А. В. ПОГОРЕЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ

ЎРТА МАКТАБНИНГ
6—10- СИНФЛАРИ УЧУН
ЎҚУВ ҚЎЛЛАНМА

СССР Маориф министрлиги рухсат этган

РУСЧА ТЎРТИНЧИ НАШРИГА МУВОФИҚ
БЕШИНЧИ НАШРИ

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1988

ФА МАТЕМАТИКА БУЛИМИ БЮРОСИ,
ПФА ПРЕЗИДИУМИ МАЪҚУЛЛАГАН

Махсус муҳаррир — профессор *М. А. Собиров*

ДАРСЛИКДАН ФОЙДАЛАНГАНЛИК ҲАҚИДА МАЪЛУМОТ

№	Ўқувчининг исми ва фамилияси	Ўқув йили	Дарсликнинг ҳолати	
			Йил бошида	Йил охирида
1.				
2.				
3.				
4.				

П $\frac{4306020402-123}{353(04)-87}$ Бланк заказ — 88

6- синф

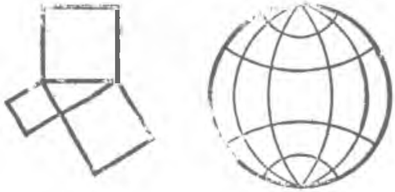
Планиметрия

1- §. ЭНГ СОДДА ГЕОМЕТРИК ФИГУРАЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Геометрия — геометрик фигураларнинг хоссалари ҳақидаги фандир. «Геометрия» сўзи грекча бўлиб, ўзбекча «ер ўлчаш» деган маънони билдиради. Бундай аталиши геометриянинг ер устида ўлчаш ишлари билан боғлиқлигидан дарак беради.

Геометрик фигураларга мисоллар — учбурчак, квадрат, айлана (1- расм).

1-расм.



2-расм.

Геометрик фигуралар жуда хилма-хилдир. Ҳар қандай геометрик фигуранинг бўлаги ҳам геометрик фигурадир. Бир нечта геометрик фигуранинг бирлашмаси яна геометрик фигурадир. 2- расмда чапдаги фигура учбурчак ва учта квадратдан иборат, ўнгдаги фигура эса айлана ва айлана бўлакларидан иборат. Ҳар қандай геометрик фигурани нуқталардан тузилган деб тасаввур қиламиз.

Мактабда ўрганиладиган геометрия математикадан «Негизлар» деган ажойиб қўлланма яратган қадимги грек олими Евклид (эрамизгача III аср) номи билан Евклид геометрияси деб аталади. Узоқ вақтлар давомида геометрия шу китоб бўйича ўқитилган.

Биз геометрияни ўрганишни планиметриядан бошлаймиз. *Планиметрия* — бу геометриянинг бир бўлими, унда текисликдаги фигуралар ўрганилади.

НУҚТА ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

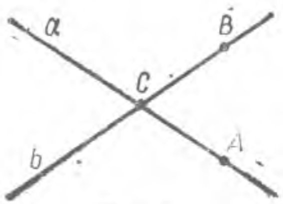
Нуқта ва *тўғри чизиқ* текисликдаги асосий геометрик фигуралар ҳисобланади. Чизмага нуқта ва тўғри чизиқлар ўткир қилиб чиқарилган қалам билан чизилади. Тўғри чизиқларни ясаш учун чизғичлардан фойдаланилади. Нуқталарни латин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, D, . . . билан белгилаш қабул қилинган. Тўғри чизиқлар латин алфавитининг кичик ҳарфлари a, b, c, d,... билан белгиланади.

3-расм.

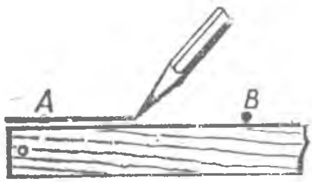
3-расмда A нуқтани ва a тўғри чизиқни кўриб турибсиз.

НУҚТА ВА ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ТЕГИШЛИЛИГИНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

4-расмга қаранг. Сиз a, b тўғри чизиқларни ва A, B, C нуқталарни кўриб турибсиз, A ва C нуқталар a тўғри чизиқда *ётибди*. Яна A ва C нуқталар a тўғри чизиққа *тегишли* ёки a тўғри чизиқ A ва C нуқталар орқали *ўтади* дейиш ҳам мумкин.



4-расм.



5-расм.

B нуқта b тўғри чизиқда ётибди. У a тўғри чизиқда ётмаяпти. C нуқта a тўғри чизиқда ҳам, b тўғри чизиқда ҳам ётибди. a ва b тўғри чизиқлар C нуқтада *кесишади*. C нуқта a ва b тўғри чизиқларнинг *кесишиш* нуқтасидир.

5-расмда сиз берилган икки A ва B нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ чизғич ёрдамида қандай ясалишини кўриб турибсиз.

Қуйидаги иккита хоссани текисликда нуқталар ва тўғри чизиқлар тегишлилигининг асосий хоссалари деб атаймиз:

I_1. ***Ҳар қандай тўғри чизиқни олмайлик, шу тўғри чизиққа тегишли бўлган нуқталар ҳам, тегишли бўлмаган нуқталар ҳам мавжуд.***

I_2. ***Ҳар қандай икки нуқтадан тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.***

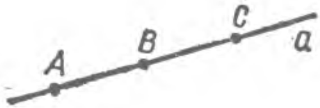
Тўғри чизиқни унда ётган иккита ҳарф билан белгилаш мумкин. Масалан, 4-расмда a тўғри чизиқни AC билан, b тўғри чизиқни BC билан белгилаш мумкин.

Иккита турли тўғри чизиқ биттадан ортиқ кесишиш нуқтасига эга бўла оладими? Бўла олмайди. Агар улар иккита кесишиш нуқтасига эга бўлишганда эди, у ҳолда бу нуқталардан иккита турли тўғри чизиқ ўтар эди. Бу эса мумкин эмас, чунки иккита нуқтадан фақат битта тўғри чизиқ ўтади. Шундай қилиб, қуйидаги хосса ҳосил қилинади:

1.1. ***Иккита турли тўғри чизиқ ё кесишмайди, ёки фақат битта нуқтада кесишади.***

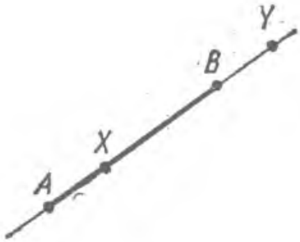
НУҚТАЛАРНИНГ ТЎҒРИ ЧИЗИҚДА ВА ТЕКИСЛИКДА ЎЗАРО ЖОЙЛАШУВИНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

6-расмга қаранг. Сиз a тўғри чизиқни ва шу тўғри чизиқдаги A, B, C нуқталарни кўриб турибсиз. B нуқта A ва C нуқталар орасида ётибди, у A ва C нуқталарни бир-биридан *ажратиб* турибди. Шунингдек, A ва C нуқталар B нуқтанинг *турли томонида ётибди*, дейиш ҳам мумкин. A ва B нуқталар C нуқтанинг *бир томонида ётибди*, уларни C нуқта ажратмайди. B ва C нуқталар A нуқтадан бир томонда ётибди.

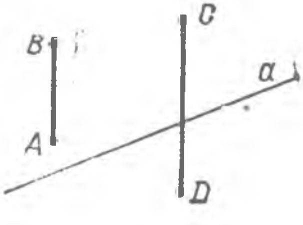


6-расм.

Тўғри чизиқнинг берилган икки нуқтаси орасида ётган ҳамма нуқталаридан иборат қисми *кесма* дейилади. Берилган бу икки нуқта кесманинг *охирлари* дейилади. Кесма ўз охирларини кўрсатиш билан белгиланади. «AB кесма» дейилганда ёки ёзилганда охирлари A ва B нуқталардан иборат кесма тушунилади.



7-расм.



8-расм.

7-расмда сиз AB кесмани кўриб турибсиз. Бу кесма AB тўғри чизиқнинг қисмидир. Тўғри чизиқнинг бу қисми қалин қора чизиқ билан ажратилган. Тўғри чизиқнинг X нуқтаси A ва B нуқталар орасида ётибди. Шу сабабли у AB кесмага тегишли. Y нуқта A ва B нуқталар орасида ётмаяпти. Шу сабабли у AB кесмага тегишли эмас.

8-расмга қаранг. a тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка шундай ажратиб турибдики, текисликнинг a тўғри чизиққа тегишли бўлмаган ҳар бир нуқтаси шу ярим текисликларнинг бирида ётади. Бундай ажратиш ушбу хоссага эга: ***агар бирор кесманинг охирлари битта ярим текисликка тегишли бўлса, у ҳолда кесма тўғри чизиқ билан кесишмайди. Агар кесманинг охирлари турли ярим текисликларга тегишли бўлса, у ҳолда кесма тўғри чизиқ билан кесишади.*** 8-расмда A ва B нуқталар a тўғри чизиқнинг текисликни ажратиб юборишидан ҳосил қилинган иккита ярим текисликнинг биттасида ётибди. Шу сабабли AB кесма a тўғри чизиқ билан кесишмайди. C ва D нуқталар турли ярим текисликларга тегишли. Шу сабабли CD кесма a тўғри чизиқ билан кесишади.

Нуқталарнинг тўғри чизиқда ва текисликда жойлашувларининг асосий хоссалари деб қуйидаги хоссаларга айтамиз:

II_1. ***Тўғри чизиқдаги учта нуқтадан биттаси ва фақат биттаси қолган иккитасининг орасида ётади.***

II_2. ***Тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади.***

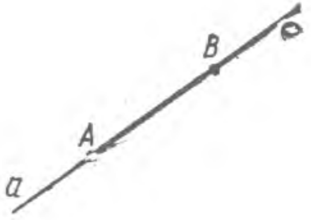
Масала (9*). Тўғри чизиқ ва шу тўғри чизиқда ётмайдиган учта A, B, C нуқта берилган. Маълумки, AB кесма тўғри чизиқ билан кесишади, AC кесма эса кесишмайди. BC кесма тўғри чизиқ билан кесишадими? Жавобингизни тушунтиринг.

Ечилиши. Тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади. A нуқта шу ярим текисликларнинг биттасига тегишли. AC кесма тўғри чизиқ билан кесишмайди. Демак, C нуқта A нуқта ётган ярим текисликда ётади. AB кесма тўғри чизиқ билан кесишади. Демак, B нуқта бошқа ярим текисликда ётади. Шундай қилиб, B ва C нуқталар турли ярим текисликларда ётади. Бу эса BC кесма берилган тўғри чизиқ билан кесишади демакдир.

* Қавслар ичидаги рақамлар масаланинг параграф охирида келтирилган машқлар рўйхатидаги номерни билдиради.

Тўғри чизиқнинг берилган нуқтасидан бир томонда ётган нуқталаридан иборат қисми *ярим тўғри чизиқ* ёки *нур* деб аталади. Берилган бу нуқта ярим тўғри чизиқнинг *бошланғич нуқтаси* дейилади. Битта тўғри чизиқнинг умумий бошланғич нуқтага эга бўлган турли ярим тўғри чизиқлари *тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар* дейилади.

9-расмда сиз a тўғри чизиқ ва унда ётган A нуқтани кўриб турибсиз. A нуқта a тўғри чизиқни иккита ярим тўғри чизиққа ажратади. Шу ярим тўғри чизиқлардан бири қалин қора чизиқ билан, иккинчиси эса ингичка чизиқ билан кўрсатилган.



9-расм.

Ярим тўғри чизиқлар латин алфавитининг кичик ҳарфлари билан белгиланади. Ярим тўғри чизиқни иккита нуқта билан, яъни бошланғич ва шу ярим тўғри чизиққа тегишли бирор нуқта билан белгилаш мумкин. Бунда бошланғич нуқта биринчи ўринга қўйилади. Масалан, 9-расмда қалин қора чизиқ билан кўрсатилган ярим тўғри чизиқни AB билан белгилаш мумкин.

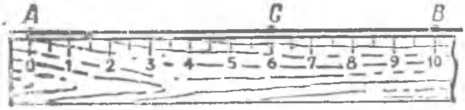
Масала (13). AB кесмада C нуқта олинган. AB, AC, CA ва CB ярим тўғри чизиқлар орасидан устма-уст тушадиган ярим тўғри чизиқлар жуфтини, тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар жуфтини айтинг. Жавобингизни тушунтириб беринг.

Ечилиши. Берилган ярим тўғри чизиқларнинг бошланғич нуқталари A ёки C нуқтадан иборат. Аввал бошланғич нуқтаси A дан иборат ярим тўғри чизиқларни қараймиз (AB ва AC ярим тўғри чизиқлар). C нуқта A ва B нуқталар орасида ётади, чунки масала шартига кўра у AB кесмага тегишли. Демак, A нуқта B ва C нуқталар орасида ётмайди, яъни B ва C нуқталар A нуқтадан бир томонда ётади. Шу сабабли AB ва AC ярим тўғри чизиқлар устма-уст тушади.

Энди бошланғич нуқтаси C нуқтадан иборат ярим тўғри чизиқларни қараймиз (CA ва CB ярим тўғри чизиқлар). C нуқта A ва B нуқталарни ажратади. Шу сабабли A ва B нуқталар битта ярим текисликка тегишли бўла олмайди, демак, CA ва CB ярим тўғри чизиқлар тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлардир.

КЕСМАЛАРНИ ВА БУРЧАКЛАРНИ ЎЛЧАШНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

Кесмаларни ўлчаш учун турли ўлчаш асбобларидан фойдаланилади. Бўлиниш нуқталарига эга чизғич бундай асбобларнинг энг соддасидир. 10-расмда AB кесма 10 см га тенг, AC кесма 6 см га тенг, BC кесма эса 4 см га тенг. AB кесманинг узунлиги AC ва BC кесмалар узунликларининг йиғиндисига тенг.



