{9}$$

2) ichida 3 ta oq va 7 ta qora shar bo‘lgan yashikdan ketma-ket 2 ta shar olindi. Ikkala sharning ham oq bo‘lish ehtimolini toping.

Yechish: A-birinchi olishda yashikdan oq shar chiqishi hodisasi, B-ikkinchi olishda yashikdan oq shar chiqishi hodisasi bo‘lsin. Ikkala sharning ham oq bo‘lishi hodisasi A va B larning ko‘paytmasidan iborat:

$$P(A\cdot B)=P(A)\cdot P_A\,(B)\,; \quad P(A)=\frac{3}{10}, \qquad P_A(B)=\frac{2}{9}$$

Chunki A hodisa ro‘y bergandan so‘ng, yashikda 1 ta oq shar kamaydi va 2 ta qoldi, jami sharlar ham bittaga kamaydi va 9 ta qoldi.

Demak, $P(A\cdot B)=\frac{3}{10}\cdot\frac{2}{9}=\frac{1}{15}$.

19.2.Diskret tasodifiy miqdorlarning sonli xarakteristikalari va ularning xossalari. Diskret tasodifiy miqdorlarning matematik kutilmasi

1-ta’rif. Tasodifiy miqdor deb avvaldan noma’lum bo‘lgan va oldindan inobatga olib bo‘lmaydigan tasodifiy sabablarga bog‘liq bo‘lgan hamda sinash natijasida bitta mumkin bo‘lgan qiymatni qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Odatda, tasodifiy miqdorlar lotin alifbosining katta harflari X, Y, Z ... va h.k. uning mumkin bo‘lgan qiymatlari kichik x,y,z... va h.k. harflar bilan belgilanadi.

Tasodifiy miqdorlar diskret yoki uzluksiz bo‘lishi mumkin.

2-ta’rif. Diskret tasodifiy miqdor deb ayrim, ajralgan qiymatlarni ma’lum ehtimollar bilan qabul qiluvchi miqdorga aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo‘lgan qiymatlari soni chekli yoki cheksiz bo‘lishi mumkin.

3-ta'rif. Uzluksiz tasodifiy miqdor deb chekli yoki cheksiz oraliqdagi barcha qiymatlarni qabul qilishi mumkin bo'lgan miqdorlarga aytiladi.

Uzluksiz tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari soni cheksizdir.

4-ta'rif. Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni deb mumin bo'lgan qiymatlar bilan ularning ehtimollari orasidagi moslikka aytiladi.

Diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagi usullar bilan berilishi mumkin:

a) Birinchi satri mumkin bo'lgan X_k qiymatlardan, ikkinchi satri P_k ehtimollardan iborat jadval yordamida, yani:

$$X: x_1 \quad x_2 \ldots x_n$$
$$P: p_1 \quad p_2 \ldots p_n$$

bu yerda $p_1 + p_2 + \ldots + p_n = \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$

b) Grafik usulda - buning uchun to'g'ri burchakli koordinatalar sistemasida (x_k p_k) nuqtalar yasaladi, so'ngra ularni to'g'ri chiziq kesmalari bilan tutashtirib, taqsimot ko'pburchagi deb ataluvchi figura hosil qilinadi.

c) Analitik usulda (formula ko'rinishida).

Diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollar $P_n(k) = C_n^k P^k q^{n-k}$

Bernulli formulasi bilan aniqlanadigan bo'lsa, tasodifiy miqdor binomial taqsimot qonuniga bo'ysunadin deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollar: $P_n(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \lambda = np$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, bunday tasodifiy miqdor «Puasson taqsimot qonuniga bo'ysunadi» deyiladi.

Agar diskret tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlariga mos ehtimollar:

$$P_k = q^{k-1} p, \qquad k=1,2, \ldots$$

formula bilan aniqlanadigan bo'lsa, bunday diskret tasodifiy miqdor "Geometrik taqsimot qonuniga bo'ysunadi" deyiladi.

1-misol. Talabaning imtihon biletidagi savollarning har biriga javob berish ehtimoli 0,7 ga teng.

1-Imtihon biletidagi 4 ta savolga bergan javoblari sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X tasodifiy miqdor orqali talabaning javoblari sonini belgilasak, uning qabul qiladigan qiymatlari $x_1=0$; $x_2=1$; $x_3=2$; $x_4=3$; $x_5=4$. Ko'rinib turibdiki, n=4; p=0,7; q=0,3.

X ning yuqoridagi qiymatlarni qabul qilish ehtimollari Bernulli formulasi orqali topiladi.

$$P_1 = P_4(0) = C_4^0(0.7)^0(0.3)^4 = 0{,}0081$$
$$P_2 = P_4(1) = C_4^1(0.7)^1(0.3)^3 = 0{,}0756$$
$$P_3 = P_4(2) = C_4^2(0.7)^2(0.3)^2 = 0{,}2646$$
$$P_4 = P_4(3) = C_4^3(0.7)^3(0.3)^1 = 0{,}4116$$
$$P_5 = P_4(4) = C_4^4(0.7)^4(0.3)^0 = 0{,}2401$$

U holda X tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi:

X	0	1	2	3	4
P	0.0081	0.0756	0.2646	0.4116	0.2401

Tekshirish: 0,0081 +0,0756 + 0,2646 +0,4116+0,2401 = 1

2-misol. Qurilma bir-biridan erkli ishlaydigan uchta elementdan iborat. Har bir elementning bitta tajribada ishdan chiqish ehtimoli 0,1ga teng. Bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonining taqsimot qonunini tuzing.

Yechish: X diskret tasodifiy miqdor orqali bitta tajribada ishdan chiqqan elementlar sonini belgilasak, u ushbu qiymatlarga ega:

$X_1=0$; $X_2=1$; $X_3=2$; $X_4=3$.

Bundan tashqari, n=3; p=0,1; q=0,9 ekanligini hisobga olsak,

$$P_1 = P_3(0) = C_3^0(0.1)^0(0.9)^3 = 0.729$$
$$P_2 = P_3(1) = C_3^1(0.1)^1(0.9)^2 = 0.243$$
$$P_3 = P_3(2) = C_3^2(0.1)^2(0.9)^1 = 0.027$$
$$P_4 = P_3(3) = C_3^3(0{,}1)^3(0{,}9)^0 = 0{,}001$$

U holda, taqsimot qonuni quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

X	0	1	2	3
P	0,729	0,243	0,027	0,001

3-misol. Nishonga qarata 4 ta o'q uziladi, bunda har qaysi o'q uzishda nishonga tegish ehtimoli p=0,8 ga teng.

Quyidagilarni toping:

a) Nishonga tegishlar soniga teng bo'lgan X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini;

b) $1 \leq X \leq 3$ va $X > 3$ hodisalarning ehtimolini;

v) Taqsimot ko'pburchagini chizing.

Yechish: a) X tasodifiy miqdorning mumkin bo'lgan qiymatlari: 0, 1, 2, 3, 4.

Ehtimollarni Bernulli formulasi bo'yicha hisoblaymiz:

$$P_1 = P(X=0) = C_4^0 0{,}8^0 \cdot 0{,}2^4 = 0{,}0016$$
$$P_2 = P(X=1) = C_4^1 0{,}8^1 \cdot 0{,}2^3 = 0{,}0256$$
$$P_3 = P(X=2) = C_4^2 0{,}8^2 \cdot 0{,}2^2 = 0{,}1536$$
$$P_4 = P(X=3) = C_4^3 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^1 = 0{,}4096$$
$$P_5 = P(X=4) = C_4^4 0{,}8^4 \cdot 0{,}2^0 = 0.4096$$

U holda, X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni:

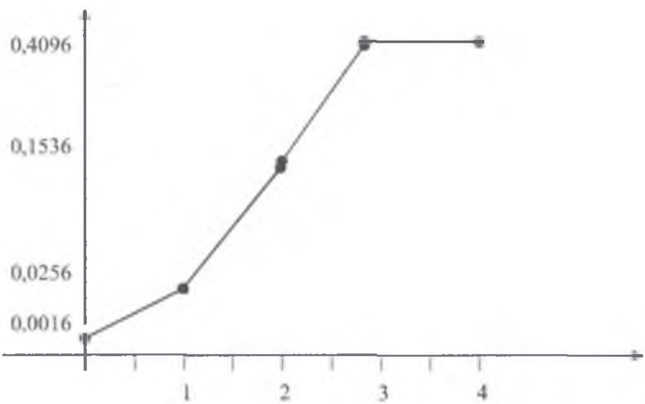
X	0	1	2	3	4
P	0,0016	0,0256	0,1536	0,4096	0,4096

Tekshirish: 0,0016+0,0256+0,1536+0,4096+0,4096=1

b) $(1 \leq X \leq 3) = P(X=1)+P(X=2)+P(X=3) = 0{,}0256+0{,}1536+0{,}4096= =0{,}5888$

$P(X>3)=P(X=4)=0{,}4096;$

a)Taqsimot ko'pburchagini yasaymiz:



Diskret tasodifiy miqdorning o‘rta qiymati (matematik kutilma)

Faraz qilaylik X diskret tasodifiy miqdor $x_1, x_2, ..., x_n$ qabul qilishi mumkin bo‘lgan barcha qiymatlarni mos ravishda $p_1, p_2, ..., p_n$ ehtimollar bilan qabul qilsin.

***Ta`rif.*** Diskret tasodifiy miqdor X ning matematik kutilmasi deb, barcha qabul qilishi mumkin qiymatlari bilan bu qiymatlar ehtimollar ko‘paytmalarining yig`indisiga aytiladi va $M(X)$ deb belgilanadi.

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + ... + x_np_n = \sum_{k=1}^{n} x_kp_k \quad \textbf{(1)}$$

Misol 1. X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha berilgan bo‘lsa uning o‘rta qiymatini toping.

X	3	5	2
P	0,1	0,6	0,3

$M(X) = 3 \cdot 0{,}1 + 5 \cdot 0{,}6 + 2 \cdot 0{,}3 = 3{,}9$.

Eslatma. Bitta tajribada A hodisaning ro‘y berish soni tasodifiy miqdor. Shu diskret tasodifiy miqdorning o‘rta qiymati shu A hodisaning ro‘y berish ehtimoliga teng bo‘ladi.

Haqiqatdan

X	1	0
P	p	q

$M(x) = 1 \cdot p + 0 \cdot q = p$. $\quad M(x) = p$.

Matematik kutilma xossalari.

1-xossa. o‘zgarmas miqdorning o‘rta qiymati o‘zgarmasning o‘ziga teng: $M(C) = C$ (C -o‘zgarmas miqdor).

Isboti. Agar C o‘zgarmasni diskret tasodifiy miqdor desak, bu diskret tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo‘lgan qiymati shu S ning o‘zi bo‘ladi va uni $p = 1$ ehtimol bilan qabul qiladi, shuning uchun $M(C) = Cp = C \cdot 1 = C$.

2-xossa. O‘zgarmasni o‘rta qiymat belgisidan tashqari chiqarish mumkin: $M(CX) = CM(X)$ (C-o‘zgarmas).

$M(CX) = Cx_1p_1 + Cx_2p_2 + ... + Cx_kp_k = C(x_1p_1 + ... + x_kp_k) = CM(X)$.

Isboti. Agar X diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha berilgan bo‘lsa

X	x_1	x_2	...	x_n

P	p_1	p_2	...	p_n

U holda $M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_kp_k$ bo'lib, CX diskret tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'ladi.

CX	Cx_1	Cx_2	...	Cx_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Endi CX diskret tasodifiy miqdorning o'rta qiymatini hisoblasak;
$M(CX)=Cx_1p_1+Cx_2p_2+...+Cx_kp_k=C(x_1p_1+...+x_kp_k)=CM(X)$

***Ta`rif.*** Ikkita yoki bir nyechta tasodifiy miqdorlarning ixtiyoriy bittasining taqsimot qonuni boshqalarining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlariga bog`liq bo'lmasa bunday tasodifiy miqdorlarga o'zaro bog`liqsiz tasodifiy miqdorlar deyiladi.

3-xossa. O`zaro bog`liqsiz bo'lgan tasodifiy miqdorlar ko'paytmasining o'rta qiymati shu tasodifiy miqdorlar o'rta qiymatlarining ko'paytmasiga teng:

$$M(XY)=M(X)\cdot M(Y).$$

Isboti.

X	x_1	x_2	va	Y	y_1	y_2	bo'lsa	$M(X)=x_1p_1+x_2p_2$
P	p_1	p_2		P	q_1	q_2		$M(Y)=y_1q_1+y_2q_2$

U holda XY tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari x_1y_1, x_2y_2, x_2y_1, x_1y_2 bo'ladi va natijada taqsimot qonuni

XY	x_1y_1	x_1y_2	x_2y_1	x_2y_2
pq	p_1q_1	p_1q_2	p_2q_1	p_2q_2

$$M(XY)=x_1y_1p_1q_1+x_1y_2p_1q_2+x_2y_1p_2q_1+x_2y_2p_2q_2=y_1q_1(x_1p_1+x_2p_2)+$$

$$+y_2q_2(x_1p_1+x_2p_2)=(x_1p_1+x_2p_2)(y_1q_1+y_2q_2)=M(X)M(Y)$$

Misol.

X	5	2	4	va	Y	7	9	

p	0,6	0,1	0,3		q	0,8	0,2	$M(X,Y)=?$

Yechish: $M(X)=3+0,2+1,2=4,4$; $M(Y)=5,6+1,8=7,4$;
$M(X\cdot Y)=M(X)\cdot M(y)=4,4\cdot 7,4=32,56$.

4-xossa. O`zaro bog`liqli yoki bog`liqsiz bo'lgan birnecha tasodifiy miqdorlar yig`indisining o'rta qiymati, bu tasodifiy miqdorlar o'rta qiymatlarining yig`indisiga teng:

$$M(X+Y+Z)=M(X)+M(Y)+M(Z).$$

Isboti. Faraz qilaylik X,Y tasodifiy miqdolarning taqsimot qonunlari quyidagicha berilgan bo'lsin.

X	x_1	x_2
p	p_1	p_2

Y	y_1	Y_2
q	q_1	q_2

$$M(X)=x_1p_1+x_2p_2$$
$$M(Y)=y_1q_1+y_2q_2$$

Endi X+Y tasodifiy miqdorning qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini tuzish uchun X ning barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlariga Y ning barcha qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlarini qo'shamiz.

x_1+y_1, x_1+y_2, x_2+y_1, x_2+y_2 bularning ehtimollarini mos ravishda p_{11}, p_{12}, p_{21} ва p_{22} deb belgilaymiz.

Endi X+Y tasodifiy miqdorning taqsimot qonunini tuzsak:

X+Y	x_1+y_1	x_1+y_2	x_2+y_1	x_2+y_2
P	p_{11}	p_{12}	p_{21}	p_{22}

$$M(X+Y)=(x_1+y_1)P_{11}+(x_1+y_2)P_{12}+(x_2+y_1)P_{21}+(x_2+y_2)P_{22}=$$
$$=x_1(P_{11}+P_{12})+x_2(P_{21}+P_{22})+y_1(P_{11}+P_{21})+y_2(P_{12}+P_{22}).$$

Endi $P_{11}+P_{12}=P_1$ ekanini isbot qilaylik.

X ning x_1 qiymati p_1 ehtimol bilan qabul qilish hodisasi, X+Y ning x_1+y_1 yoki x_1+y_2 qiymatlarni $P_{11}+P_{12}$ ehtimol bilan qabul qilish hodisasini ergashtiradi va aksincha X+Y ning x_1+y_1 yoki x_1+y_2 qiymatlarni $P_{11}+P_{12}$ ehtimol bilan qabul qilish hodisasi X ning x_1 qiymati ehtimol bilan qabul qilish hodisasini ergashtiradi. Shuning uchun bu hodisalar o'zaro teng ya`ni $X=X+Y$ demak $P(X)=P(X+Y)$ yoki $P_1=P_{11}+P_{12}$.

Xuddi shuningdek $P_{21}+P_{22}=P_2$, $P_{11}+P_{21}=q_1$ va $P_{12}+P_{22}=q_2$ larni ham isbot qilish mumkin.

Isbot qilingan munosabatlarni o'rinlariga qo'ysak:

$$M(X+Y)=x_1p_1+x_2p_2+y_1q_1+y_2q_2=M(X)+M(Y)$$

Misol. 2 ta kubik tashlaganimizda tushadigan ochkolar yig`indisi diskret tasodifiy miqdor bo'ladi. Shu tasodifiy miqdorning qiymati topilsin.

X	1	2	3	4	5	6	va	Y	1	2	3	4	5	6
P	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$		q	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$	$1/6$

$M(X)=1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{1}{6}+3\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{1}{6}+5\cdot\frac{1}{6}+6\cdot\frac{1}{6}=\frac{7}{2}$; $M(Y)=\frac{7}{2}$; va

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y)=\frac{7}{2}+\frac{7}{2}=7.$$

Eslatma. O`zaro bog`liqsiz bo'lgan n ta tajribada A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas bo'lib, p ga teng bo'lsa, u holda A hodisaning ro'y berish sonining o'rta qiymati $M(X)$, tajribalar soni bilan A hodisaning ro'y berish ehtimoli p ko'paytmasiga teng bo'ladi: $M(X)=np$.

Bu erda A hodisaning ro'y berish ehtimoli hamma tajribalarda o'zgarmas p deb hisoblanadi.

Misol. To'pdan harbir o'q uzilganda nishonga tegish ehtimoli $p=0{,}6$ bo'lsa 10 marta o'q uzilganda nishonga tegish sonning o'rta qiymati topilsin. $M(X)=np=10\cdot0{,}6=6$.

Faraz qilaylik X diskret tasodifiy miqdor va uning $M(X)$ o'rta qiymati berilgan bo'lsin.

**Ta`rif**. X tasodifiy miqdor bilan uning $M(X)$ o'rta qiymat ayirmasiga ya`ni $X-M(X)$ ga X tasodifiy miqdorning o'rta qiymatidan chetlanishi deyiladi.

$X-M(X)$ ayirmani yangi tasodifiy miqdor sifatida qarasak bu tasodifiy miqdorni markaziylashtirilgan tasodifiy miqdor yoki chetlanish deb ataladi. $X-M(X)$ tasodifiy miqdorning taqsimot qonuni quyidagicha bo'lishi ravshan.

$X-M(X)$	$X_1-M(X)$	$X_2-M(X)$	… …	$X_n-M(X)$
p	p_1	p_2		p_n

Endi markazlashtirilgan tasodifiy miqdorning (chetlanishning) o'rta qiymatini hisoblashni ko'raylik.

Teorema. Chetlanishning o‘rta qiymati nul bo‘ladi: $M[X-M(X)]=0$.
Isboti. Chetlanishning taqsimot qonunidan ko‘rinadiki

$$M[X-M(X)]=\sum_{k=1}^{n}[X_k-M(X)]P_k=\sum_{k=1}^{n} X_kP_k-\sum_{k=1}^{n} M(X)P_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} X_kP_k-M(X)\sum_{k=1}^{n} P_k=\sum_{k=1}^{n} X_kP_k-M(X)=M(X)-M(X)=0.$$

***Ta`rif.*** Tasodifiy miqdor X ning dispersiyasi deb, tasodifiy miqdor bilan o‘rta qiymati ayirma kvadratining o‘rta qiymatiga (markazlashtirilgan tasodifiy miqdor ya`ni chetlanish kvadratining o‘rta qiymatiga) aytiladi va $D(X)$ deb belgilanadi.
Ta`rifga ko‘ra $D(X)=M[[X-M(X)]^2]$ yoki

$$D(x)=\sum_{k=1}^{n} [(X_k-M(x))^2]P_k.$$

Teorema. X ning tasodifiy miqdor dispersiyasi shu tasodifiy miqdor kvadratining o‘rta qiymati bilan o‘rta qiymat kvadratining ayirmasiga teng: $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.

Isboti. $D(X)=M[(X-M(X))^2]=\sum_{k=1}^{n} [X_k-M(X)]^2P_k=$

$$=\sum_{k=1}^{n} x_k^2\cdot p_k-2\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot p_k\cdot M(X)+\sum_{k=1}^{n} [M(X)]^2\cdot P_k=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} x_k^2\cdot p_k-2M(X)\sum_{k=1}^{n} x_k\cdot p_k+[M(X)]^2\sum_{k=1}^{n} \cdot P_k=$$

$$=M(X^2)-2M(X)\cdot M(X)+[M(X)]^2=M(X^2)-2[M(X)]^2+[M(X)]^2=M(X^2)-[M(X)]^2$$

Demak, $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2$.

Misol.

X	2	3	5
P	0,1	0,6	0,3

Taqsimot qonuni bilan berilgan taqsimot miqdorining $M(X)=2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}6+5\cdot 0{,}3=3{,}5$; bundan $[M(X)]^2-(3{,}5)^2=12{,}25$;

X^2	4	9	25

P	0,1	0,6	0,3

$M(X^2)=0,4+5,4+7,5=13,3$; $D(X)=13,3-12,25=1,05$.

Dispersiya xossalari

1-Xossa. O`zgarmas miqdorning dispersiyasi nulga teng: $D(C)=0$.

Isboti. Dispersining ta`rifiga ko'ra $D(C)=M\left[[C-M(C)]^2\right]$. Lekin o'rta qiymatning birinchi xossasiga asosan ya`ni o'zgarmas
$D(C)=M\left[[C-M(C)]^2\right]=M[C-C]=M(0)=0$. $D(C)=0$.

2-Xossa. O`zgarmas dispersiya belgisidan tashqariga kvadratda chiqariladi: $D(CX)=C^2D(X)$.