10-расм.

Қуйидаги хоссаларни биз кесмаларни ўлчашнинг **асосий хоссалари** деймиз:

III$_2$. ***Ҳар бир кесма нолдан катта тайин узунликка эга. Кесма узунлиги шу кесманинг ҳар қандай нуқтаси ажратган қисмлари узунликларининг йиғиндисига тенг.***

Бу эса, агар AB кесмада ихтиёрий C нуқта олинса, у ҳолда AB кесманинг узунлиги AC ва BC кесмалар узунликлари йиғиндисига тенг демакдир. AB кесманинг узунлиги A ва B нуқталар орасидаги масофа ҳам дейилади.

Масала (16). Учта A, B, C нуқта бир тўғри чизиқда ётади. $AB = 4{,}3$ см, $AC = 7{,}5$ см, $BC = 3{,}2$ см экани маълум. A нуқта B ва C нуқталар орасида ётиши мумкинми? C нуқта A ва B нуқталар орасида ётиши мумкинми? Учта A, B, C нуқтадан қайси бири қолган иккитаси орасида ётади?

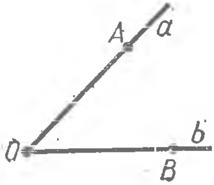
Ечилиши. Агар A нуқта B ва C нуқталар орасида ётса, кесмаларни ўлчашнинг хоссасига кўра $AB + AC = BC$ бўлиши керак. Аммо $4{,}3 + 7{,}5 \neq 3{,}2$. Демак, A нуқта B ва C нуқталар орасида ётмайди.

Агар C нуқта A ва B нуқталар орасида ётса, $AC + BC = AB$ бўлиши керак. Аммо $7{,}5 + 3{,}2 \neq 4{,}3$. Демак, C нуқта A ва B нуқталар орасида ётмайди.

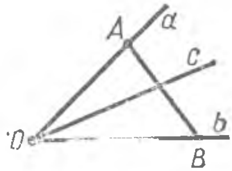
Тўғри чизиқдаги учта A, B, C нуқтадан биттаси қолган иккитасининг орасида ётади. Демак, бу B нуқтадир.

Умумий бошланғич нуқтага эга бўлган иккита турли ярим тўғри чизиқдан иборат фигура *бурчак* дейилади. Бу бошланғич нуқта *бурчакнинг учи*, ярим тўғри чизиқлар эса *бурчакнинг томонлари* дейилади. Агар *бурчакнинг томонлари* бир тўғри чизиқнинг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлари бўлса, бурчак *ёйиқ бурчак* дейилади.

11-расмда сиз учи O ҳамда томонлари a ва b дан иборат бурчакни кўриб турибсиз. Бурчак ё учининг кўрсатилиши билан, ёки унинг томонларини кўрсатиш билан, ёки учта нуқта: бурчак учи ва бурчак томонларидаги икки нуқтани кўрсатиш билан белгиланади. «Бурчак» сўзи баъзан $\angle$ белги билан алмаштирилади. 11-расмдаги бурчакни уч хилда белгилаш мумкин: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$. Бурчакни белгилашнинг учинчи хилида бурчак учини белгиловчи ҳарф ўртага қўйилади.



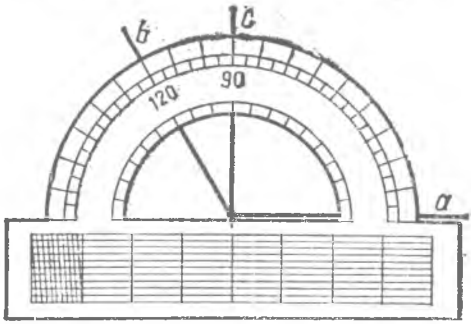
11-расм.



12-расм.

Агар нур берилган бурчакнинг учидан чиқиб, охирлари бурчак томонларида ётувчи кесма билан кесишса, бу нур шу бурчак томонлари *орасидан ўтади* деймиз. 12-расмда c нур (ab) бурчак томонлари орасидан ўтади, чунки у (ab) бурчак учидан ўтади ва охирлари унинг томонларида ётадиган AB кесма билан кесишади.

Бурчак ёйиқ олинса, унинг учидан чиқувчи ва унинг томонларидан фарқли ҳ а р қ а н д а й н у р н и бурчак томонлари орасидан ўтади, деб ҳисоблаймиз.



13-расм.

Бурчаклар транспортир ёрдамида градуслар билан ўлчанади. 13-расмда (ab) бурчак 120^0 га тенг, c ярим тўғри чизиқ (ab) бурчак томонлари орасидан ўтади. (ac) бурчак 90^0 га, (bc) бурчак эса 30^0 га тенг, (ab) бурчак (ac) ва (bc) бурчакларнинг йиғиндисига тенг.

Қуйидаги хоссаларни биз бурчакларни ўлчашнинг а с о с и й х о с с а л а р и деймиз:

III_2. *Ҳар бир бурчак нолдан катта тайин градус ўлчовга эга. Ёйиқ бурчак 180^0 га тенг. Бурчакнинг градус ўлчови ўзининг томонлари орасидан ўтувчи ҳар қандай нур ёрдамида ажратилишидан ҳосил қилинган бурчакларнинг градус ўлчовлари йиғиндисига тенг.*

Бу эса, c нур (ab) бурчакнинг томонлари орасидан ўтса, (ab) бурчак (ac) ва (bc) бурчакларнинг йиғиндисига тенг демакдир.

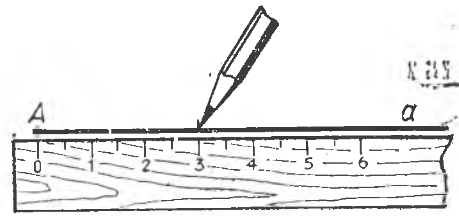
Масала (28). $\angle(ac) = 30^0$, $\angle(cb) = 80^0$, $\angle(ab) = 50^0$. c нур (ab) бурчакнинг томонлари орасидан ўта оладими?

Ечилиши. Агар c нур (ab) бурчакнинг томонлари орасидан ўтса, у ҳолда бурчакларни ўлчашнинг хоссасига биноан $\angle(ac) + \angle(cb) = \angle(ab)$ бўлиши керак. Аммо $30^0 + 80^0 \neq 50^0$. Демак, c нур (ab) бурчакнинг томонлари орасидан ўта олмайди.

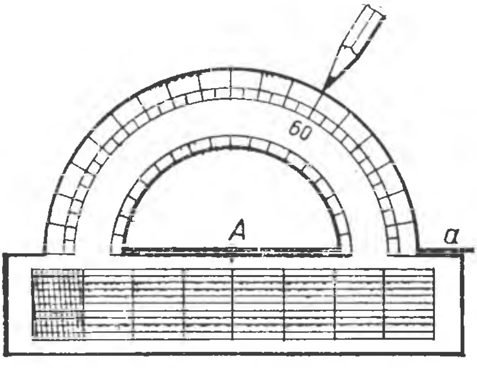
КЕСМАЛАРНИ ВА БУРЧАКЛАРНИ ҚЎЙИШНИНГ АСОСИЙ ХОССАЛАРИ

14- расмда бошлангич нуқтаси A бўлган a ярим тўғри чизиққа берилган узунликдиги (3 см) кесмани чизғич ёрдамида қандай қилиб қўйиш мумкинлиги кўрсатилган.

15- расмга қаранг. a ярим тўғри чизиқ, бошланғич A нуқтасидан нарига давом этилиб, текисликни иккита ярим текисликка ажратади. Расмда транспортир ёрдамида a ярим тўғри чизиқдан бошлаб устки ярим текисликка градус ўлчови билан берилган (60^0) бурчакни қандай қўйиб чиқиш кўрсатилган.



14-расм.



15-расм.

Қуйидаги хоссаларни биз кесмаларни ва бурчакларни қўйишнинг **асосий хоссалари** деймиз:

IV$_1$. ***Исталган ярим тўғри чизиққа унинг бошланғич нуқтасидан берилган узунликдаги ягона (яъни фақат битта) кесмани қўйиш мумкин.***

IV$_2$. ***Исталган ярим тўғри чизиқ ҳосил қилган тайин ярим текисликка берилган***

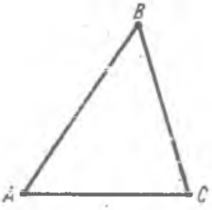
градус ўлчови 180^{0} дан кичик ягона бурчакни қўйиш мумкин.

Масала (35). AB нурга AB дан кичик бўлган AC кесма қўйилган. Учта A, B, C нуқтадан қайси бири қолган иккитаси орасида ётади? Жавобингизни тушунтиринг.

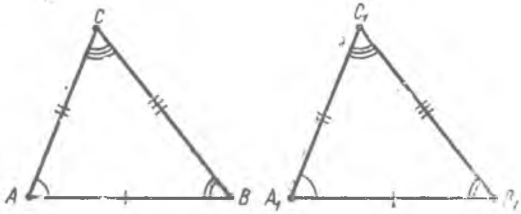
Ечилиши. B ва C нуқталар бошланғич нуқтаси A бўлган битта ярим тўғри чизиқда ётгани учун уларни A нуқта ажратмайди, яъни A нуқта B ва C нуқталар орасида ётмайди. B нуқта A ва C нуқталар орасида ётиши мумкинми? Агар у A ва C нуқталар орасида ётганида эди, $AB + BC = AC$ бўлар эди. Аммо бу мумкин эмас, чунки шартга кўра AC кесма AB кесмадан кичик. Демак, B нуқта A ва C нуқталар орасида ётмайди, Учта A, B, C нуқтадан биттаси қолган иккитасининг орасида ётади. Шу сабабли C нуқта A ва B нуқталар орасида ётади.

БЕРИЛГАН УЧБУРЧАККА ТЕНГ УЧБУРЧАКНИНГ МАВЖУДЛИГИ

Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан ва шу нуқталарни иккиталаб туташтирувчи учта кесмадан иборат фигура *учбурчак* дейилади. Нуқталар учбурчакнинг *учлари*, кесмалар эса унинг *томонлари* дейилади. 16-расмда сиз учлари A, B, C ҳамда то-



16-расм.



17-расм.

монлари AB, BC ва AC бўлган учбурчакни кўриб турибсиз. Учбурчак унинг учларини кўрсатиш билан белгиланади. «Учбурчак» сўзи ўрнига баъзан $\triangle$ белгидан фойдаланилади. Масалан, 16-расмдаги учбурчак бундай белгиланади: $\triangle\ ABC$.

ABC учбурчакнинг A учидаги *бурчаги* деб AB ва AC ярим тўғри чизиқлар ҳосил қилган бурчакка айтилади. Учбурчакнинг B ва C учларидаги бурчаклари ҳам шунга ўхшаш таърифланади.

Агар иккита кесма бир хил узунликка эга бўлса, улар *тенг* кесмалар дейилади. Агар иккита бурчакнинг градусларда ҳисобланган бурчак ўлчовлари тенг бўлса, бу бурчаклар *тенг* дейилади. Агар ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$ бўлса, бу учбурчаклар *тенг учбурчаклар* дейилади. Сўзлар билан қисқача бундай ифодаланади: ***агар учбурчакларнинг мос бурчаклари ва мос томонлари тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг дейилади.***

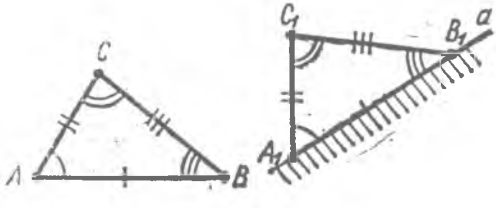
17-расмда сиз иккита тенг ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларни кўриб турибсиз. Уларда $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = B_1$, $\angle C = C_1$, $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$. Чизмада тенг кесмалар битта, иккита, учта чизиқча билан, тенг бурчаклар эса бир, икки, учта ёйча билан белгиланади.

Учбурчакларнинг тенглигини белгилаш учун одатдаги тенглик белгиси « = » дан фойдаланилади. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ кўринишдаги ёзув бундай ўқилади: «Учбурчак ABC тенг учбурчак $A_1B_1C_1$ га». Бунда учбурчакнинг учлари ёзилган тартиб аҳамиятга эга. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ тенглик $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = B_1$, . . . эканини билдиради. $\triangle ABC = \triangle B_1A_1C_1$ тенглик эса мутлақо бошқа нарсани билдиради: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle A_1$, ...

Масала (43). ABC ва PQR учбурчаклар тенг. AB томон 10 м га тенг, C бурчак эса 90^0 га тенг экани маълум. PQ томон ва R бурчак нимага тенг? Жавобингизни тушунтиринг.

Ечилиши. ABC ва PQR учбурчаклар тенг, шу сабабли уларда $\angle C = \angle R$, $AB = PQ$. Демак, $PQ = 10$ м, $\angle R = 90$.

ABC учбурчак ва *a* нур берилган бўлсин (18-расм). ABC учбурчакни шундай жойлаштирамизки, унинг A учи *a* нурнинг боши билан устма-уст тушсин, B учи *a* нурда, C учи эса *a* нур ва унинг давоми аниқлаган тайин ярим текисликда ётсин. Учбурчакнинг бу янги ҳолатдаги учларини A_1, B_1, C_1 билан белгилаймиз. $A_1B_1C_1$ учбурчак ABC учбурчакка тенг. Берилган ABC учбурчакка тенг $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг мавжудлигини ва берилган *a* нурга нисбатан кўрсатилган тарзда жойлашганлигини энг содда фигураларнинг асосий хоссалари қаторига киритамиз. Бу хоссани биз бундай ифодалаймиз:

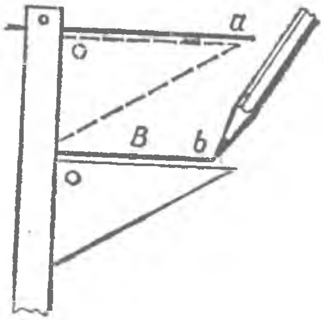


18-расм.