Isboti. Dispersiyaning ta`rifiga ko'ra $D(CX)=M\left\{[CX-M(CX)]^2\right\}$; o'rta qiymatning ikkinchi xossasidan foydalansak
$D(C)=M\left\{[CX-M(CX)]^2\right\}=M\left\{[CX-CM(X)]^2\right\}=C^2M\left\{[X-M(X)]^2\right\}=C^2D(X)$

3-Xossa. Chekli sondagi o'zaro bog`liqsiz bo'lgan diskret tasodifiy miqdorlar yig`indisining dispersiyasi shu tasodifiy miqdorlar dispersiyasining yig`indisiga teng. Jumladan $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Isboti. Dispersiyani hisoblash formulaga ko'ra
$D(X+Y)=M\left[(X+Y)^2\right]-[M(X+Y)]^2=M(X^2+2XY+Y^2)-[M(X)+M(Y)]^2=$

$=M(X^2)+2M(X)M(Y)+M(Y^2)-[M(X)]^2-2M(X)M(Y)-[M(Y)]^2=$
$=M[X^2]-[M(X)]^2+M(Y^2)-[M(Y)]^2=D(X)+D(Y)$;
$D(X+Y)=Д(X)+Д(Y)$.

4-Xossa. O`zaro bog`liqsiz bo'lgan ikkita diskret tasodifiy miqdor ayirmasining dispersiyasi shu tasodifiy miqdor dispersiyalarining yig`indisiga teng: $D(X-Y)=D(X)+D(Y)$.

Natija. O`zgarmas son bilan tasodifiy miqdor yig`indisining dispersiyasi tasodifiy miqdor dispersiyasiga teng: $D(C+X)=D(X)$ (C-o'zgarmas), xaqiqatdan $D(C+X)=D(C)+D(X)=0+D(X)=D(X)$.

Ta`rif. Tasodifiy miqdorning o'rta kvadratik chetlanishi deb uning dispersiyasidan olingan kvadrat ildiziga aytiladi: $\delta(x)=\sqrt{D(X)}$.

Misol. Taqsimot qonuni quyidagicha bo'lgan X tasodifiy miqdorning o'rta kvadratik chetlanishi aniqlansin

X	2	3	10
P	0,1	0,4	0,5

$M(X)=6{,}4$; $M(X^2)=54$; $D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=54-(6{,}4)^2=13{,}04$.

$\delta(x)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{13{,}04}\approx 3{,}61$.

Eslatma. O`zaro bog`liqsiz n ta tajribada A hodisaning ro'y berish sonining dispersiyasini A hodisaning ro'y berish va ro'y bermaslik ehtimollari bilan tajribalar sonining ko'paytmasiga teng bo'ladi: $D(X)=npq$.

Bu erda A hodisaning ro'y berish ehtimoli o'zgarmas p deb hisoblanadi.

Misol. O`zaro bog`liqsiz bo'lgan 10 ta tajriba o'tkazilganda A hodisaning ro'y berish ehtimoli $p=0{,}6$ bo'lsa shu tajribalarda A hodisaning ro'y berish sonining dispersiyasi aniqlansin.

$n=10$; $p=0{,}6$; $q=0{,}4$. $D(X)=10\cdot 0{,}6\cdot 0{,}4=2{,}4$; $D(X)=2{,}4$.

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Ehtimollik nazariyasining asosiy elementlari nima?

2. Hodisa ehtimolining klassik, statistik,geometrik ta'rifini keltiring.

3. Muqarrar, mumkin bo'lmagan, teng ehtimolli hodisalar deganda nimani tushunasiz?

4. To'liq ehtimol formulasini va Bernulli formulalarini tushintiring?

5. Diskret tasodifiy miqdorning sonli xarakteristkalari tushintiring?

6. Yashikda 30 ta shar bor, ulardan 10 tasi qizil, 5 tasi ko'k, 15 tasi oq. Rangli shar chiqish ehtimolini toping.

7. 1, 2, 3, 4 raqamlaridan foydalanib har bir raqam bir marta qatnashadigan nechta to'rt xonali son tuzish mumkin.

8. 25 ta xodimdan boshliq va uning o'rinbosarini necha xil usulda saylash mumkin.

9. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining tayyorlagan detallarining sifatsiz bo'lish ehtimolliklari mos ravishda 0.05,0.04 va 0.02 ga teng bo'lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan detalning sifatsiz bo'lish ehtimolligini toping.

10. X diskret tasodifiy miqdor ushbu taqsimot qonuni bilan berilgan:

X	0	1	2	3	4
P	0,2	0,4	0,3	0,08	0,02

M(X), D(X) va σ(X) larni toping.

11. Qutida bir xil o‘lchamdagi 10 ta shar bor . Ularning 3 tasi qizil , qolganlari ko‘k Tavakkaliga olingan sharning ko‘k chiqish ehtimolini toping.

12. Talaba programmadagi 20 savoldan 18 tasini biladi. Talabaning imtihon oluvchi taklif etgan 3 ta savolni ham bilish ehtimolini toping.

13. Qutida 6 ta qora, 9 ta oq shar bo‘lib, undan tavakkaliga 4 ta shar olindi. Olingan 4 ta sharning 3 tasi oq bo‘lish ehtimolini toping.

14. Detallar partiyasi uch ishchi tomonidan tayyorlanadi. Birinchi ishchi barcha detallarning 25%ini, ikkinchi ishchi 35%ini, uchinchsi esa 40%ini tayyorlaydi. Bu uchchala ishchining tayyorlagan detallarining sifatsiz bo‘lish ehtimolliklari mos ravishda 0.05,0.04 va 0.02 ga teng bo‘lsa, tekshirish uchun partiyadan olingan sifatsiz detalning ikkinchi ishchi tamonidan tayyorlanish ehmolligini toping.

15. Ushbu:

X:	-5	2	3	4
P:	0,4	0,3	0,1	0,2

taqsimot qonuni bilan berilgan X diskret tasodifiy miqdorning dispersi-yasini va o‘rtacha kvadratik chetlanishini toping.

19.3. Matematik statistika elementlari. Matematik statistika asosiy masalalari

Statistika so‘zi lotincha so‘zdan olingan bo‘lib, holat, vaziyat degan ma’noni anglatadi.

Statistika tabiatda va jamiyatda bo‘ladigan ommaviy hodisalarni o‘rganadi. Statistika fani qonuniyatlarni aniqlash maqsadida ommaviy tasodifiy hodisalarni kuzatish natijalarni tasvirlash, to‘plash, sistemalashtirish, tahlil etish va izohlash usullarini o‘rganadi.

Matematik statistika esa ommaviy va ijtimoiy xarakterga ega bo'lgan tabiiy jarayonlarni tahlil etish uchun matematik apparat bo'lib xizmat qiladi.

Matematik statistikaning vazifasi o'rganilayotgan ob'yekt bo'yicha statistik ma'lumotlarni to'plash, ularni taxlil qilish va shu asosda ba'zi bir xulosalarni chiqarishdan iborat.

Ommaviy tasodifiy hodisalarni ro'yxatga olish va kuzatish natijasida statistik m`lumotlar hosil bo'ladi.

Bosh va tanlanma to'plamlar.

Faraz qilaylik biror bir jinsli ob`ektlar to'plami sifat yoki miqdor belgilari bo'yicha tekshirilayotgan bo'lsin. Ba`zi paytda tekshirilayotgan ob`ektlar to'plamini to'la-to'kis hammasini uzluksiz tekshirib chiqishga to`g`ri keladi. Lekin amalda (hayotda) ko'rilayotgan to'plamni to'la tekshirish juda kam uchraydi.

Masalan, tekshirishmoqchi bo'lgan to'plamning ob`ektlar soni etarli darajada ko'p bo'lsa yoki hammasi kelajakda yo'q qilinadigan ob`ektlar to'plami bo'lsa yoki tekshirishga juda katta mablag` harajat qilinadigan bo'lsa, bunday ob`ektlar to'plamini to'la tekshirib o'tirishning ma`nosi yo'q.

SHuning uchun bunday hollarda tekshirilishi kerak bo'lgan ob`ektlar to'plamidan tasodifiy birnecha ob`ektlar ajratib olib tekshiriladi. So'ngra esa bu tekshirilgan ob`ektlar uchun chiqarilgan xulosalar barcha ob`ektlar uchun ya`ni ob`ektlar to'plami uchun umumiylashtiriladi.

Masalan, bizni har bir paxta ko'chatidan olinadigan o'rtacha og`irligi qiziqtirsin ...

Tekshirilmoqchi bo'lgan ob`ektlar to'plamidan statistik analiz uchun ya`ni tekshirish uchun tasodifiy ajratib olingan bir yoki birnecha ob`ektlarga **tanlanma** yoki namuna yoki **tanlanma to'plam** deyiladi.

Tanlanma to'plam olingan ob`ektlar to'plamiga **bosh to'plam** deyiladi.

Bosh to'plamning hajmi deb uni tashkil qiluvchi ob`ektlar soniga aytiladi.

Tanlanmaning hajmi deb, tanlanma uchun ya`ni namuna uchun tasodifiy olingan ob`ektlar soniga aytiladi.

Masalan 5000 detal tekshirilishi kerak bo'lsin. Buning hammasi tekshirish o'rniga 1000 tasi tekshiriladi. $N=5000$ bosh to'plam hajmi, $n=1000$-tanlanma to'plam hajmi.

Albatta tanlanma to'plam uchun chiqarilgan xulosaning bosh to'plam uchun to'la va aniqroq bo'lishi, ko'p jihatdan tanlanmaning qanday tanlanishiga bog`liq bo'ladi. SHuning uchun tanlanma haqiqiy tuzilishi va iloji boricha bosh to'plamdagi ixtiyoriy element tanlanmaga kirish imkoniyatiga ega bo'lishi zarur.

Bosh to'plamdan olinadigan tanlanma **qaytariladigan** va **qaytarilmaydigan** bo'lib ikkiga ajraladi:

a) Bosh to'plamdan olingan tanlanma elementlari tekshirilgandan keyin yana boshqa tanlanma olingancha bosh to'plamga qaytariladi.

b) Bosh to'plamdan olingan tanlanma elementlari tekshirilgandan keyin bosh to'plamga qaytarilmaydi (qaytarishli yoki qaytarishsiz tanlanma yoki ba`zi kitoblarda takror tanlanma, notakror tanlanma deyiladi).

Tanlanma to'plamining eng asosiy xususiyati shundan iboratki vakolatli bo'lishi shart. Boshqacha aytganda tanlanma to'plamning hamma elementlari bosh to'plam elementlarining barcha xususiyatlarini o'zlarida saqlash kerak.

Tanlanmaning statistik taqsimoti.

Bosh to'plamdan tanlanma olganimizda x_1 qiymat (ob`ektiB) $n_1$ marta, $x_2$ qiymat $n_2$ marta va hokazo $x_k$ qiymat $n_k$ marta tanlangan ya`ni kuzatilgan bo'lsin.

Bu holda $x_1, x_2, ..., x_k$ kuzatilgan qiymatlarga **variantlar** deyiladi. Agar $x_1, x_2, ..., x_k$ lar o'sish tartibida joylashtirilsa, u holda unga **variasion qator** deyiladi.

Masalan biror kuzatuvlar natijasida quyidagi tanlanma hosil bo'lgan bo'lsin

6; 2; 8; 4; 2; 6; 2; 3; 3; 1- bular variantlar.

Bu tanlanmadagi elementlarni o'sish tartibida yozib chiqsak, quyidagi variasion qator hosil bo'lsin.

1; 2; 2; 2; 3; 3; 4; 6; 6; 8; 8;

$\sum_{i=1}^{k} n_i = n_1 + n_2 + ... + n_k = n$ tanlanmaning hajmi deyiladi.

$n_1, n_2, ..., n_k$ larga **tanlanmaning chastotalari** deyiladi yoki $x_1, x_2, ..., x_k$ **variantlarning takrorlanish soni yoki chastotasi** deyiladi.

$w_i = \frac{n_i}{n}$ $\left(i = \overline{1,k}\right)$ nisbatga **tanlanmaning nisbiy chastotalari** deyiladi.

$w_1 + w_2 + ... + w_k = 1$ bo'ladi.

Ta`rif. Tanlanmaning statistik taqsimoti deb variantlar bilan ularning mos chastotalari orasidagi moslikka yoki variantlar bilan ularning mos nisbiy chastotalari orasidagi moslikka aytiladi:

1 - jadval

x_i	x_1	x_2	.....	x_k
n_i	n_1	n_2	.....	n_k

2-jadval

x_i	x_1	x_2	.....	x_k
w_i	w_1	w_2	.....	w_k

yoki 1 - jadvalga tanlanma chastotasining taqsimoti, 2-jadvalga esa tanlanma nisbiy chastotasining taqsimoti deyiladi.

Misol. Tanlanmaning chastotalari taqsimoti berilgan bo'lsa, nisbiy chastotalar taqsimotini toping.

Yechish. $n = \sum n_i = 6 + 20 + 14 = 40$

x_i	2	6	13
n_i	6	20	14

x_i	2	6	12
w_i	0,15	0,5	0,35

$$w_1 = \frac{6}{40} = 0{,}15; \quad w_2 = \frac{20}{40} = 0{,}5; \quad w_3 = \frac{14}{40} = 0{,}35.$$

Tekshirish. $w_1 + w_2 + w_3 = 1$; $0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1$.

1-misol. Tanlab olingan **10** dona pilla uzunliklarini o'lchashda quyidagi qiymatlar (sm hisobida) hosil bo'lgan:

3,30 3,40 3,25 3,40 3,60 3,45 3,43 3,50 3,55

Tanlanmaning variatsion qatorini tuzing.

Yechish . Variantalarni (tanlanma elementlarini) ortib borishi tartibida yozib, tanlanmaning ushbu

3,25 3,30 3,35 3,40 3,40 3,40 3,43 3,45 3,50 3,55 variatsion qatorini hosil qilamiz.

2-misol. Ushbu

5, 3, 7, 10, 5, 5, 2, 10, 7, 2, 7, 7, 4, 2, 4

tanlanma berilgan. Tanlanmani variatsion qator ko'rinishida yozing va statistik taqsimotini tuzing.

Yechish. Tanlanma hajmi p=15. Variantalarni ortib borish tartibida yozib ushbu

2, 2, 2, 3, 4, 4, 5, 5 , 5, 7, 7, 7, 7, 10, 10

variatsion qatorni hosil qilamiz.

Berilgan tanlamada x_1=2 soni n_1=3 marta, x_2=3 soni n_2=1 marta, x_3=4 soni n_3 =2 marta, x_4=5 soni n_4=3 marta, x_5 =7 soni n_5 = 4 marta, x_6

$=10$ soni $n_6 = 2$ marta kuzatilgan. Tanlanmaning izlanayotgan statistik taqsimotini yozamiz:

x_i	2	3	4	5	7	10
n_i	3	1	2	3	4	2

Tekshirish.

$$\sum_i n_i = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_6 = 3 + 1 + 2 + 3 + 4 + 2 = 15$$

3-misol. Tanlanma chastotalarining statistik taqsimoti berilgan:

x_i	2	6	12
n_i	3	10	7

Nisbiy chastotalar statistik taqsimotini toping.

Yechish. Tanlanmaning hajmini topamiz:

$$n = \sum_i n_i = n_1 + n_2 + n_3 = 3 + 10 + 7 = 20$$

Nisbiy chastotalarni topamiz. Buning uchun chastotalarni tanlanma hajmiga bo'lamiz:

$$\omega_1 = \frac{3}{20} = 0{,}15; \omega_2 = \frac{10}{20} = 0{,}50; \omega_3 = \frac{7}{20} = 0{,}35$$

Izlanayotgan nisbiy chastotalar statistik taqsimotini yozamiz:

x_i	2	6	12
ω_i	0,15	0,5	0,35

Tekshirish:

$$\sum_i \omega_i = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0{,}15 + 0{,}5 + 0{,}35 = 1$$

Taqsimotning empirik funksiyasi.

Agar tanlanmada x_1 varianta n_1 marta, x_2 varianta n_2 marta, ..., x_k varianta n_k marta (bu yerda $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$) kuzatilgan bo'lsa, u holda

$$n_1, n_2, \ldots, n_k$$

sonlar *chastotalar*,

$$w_i = \frac{n_i}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, k)$$

sonlar esa *nisbiy chastotalar* deyiladi. Ravshanki, $w_1 + w_2 + \dots + w_k = 1$ bo‘ladi.

Tanlanmaning *statistik yoki empirik taqsimoti* deb variantalar va ularga mos chastotalar yoki nisbiy chastotalardan iborat ushbu jadvalga aytiladi:

$$\begin{pmatrix} x_i : x_1, x_2, \dots, x_k \\ n_i : n_1, n_2, \dots, n_k \end{pmatrix} \text{ yoki } \begin{pmatrix} x_i : x_1, x_2, \dots, x_k \\ w_i : w_1, w_2, \dots, w_k \end{pmatrix}.$$

1-misol. Tanlanma chastotlarining empirik taqsimoti berilgan:

$$\begin{matrix} x_i : -1 & 0 & 1 & 2 \\ n_i : \ 2 & 4 & 6 & 8 \end{matrix}$$

Nisbiy chastotalarni toping.

Yechish. $n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20$

$$w_1 = \frac{2}{20} = 0{,}1; \quad w_2 = \frac{4}{20} = 0{,}2; \quad w_3 = \frac{6}{20} = 0{,}3; \quad w_4 = \frac{8}{20} = 0{,}4.$$

$$\begin{matrix} x_i : -1 & 0 & 1 & 2 \\ w_i : 0{,}1 & 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}4 \end{matrix}$$

Shu bilan birga $0{,}1+0{,}2+0{,}3+0{,}4=1$.

Ta’rif. Tanlanmaning empirik taqsimot funksiyasi deb x ning har bir qiymati uchun quyidagicha aniqlangan $F_n^*(x)$ funksiyaga aytiladi:

$$F_n^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

bunda n_x – x qiymatdan kichik bo‘lgan variantalar soni; n – tanlanmaning hajmi.

Tanlanmaning empirik funksiyasidan farqli bosh to‘plam uchun aniqlangan ushbu $F(x)$ funksiya nazariy taqsimot funksiyasi deb ataladi. Empirik va nazariy taqsimot funksiyalar orasidagi farq shundaki, $F(x)$ nazariy taqsimot funksiya $\{X < x\}$ hodisa ehtimolligini, $F_n^*(x)$ empirik taqsimot funksiya esa shu hodisaning nisbiy chastotasini aniqlaydi. Bernulli teoremasidan kelib chiqadiki, $\{X < x\}$ hodisa nisbiy chastotasi, ya’ni $F_n^*(x)$ shu hodisaning $F(x)$ ehtimolligiga ehtimollik bo‘yicha yaqinlashadi. Boshqacha so‘z bilan aytganda $F_n^*(x)$ va $F(x)$ funksiyalalar bir-biridan kam farq qiladi. Shu yerning uzidanoq, bosh to‘plam taqsimotining nazariy funksiyasini taqribiy tasvirlashda tanlanma taqsimotining empirik funksiyasidan foydalanish maqsadga muvofiq bo'lishi kelib chiqadi.

Empirik taqsimot funksiyaning xossalari

1. $0 \le F_n^*(x) \le 1$;

2. $F_n^*(x)$ – kamaymaydigan funksiya;

3. Agar x_1 – eng kichik varianta va x_k – eng katta varianta bo'lsa, u holda quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi:

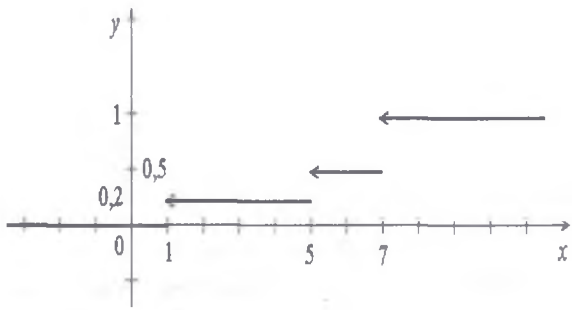
$$F_n^*(x) = 0, \text{ agar } x \le x_1 \text{ bo'lsa,}$$
$$F_n^*(x) = 1, \text{ agar } x > x_k \text{ bo'lsa.}$$

2-misol. Quyidagi empirik taqsimot berilgan:

x_i:	1	5	7
n_i:	12	18	30

Empirik taqsimot funksiyasini toping.

Yechish. $n = 12 + 18 + 30 = 60$ – tanlanmaning hajmi. Eng kichik varianta $x_1 = 1$, demak $x \le 1$ lar uchun $F_{60}^*(x) = 0$. $x \le 5$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_x variantalar soni bitta $x_1 = 1$ va bu varianta 12 marta kuzatilgan, demak $1 < x \le 5$ lar uchun $F_{60}^*(x) = \frac{12}{60} = 0,2$. $x \le 7$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi n_x variantalar soni ikkita: $x_1 = 1$ va $x_2 = 5$, ular 12+18=30 marta kuzatilgan, demak $5 < x \le 7$ lar uchun $F_{60}^*(x) = \frac{30}{60} = 0,5$. $x_3 = 7$ eng katta varianta bo'lgani uchun $x > 7$ larda $F_{60}^*(x) = 1$Demak,



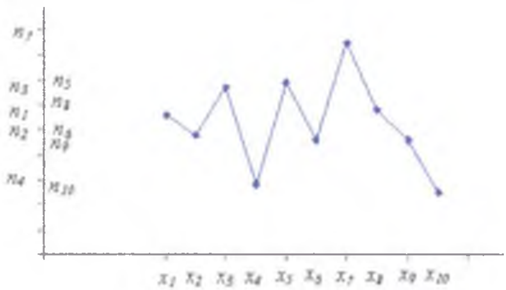
izlanayotgan empirik taqsimot funksiyasi va uning grafigi quyidagi ko‘rinishga ega:

$$F_{60}^{*}(x)=\begin{cases} 0, & x\le 1, \\ 0,2, & 1<x\le 5, \\ 0,5, & 5<x\le 7, \\ 1, & x>7. \end{cases}$$

Poligon va gistogramma

Tanlanmani grafik usulda tasvirlash uchun poligon va gistogrammalardan foydalaniladi.