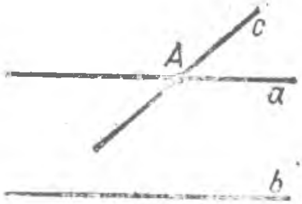
IV_3. ***Исталган учбурчак учун унга тенг шундай учбурчак мавжудки, у берилган ярим тўғри чизиққа нисбатан берилган ҳолатда жойлашади.***

ПАРАЛЛЕЛ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ АСОСИЙ ХОССАСИ

Агар текисликдаги иккита тўғри чизиқ кесишмаса, улар *параллел* тўғри чизиқлар дейилади. Бунда тўғри чизиқлар иккала йўналишда чексиз давом эттирилган деб ҳисобланади.



19-расм.



20-расм.

19-расмда чизғич ва гўния ёрдамида берилган B нуқта орқали берилган a тўғри чизиққа параллел b тўғри чизиқни ўтказиш кўрсатилган.

Тўғри чизиқларнинг параллеллигини белгилаш учун $\parallel$ белгисидан фойдаланилади. $a \parallel b$ ёзув бундай ўқилади:, «a тўғри чизиқ b тўғри чизиққа параллел».

Параллел тўғри чизиқларнинг асосий хоссаси қуйидагидан иборат.

V. ***Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта орқали текисликда берилган тўғри чизиққа биттадан ортиқ параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин эмас.***

Масала (45). Иккита параллел тўғри чизиқдан бирини кесувчи тўғри чизиқ иккинчисини кесмаслиги мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

Ечилиши. a ва b тўғри чизиқлар параллел бўлсин ҳамда c тўғри чизиқ a тўғри чизиқни A нуқтада кесиб ўтсин (20-расм). Агар c тўғри чизиқ b тўғри чизиқни кесиб ўтмаганида эди, у ҳолда A нуқта орқали b тўғри чизиқ билан кесишмайдиган иккита тўғри чизиқ — a тўғри чизиқ ва

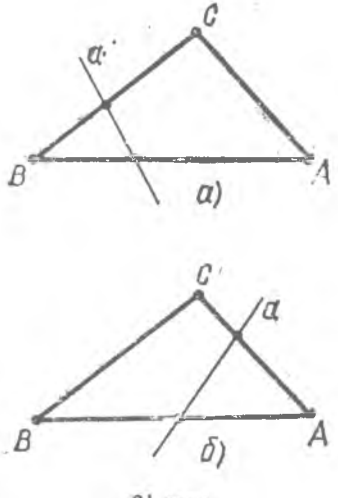
c тўғри чизиқ ўтган бўлар эди. Аммо параллел тўғри чизиқларнинг хоссасига кўра бундай бўлиши мумкин эмас. Демак, c тўғри чизиқ a тўғри чизиқни кесар экан, b тўғри чизиқни ҳам кесиши керак.

АКСИОМАЛАР, ТЕОРЕМАЛАР ВА ИСБОТЛАР

Бирор геометрик фигуранинг хоссаси ҳақидаги тасдиқнинг тўғрилиги мулоҳаза юритиш билан ўрнатилади. Бу мулоҳаза *исбот* деб аталади. Геометрик фигуранинг хоссасини ифодаловчи исботланадиган ибора (фикр) *теорема* деб аталади. Мисол келтирамиз.

1. 2- теорема. ***Агар учбурчакнинг бирорта ҳам учидан ўтмайдиган тўғри чизиқ унинг томонларидан бирини кесса, у қолган икки томоннинг фақат биттасини кесади.***

Исботи. a тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг бирорта ҳам учидан ўтмасин ва унинг AB томонини кессин, дейлик (21- расм). a тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка бўлади. AB кесма a тўғри чизиқ билан кесишгани учун A ва B нуқталар турли ярим текисликларда ётади. C нуқта шу ярим текисликлардан бирида ётади. Агар C нуқта A нуқта билан битта ярим текисликда ётса, у ҳолда AC кесма a тўғри чизиқ билан кесишмайди, BC кесма эса бу тўғри чизиқ билан кесишади (21- *а* расм). Агар C нуқта B нуқта билан битта ярим текисликда ётса, у ҳолда AC кесма a тўғри чизиқ билан кесишади, BC кесма эса кесишмайди (21-*б* расм). Иккала ҳолда ҳам a тўғри чизиқ AC ёки BC кесманинг биттаси билан кесишади. Исбот мана шундан иборат.



21-расм.

Энг содда фигураларнинг бу параграфда ифодаланган асосий хоссалари бошқа хоссаларни исботлаш учун асосий йўналишдир. Асосий хоссалар исботланмайди ва улар *аксиомалар* деб аталади.

Теоремаларни исботлашда энг содда фигураларнинг асосий хоссаларидан, яъни аксиомалардан, шунингдек аввал исботланган хоссалардан, яъни исботланган теоремалардан фойдаланишга рухсат этилади. Фигураларнинг бошқа бирорта хоссасидан, ҳатто улар очиқ-ойдин кўриниб тургандек бўлса ҳам, фойдаланишга рухсат этилмайди.

Теоремаларни исботлашда чизмалардан фойдаланиш мумкин, бу ҳолда чизмалар сўзлар билан ифодаланган фикрларни геометрия тилида изоҳлайди деб тушунамиз. Мулоҳаза юритишда фигуранинг чизмадан кўриниб турган хоссаларидан, агар биз улар олдиндан киритилган аксиомалар ва илгаридан исбот қилинган теоремаларга суянмасдан асослай олмасак, фойдаланишга рухсат этилмайди.

Теореманинг ифодаси одатда икки қисмдан иборат бўлади. Уларнинг бирида нималар берилгани ҳақида гапирилади. Бу қисм теореманинг *шарти* деб аталади. Иккинчи қисмида нимaнинг исботланиши кераклиги ҳақида сўз боради. Бу қисм теореманинг *хулосаси* дейилади. 1.2 - теореманинг шарти ушбудан иборат: тўғри чизиқ учбурчакнинг бирорта ҳам учидан ўтмайди ва унинг томонларидан бирини кесади. Теореманинг хулосаси ушбудан иборат: тўғри чизиқ учбурчакнинг қолган икки томонидан биттасини кесади.

Геометрияда аксиома, теорема сўзлари билан бир қаторда «таъриф» сўзидан ҳам фойдаланилади. Бирор нарсага *таъриф* бериш унинг нима эканини тушунтириш демакдир. Масалан, бундай дейишади: «Учбурчакнинг таърифини келтиринг». Унга бундай жавоб беришади: «Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан ва бу нуқталарни иккиталаб туташтирувчи учта кесмадан иборат фигура учбурчак дейилади». Бошқа мисол: «Параллел тўғри чизиқларнинг таърифини айтинг». Бундай жавоб берамиз: «Агар тўғри чизиқлар кесишмаса, улар параллел тўғри чизиқлар дейилади». Сиз кесмаларнинг тенглиги, бурчаклар ва учбурчакларнинг юқорида келтирилган тенглиги таърифларини биласиз.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Геометрия нима?
2. Геометрик фигураларга мисоллар келтиринг.
3. Планиметрия нима?
4. Текисликдаги асосий геометрик фигураларни айтинг.
5. Тўғри чизиқлар ўтказиш (чизиш) учун қандай асбоблардан фойдаланилади?
6. Нуқта ва тўғри чизиқлар қандай белгиланади?
7. 4- расмда белгиланган қандай нуқталар a тўғри чизиқда ётади, қандайлари b тўғри чизиқда ётади? a ва b тўғри чизиқлар қандай нуқтада кесишади?

8. Нуқта ва тўғри чизиқлар тегишлилигининг асосий хоссаларини ифодаланг.
9. Иккита турли тўғри чизиқнинг иккита кесишиш нуқтасига эга бўла олмаслигини тушунтиринг.
10. 6-расмдаги учта нуқтадан қайси бири қолган иккитасини ажратади? *B* ва *C* нуқталар *A* нуқтага нисбатан қандай жойлашган?
11. Охирлари берилган нуқталардан иборат кесма нима? Тушунтиринг.
12. Текисликни иккита ярим текисликка ажратиш қандай хоссаларга эга?
13. Нуқталарнинг тўғри чизиқда ва текисликда ўзаро жойлашувларининг асосий хоссаларини ифодаланг.
14. Ярим тўғри чизиқ ёки нур нима? Қандай ярим тўғри чизиқлар тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар дейилади?
15. Ярим тўғри чизиқлар қандай белгиланади?
16. Кесмаларни ўлчаш учун қандай асбобдан фойдаланилади?
17. Кесмаларни ўлчашнинг асосий хоссаларини ифодаланг.
18. Берилган икки нуқта орасидаги масофа деб нимани айтилади?
19. Қандай фигура бурчак деб аталади?
20. 11-расмдаги бурчакнинг учини ва томонларини айтинг.
21. Қандай бурчак ёйиқ бурчак дейилади?
22. Бурчак қандай белгиланади?
23. Ушбу ифода нимани билдиришини тушунтиринг: «Ярим тўғри чизиқ бурчак томонлари орасидан ўтади».
24. Бурчаклар қандай бирликларда ва қандай асбоб ёрдамида ўлчанади? Ўлчашлар қандай ўтказилишини тушунтиринг.
25. Бурчакларни ўлчашнинг асосий хоссаларини ифодаланг.
26. Кесмаларни ва бурчакларни қўйишнинг асосий хоссаларини ифодаланг.
27. Учбурчак нима?
28. 16-расмдаги учбурчакнинг учларини ва томонларини айтинг.
29. Учбурчакнинг берилган учидаги бурчаги нима?
30. Қандай кесмалар тенг кесмалар дейилади?
31. Қандай бурчаклар тенг бурчаклар дейилади?
32. Ушбу жумла нимани билдиради: «ABC учбурчак $A_1B_1C_1$ учбурчакка тенг»? Учбурчакларнинг тенглиги қандай белгиланади?
33. Тенг учбурчакларнинг мос томонлари ва бурчаклари расмда қандай белгиланади?
34. Берилган учбурчакка тенг учбурчакнинг мавжудлигини 18-расмдан тушунтиринг.
35. Қандай тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар дейилади? Тўғри чизиқларнинг параллеллигини белгилаш учун қандай белгидан фойдаланилади?
36. Параллел тўғри чизиқларнинг асосий хоссасини ифодаланг.
37. Геометрик исботлаш нима?
38. Теорема нима?
39. Теорема ва унинг исботига мисол келтиринг.

40. Нуқталар ва тўғри чизиқларнинг тегишлилик аксиомаларини ифодаланг.
41. Кесмаларни ва бурчакларни ўлчаш аксиомаларини ифодаланг.
42. Кесмаларни ва бурчакларни қўйиш аксиомаларини ифодаланг.
43. Берилган учбурчакка тенг учбурчакнинг мавжудлиги аксиомасини ифодаланг.
44. Параллеллар аксиомаси нимадан иборат?
45. Теоремани исботлашда геометрик фигураларнинг қандай хоссаларидан фойдаланишга рухсат этилади?
46. Теоремани исботлашда чизмалардан қандай фойдаланилади?
47. Теореманинг ифодаси қандай иккита қисмдан иборат?
48. Бирор нарсага таъриф бериш нимани билдиради? Кесмаларнинг, бурчакларнинг ва учбурчакларнинг тенглиги таърифларини келтиринг.

МАШҚЛАР*

1. Тўғри чизиқ ўтказинг. Шу тўғри чизиқда ётувчи бирор A нуқтани ва унда ётмайдиган B нуқтани белгиланг.
2. Кесишувчи иккита a ва b тўғри чизиқларни ўтказинг. Тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси C ни, a тўғри чизиқда b тўғри чизиқда ётмайдиган A нуқтани, a ва b тўғри чизиқларнинг биронтасида ҳам ётмайдиган D нуқтани белгиланг.
3. Бир варақ қоғозда иккита нуқта белгиланг. Шу нуқталар орқали қўлда тўғри чизиқ ўтказинг. Ясашнинг тўғрилигини чизғич билан текширинг. Машқни такрорланг.
4. Бир варақ қоғозга иккита нуқта белгиланг. Энди учинчи нуқтани кўзда чамалаб шундай қўйингки, у олдинги икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқда ётсин. Ясашнинг тўғрилигини чизғич билан текширинг. Машқни такрорланг.
5. a тўғри чизиқни ўтказинг. Тўғри чизиқда қандайдир иккита A ва B нуқтани белгиланг. Энди C нуқтани шундай белгилангки, у A ва B нуқталар орасида ётсин.
6. a тўғри чизиқни ўтказинг. Тўғри чизиқда қандайдир иккита A ва B нуқтани белгиланг. Энди AB кесмага тегишли бирор C нуқтани белгиланг.
7. Агар иккита кесма бир тўғри чизиқда ётмаса, улар нечта кесишиш нуқтасига эга бўлиши мумкин? Жавобингизни тушунтиринг.
8. Тўғри чизиқ ўтказинг ва шу тўғри чизиқда ётмайдиган бирор A нуқтани белгиланг. Энди иккита B ва C нуқтани шундай белгилангки, AB кесма тўғри чизиқни кессин, BC кесма эса тўғри чизиқни кесмасин.
9. Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган учта A, B, C нуқта берилган. AB кесма тўғри чизиқни кесиши, AC кесма эса тўғри

* Мазкур дарсликдаги кўп машқлар илгари нашр қилинган мактаб дарсликлари ва масалалар тўпламларидан, айниқса А. П. Киселевнинг «Геометрия» дарслигидан ва Н. Рибкиннинг «Геометриядан масалалар тўплами» дан олинган.