Chastotalar poligoni deb $(x_i,n_i),(x_2,n_2),...,(x_k,n_k)$ nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi. Chastotalar poligonini qurish uchun absissalar o‘qida x_i variantalar qiymatlari va ordinatalari o‘qida ularga mos kelgan chastotalar n_i qiymatlari belgilanadi. Koordinatalari (x_i,n_i) juftliklardan iborat nuqtalar kesmalar bilan tutashtiriladi.

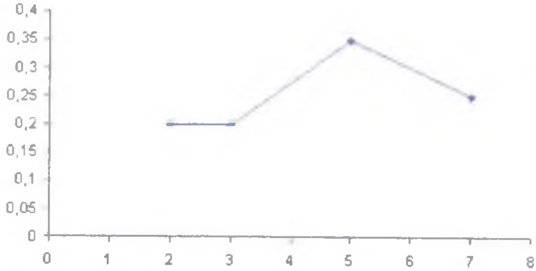


Nisbiy chastotalar poligoni deb koordinatalari $(x_1;w_1)$, $(x_2;w_2)$,..., $(x_k;w_k)$ bo‘lgan nuqtalarni tutashtiruvchi siniq chiziqqa aytiladi.

3-misol. Ushbu empirik taqsimotning nisbiy chastotalar poligonini yasang:

$$\begin{array}{lcccc} x_i: & 2 & 3 & 5 & 7 \\ w_i: & 0,2 & 0,2 & 0,35 & 0,25 \end{array}$$

Yechish. xOy koordinatalar tekisligida koordinatalari $(x_i;w_i)$ bo‘lgan M_i nuqtalarni belgilaymiz va ularni kesmalar bilan tutashtiramiz. Nisbiy chastotalar poligoni ushbu yo‘l bilan hosil qilingan siniq chiziqdan iborat.



Tanlanmani grafik usulda tasvirlash uchun tanlanmaning hajmi kam bo'lganda poligondan, agar hajm katta bo'lsa yoki kuzatilayotgan kattalik uzluksiz xarakterga ega bo'lsa gistogrammadan foydalaniladi.

Chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallardan, balandliklari esa $\frac{n_i}{h}$, $i = 1,2,...,k$ dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

Nisbiy chastotalar gistogrammasi deb, asoslari h uzunlikdagi intervallardan, balandliklari esa

$$\frac{w_i}{h} = \frac{n_i}{nh}, \quad i = 1,2,...,k$$

dan iborat bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarlardan tuzilgan pog'onasimon shaklga aytiladi.

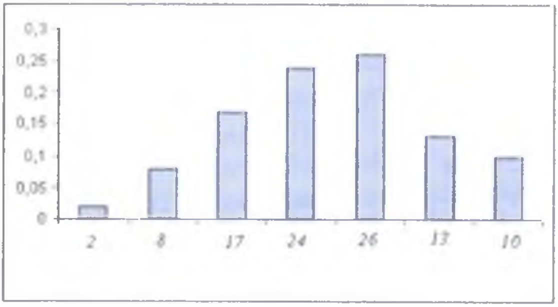
Misol. Ushbu tanlanmaning chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammasini yasang:

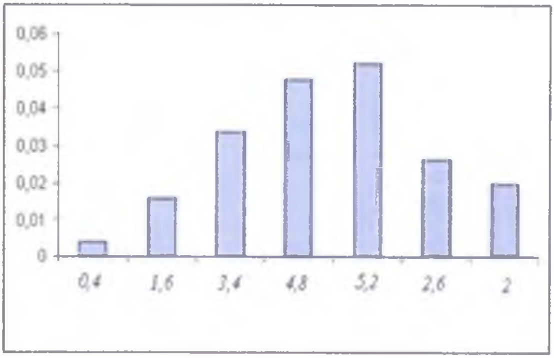
Δi	(-20;-15)	(-15;-10)	(-10;-5)	(-5;0)	(0;5)	(5;10)	(10;15)
n_i	2	8	17	24	26	13	10
w_i	0,02	0,08	0,17	0,24	0,26	0,13	0,1

Yechish. h=5

Δi	(-20;-15)	(-15;-10)	(-10;-5)	(-5;0)	(0;5)	(5;10)	(10;15)
$\frac{n_i}{h}$	0,4	1,6	3,4	4,8	5,2	2,6	2
$\frac{w_i}{h}$	0,004	0,016	0,034	0,048	0,052	0,026	0,020

Berilgan tanlanmalar asosida chastotalarning gistogrammasi va nisbiy chastotalarning gistogrammasini hosil qilamiz.





O‘z-ozini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1.Poligon, gistogrammalarga misollar keltiring.
2.O‘rta qiymatlar haqida ma’lumot bering.
3.Moda nima?
4.Mediana nima?
5.Tanlanma nima?
6.Variatsion qator deganda nima tushunasiz?
7.Quyida keltirilgan har bir tanlanmani variatsion qator ko‘rinishida yozing va chastotalar statistik taqsimotini tuzing:
1) 11, 15, 12, 0, 16, 19, 6, 11, 13, 16, 8, 9, 14, 5, 11, 3

8. Quyida berilgan chastotalar taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar statistik taqsimotini toping:

x_i	1	2	4	5	8
n_i	8	10	15	7	3

9. Matematik darsida guruh talabalarining har biridan tug`ilgan oyi raqamini ro'yxatga olish bo'yicha tajriba o'tkaziladi (so'rov masalan, ro'yxat bo'yicha o'tkaziladi). Hosil qilingan tanlanmani variatsion qator ko'rinishida yozing va chastotalar statistik taqsimotini toping.

10. Korxona ishchilaridan tavakkaliga 20 tasi tanlanib, ularning tarif razryadlari haqida quyidagi ma'lumotlar olingan.

1, 2, 4, 6, 3, 4, 4, 2, 6, 3, 5, 3, 3, 1, 5, 4, 2, 5, 4, 3.

Shu ma`lumotlarga asoslangan holda tanlanmaning statistik taqsimotini tuzing va chastotalar poligonini yasang

11. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

Interval nomeri	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig'indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	5–10	2	0.4		
2	10–15	6	1.2		
3	15–20	12	2.4		
4	20–25	10	2		

12. Quyida keltirilgan har bir tanlanmani variatsion qator ko'rinishida yozing va chastotalar statistik taqsimotini tuzing:

1) 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18

2) 2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1,1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 3

13. Quyida keltirilgan har bir tanlanmani variatsion qator ko'rinishida yozing va chastotalar statistik taqsimotini tuzing:

1) 17, 18, 16, 16, 17, 18, 19, 17, 15, 17, 19, 18, 16, 16, 18, 18

2) 2, 1, 3, 3, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 3, 1,1, 2, 3, 3, 4, 2, 2, 3, 3

14. Matematik darsida guruh talabalarining har biridan kirish testidan qancha ball olganligi to'g'risida surovnoma o'tkaziladi (so'rov masalan, ro'yxat bo'yicha o'tkaziladi). Hosil qilingan tanlanmani variatsion qator ko'rinishida yozing va chastotalar statistik taqsimotini toping.

15. Quyida berilgan chastotalar taqsimoti bo'yicha nisbiy chastotalar statistik taqsimotini toping:

x_i	1	2	4	5	8
n_i	12	16	19	9	4

16. Berilgan tanlanma taqsimoti bo'yicha chastotalar va nisbiy chastotalar gistogrammalarini chizing.

Interval nomeri	Qism interval	Intervaldagi variantalar chastotalari yig'indisi	Chastotalar zichligi	Nisbiy chastotalar	Nisbiy chastotalar zichligi
I	$x_i - x_{i+1}$	n_i	n_i/h	w_i	w_i/h
1	10–15	2	0.4		
2	15–20	6	1.2		
3	20–25	12	2.4		
4	25–30	10	2		

20-§.MATEMATIK MODELLAR

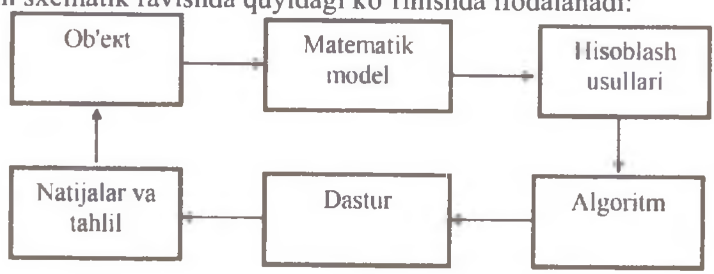
Tayanch so'z va iboralar: *Obyekt, matematik model, matematik model- lashtirish, kompyuter dasturi, algoritm, algoritmik til, blok-sxema, statik model, dinamik model, tarqoq model, absolyut xato, nisbiy xato, analitik usul, sonli usul, sonli-analitik usul, model adekvatligi, xosmas integral, qator, trantsendent tenglama*

Aniq yechimga ega har qanday masala bir necha usullar yordamida yechiladi. Agar yechilayotgan masala yetarlicha aniqlikda matematik munosabatlar orqali ifodalansa, bu masalani matematik modellashtirish usuli yordamida yechish mumkin. Masalani bu usulda yechish matematik modellashtirish jarayoni deb ataladi

20.1.Obyekt va matematik modellashtirish

Obyekt deganda har xil xossa va xususiyatlarga ega bo'lgan hamda biror so- ha jarayonini ifoda etuvchi, tabiatning biror elementi tushuniladi. Suv yoki gaz oqayotgan truba, paxta terish mashinasining shpendeli, elektr toki o'tkazuvchisi, qurilishda ishlatiladigan temir-beton plita va h.k. lar obyektga misol bo'la oladi. Turli xil soha mutaxassislarining asosiy vazifasi o'z obyektlarining xossa va xususiyatlarini o'rganish hamda shu asosda masalani yechishdan iborat. Obyektni o'rganish o'ta murakkab jarayon bo'lib, u bir necha xil usullar yordamida amalga oshiriladi.

Tekshirilayotgan obyekt xossa va xususiyatlarini matematik munosabatlar orqali ifodalash shu obyektning **matematik modeli** deb ataladi. Matematik model qurish va uni yechish jarayoni esa **matematik modellashtirish** deyiladi. Matemat- ik modellashtirish jarayoni sxematik ravishda quyidagi ko'rinishda ifodalanadi:



Har qanday obyektning matematik modeli qurilayotganda, dastlab bu obyekt xossalari mutaxassislar tomonidan har tomonlama o'rganib chiqiladi. Obyekt xos- salarini ifodalovchi o'zgaruvchi parametrlar o'rtasidagi bog'lanishlar aniqlanadi. Shundan keyin ayrim cheklanishlar qilinadi va har xil omil(faktor)larning masala yechimiga ta'sir darajasi aniqlanadi. Buning uchun har xil faraz(gipoteza)larga asoslanadi. Obyekt matematik modelini qurishda har xil farazlarga asoslanganligi sababli turli xil matematik modellar hosil bo'ladi. Obyektni matematik model- lashtirish natijasida asosan uch xil model hosil bo'ladi: **statik, dinamik** va **tarqoq modellar**.

Statik modellarda tekshirilayotgan obyekt xossalari vaqt o'zgarishiga bog'liq bo'lmagan holda o'rganiladi. Bu holda obyekt matematik modeli faqat fazoviy koordinatalar yordamida ifodalanadi.

Dinamik modelda esa aksincha, obyekt xossalari faqat vaqt o'zgarishiga bog'liq ravishda o'rganiladi.

Xossa va xususiyatlari vaqt hamda fazoviy koordinatalar o'zgarishiga bog'liq bo'lgan obyektlar matematik modeli tarqoq model ko'rinishida ifodalanadi.

20.2.Matematik modellashtirishning asosiy bosqichlari

Har qanday obyektni matematik modellashtirish bir necha bosqichlar asosida olib boriladi. Bu bosqichlar quyidagilardan iborat:

1. Obyekt xossa va xususiyatlarin o'rganish.
2. Obyekt matematik modelini qurish.
3. Matematik modelni yechish algoritmini tanlash yoki ishlab chiqish.
4. Tanlangan yoki ishlab chiqilgan algoritm asosida kompyuter model- ini(dasturini) tuzish.
5. Obyektning birlamchi boshlang'ich qiymatlarini dasturga kiritish orqali na- tijalar olish hamda ularni tahlil qilish.

Birinchi bosqichda qaralayotgan obyektning mexanik, biologik, geometrik, ekologik va boshqa xususiyatlari hamda ular orasidagi bog'lanishlar batafsil o'rganiladi. Obyekt xossa va xususiyatlariga har xil omillarning ta'sir darajasi aniqlanadi.

Obyektning matematik modelini tuzishda shu obyektning asosiy xossa va xususiyatlari matematik munosabatlar yordamida ifodalanadi. Boshqacha qilib ay- tganda obyektni o'rganish jarayonida unga ta'sir etuvchi asosiy omillar matematik apparat (tenglama, tengsizlik, mantiqiy ifoda yoki ularning sistemalari) orqali yozib chiqiladi. Bu bosqichda shuni e'tiborga olish kerakki, matematik ifodalar imkoni boricha sodda va shu bilan birga obyektning barcha asosiy xossalarini o‘z ichiga olgan bo‘lishi maqsadga muvofiq. Chunki matematik ifodalar qanchalik sodda bo‘lsa, ularni yechish algoritmi ham shunchalik sodda hamda ularni yechishda yo‘l quyiladigan xatoliklar shunchalik kam bo‘ladi. Algoritm - berilgan masalani yechishda bajarilishi lozim bo‘lgan amallarning qat'iy ketma-ketligidir. Har bir masalaning yechish algoritmi bir necha minglab, xatto millionlab amallarni o‘z ichiga oladi. Masalaning yechish algoritmini tanlash - bu mavjud yechish algoritmlari orasidan eng qulayini tanlashdir. Ayrim hollarda masalani yechish uchun yangi hisoblash algoritmini ishlab chiqishga ham to‘g‘ri keladi. Yechish algoritmi tanlanayotganda yoki yangisi ishlab chiqilayotganda uning natijaviyligiga, aniqlik darajasiga, ommaviyligiga hamda vaqt bo‘yicha tejam- korligiga e'tibor berish kerak bo‘ladi. Dastur tuzish bosqichida tanlangan yoki ishlab chiqilgan algoritm biror algo- ritm til orqali ifodalanadi. Masalani yechish uchun algoritmik til tanlanayotganda uning soddaligiga hamda imkoniyatlari darajasiga e'tibor berishga to‘g‘ri keladi. Ayrim hollarda masala xususiyatiga qarab ham algoritmik til tanlanadi. Bu bos- qichda tuzilgan dasturdagi sintaksis va algoritmik xatolar aniqlanib ular bartaraf etiladi. Matematik modellashtirishning bu bosqichi o‘ta murakkab bosqich hisoblanib dasturchidan juda ham ko‘p mehnat va extiyotkorlikni talab etadi.

Modellashtirishning oxirgi bosqichida, qaralayotgan obyektning boshlang‘ich xossa va xususiyatlarini ifodalovchi birlamchi sonli qiymatlar, tuzilgan dasturga kiritilib natijalar olinadi hamda u atroflicha tahlil qilinib, har xil xulosalar qilinadi.

20.3.Modellashtirishda analitik va tajriba (eksperiment) usullar

Obyektning xossa va xususiyatlariga bog‘liq ravishda modellashtirish turli xil usullarda olib boriladi. Keyingi paytlarda obyektlarni modellashtirishda asosan ikki xil **analitik** va **eksperiment** usullaridan keng foydalanib kelinmoqda.

Obyekt **analitik usulda** modellashtirilganda, shu obyektning asosiy xossa va xususiyatlari matematik munosabatlar (tenglama, tengsizlik, integral, differentsial, integrodifferentsial tenglamalar yoki ularning sistemalari) yordamida ifodalanadi, ya'ni obyekt xossa va xususiyatlari matematik formulalarga ko'chiriladi. Bu usulda matematik munosabatlar shu obyektning barcha asosiy xossalarini o'z ichiga olgan hamda sodda ko'rinishda bo'lish talab qilinadi. Modellashtirishning analitik usuli mutaxassisdan o'z sohasini chuqur bilish bilan birga hisoblash matematikasi va al- goritmik tilda dasturlash fanlarini ham yetarli darajada egallashni talab etadi.

Odatda injenerlik masalalarining matematik modeli algebraik tenglamalar, oddiy yoki xususiy hosilali differentsial tenglamalar, integrallar yoki ularning sistemalari ko'rinishida bo'lsa, iqtisodiy masalalarning matematik modeli esa aso- san tengsizlik, mantiqiy ifoda yoki ularning sistemalari ko'rinishida ifodalanadi.

Masalan, elastik to'sin egilishi haqidagi masalaning matematik modeli to'rtinchi tartibli oddiy differentsial tenglamaning berilgan chegaraviy shartlarni qanoatlantiruvchi yechimini topishga keltirilsa, iqtisodiy masala bo'lgan transport masalasining matematik modeli esa oddiy chiziqli algebraik tengsizliklar siste- masini qanoatlantiruvchi va maqsad funktsiyani ekstrimumga erishtiruvchi o'zgaruvchilar qiymatlarini topishga keltiriladi.

Eksperiment usulda qurilgan model obyektlar ustida o'tkazilgan tajribalar, ya'ni kuzatishlar orqali olingan natijalar asosida qurilgan modeldir. Obyektning ek- speriment modelini qurish o'ta murakkab jarayon hisoblanadi. Chunki ayrim obyektlarning eksperiment modelini qurish uchun uzoq vaqt oralig'ida, har xil sha- roitlarda bir qancha kuzatishlar o'tkazishga to'g'ri keladi. Bu holda kuzatish na- tijalariga bir qator obyektiv va subyektiv sabablar o'z ta'sirini o'tkazadi. Shu saba- bli keyingi paytlarda matematik modellashtirishda analitik usuldan ko'proq foyda- lanib kelinmoqda.

Ma'lumki, biror obyektni matematik modellashtirish deganda shu obyekt xossa va xususiyatlarini matematik munosabatlar yoki mantiqiy ifodalar orqali ifodalash tushuniladi. Odatda modellashtirishning bu usuli analitik usul deb ata- ladi. Matematik munosabatlar o'z ichiga tenglama, integral, tengsizlik, oddiy va xususiy hosilali differentsial tenglama yoki ularning sistemalarini o'z ichiga oladi. Obyektning matematik modelida matematik munosabatlarning qaysi biri qatnash- ishi modellashtirilayotgan obyekt xossalariga bog'liq bo'ladi. Masalan, elastik ma- terialdan tayyorlangan mayatnik tebranishi masalasini qarasak, uning matematik modeli oddiy differentsial tenglama va unga qo'yilgan boshlang'ich shart orqali ifodalansa, o'zgaruvchan kesimli elastik sterjen tebranishi masalasining matematik modeli esa o'zgaruvchan koeffitsiyentli, xususiy hosilali, to'rtinchi tartibli differentsial tenglama va unga qo'yilgan boshlang'ich hamda chegaraviy shartlar yordamida ifodalanadi.

Matematik modelni yechish usullari

Yuqorida ta'kidlanganidek, obyektni matematik modellashtirish har xil tenglama, tengsizlik yoki ularning sistemalarini yechishga keltiriladi. Umuman ol- ganda modelni yechish usullarini uch turga ajratish mumkin: **analitik, sonli** va **sonli-analitik usullar.**

Analitik usul - masala yechimini aniq matematik formulalar bilan(analitik ko'rinishda) ifodalashdir. Bu usul aniq usul hisoblanib, unda yechim masalaning berilgan boshlang'ich qiymatlarni o'z ichiga olgan matematik formulalar ko'rinishida ifodalanadi. Odatda analitik usuldan oddiy matematik model bilan ifodalanadigan masalalarni yechishda foydalaniladi. Chunki murakkab masalalarn- ing yechimini har doim ham aniq formulalar ko'rinishida ifodalash imkoni bo'lavermaydi. Analitik usulga misol sifatida chiziqli algebraik tenglamalar siste- masini Kramer qoidasi, Gauss yoki teskari matritsa kabi yechish usullarini keltirish mumkin.

Sonli usul - taqribiy yechish usuli hisoblanib, oliy matematika fanining hisoblash matematikasi bo'limida o'rganiladi. Bu usulga ko'ra matematik modelda berilgan formulalar, taqribiy ravishda o'ziga yaqin (ekvivalent) hamda sodda ko'rinishga ega bo'lgan formulalar bilan almashtiriladi. Masalan funktsiya hosilasi, chekli ayirmaga; funktsiyaning aniq integrali chekli yig'indiga, cheksiz qator esa chekli yig'indiga almashtiriladi. Sodda ko'rinishga keltirilgan model ShK yordamida yechiladi va masala yechimi grafik yoki sonlar jadvali ko'rinishida ifodalanadi. Sonli usullarga misol sifatida trantsendent tenglamalarni oraliqni teng ikkiga bo'lish, urunmalar, vatarlar yoki differentsial tenglamalarni Eyler, Runge- Kutta, chekli ayirmalar yordamida yechish usullarini keltirish mumkin.

Sonli usullardan biri **iteratsiya usuli**dir. Taqribiy yechish usuli iteratsiya usuli deyiladi, agar noma'lumlar ustida chekli takrorlanuvchi amallar bajarilib, bu amallardan keyin noma'lumlar qiymatlari aniqlashtirilsa (noma'lumlarning taqribiy qiymatlari uning aniq qiymatlariga yaqinlashsa), shu bilan birga keyingi takrorlanuvchi amallarni bajarishda noma'lumlarning aniqlashtirilgan qiymatidan foydalanilsa.