чизиқни кесмаслиги маълум. BC кесма тўғри чизиқни кесадими? Жавобингизни тушунтиринг.

10. Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган тўртта A, B, C, D нуқта берилган. Агар қуйидаги шартлар бажарилса, AD кесма тўғри чизиқни кесадими: 1) AB, BC ва CD кесмалар тўғри чизиқни кесади; 2) AC ва BC кесмалар тўғри чизиқни кесади, BD кесма эса тўғри чизиқни кесмайди; 3) AB ва CD кесмалар тўғри чизиқни кесади, BC кесма эса тўғри чизиқни кесмайди, 4) AB ва CD кесмалар тўғри чизиқни кесмайди, BC кесма эса тўғри чизиқни кесади; 5) AB, BC, CD кесмалар тўғри чизиқни кесмайди; 6) AC, BC, ва BD кесмалар тўғри чизиқни кесади? Жавобингизни тушунтиринг.

11. Бешта нуқта ва бу нуқталарнинг бирортасидан ҳам ўтмайдиган тўғри чизиқ берилган. Учта нуқта бу тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда ётиши, қолган иккитаси эса бошқа ярим текисликда ётиши маълум. Нуқталарнинг ҳар бир жуфти кесма билан туташтирилган. Тўғри чизиқни нечта кесма кесади? Жавобингизни тушунтиринг.

12. Иккита A ва B нуқта белгиланг. AB ярим тўғри чизиқни ўтказинг.

13. AB кесмада C нуқта олинган. AB, AC, CA, CB ярим тўғри чизиқлар орасидан устма-уст тушадиган ярим тўғри чизиқлар тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар жуфтларини айтинг. Жавобингизни тушунтиринг.

14. M нуқта CD тўғри чизиқда C ва D нуқталар орасида ётибди. Агар: 1) $CM=2{,}5$ см, $MD=3{,}5$ см; 2) $CM=3{,}1$ дм, $MD=4{,}6$ дм; 3) $CM=12{,}3$ м, $MD=5{,}8$ м бўлса, CD кесма узунлигини топинг.

15. Тўғри чизиқда иккита нуқта белгиланг. Шу нуқталарни туташтирувчи кесманинг ўртасини кўз билан чамаланг. Чизғич ёрдамида ўлчаш йўли билан ясашнинг тўғрилигини текширинг. Машқни такрорланг.

16. Учта A, B, C, нуқта бир тўғри чизиқда ётади. $AB=4{,}3$ см, $AC=7{,}5$ см, $BC=3{,}2$ см экани маълум. A нуқта B ва C нуқталар орасида ёта оладими? C нуқта A ва B нуқталар орасида ёта оладими? A, B, C учта нуқтадан қайсиниси қолган иккитасининг орасида ётади?

17. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Агар: 1) $AC=5$ см, $BC=7$ см; 2) $AC=9{,}1$ м, $AB=9{,}2$ м; 3) $AB=3$ дм, $BC=4$ дм, $AC=7$ дм бўлса, B нуқта AC кесмага тегишли бўладими? Жавобингизни тушунтиринг.

18. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Агар: 1) $AC=5$ см, $AB=7$ см; 2) $AC=7$ м, $BC=7{,}6$ м бўлса, B нуқта A ва C нуқталарни ажрата оладими?

19. Агар $AB=1{,}8$ м, $AC=1{,}3$ м, $BC=3$ м бўлса, A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ёта оладими? Жавобингизни тушунтиринг.

20. A нуқтадан B ва C нуқталаргача бўлган масофалар 5 см ва 7 см B ва C нуқталар орасидаги масофа эса 6 см. A, B ва

C нуқталар бир тўғри чизиқда ёта оладими? Жавобингизни тушунтиринг.

21. Агар катта AB кесманинг узунлиги AC ва BC кесмалар узунликлари йиғиндисидан кичик бўлса, учта A, B, C нуқта бир тўғри чизиқда ёта оладими? Жавобингизни тушунтиринг.

22. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Агар $AB = 2,7$ м, $AC = 3,2$ м бўлса, BC кесма узунлигини топинг. Масала нечта ечимга эга?

23. AB кесмада C нуқта олинган. Қайси кесма узун: AB ми ёки AC ми? Нима учун?

24. Агар $AX > AB$ бўлса, X нуқта AB кесмага тегишли бўла оладими? Жавобингизни тушунтиринг.

25. Узунлиги 15 м бўлган AB кесмада C нуқта белгиланган. Агар: 1) AC кесма BC кесмадан 3 м узун бўлса; 2) AC кесма BC кесмадан икки марта узун бўлса; 3) C нуқта AB кесманинг ўртаси бўлса; 4) AC ва BC кесмаларнинг узунликлари $2:3$ нисбатда бўлса, AC ва BC кесмаларнинг узунликларини топинг.

26. Бир нуқтадан учта ихтиёрий нур ўтказинг. Шу нурлар ҳосил қилган бурчакларни кўзда чамалаб аниқланг. Бурчакларни транспортир билан ўлчаб, жавобларингизни текширинг. Машқни такрорланг.

27. a нур (cd) бурчак томонлари орасидан ўтади. Агар: 1) $\angle(ac) = 35^0$, $\angle(ad) = 75^0$; 2) $\angle(ac) = 57^0$, $\angle(ad) = 62^0$; 3) $\angle(ac) = 94^0$, $\angle(ad) = 85^0$ бўлса, (cd) бурчакни топинг.

28. Агар: 1) $\angle(ac) = 30^0$, $\angle(cb) = 80^0$, $\angle(ab) = 50^0$; 2) $\angle(ac) = 100^0$, $\angle(cb) = 90^0$; 3) (ac) бурчак (ab) бурчакдан катта бўлса, c нур (ab) бурчак томонлари орасидан ўта оладими?

29. c нур (ab) бурчак томонлари орасидан ўтади. Қайси бурчак катта: (ab) ми ёки (ac) ми? Нима учун?

30. c нур 60^0 га тенг (ab) бурчак томонлари орасидан ўтади. Агар: 1) (ac) бурчак (bc) бурчакдан 30^0 катта бўлса; 2) (ac) бурчак (bc) бурчакдан икки марта катта бўлса; 3) c нур (ab) бурчакни тенг иккига бўлса; 4) (ac) ва (bc) бурчакларнинг градус ўлчовлари $2:3$ каби нисбатда бўлса, (ac) ва (bc) бурчакларни топинг.

31. Тўғри чизиқ ўтказинг. Унда бирор A нуқтани белгиланг. Энди шу тўғри чизиқнинг B нуқтасини кўзда чамалаб шундай қўйингки, $AB = 5$ см бўлсин. B нуқтанинг ясалиш аниқлигини чизғич билан текширинг. Машқни: 1) $AB = 3$ см, 2) $AB = 7$ см, 3) $AB = 10$ см учун такрорланг.

32. 30^0, 45^0, 60^0, 90^0 ли бурчакларни кўзда чамалаб ясанг. Ясаш аниқлигини транспортир билан текширинг. Машқни такрорланг.

33. AB ярим тўғри чизиқда B дан фарқли ва $AX = AB$ тенгликни қаноатлантирувчи X нуқта мавжудми? Жавобингизни тушунтиринг.

34. AB тўғри чизиқда B дан фарқли ва $AX = AB$ тенгликни қаноатлантирувчи нечта X нуқта мавжуд? Жавобингизни тушунтиринг.
35. AB нурга AB кесмадан кичик AC кесма қўйилган, A, B, C дан иборат учта нуқтадан қайси бири қолган иккитаси орасида ётади? Жавобингизни тушунтиринг.
36. AB нурда C нуқта белгиланган. Агар: 1) $AB = 1{,}5$ м, $AC = 0{,}3$ м; 2) $AB = 2$ см, $AC = 4{,}4$ см бўлса, BC кесма узунлигини топинг.
37. Кўзда чамалаб, томонлари тенг учбурчак (тенг томонли учбурчак) ясанг. Томонларни ўлчаш билан ясаш аниқлигини текширинг.
38. ABC учбурчакнинг AB томонида D нуқта олинган. Агар $AD = 5$ см, $BD = 6$ см бўлса, учбурчакнинг AB томони нимага тенг?
39. ABC учбурчакнинг AB томонидан D нуқта олинган. Агар $\angle ACD = 30^\circ$, $\angle BCD = 70^\circ$ бўлса, учбурчакнинг C бурчаги нимага тенг?
40. Бирор учбурчак чизинг. Қўлда чамалаб, унга тенг учбурчак чизинг. Тегишли бурчакларни ва томонларни ўлчаш йўли билан ясашнинг тўғрилигини текширинг. Машқни такрорланг.
41. ABC ва PQR учбурчаклар тенг. $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см экани маълум. PQR учбурчакнинг томонларини топинг. Жавобингизни тушунтиринг.
42. ABC ва PQR учбурчаклар тенг. Иккинчи учбурчакнинг бурчаклари маълум: $\angle P = 40^\circ$, $\angle Q = 60^\circ$, $\angle R = 80^\circ$. ABC учбурчакнинг бурчакларини топинг.
43. ABC ва PQR учбурчаклар тенг. AB томони 10 см, C бурчак эса 90° га тенг экани маълум. PQ томон ва R бурчак нимага тенг? Жавобингизни тушунтиринг.
44. ABC, PQR ва XYZ учбурчаклар тенг. $AB = 5$ см, $QR = 6$ см, $ZX = 7$ см. Ҳар қайси учбурчакнинг қолган томонларини топинг.
45. Параллел иккита тўғри чизиқдан бирини кесган тўғри чизиқ иккинчисини кесмаслиги мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
46. Кесишувчи иккита тўғри чизиқ берилган. Берилган икки тўғри чизиқнинг ҳар бирига параллел бўлган учинчи тўғри чизиқни ўтказиш мумкинми?
47. Учбурчакнинг бирорта ҳам учидан ўтмайдиган тўғри чизиқ унинг ҳар бир томонини кесиши мумкинми? Нима учун?
48. Тўртта A, B, C ва D нуқта берилган. A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётиши ва шунингдек, B, C, D нуқталарнинг ҳам бир тўғри чизиқда ётиши маълум. Тўртта нуқтанинг ҳаммаси бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.
49. Тўртта a, b, c ва d тўғри чизиқ берилган. a, b, c тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишиши, b, c, d тўғри чизиқларнинг ҳам бир нуқтада кесишиши маълум. Берилган тўртала тўғри чизиқнинг битта нуқтадан ўтишини исботланг.

50. AB тўғри чизиқ CD кесмани кесади, CD тўғри чизиқ эса AB кесмани кесади. AB ва CD кесмалар кесишишини исботланг.

51. ABC учбурчак берилган. AC томонда B_1 нуқта, BC томонда эса A_1 нуқта олинган. AA_1 ва BB_1 кесмаларнинг кесишишини исботланг.

52. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган AB ва CD кесмалар E нуқтада кесишади. AC кесма BD тўғри чизиқни кесмаслигини исботланг.

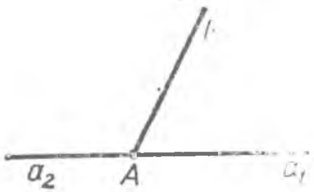
2- §. БУРЧАКЛАР

ҚЎШНИ БУРЧАКЛАР

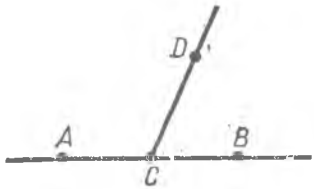
Таъриф. Агар иккита бурчакнинг битта томони умумий, қолган томонлари тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлар бўлса, улар *қўшни бурчаклар* дейилади.

22-расмда (a_1b) ва (a_2b) бурчаклар қўшни бурчаклардир. Уларда b томон умумий, a_1 ва a_2 томонлар эса тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлардир.

C нуқта AB тўғри чизиқда A, B нуқталар орасида ётувчи, D нуқта эса AB тўғри чизиқда ётмайдиган нуқта бўлсин (23-расм).



22-расм.



23-расм.

У ҳолда BCD ва ACD қўшни бурчаклардир. Уларда CD — умумий томон. CA, CB томонлар AB тўғри чизиқнинг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқларидир, чунки бу ярим тўғри чизиқларнинг A ва B нуқталарини бошланғич C нуқта ажратади.

2. 1-теорема. ***Қўшни бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг.***

Исботи. $\angle(a_1, b)$ ва $\angle(a_2, b)$ берилган қўшни бурчаклар бўлсин (22-расмга қаранг). b нур ёйиқ бурчакнинг a_1 ва a_2 томонлари орасидан ўтади. Шу сабабли (a_1b) ва (a_2b) бурчакларнинг йиғиндиси ёйиқ бурчакка, яъни 180° га тенг. Теорема исботланди.

2.1-теоремадан, ***агар иккита бурчак тенг бўлса, у ҳолда уларга қўшни бурчаклар ҳам тенг*** деган натижа чиқади.

Масала (3). Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан икки марта катта. Шу қўшни бурчакларни топинг.

Ечилиши. Бурчаклардан кичигининг градус ўлчовини x билан белгилаймиз. У ҳолда катта бурчакнинг градус ўлчови $2x$ бўлади. Бурчаклар йиғиндиси $180°$ га тенг. Шундай қилиб,

$$x + 2x = 180°.$$

Бундан $x = 60°$. Демак, айтилган қўшни бурчаклар $60°$ ва $120°$ га тенг.