Sonli-analitik usul - bu yuqorida aytilgan ikki usulning kombinatsiyasidan tashkil topgan usuldir. Bu usulda masala yechimi asosan xosmas integral, cheksiz qator, maxsus funktsiyalar yoki ularning kombinatsiyalari ko'rinishida ifodalanadi. Bu usulda qaralayotgan masala yechimi analitik ko'rinishda yozib quyiladi, lekin sonli natijalar ba'zi bir taqribiy hisoblashlar yordamida hosil qilinadi. Sonli- analitik usullarga misol sifatida Bubnov-Galyorkin yoki Fur'e usullarini keltirishimiz mumkin.Ma'lumki, obyekt matematik modeli matematik munosabatlar (tenglama, tengsizlik yoki ularning sistemalari) yordamida ifodalanadi. Bu munosabatlardan biri - chiziqli algebraik tenglamalar sistemasidir. Bizga *n* ta noma'lumli *n* ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \qquad (1)$$

berilgan bo'lsin. Bu yerda a , b lar berilgan sonlar, X lar noma'lumlar $(i,j = 1,2,\ldots,n)$. Agar (2.1) sistemaga mos keluvchi asosiy determenant A noldan farqli, ya'ni bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

$$A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Chiziqli algebraik tenglamalar sistemasini yechishning bir necha usullari mavjud bo'lib, ular Kramer qoidasi, Gauss, teskari matritsa, iteratsiya hamda Jordan usullaridir.

O'z-o'zini tekshirish uchun savol va topshiriqlar

1. Obyektga ta'rif bering.
2. Matematik model deb nimaga aytiladi?
3. Matematik modellashtirish jarayoni deb nimaga aytiladi?
4. Matematik munosabat deganda nimani tushunasiz?
5. Matematik modellashtirish qanday bosqichlardan iborat?
6. Algoritmga ta'rif bering.
7. Algoritmik til deganda nimani tushinasiz?
8. Dastur va dasturlash nima?
9. Masala algoritmini dasturlash uchun algoritmik til qanday tanlanadi?
10. Model turlari.

GLOSSARIY

Terminlar	Atamaning o'zbekcha ma'nosi	Atamaning rus tilidagi ma'nosi	Atamaning ingliz tilidagi ma'nosi
Absissa Абцисса Abscissa	nuqtaning dekart koordinatalaridan birinchisi.	первая из координат (декартовых или аффинных) точки. Абсцисса обычно обозначается буквой x латинского алфавита.	The horizontal value ("x") in a pair of coordinates
Aylana Окружность Circle	Markazdan teng uzoqlikda yotuvchi tekislik nuqtalari to'plami	замкнутая кривая, все точки которой нахо-дятся на одинаковом расстоянии от некото-рой точки окружности, лежащей в плоскости этой кривой и называемой ее центром.	A circle is the set of points in a plane that are all a fixed distance from a given point.
Aksioma Аксиома Axiom	isbotsiz qabul qilinadigan jumla.	предложение, прини-маемое без доказатель-ства, рассматриваемое как исходное при построении той или иной математической теории.	An axiom is a statement that is assumed to be true without proof. Axiom is a synonym for postulate.
Algebra Алгебра Algebra	turli miqdorlar ustida amallarni hamda ana shu amallar bilan bog'liq bo'lgan tenglamalarni yechishni	раздел объектом изу-чения которой в ос-новном являются и уравнения и неравен-ства первой и второй степени, и частные	It is a study of properties of operations carried out on sets on numbers.

	o'rganuvchi matemetika bo'limi	случаи уравнений выс-ших степеней	
Algebraik to'ldiruvchi Алгебраическое дополнение cofactor	ishora aniqligidagi minor	минор a_{ij} элемента M_{ij} взятый со знаком $(-1)^{i+j}$	A_{ij} is a cofactor where $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
Algoritm Алгоритм Algorithm	berilgan ma'lumotlardan izlanayotgan natijaga o'tish jarayonini ko'rsatib beruvchi aniq qoida.	точное предписание о выполнении в опреде-ленном порядке неко-торой системы опера-ций, позволяющее ре-шать совокупность за-дач определенного класса.	It is a sequence of instuctions that tell how to accomplish a task.
Analiz Анализ Analysis	noma'lumdan ma'lumni, ma'lumdan ma'lum tahlil asosida isbotlovchi usul.	метод (способ) рас-суждения или доказа-тельства, при котором мы отправляемся от неизвестного к извест-ному, от искомого к данному.	Analysis is the branch of mathematics that studies limits and convergence; calculus is a part of analysis.
Analitik geometriya Аналитическая геометрия Analytic geometry	geometrik obrazlarni algebra vositasidagi koordinatalar usulida asoslovchi matematematika bo'limi.	часть математики, в которой исследуются геометрические обра-зы средствами алгебры на основе метода координат.	Analytic geometry is the branch of mathematics that uses algebra to help in the study of geometry.
Applikat Аппликата Applicate	uch o'lchovli fazodagi nuqtaning dekart koordinatalaridan uchinchisi	одна из декартовых координат точки в пространстве, третья по счету после абсцис-сы и ординаты и обозначаемая обычно буквой z.	Third dimension of coordinate system ("z")

Asimptota Асимптота Asymptote	shunday to'g'ri chiziqki,egri chiziq nuqtasi cheksizga intilganda shu to'g'ri chiziqqa etarlicha yaqinlashadi.	прямая, к которой приближается как угодно близко точка кривой при удалении в бесконечность.	An asymptote is a straight line that is a close approximation to a particular curve as the curve goes off to infinity in one direction.
Argument Аргумент Argument	erkli o'zgaruvchi	независимая переменная	The argument of a function is the inde-pendent variable that is put into the function.
Birlik matritsa Единичная матрица Identity Matrix	Barcha elementlari birga teng diagonal matritsa	квадратная матрица, в которой по главной диагонали стоят еди-ницы, а на всех ос-тальных местах нули.	An identity matrix is a square matrix with ones along the diagonal and zeros everywhere else.
Birlik vektor Единичный вектор Unit Vector	Uzunligi birga teng vektor	вектор, длина которо-го равна единице.	A unit vector is a vector of length 1.
Giperbola Гипербола Hyperbola	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan aniqlanuvchi egri chiziq.	Гипербола есть гео-метрическое место то-чек M плоскости, разность расстояний которых (по абсолют-ному значению) до двух данных точек постоянна.	A hyperbola is the set of all points in a plane such that the difference between the distances to two fixed points is a constant.
Grafik График Graph	funksiyani tasvirlash usullaridan biri.	геометрическое место точек плоскости, де-картовы прямоуголь-ные координаты кото-	A graph is a picture that represents data in an organized manner

		рых удовлетворяют соотношению	
Davriy kasr Переодический дробь Repeater	cheksiz o‘nli kasr.	бесконечная десятич-ная дробь, у которой, начиная с некоторого места, бесконечно пов-торяется одна и та же группа цифр.	Repeating decimal in infinity times
Darajali funksiya Степенная функция Power function	$y = x^n$ ko‘rinishidagi funksiya.	функция вида y= x^{α}, где α — постоянное.	It is the function as $y = x^n$
Diagonal martitsa Диагональная матрица Diagonal matrix	Bosh diagonalda joylashgan elementlaridan boshqa elementlari nolga teng matritsa	матрица, являющаяся одновременно и нижне- и верхне-треугольной.	A square matrix in which all entries off the main diagonal are zero is called a diagonal matrix
Determinant Определитель Determinant	кvadrat matritsaga ma’lum qoidalar bo‘yicha mos qo‘yilgan son.	(детерминант) n-го порядка – алгебраи-ческая сумма n! Слага-емых, составленных из элементов квадратной матрицы (таблицы) по закону	It is a function which as an input accepts nxn matrix and output is a real or complex number that is called the determinant of the input matrix
Ellips Еллипс Ellipse	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ tenglama bilan aniqlanuvchi yopiq egri chiziq.	геометрическое место точек плоскости α, для каждой из которых сумма расстояний до двух данных точек F_1 и F_2лежащих в α, есть величина постоянная, большая, чем расстоя-ние между F_1 и F_2, и равная данному числу 2a (или отрезку 2a).	A closed, oval figure that is the set of points in a plane, the sum of whose distances from two fixed points is constant.

Ellipsning katta yarim o'qi Большая полуось еллипса Semi-major axis of the ellipse	uning fokuslari yotuvchi simmetriya o'qi	Данное число (отрезок) 2a называет-ся большой осью	It is one half of the major axis, and thus runs from the center, through a focus, and to the perimeter.
e soni Число e The number e	$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ kabi aniqlanuvchi son	одна из важнейших постоянных матема-тического анализа. $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.	The number is equal $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
Evklid fazosi Евклидова пространства Euclidean space	norma aniqlangan vektor (chiziqli) fazo.	пространство, свой-ство которого описы-вается аксиомами аб-солютной геометрии и постулатом (аксио-мой) Евклида о параллельных прямых.	In terms of a linear combination of orthogonal basis vectors
Ikkinchi tartibli determinant Определитель второго пордка second order determinants	$a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}$ sonlardan tuzilgan $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ ifoda	Число соответ-ствующий выраже-нию $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$	The value of a second order matrix $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$
Isbot Доказательства Proof	tasdiqning to'g'riligi aniqlanadigan mushohadalar zanjiri.	рассуждение, в ходе которого устанавли-вается истинность или ложность какого-либо утверждения (сужде-ния, высказывания, теоремы).	A proof is a sequence of statements that show a particular theorem to be true.
Kanonik tenglama Каноническая уравнения The kanonical equation	Ikkinchi tartibli chiziq yoki tekislikning sodda tenglamasi	кривой 2-го порядка или поверхности 2-го порядка — простей-шее уравнение этой кривой или поверх-	A canonical form specifies a unique representation for every object, while a normal form simply specifies its form,

		ности в прямоуголь-ных декартовых координатах.	without the requirement of uniqueness.
Kolleniar vektorlar Коллениарные векторы Colinear vectors	bir to'g'ri chiziqqa parallel bo'lgan vektorlar	векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых.	Vector parallel to one line or lying on one line are called collinear vectors
Komplanar vektorlar Компрланарные вектoры Coplanar vectors	bir tekislikda yoki parallel tekisliklarda yotuvchi vektorlar	векторы, лежащие в одной или в парал-лельных плоскостях.	Vectors parallel to the same plane, or lie on the same plane are called coplanar vectors
Kvadrat matritsa Квадратная матрица Square Matrix	Satrlari va ustunlari soni teng matritsa	Это квадратная табли-ца, образованная из некоторого множества и состоящая из строк и столбцов.	A square matrix has equal number of rows and columns.
Kvadratik forma Квадратичная форма The quadtatic form	ikkinchi darajali bir jinsli ko'phad.	Скалярная функция векторного аргумента, которая представляет собой однородный многочлен второго порядка	A quadratic form is a homogeneous polynomial of degree two in a number of variables
Limit Придел limit	agar o'zgaruvchi miqdor o'zining o'zgarish jarayonida a soniga cheksiz yaqinlashsa,u holda a soni x o'zgaruvchining limitidir.	некоторая переменная величина в рассматри-ваемом процессе ее изменения неограни-ченно приближается к определенному пос-тоянному значению.	The limit of a function is the value that the dependent variable approaches as the independent variable approaches some fixed value.
$m \times n$ o'lchamli matritsa Матрица размера $m \times n$	m ta satr va n ta satrdan iborat jadval	Это прямоугольная таблица, образованная из некоторого мно-	A matrix is a table of numbers arranged in m

Size of matrix (m,n)		жества и состоящая из m строк и n столбцов.	rows and n columns.
Matritsaning rangi ранг матрицы rank of a matrix	Matritsa noldan farqli minorlarining yuqori tartibi	наивысший порядок минора этой матрицы (таблицы), отличного от нуля	The rank of a matrix A is the dimension of the vector space generated (or spanned) by its columns(or rows).
Minor Минор Minor	element turgan satr va ustunni o'chirishdan hosil bo'lgan determinant.	определитель k-го порядка, составленный из элементов, стоящих на пересечении любых k строк и k столбцов определителя D (или матрицы A).	The minor of an element in a matrix is the determinant of the matrix formed by crossing out the row and column containing that element.
Nol matritsa Нулевая матрица Zero matrix	Elementlari nollardan iborat matritsa	матрица, состоящая сплошь из нулей.	It is a matrix that all entries are zeros
Normal нормал Normal	chiziqning berilgan nuqtasigan shu nuqtagagi urinmaga perpendikular o'tuvchi to'g'ri chiziq.	к кривой (к поверх-ности) в данной ее точке — прямая, про-ходящая через эту точку и перпендику-лярная к касательной прямой (касательной плоскости) в этой же точке кривой (поверх-ности).	A line is normal to a curve if it is perpendicular to a tangent line to that curve at the point where it intersects the curve.
n - tartibli determinant Определитель n – го порядка n orderdeterminants	n - tartibli determinant har biri determinantning har bir satri va har bir ustunidan faqat bittadan olingan n ta element-larning ko'paytmasidan tuzilgan $n!$ ta	определитель n-го порядка — алгебраи-ческая сумма n! слагаемых, составлен-ных из элементов квадратной матрицы (таблицы)	$\det(A)=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj}$ (cofactor expansion along the jth column) $\det(A)=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in}$

	qo'shiluv-chilar yig'indisidan ibo-rat son; bunda ko'payt-malar bir-biridan ele-mentlarining tarkibi bi-lan farq qiladi va har bir ko'paytma oldiga inver-siya tushunchasi asosida plyus yoki minus ishora qo'yiladi; yuqori tartibli determinantlar tartibini pasaytirib, ya'ni quyi (ikkinchi va uchinchi) tartibli determinantlarga keltirib, hisoblanadi	по следую-щему закону: каждое слагаемое есть произ-ведение n элементов, взятых по одному и только по одному из каждой строки и каждого столбца матрицы.	(cofactor expansion along the *i*th row) Where $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$
n faktorial n факториал Faktorial of n	1 dan n gacha natural sonlar ko'paytmasi	произведение всех натуральных чисел от 1 до данного натураль-ного числа n.	The factorial of a positive integer is the product of all the integers from 1 up to the n integer.
Parabola Парабола Parabola	$y^2 = 2px$ tenglama bilan aniqlanuvchi egri chiziq.	<u>геометрическое место точек</u> плоскости, рав-ноудаленных от дан-ной точки F (фокуса) и данной прямой ℓ (<u>директрисы</u>). лежа-щих в той же плоскости.	A parabola is the set of all points in a plane that are equally distant from a fixed point (called the *focus*) and a fixed line (called the *directrix*).
Sonli ketma-ketlik Числовая последовательно сть The numerial sequence	$x_1, x_2, x_3, \ldots x_n \ldots$ sonlar to'plami	<u>последовательност ь</u>, члены которой являются числами.	It is a set of ordered values of a function, whose domain consists of the set of all natural numbers in ascending order of the numbers.

Soha область area	ham ochiq ham bog'lamli to'plam	связное открытое мно-жество метрического пространства	The area of a two-dimensional figure measures how much of a plane it fills up
Tekislik Плоскость Plane	$Ax + By + Cz + D = 0$ tenglama bilan aniqlangan sirt.	поверхность заданный уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$	A plane is a flat sur-face (like a tabletop) that stretches off to infinity.
Tekislikning normal vektori Нормальный вектор плоскости Normal vector of the Plane	Tekislikka perpendikular vektor	Вектор перпенди-кулярный к плоскости	Orthogonal vector of the plane
Teskari matritsa Обратная матрица Inverse Matrix	Kvadrat matritsaga ko'paytirilganda birlik matritsani beruvchi matritsa	к квадратной матрице А-такая матрица A^{-1}, что произведение AA^{-1} равно единичной мат-рице	The inverse of a square matrix A is the matrix that, when multiplied by A, gives the identity matrix I
Teorema Теорема Theorem	isbot talab qiluvchi mulohaza	математическое пред-ложение, истинность которого устанавлива-ется или опровергает-ся при помощи доказательства.	A theorem is a statement that has been proved.
To'g'ri chiziqning yo'naltiruvchi Направляюший вектор прямой vektori Direktoin vector	To'g'ri chiziqqa parallel vektor	Вектор параллельный линию	It is the vector that is parallel the given line
To'plam Множество Sets	Tayin xossaga ega bo'lgan ixtiyoriy tabiatli ob'ektlar majmuasi	совокупность, объеди-нение некоторых объ-ектов произвольной природы	A set is a well-defined group of objects.

Uchinchi tartibli determinant Определитель третьего пордка Third order determinants	$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$ $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$ ifoda	Число определяющий по выражению $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$ $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$	Third order determinant finds from this formula: $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-$ $-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$
Vektor Вектор Vector	Yo‘naligan kesma	направленный отрезок прямой, или отрезок	A vector is a quantity that has both mag-nitude and direction.
Qutb koordinatalari Полярные координаты Polar Coordinates	Qutb radiusi va qutb burchagidan iborat koordinatalar	два числа, определяю-щие положение этой точки относительно некоторой фиксиро-ванной точки O, на-зываемой полюсом, и некоторого фиксиро-ванного луча Ox, на-зываемого полярной осью	Any point in a plane can be identified by its distance from the origin (*r*) and its angle of inclination (u).

FOYDALANILGAN ASOSIY ADABIYOTLAR

1. Жўраев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. 1-том. Т.: «Ўзбекистон». 1995.

2. Жўраев Т. ва бошқалар. Олий математика асослари. 2-том. Т.: «Ўзбекистон». 1999.

3. Fayziboyev va boshqalar. Oliy matematikadan misollar. Toshkent. «O‘zbekiston». 1999.

4. A.Rasulov. Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika. Toshkent. “Turon-Bo‘ston”. 2012 y.

5. Farmonov SH. va boshq. “Ehtimolliklar nazariyasi va matematik statistika”. T.: “Turon-Bo‘ston”, 2012y.

6. Баврин И.И., Матросов В.Л. “Общий курс высшей математики”. М.: “Просвещение”. 1995. 464 стр.

7. Тожиев Ш.И. Олий математика асосларидан масалалар ечиш. Т.: «Ўзбекистон». 2002 й.

8. Соатов Ё.У. Олий математика асослари.IIIтом Т.: «Ўзбекистон». 1996 й.

9. Susanna S. Epp. Discrete mathematics with applications, Fourth Edition.Cengage Learning. Boston, USA–2011. (ISBN 978-0-495-39132-6)

10. Jane S Paterson Heriot-Watt (University Dorothy) A Watson Balerno (High School) SQA Advanced Higher Mathematics. Unit 1. This edition published in 2009 by Heriot-Watt University SCHOLAR. Copyright © 2009 Heriot-Watt University.(ISBN 978-1-906686-03-1)

11. Valentin Deaconu, Don Pfaff. A bridge course to higher mathematics.Current address : Department of Mathematics, University of Nevada, Reno NV 89557-0084, USA. E-mail address : vdeaconu@unr.edu

Qo‘shimcha adabiyotlar

12. Hamedova N.A. va bosh. ”Matematika”. OO‘Yu uchun darslik,T.: Turon iqbol, 2007y.

13. Hamedova N.A., Sadikova A.V., Laktaeva I.SH. ”Matematika” – Gumanitar yo‘nalishlar talabalari uchun o‘quv qo‘llanma. T.: ”Jahon-Print” 2007y.

14. Jumayev E. va boshq. ”Oliy matematika”,T.: 2008y.

15. Azlarov T.A., Mansurov X. “Matematik analiz” 1-qism. T.: “O‘qituvchi”, 1994y.

16. Шипачев В.С., "Высшая математика". М.: "Высшая школа". 1998г. 479 стр.

17. Normonov A. "Analitik geometriya". T.: Universitet, 2008 y.

18. Baxvalov S.B. va boshq. "Analitik geometriyadan mashqlar to'plami". T.: Universitet, 2006 y.

19. Oppoqov Y. va boshq. "Oddiy differensial tenglamalardan misol va masalalar to'plami". T. : 2009y.

20. Rasulov A.S., Raimova G.M., Sarimsakova X.K. Ehtimollar nazariyasi va matematik statistika. T.: 2006. 272 b.

21. Fayzullayeva S.F. Ehtimollar nazariyasidan masalalar to'plami.T.: 2006.1 F2 b.

22. Гмурман В.Э. Теория вероятностей и математическая статистика

М.: Высшая школа, 1999 г.-474с.

23. Brandenberger B.M. (editor in chief) . Mathematics, Vol. 1–4. Macmillan reference. USA–2002 (ISBN 0028655621)

24. A.Hausman, H.Kahane, P.Tidman. Logic and Philosophy:A Modern Introduction,Eleventh Edition.Cengage Learning. Boston, USA -2010. (ISBN 978-0-495-60158-6)

25. To'rayev H.T., Azizov I., Otaqulov S. Kombinatorika va graflar nazariyasi: O'quv qo'llanma. – Toshkent: Ilm-Ziyo, 2009.

26. Пиотровский Р.Г. и др. Математическая лингвистика. Учеб.пособие для пед.ин-тов. – Москва. Высш.школа, 1997.

27. Грес П.В. Математика для гуманитариев. Учебное пособие. Москва. Университетская книга, Логос, 2007.

MUNDARIJA

[18] Sh. R. Xurramov. Oliy matematika. Misol va masalalar, nazorat topshiriqlari. 1- qism. Toshkent. "Fan va texnologiya". 2015.27-30 betlar.

[19] Sh. R. Xurramov. Oliy matematika. Misol va masalalar, nazorat topshiriqlari. 1- qism. Toshkent. "Fan va texnologiya", 2015.27-30 betlar.

ОГЛАВНЕНИЕ

CONTENTS

ISBN 978-9943-7025-1-6

9 789943 702516