$90°$ га тенг бурчак *тўғри бурчак* деб аталади. 2.1-теоремадан *тўғри бурчакка қўшни бурчак тўғри бурчак* деган натижа чиқади.

$90°$ дан кичик бурчак *ўткир бурчак* дейилади. $90°$ дан катта ва $180°$ дан кичик бурчак *ўтмас бурчак* дейилади. Қўшни бурчаклар йиғиндиси $180°$ га тенг бўлгани сабабли ўткир бурчакка қўшни

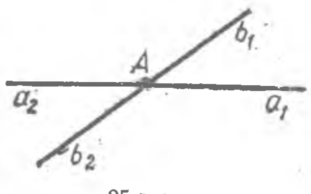
24-расм.

бурчак ўтмас, ўтмас бурчакка қўшни бурчак ўткир бўлади. 24-расмда бурчакларнинг уч хили тасвирланган.

ВЕРТИКАЛ БУРЧАКЛАР

Таъриф. Агар икки бурчакдан бирининг томонлари иккинчи бурчак томонларининг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқлари бўлса, бу икки бурчак *вертикал бурчаклар* дейилади.

25-расмда (a_1b_1) ва (a_2b_2) бурчаклар вертикал бурчаклардир. Иккинчи бурчакнинг a_2 ва b_2 томонлари биринчи бурчакнинг a_1 ва b_1 томонларининг тўлдирувчи ярим тўғри чизиқларидир.



25-расм.

2.2-теорема. ***Вертикал бурчаклар тенг.***

Исботи. $(a_1\ b_1)$ ва $(a_2\ b_2)$ берилган вертикал бурчаклар бўлсин (25-расм). (a_1b_2) бурчак (a_1b_1) бурчак билан ва (a_2b_2) бурчак билан қўшни бурчакдир. Бундан, 2.1-теоремага биноан, (a_1b_1) ва (a_2b_2) бурчакларнинг ҳар бири $(a_1\ b_2)$ бурчакни $180°$ гача тўлдиради, яъни (a_1b_1) ва (a_2b_2) бурчаклар тенг, деган хулоса чиқарамиз. Теорема исботланди.

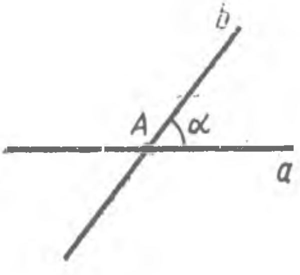
Масала (8). Икки тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган иккита бурчакнинг йиғиндиси $50°$ га тенг. Шу бурчакларни топинг.

Ечилиши. Иккита тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил қилинган иккита бурчак ё қўшни, ёки вертикал бурчаклар бўлади. Берилган бурчаклар қўшни бурчаклар бўла олмайди, чунки уларнинг йиғиндиси $50°$ га тенг, қўшни бурчакларнинг йиғиндиси эса $180°$ бўлиши керак. Демак, улар вертикал бурчаклар. Вертикал бурчаклар тенг бўлгани ва шартга кўра уларнинг йиғиндиси $50°$ га тенглиги учун ҳар қайси бурчак $25°$ га тенг.

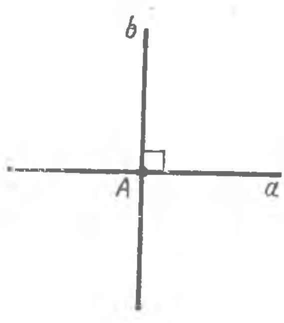
ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

a ва b кесишувчи иккита тўғри чизиқ бўлсин (26-расм). Улар тўртта бурчак ҳосил қилади. α шу бурчаклардан биттаси бўлсин. У ҳолда қолган учта бурчакнинг ихтиёрий биттаси ё α бурчак билан қўшни бурчак, ёки α бурчакка вертикал бурчак бўлади. Бундан бурчаклардан бири тўғри бурчак бўлса, қолганлари ҳам тўғри бурчаклар бўлади деган хулоса чиқади. Бундай ҳолда биз тўғри чизиқлар тўғри бурчак остида кесишади, деймиз.

Таъриф. Агар иккита тўғри чизиқ тўғри бурчак остида кесишса, бу тўғри чизиқлар *перпендикуляр тўғри чизиқлар* дейилади (27-расм).



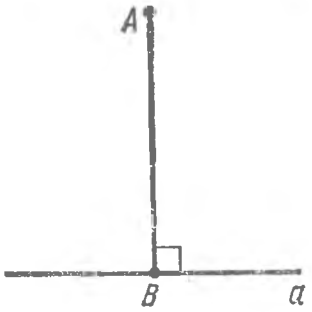
26-расм.



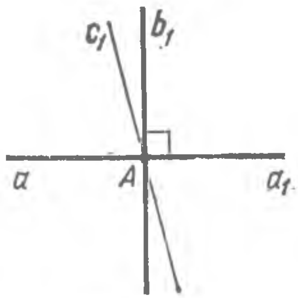
27-расм.

Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги $\perp$ билан белгиланади. $a \perp b$ ёзув бундай ўқилади: «a тўғри чизиқ b тўғри чизиққа перпендикуляр».

Таъриф. Берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқнинг охири шу тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан иборат бўлган кесма берилган тўғри чизиққа *перпендикуляр* кесма



28-расм.



29-расм.

дейилади. Кесманинг бу охири перпендикулярнинг *асоси* деб аталади.

28-расмда AB перпендикуляр A нуқтадан a тўғри чизиққа ўтказилган. B нуқта перпендикуляр асоси.

2.3-теорема. ***Тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасидан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат биргина.***

Исботи. a — берилган тўғри чизиқ, A — унда берилган нуқта бўлсин. a тўғри чизиқнинг бошланғич нуқтаси A бўлган ярим тўғри чизиқларидан бирини a_1 билан белгилаймиз (29-расм). a_1 ярим тўғри чизиқдан бошлаб $90°$ га тенг (a_1b_1) бурчакни қўямиз. У ҳолда b_1 нурни ўз ичига олган тўғри чизиқ a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади.

Фараз қилайлик, A нуқтадан ўтиб, a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган бошқа тўғри чизиқ мавжуд бўлсин. Бу тўғри чизиқнинг b_1 нур билан бир текисликда ётувчи ярим тўғри чизиғини c_1 билан белгилаймиз.

Ҳар бири $90°$ га тенг (a_1b_1) ва (a_1c_1) бурчаклар a_1 ярим тўғри чизиқдан бошлаб битта ярим текисликка қўйилган. Аммо берилган ярим текисликка a_1 ярим тўғри чизиқдан бошлаб $90°$ га тенг битта бурчак қўйиш мумкин. Шу сабабли A нуқта орқали ўтиб, a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган бошқа тўғри чизиқнинг мавжудлиги мумкин эмас. Теорема исботланди.

ТЕСКАРИСИДАН ИСБОТЛАШ

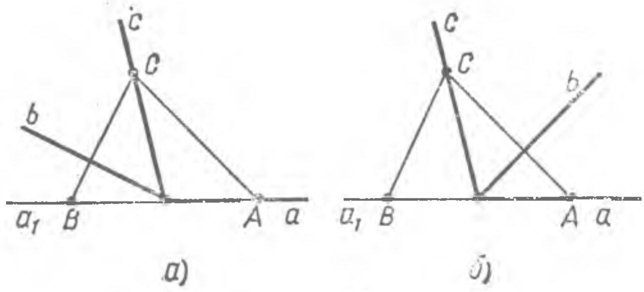
Биз 2.3-теоремада ишлатган исботлаш усули *тескарисидан исботлаш усули* дейилади. Бу исботлаш усули шундан иборатки, биз унда олдин теорема тасдиқлаган фикрга қарама-қарши фикр тўғри деб фараз қиламиз. Шундан кейин аксиомалар ва олдин исботланган теоремаларга асосланиб, мулоҳазалар юритиш йўли билан теорема шартига зидлик қиладиган, ёки бирор аксиомага, ёки илгари исботланган теоремага зид келадиган хулосага келамиз. Шунга асосланиб, фаразимиз нотўғри, демак, теоремадаги даъво тўғри деган хулосага келамиз.

Буни 2.3-теореманинг исботи мисолида тушунтирамиз. Теоремада тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси орқали унга фақат битта перпендикуляр ўтказиш мумкин, деб тасдиқланади. Биз бундай тўғри чизиқлардан иккита ўтказиш мумкин деб фараз қилиб, берилган ярим тўғри чизиқдан бошлаб берилган ярим текисликка градус ўлчовлари бир хил (90°) бўлган иккита бурчак қўйиш мумкин, деган хулосага келдик. Бу эса бурчакларни қўйиш аксиомасига зид. Бу аксиомага биноан берилган ярим тўғри чизиқдан берилган ярим текисликка берилган градус ўлчовли фақат битта бурчак қўйиш мумкин.

БИТТА ЯРИМ ТЕКИСЛИККА ҚЎЙИЛГАН БУРЧАКЛАР

2.4-теорема. ***Агар берилган ярим тўғри чизиқдан битта ярим текисликка иккита бурчак қўйилса, у ҳолда кичик бурчакнинг берилган ярим тўғри чизиқдан фарқли томони катта бурчак томонлари орасидан ўтади.***

Исботи. $\angle(ab)$ ва $\angle(ac)$ — берилган a ярим тўғри чизиқдан битта ярим текисликка қўйилган бурчаклар ва (ab) бурчак $(a\ )$ бурчакдан кичик бўлсин (30-расм). b нурнинг (ac) бурчакнинг томонлари орасидан ўтишини исботлаймиз.

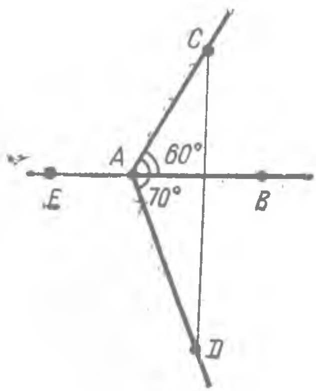


30-расм.

a ярим тўғри чизиқни тўлдирувчи ярим тўғри чизиқни a_1 билан белгилаймиз. a нурда бирор A нуқтани, a_1 нурда бирор B нуқтани ва c нурда бирор C нуқтани оламиз.

b нур ётувчи тўғри чизиқ ABC учбурчакнинг AB томонини кесади, демак, унинг қолган икки томонидан бирини: AC ёки BC ни кесади. Кесишиш нури b бўлади, чунки уни тўлдирувчи нур бошқа ярим текисликда ётади.

b нур BC кесмани кесиб ўтсин дейлик, демак, (a_1c) бурчакнинг томонлари орасидан ўтади (30-a расм). У ҳолда (a_1c) бурчак (a_1b) бурчакдан катта бўлади. Уларга қўшни бурчаклар учун эса (ac) бурчак (ab) бурчакдан кичик бўлади. Аммо бу ҳолат теорема шартига зид. Шундай қилиб, b нур BC кесмани кесмайди. Демак, у AC кесмани кесиб ўтади (30-$б$ расм) ва шу сабабли (ac) бурчак томонлари орасидан ўтади. Теорема исботланди.



31-расм.

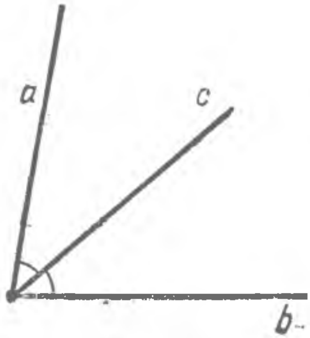
Бу теоремадан ушбу хулоса ҳосил қилинади: *агар (ab) ва (ac) бурчаклар a ярим тўғри чизиқдан битта ярим текисликка қўйилса, у ҳолда (bc) бурчак (ac), (ab) бурчакларнинг айирмасига тенг бўлади.*

Масала (16). AB ярим тўғри чизиқдан турли ярим текисликларга $\angle BAC = 60°$ ва $\angle BAD = 70°$ бурчаклар қўйилган. CAD бурчакни топинг.

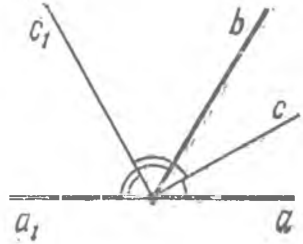
Ечилиши. C ва D нуқталар AB тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётгани учун CD кесма бу тўғри чизиқни кесиб ўтади (31- расм). Демак, AB нур ёки уни тўлдирувчи AE нур CAD бурчакнинг томонлари орасидан ўтади. Шу сабабли CAD бурчак ё BAC ва BAD бурчакларнинг йиғиндисига, ёки уларга қўшни EAC ва EAD бурчакларнинг йиғиндисига тенг. Биринчи ҳолда у $60° + 70° = 130°$ га тенг, иккинчи ҳолда эса $(180° - 60°) + (180° - 70°) = 230°$ га тенг. Иккинчи ҳолнинг юз бериши мумкин эмас, чунки бурчакнинг градус ўлчови $180°$ дан катта эмас. Демак, CAD бурчак $130°$ га тенг.

Таъриф. Бурчакнинг *биссектрисаси* деб унинг учидан чиқиб, томонлари орасидан ўтувчи ва бурчакни тенг иккига бўлувчи нурга айтилади.

32- расмда сиз (ab) бурчакни кўриб турибсиз. c нур бурчакнинг учидан чиқиб, унинг томонлари орасидан ўтади ва бурчакни



32-расм.



33-расм.

тенг иккига бўлади: $\angle(ac) = \angle(bc)$. c нур (ab) бурчакнинг биссектрисасидир.

Масала (20). Қўшни бурчаклар биссектрисалари орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. $\angle(ab)$ ва $\angle(a_1b)$ қўшни бурчаклар; c, c_1 — уларнинг биссектрисалари бўлсин (33- расм). (ab) бурчакни x билан белгилаймиз. (ac) ва (ac_1) бурчакларни x орқали ифодалаймиз. Бу бурчаклар a ярим тўғри чизиқдан битта ярим текисликка қўйилган, демак, (cc_1) бурчак шу бурчакларнинг айирмасига тенг. Қуйидагиларга эгамиз:

$$\angle(ac) = \frac{x}{2},\ \angle(ac_1) = 180° - \angle(a_1c_1) = 180° - \frac{1}{2}\angle(a_1b) =$$

$$= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle(ab)) = 180° - \frac{1}{2}(180° - x) = 90° + \frac{x}{2},$$

$$\angle(cc_1) = \angle(ac_1) - \angle(ac) = 90° + \frac{x}{2} - \frac{x}{2} = 90°.$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай бурчаклар қўшни бурчаклар дейилади?
2. 23- расмда DCA ва DCB бурчаклар қўшни бурчаклар эканини тушунтиринг.
3. Қўшни бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг эканини исботланг.
4. Агар иккита бурчак тенг бўлса, уларга қўшни бурчаклар ҳам тенг эканини исботланг.
5. Қандай бурчак тўғри (ўткир, ўтмас) бурчак дейилади?
6. Тўғри бурчакка қўшни бурчак тўғри бурчак бўлишини исботланг.
7. Қандай бурчаклар вертикал бурчаклар дейилади?
8. Вертикал бурчакларнинг тенглигини исботланг.

9. Агар иккита тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил қилинган бурчаклардан биттаси тўғри бурчак бўлса, қолган учта бурчакнинг ҳам тўғри бурчак бўлишини исботланг.
10. Қандай тўғри чизиқлар перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади? Тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигини белгилаш учун қандай белгидан фойдаланилади?
11. Тўғри чизиққа перпендикуляр нима?
12. Тўғри чизиқнинг ҳар қандай нуқтасидан унга битта ва фақат битта перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.
13. Тескарисидан исботлаш нималигини тушунтириб беринг.
14. Битта ярим текисликка қўйилган бурчаклар ҳақидаги теоремани исботланг.
15. Бурчакнинг биссектрисаси деб нимага айтилади?

МАШҚЛАР

1. Ушбу бурчакларга қўшни бурчакларни топинг: 1) 30°, 2) 45°, 3) 60°, 4) 90°.
2. Иккита қўшни бурчакнинг иккаласи ҳам: 1) ўткир бурчаклар; 2) ўтмас бурчаклар; 3) тўғри бурчаклар бўла оладими? Жавобингизни асосланг.
3. Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан икки марта катта бўлса, шу қўшни бурчакларни топинг.
4. 1) Қўшни бурчаклардан бири иккинчисидан 30° катта бўлса; 2) уларнинг айирмаси 40° га тенг бўлса; 3) уларнинг бири иккинчисидан 3 марта кичик бўлса, шу қўшни бурчакларни топинг.
5. Қўшни бурчакларнинг градус ўлчовлари қуйидаги муносабатларда бўлса, шу қўшни бурчакларни топинг: 1) 2:3; 2) 3:7; 3) 11:25; 4) 22:23.
6. Икки тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил қилинган бурчакларнинг бири 30° га тенг. Қолган бурчаклар нимага тенг?
7. Берилган бурчакка қўшни иккита бурчакнинг йиғиндиси 100° га тенг бўлса, берилган бурчак нимага тенг?
8. Иккита тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил қилинган бурчаклардан иккитасининг йиғиндиси 50° га тенг. Шу бурчакларни топинг.
9. Иккита тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил қилинган бурчакларнинг бири иккинчисидан 4 марта катта. Шу бурчакларни топинг.
10. Иккита тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган бурчаклардан бири иккинчисидан 50° кичик. Шу бурчакларни топинг.
11. Иккита тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган бурчаклардан учтасининг йиғиндиси 270° га тенг, шу бурчакларни топинг.
12. Иккита тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил қилинган тўртта бурчакдан учтаси тенг бўлса, тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлишини исботланг.

13. Агар: 1) $\angle(ab) = 40°$, $\angle(ac) = 50°$; 2) (ac) ва (bc) бурчаклар ўтмас бурчаклар бўлса, c нур (ab) бурчакнинг томонлари орасидан ўтадими?

14. (aa_1) ёйиқ бурчакнинг учидан битта ярим текисликка b ва c нурлар ўтказилган. Агар: 1) $\angle(ab) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 2) $\angle(a_1b) = 50°$, $\angle(ac) = 70°$; 3) $\angle(ab) = 60°$, $\angle(a_1c) = 30°$ бўлса, (bc) бурчак нимага тенг?

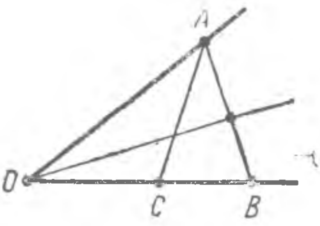
15. (aa_1) ёйиқ бурчакнинг учидан битта ярим текисликка b ва c нурлар ўтказилган. $\angle(ab) = 60°$, $\angle(ac) = 30°$ экани маълум. (a_1b), (a_1c) ва (bc) бурчакларни топинг.

16. AB ярим тўғри чизиқдан турли ярим текисликларга $\angle BAC = 60°$ ва $\angle BAD = 70°$ бурчаклар қўйилган. CAD бурчакни топинг.

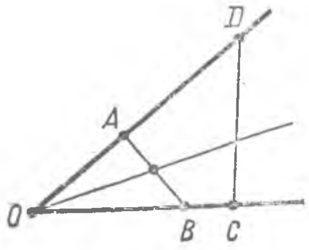
17. AB ярим тўғри чизиқдан турли ярим текисликларга BAC ва BAD бурчаклар қўйилган. Агар: 1) $\angle BAC = 80°$, $\angle BAD = 170°$; 3) $\angle BAC = 87°$, $\angle BAD = 98°$; 3) $\angle BAC = 140°$, $\angle BAD = 30°$ бўлса, CAD бурчакни топинг.

18. 1) 30°; 2) 52°; 3) 172° га тенг бурчакнинг биссектрисаси билан томони орасидаги бурчаги нимага тенг?

19. Бурчакнинг биссектрисаси унинг томони билан: 1) 60°; 2) 75°; 3) 89° ли бурчак ташкил қилса, бурчакнинг ўзини топинг.



34-расм.



35-расм.

20. Қўшни бурчакларнинг биссектрисалари орасидаги бурчакни топинг.

21. Вертикал бурчакларнинг биссектрисалари бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

22. Берилган бурчак: 1) 50°; 2) 90°; 3) 150° га тенг бўлса, шу бурчакнинг биссектрисаси билан томонларидан бирининг давоми орасидаги бурчакни топинг.

23. Агар бурчакнинг учидан чиққан нур охирлари бурчакнинг томонларида ётган AB кесмани кесиб ўтса, у ҳолда бу кесма: 1) охирлари бурчак томонларида ётган AC кесмани (34- расм); 2) охирлари шу бурчакнинг томонларида ётган бошқа ҳар қандай CD кесмани кесиб ўтади (35- расм). Шуни исботланг.

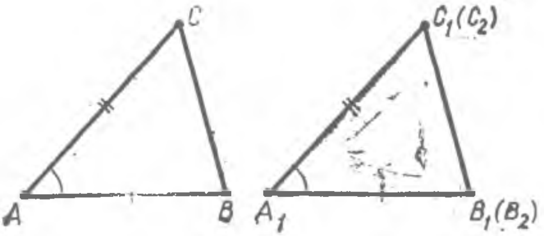
3-§. УЧБУРЧАКЛАРНИНГ ТЕНГЛИК АЛОМАТЛАРИ

УЧБУРЧАКЛАР ТЕНГЛИГИНИНГ БИРИНЧИ АЛОМАТИ

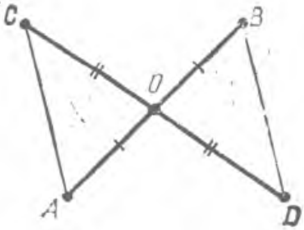
3.1-теорема (учбурчакларнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича тенглик аломати). ***Агар бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.***

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $\angle A = \angle A_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ бўлсин (36- расм). Учбурчакларнинг тенглигини, яъни уларда $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $BC = B_1C_1$ эканини исботлаймиз.

Берилган учбурчакка тенг учбурчакнинг мавжудлиги ҳақидаги аксиомага биноан ABC учбурчакка тенг $A_1B_2C_2$ учбурчак мавжуд, унинг B_2 учи A_1B_1 нурда, C_2 учи эса A_1B_1 тўғри чизиққа нисба-



36-расм.



37-расм.

тан C_1 уч билан битта ярим текисликда ётади. $A_1B_1 = A_1B_2$ бўлгани учун, кесмаларни қўйиш аксиомасига биноан, B_2 нуқта B_1 нуқта билан устма-уст тушади. $\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ бўлгани учун бурчакларни қўйиш аксиомасига биноан A_1C_2 нур A_1C_1 нур билан устма-уст тушади. Худди шундай $A_1C_1 = A_1C_2$ бўлгани учун C_2 уч C_1 уч билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, $A_1B_1C_1$ учбурчак $A_1B_2C_2$ учбурчак билан устма-уст тушади, демак, ABC учбурчакка тенг. Теорема исботланди.

Масала (1). AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишишади, бу O нуқта ҳар қайси кесманинг ўртаси. $AC = 10$ м бўлса, BD кесма нимага тенг?

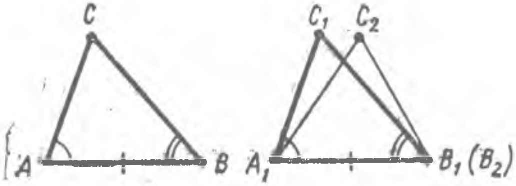
Ечилиши. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра AOC ва BOD учбурчаклар тенг (37- расм). Уларда AOC ва

BOD бурчаклар вертикал бурчаклар бўлгани учун тенг, $OA = OB$, $OC = OD$, чунки O нуқта AB ва CD кесмаларнинг ўртаси. AOC ва BOD учбурчакларнинг тенглигидан уларнинг AC ва BD томонлари тенглиги келиб чиқади. Масала шартига кўра $AC = 10$ м, шунинг учун $BD = 10$ м.

УЧБУРЧАКЛАР ТЕНГЛИГИНИНГ ИККИНЧИ АЛОМАТИ

3.2-теорема (учбурчакларнинг бир томони ва унга ёпишган бурчаклари бўйича тенглик аломати). ***Агар бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган бурчаклари бошқа учбурчакнинг мос томони ва унга ёпишган бурчакларига тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.***

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ иккита учбурчак бўлиб, уларда $AB = A_1B_1, \angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_1$ бўлсин (38- расм). Учбурчакларнинг тенглигини, яъни $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ ва $\angle C = \angle C_1$ эканини исботлаймиз.

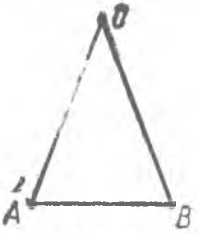


38-расм.

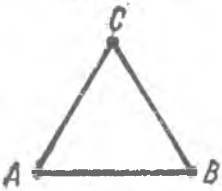
Берилган учбурчакка тенг учбурчакнинг мавжудлиги ҳақидаги аксиомага кўра ABC учбурчакка тенг $A_1B_2C_2$ учбурчак мавжудки, бу учбурчакнинг B_2 учи A_1B_1 нурда ётади, C_2 учи эса A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан C_1 уч билан битта ярим текисликда ётади. $A_1B_2 = A_1B_1$ бўлгани учун B_2 уч B_1 уч билан устма-уст тушади. $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ ва $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$ бўлгани учун, бурчакларни қўйиш аксиомасига кўра, A_1C_1 нур A_1C_2 нур билан, B_1C_1 нур эса B_1C_2 нур билан устма-уст тушади. Бундан C_2 учнинг C_1 уч билан устма-уст тушиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $A_1B_1C_1$ учбурчак $A_1B_2C_2$ учбурчак билан устма-уст тушади, демак, у ABC учбурчакка тенг. Теорема исботланди.

ТЕНГ ЁНЛИ УЧБУРЧАК

Агар учбурчакнинг икки томони тенг бўлса, у *тенг ёнли учбурчак* дейилади. Бу тенг томонлар учбурчакнинг *ён томонлари*, учинчи томони эса *учбурчакнинг асоси* дейилади.



39-расм.



40-расм.

39- расмда ABC тенг ёнли учбурчак тасвирланган. AC ва BC унинг ён томонлари, AB томон эса асоси.

3.3- теорема. ***Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклари тенг.***

Исботи. ABC — асоси AB бўлган тенг ёнли учбурчак бўлсин (39- расм). $\angle A = \angle B$ эканини исботлаймиз. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра CAB учбурчак CBA учбурчакка тенг. Ҳақиқатан, $CA = CB$, $CB = CA$, $\angle C = \angle C$. Учбурчакларнинг тенглигидан: $\angle A = \angle B$. Теорема исботланди.

Ҳамма томонлари тенг учбурчак *тенг томонли учбурчак* деб аталади.

Масала (13). Тенг томонли учбурчакнинг ҳамма бурчаклари тенг эканини исботланг.

Ечилиши. ABC берилган тенг томонли учбурчак бўлсин: $AB = BC = CA$ (40- расм). Шартга кўра $AB = BC$, демак, бу учбурчак AB асосли тенг ёнли учбурчакдир. 3.3- теоремага кўра $\angle C = \angle A$. Шунинг сингари $BC = CA$, демак, ABC учбурчак AB асосли тенг ёнли учбурчакдир. 3.3- теоремага кўра $\angle A = \angle B$. Шундай қилиб, $\angle C = \angle A = \angle B$, яъни учбурчакнинг ҳамма бурчаклари тенг.

3.4- теорема. ***Учбурчакнинг иккита бурчаги тенг бўлса, бу учбурчак тенг ёнли бўлади.***

Исботи. ABC учбурчакда $\angle A = \angle B$ бўлсин (39- расмга қаранг). Бу учбурчакнинг асоси AB дан иборат тенг ёнли учбурчак эканини исботлаймиз. Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра ABC учбурчак BAC учбурчакка тенг. Ҳақиқатан, $AB = BA$, $\angle B = \angle A$, $\angle A = \angle B$. Учбурчакларнинг тенглигидан: $AC = BC$. Теорема исботланди.

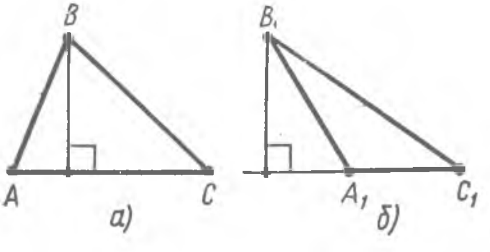
3.4- теорема 3.3- теоремага *тескари теорема* дейилади. 3.3- теореманинг хулосаси 3.4- теореманинг шартидир. 3.3- теореманинг шарти эса 3.4- теореманинг хулосасидир. Ҳар қандай теорема учун ҳам тескари теорема мавжуд бўлавермайди, яъни берилган теорема тўғри бўлса, унга тескари теорема тўғри бўлмаслиги мумкин. Буни вертикал бурчаклар ҳақидаги теорема мисолида тушунтирамиз. Бу теоремани бундай ифодалаш мумкин: агар иккита бурчак вертикал бурчаклар бўлса, улар тенг. Унга тескари теорема бундай бўлар эди: агар иккита бурчак тенг бўлса, улар вертикал бурчаклардир. Бу эса, албатта, нотўғри. Иккита тенг бурчак умуман вертикал бурчаклар бўлиши шарт эмас.

Масала (14). 13-масала талабига тескари теоремани ифодаланг ва уни исботланг.

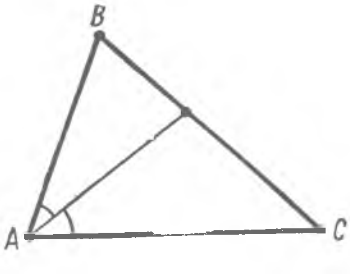
Ечилиши. 13-масала шарти шундан иборатки, унда учбурчак тенг томонли, яъни учбурчакнинг ҳамма томонлари тенг, масала хулосасида эса учбурчакнинг ҳамма бурчаклари тенг дейилган. Шу сабабли тескари теорема бундай ифодаланиши керак. Ҳамма бурчаклари тенг учбурчакнинг ҳамма томонлари тенг бўлади. Шу теоремани исботлаймиз. ABC — бурчаклари тенг учбурчак бўлсин: $\angle A = \angle B = \angle C$. Бу ерда $\angle A = \angle B$ бўлгани учун 3.4- теоремага кўра $AC = CB$. $\angle B = \angle C$, демак, 3.4- теоремага кўра $AC = AB$. Шундай қилиб, $AB = AC = CB$, яъни учбурчакнинг ҳамма томонлари тенг.

УЧБУРЧАКНИНГ МЕДИАНАСИ, БИССЕКТРИСАСИ ВА БАЛАНДЛИГИ

Учбурчакнинг берилган учидан туширилган *баландлиги* деб учбурчакнинг шу учидан унинг қаршисидаги томони ётган тўғри чизиққа туширилган перпендикулярга айтилади. 41- расмда сиз иккита учбурчакни кўриб турибсиз, бу учбурчакларнинг баландликлари B ва B_1 учларидан туширилган. 41- *а* расмда баландлик-



41- расм.



42- расм.

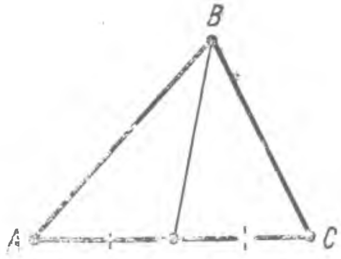
нинг асоси учбурчак томонида ётибди, 41- *б* расмда эса учбурчак томонининг давомида ётибди.

Учбурчакнинг берилган учидан ўтказилган *биссектрисаси* деб учбурчак бурчаги биссектрисасининг шу учни унинг қарши томондаги нуқта билан туташтирувчи кесмасига айтилади (42- расм).

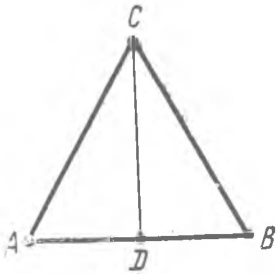
Учбурчакнинг берилган учидан туширилган *медианаси* деб учбурчакнинг шу учини унинг қаршисидаги томон ўртаси билан туташтирувчи кесмага айтилади (43- расм).

3.5 - теорема. ***Тенг ёнли учбурчакнинг асосга ўтказилган медианаси ҳам баландлик, ҳам биссектрисасидир.***

Исботи. ABC — асоси AB бўлган берилган тенг ёнли учбурчак бўлсин (44- расм). CD — асосга ўтказилган медиана бўлсин. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра CAD ва CBD учбурчаклар тенг. (Уларнинг AC ва BC томонлари тенг, чунки ABC учбурчак тенг ёнлидир. 3.3- теоремага кўра CAD ва CBD бурчаклар тенг. AD ва BD томонлар тенг, чунки D нуқта AB кесманинг ўртаси.)



43- расм.



44- расм.

Учбурчакларнинг тенглигига асосан ушбу бурчаклар тенг: $\angle ACD = \angle BCD$, $\angle ADC = \angle BDC$. ACD ва BCD бурчаклар тенг бўлгани учун CD — биссектриса. ADC ва BDC қўшни ва тенг бурчаклар, демак, улар тўғри бурчаклардир, шунга кўра CD — учбурчакнинг баландлиги. Теорема исботланди.

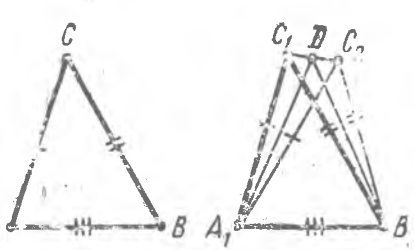
Масала (27). Тенг ёнли учбурчакнинг асоси қаршисидаги учидан ўтказилган биссектрисаси баландлик ва медиана эканини исботланг.

Ечилиши. ABC асоси AB бўлган тенг ёнли учбурчак ва CD унинг биссектрисаси бўлсин (44- расмга қ.). Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра ACD ва BCD учбурчаклар тенг. (Уларнинг AC ва BC томонлари ABC тенг ёнли учбурчакнинг ён томонлари бўлгани учун тенг; CD эса ACB бурчакнинг биссектрисаси эканлиги учун C учидаги бурчаклар тенг, A ва B учлардаги бурчаклар ABC тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаклар эканлиги учун тенг.) Учбурчакларнинг тенглигидан AD ва BD томонлар тенг деган хулоса чиқади. Демак, CD — ABC учбурчакнинг медианаси. 3.5- теоремага биноан у баландлик ҳамдир.

УЧБУРЧАКЛАР ТЕНГЛИГИНИНГ УЧИНЧИ АЛОМАТИ

3.6- теорема (учбурчакларнинг учта томонларига кўра тенглик аломати). ***Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.***

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар шундай иккита учбурчакки, уларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ (45- расм). Бу учбурчакларнинг тенглигини исботлаймиз.

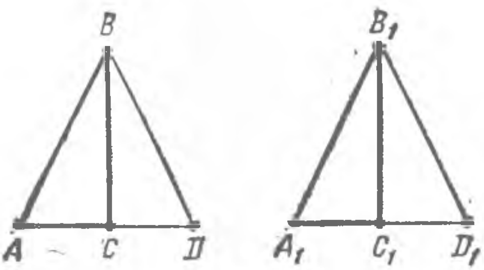


45- расм.

Берилган учбурчакка тенг учбурчакнинг мавжудлиги ҳақидаги аксиомага биноан ABC учбурчакка тенг $A_1B_1C_2$ учбурчак мавжуд. Бу учбурчакнинг C_2 учи A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан C_1 уч билан битта ярим текисликда ётади (45- расм).

C_2 уч A_1C_1 нурда ҳам, B_1C_1 нурда ҳам ётмайди деб фараз қилайлик. D нуқта C_1C_2 кесманинг ўртаси бўлсин. $A_1C_1C_2$ ва $B_1C_1C_2$ учбурчаклар умумий C_1C_2 асосли тенг ёнли учбурчаклардир. 3.5- теоремага кўра уларнинг A_1D ва B_1D медианалари баландликлардир. Демак, A_1D ва B_1D тўғри чизиқлар C_1C_2 тўғри чизиққа перпендикуляр. C_1C_2 тўғри чизиқнинг D нуқтаси орқали унга перпендикуляр биттагина тўғри чизиқ ўтказиш мумкин (2.3- теорема), шу сабабли бу тўғри чизиқлар устма-уст тушиши керак. Аммо бу тўғри чизиқлар турли, чунки ясашга кўра D нуқта A_1B_1 тўғри чизиқда ётмайди. Биз зидликка келдик. Демак, C_2 уч ё A_1C_1 нурда ёки B_1C_1 нурда ётади. Биринчи ҳолда C_2 нуқта C_1 нуқта билан устма-уст тушади, чунки $A_1C_1 = AC$. Бу эса ABC учбурчакнинг $A_1B_1C_1$ учбурчакка тенг эканини билдиради. Иккинчи холда ҳам учбурчакларнинг тенглигига худди шунга ўхшаш келамиз. Теорема исботланди.

Масала (28). ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90°$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ эканини исботланг.



46- расм.

Ечилиши. AC томоннинг давомига AC га тенг CD кесмани қўямиз (46- расм). Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ABC ва DBC учбурчаклар тенг. Уларнинг C учдаги бурчаклари тўғри (90°), демак, улар тенг, BC умумий томон, AC ва CD томонлар ясалишига кўра тенг. Учбурчакларнинг тенглигига асосан AB ва DB томонлар тенг.

A_1C_1 томоннинг давомига A_1C_1 томонга тенг C_1D_1 кесмани қўямиз. ABC ва DBC учбурчаклар билан иш кўрганимиз сингари $A_1B_1C_1$ ва $D_1B_1C_1$ учбурчакларнинг тенглигини исботлаймиз. Учбурчакларнинг тенглиги сабабли томонлар тенг: $A_1B_1 = D_1B_1$.

Энди учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра ABD ва $A_1B_1D_1$ учбурчакларнинг тенглиги ҳақида хулоса чиқарамиз. Бу учбурчакларда шартга кўра $AB = A_1B_1$, $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$ бўлгани учун $BD = B_1D_1$, ниҳоят, $AC = A_1C_1$ бўлгани учун $AD = A_1D_1$. ABD ва $A_1B_1D_1$ учбурчакларнинг тенглигидан улар бурчаклари тенг: $\angle A = \angle A_1$.

Энди учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра берилган ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг тенглиги ҳақидаги хулосага келамиз. Уларда шартга кўра $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, исботга кўра $\angle A = \angle A_1$.

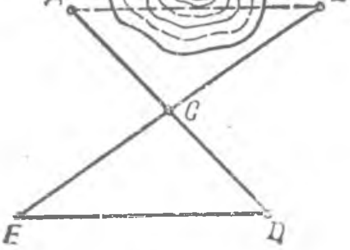
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатини ифодаланг ва исботланг.
2. Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатини ифодаланг ва исботланг.
3. Қандай учбурчак тенг ёнли учбурчак дейилади? Тенг ёнли учбурчакнинг қандай томонлари ён томонлар дейилади? Қандай томон асос деб аталади?
4. Тенг ёнли учбурчак асосидаги бурчаклар тенг эканини исботланг.
5. Қандай учбурчак тенг томонли учбурчак дейилади?
6. Учбурчакнинг иккита бурчаги тенг бўлса, унинг тенг ёнли учбурчак бўлишини исботланг.

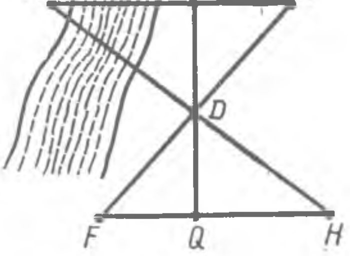
7. Тескари теорема нималигини тушунтиринг. Мисол келтиринг. Ҳар қандай теорема учун ҳам тескари теорема тўғрими?
8. Учбурчакнинг баландлиги нима?
9. Учбурчакнинг биссектрисаси нима?
10. Учбурчакнинг медианаси нима?
11. Тенг ёнли учбурчак асосига ўтказилган медиана ҳам биссектриса, ҳам баландлик бўлишини исботланг.
12. Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатини исботланг.

МАШҚЛАР

1. AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишади, бу O нуқта шу кесмалардан ҳар бирининг ўртаси. Агар AC кесма 10 м бўлса, BD кесма нимага тенг?
2. AB кесманинг ўртасидан AB тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси A ва B нуқталардан бир хил узоқлашганини исботланг.
3. Асоси AB бўлган тенг ёнли ABC учбурчакнинг C учидан тенг кесмалар қўйилган: CA томонга CA_1 кесма, CB томонга CB_1 кесма. 1) CAB_1 ва BA_1C; 2) AB_1B, ва BAA_1 учбурчакларнинг тенглигини исботланг.
4. Тенг ёнли ABC учбурчакнинг AB асосида A_1 ва B_1 нуқталар берилган. $AB_1 = BA_1$ экани маълум. AB_1C ва BA_1C учбурчакларнинг тенглигини исботланг.
5. ABC учбурчакнинг AB томонида D нуқта, $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг A_1B_1 томонида эса D_1 нуқта олинган. ADC ва $A_1D_1C_1$ учбурчаклар тенг ҳамда DB ва D_1B_1 кесмалар тенг экани маълум. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг тенглигини исботланг.
6. Ер устида A ва B нуқталар орасидаги тўғри чизиқ бўйлаб бориб бўлмайдиган масофани ўлчаш учун (47- расм) шундай C нуқта танланадики, ундан A нуқтага ҳам, B нуқтага ҳам бориш мумкин ва ундан иккала нуқта ҳам кўриниб туради. AC ва BC масофалар тортилади, яъни AC ва BC йўналишлари қозиқлар билан белгиланади, уларни C нуқтадан нарига давом эттирилади ҳамда $CD = AC$ ва $EC = CB$ кесмалар ўл-



47- расм.



48- расм.

чанади. У ҳолда ED кесма изланаётган масофага тенг бўлади. Нега шундай эканини тушунтиринг.

7 Ер устида бирига (A нуқтага) бориб бўлмайдиган иккита A ва B нуқта орасидаги масофани ўлчаш учун AB кесманинг йўналишини қозиқлар билан белгиланади (48- расм) ва унинг давомида ихтиёрий BE кесма ўлчанади. Ер устида шундай D нуқта танланадики, ундан A нуқта кўриниб туради ҳамда B ва E нуқталарга бориб бўлади. BDQ ва EDF тўғри чизиқлар тортилади ҳамда $FD = DE$ ва $DQ = BD$ кесмалар ўлчанади. Сўнгра FQ тўғри чизиқ бўйлаб A га қараб, AD тўғри чизиқда ётувчи H нуқтани топгунча борилади. У ҳолда HQ изланаётган масофага тенг бўлади. Шуни исботланг.

8. AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишади. Агар ACO бурчак DBO бурчакка тенг экани ва $BO = CO$ экани маълум бўлса, ACO ва DBO учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

9. AC ва BD кесмалар O нуқтада кесишади. Агар BAO бурчак DCO бурчакка тенг экани ва $AO = CO$ экани маълум бўлса, BAO ва DCO учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

10. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри (томонлари узунликларининг йиғиндиси) 1 м, асосининг узунлиги эса 0,4 м. Ён томони узунлигини топинг.

11. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 7,5 м, ён томони эса 2 м. Асосини топинг.

12. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 15,6 м га тенг. Агар: 1) асоси ён томонидан 3 м кам бўлса; 2) асоси ён томонидан 3 м катта бўлса, унинг томонларини топинг.

13. Тенг томонли учбурчакнинг ҳамма бурчаклари тенг эканини исботланг.

14. 13- масалага тескари теоремани ифодаланг ва исботланг.

15. ABC учбурчакнинг AC ва BC томонларида C_1 ва C_2 нуқталар олинган. Агар ABC_1 ва BAC_2 учбурчаклар тенг бўлса, ABC учбурчак тенг ёнли учбурчак эканини исботланг.

16. ACC_1 ва BCC_1 учбурчаклар тенг. Уларнинг A ва B учлари CC_1 тўғри чизиқдан турли томонда ётади. ABC ва ABC_1 учбурчаклар тенг ёнли учбурчаклар эканини исботланг.

17. Тенг ёнли учбурчак томонларининг ўрталари яна тенг ёнли учбурчакнинг учлари эканини исботланг.

18. Тенг томонли учбурчак томонларининг ўрталари яна тенг томонли учбурчакнинг учлари бўлишини исботланг.

19. Тенг ёнли учбурчакда: 1) асосдаги бурчаклардан ўтказилган биссектрисалар тенглигини; 2) шу учлардан чиқарилган медианалар ҳам тенглигини исботланг.

20. ABC ва $A_1B_1C_1$ тенг учбурчакларда: 1) A ва A_1 учлардан ўтказилган медианалар тенглигини; 2) A ва A_1 учлардан ўтказилган биссектрисалар тенглигини исботланг.

21. A, B, C, D нуқталар бир тўғри чизиқда ётади, шу билан бирга AB, CD кесмаларнинг ўртаси умумий. Агар ABE учбурчак асоси AB дан иборат тенг ёнли учбурчак бўлса, у ҳолда CDE

учбурчак ҳам асоси CD дан иборат тенг ёнли учбурчак эканлигини исботланг.

22. Учбурчакларнинг бир бурчаги, шу бурчак биссектрисаси ва шу бурчакка ёпишган томонига кўра тенг бўлишини исботланг.

23. Асоси AC дан иборат тенг ёнли ABC учбурчакда BM медиана ўтказилган. Унда D нуқта олинган. 1) ABD ва CBD, 2) AMD ва CMD учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

24. Агар ABC учбурчакда: 1) BD медиана баландлик бўлса; 2) BD баландлик биссектриса бўлса, шу учбурчакнинг тенг ёнли эканини исботланг.

25. Асослари умумий бўлган иккита тенг ёнли учбурчак берилган. Бу учбурчакларнинг асосга ўтказилган медианалари битта тўғри чизиқда ётишини исботланг.

26. Асоси AC дан иборат тенг ёнли ABC учбурчакда BD медиана ўтказилган. ABC учбурчакнинг периметри 50 м га, ABD учбурчакники эса 40 м га тенг бўлса, шу медиана узунлигини топинг.

27. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси қаршисидаги учидан ўтказилган биссектрисаси ҳам медиана, ҳам баландлик эканини исботланг.

28. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда: $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = \angle C_1 = 90^\circ$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ эканини исботланг.

29. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига туширилган баландлик ҳам медиана, ҳам биссектриса бўлишини исботланг.

30. ABC ва ABC_1 учбурчаклар умумий асослари AB дан иборат тенг ёнли учбурчаклардир. ACC_1 ва BCC_1 учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

31. A, B, C, D нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Агар ABE_1 ва ABE_2 учбурчаклар тенг бўлса, CDE_1 ва CDE_2 учбурчаклар ҳам тенг бўлишини исботланг.

32. AB ва CD иккита кесма O нуқтада кесишади, бу O нуқта улардан ҳар бирининг ўртаси. ACD ва BDC учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

33. Учбурчакларнинг тенглигини уларнинг икки томони ва шу томонлардан бирига ўтказилган медианаси бўйича исботланг.

34. AB ва CD кесмалар кесишади. Агар AC, CB, BD ва AD кесмалар тенг бўлса, AB нур CAD бурчакнинг биссектрисаси, CD нур эса ACB бурчакнинг биссектрисаси эканини исботланг.

35. 34- масалада AB ва CD тўғри чизиқларнинг перпендикуляр эканини исботланг.

36. ABC ва BAD учбурчаклар тенг, шу билан бирга C ва D нуқталар AB тўғри чизиқдан турли томонда ётади. 1) CBD ва DAC учбурчакларнинг тенглигини; 2) CD тўғри чизиқ AB кесмани тенг иккига бўлишини исботланг.

37. Узунликлари тенг бўлган AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишади ва бунда $AO = OD$ тенглик бажарилади. ABC ва DCB учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

38. Учбурчакларнинг тенглигини уларнинг икки томони ва учларидан биридан чиқувчи медианаси бўйича исботланг.

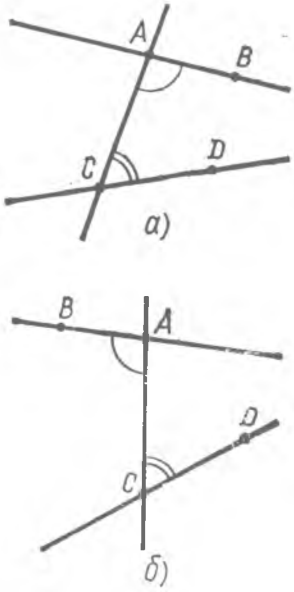
39. Учбурчакларнинг тенглигини уларнинг бир томони, шу томонига ўтказиладиган медианаси, медиананинг шу томон билан ҳосил қилган бурчаклари бўйича исботланг.

40. Учбурчакларнинг тенглигини уларнинг медианаси ва шу медиана учбурчак бурчагидан ажратган бурчаклари бўйича исботланг.

4- §. УЧБУРЧАК БУРЧАКЛАРИНИНГ ЙИҒИНДИСИ
ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ПАРАЛЛЕЛЛИК АЛОМАТЛАРИ

4.1-теорема. ***Учинчи тўғри чизиққа параллел иккита тўғри чизиқ ўзаро параллел бўлади.***

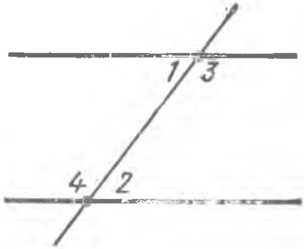
Исботи. a ва b тўғри чизиқлар c тўғри чизиққа параллел бўлсин. a ва b тўгри чизиқлар параллел эмас деб фараз қилайлик. У ҳолда бу тўғри чизиқлар бирор C нуқтада кесишади. Демак, C нуқта орқали c тўғри чизиққа параллел иккита тўғри чизиқ ўтади. Аммо бундай бўлиши мумкин эмас, чунки берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқтадан унга биттагина параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин. Теорема исботланди.



49- расм.

AB ва CD иккита тўғри чизиқ, AC эса уларни кесувчи учинчи тўғри чизиқ бўлсин (49-расм). AC тўғри чизиқ AB ва CD тўғри чизиқларга нисбатан *кесувчи* деб аталади. AB ва CD тўғри чизиқларнинг AC кесувчи билан кесишишидан ҳосил қилинган бурчаклар махсус номларга эга. Агар B ва D нуқталар AC тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда ётса, у ҳолда BAC ва DCA бурчаклар *ички бир томонли бурчаклар* дейилади (49-*а* расм). Агар B ва D нуқталар AC тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётса, BAC ва DCA бурчаклар *ички алмашинувчи бурчаклар* дейилади (49-*б* расм).

AC кесувчи AB ва CD тўғри чизиқлар билан икки жуфт ички бир томонли бурчак ва икки жуфт ички алмашинувчи бурчаклар ҳосил қилади. Қўшни бурчакларнинг хоссасидан қуйидаги натижа чиқади: ***агар бир жуфтдаги ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса, у ҳолда иккинчи жуфтдаги ички алмашинувчи бурчаклар ҳам тенг бўлади, ҳар қайси жуфтдаги ички бир томонли бурчаклар йиғиндиси 180° га тенг бўлади.*** Аксинча, ***агар бир жуфтдаги ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, иккинчи жуфтдаги ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси ҳам 180° га тенг бўлади, ҳар қайси жуфтдаги ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлади.*** Биринчи даъвони тушунтирамиз.

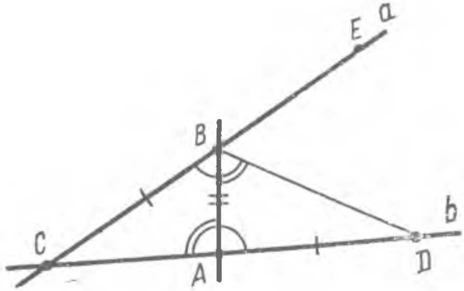


50- расм.

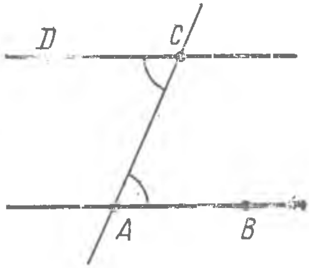
50-расмга қаранг. Агар ички алмашинувчи *1* ва *2* бурчаклар тенг бўлса, ички алмашинувчи *3* ва *4* бурчаклар ҳам *1* ва *2* бурчакларга қўшни бурчаклар сифатида тенг бўлади. *1* ва *4* бурчаклар ички бир томонли бурчаклардир. *4* бурчак *2* бурчакни 180° га тўлдирувчи, *2* бурчак эса *1* бурчакка тенглиги учун *1* ва *4* бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг.

4.2-теорема. ***Агар ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса ёки ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, тўғри чизиқлар параллел бўлади*** (50-расм).

Исботи. a ва b тўғри чизиқлар параллел бўлмасин; демак, улар бирор C нуқтада кесишади (51-расм). CA кесманинг давомига BC кесмага тенг AD кесмани қўямиз, CB кесманинг давомида эса бирор E нуқтани белгилаймиз. Учбурчаклар тенглигининг биринчи



51- расм.



52- расм.

аломатига кўра BAC ва ABD учбурчаклар тенг. Уларнинг AB томони умумий, CBA ва DAB бурчаклар теорема шартига кўра алмашинувчи бурчаклар сифатида тенг, ясашга кўра эса $AD=BC$.

Учбурчакларнинг тенглигига асосан ABD ва BAC бурчаклар тенг. BAC бурчак эса ABE алмашинувчи бурчакка тенг. Шундай қилиб, ABD ва ABE бурчаклар тенг. Улар BA ярим тўғри чизиқдан бошлаб битта ярим текисликка қўйилгани учун BD ва BE тўғри чизиқлар устма-уст тушади. Аммо бу ҳолнинг юз бериши мумкин эмас, чунки D нуқта BE тўғри чизиқда ётмайди. Шундай қилиб, a ва b тўғри чизиқлар параллел эмас деган олдинги фаразимиз нотўғри. Теорема исботланди.

4.1 ва 4.2-теоремалар *тўғри чизиқларнинг параллеллик аломатларини* ифодалайди.

Масала (3). AB тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ётмайдиган C нуқта берилган. C нуқта орқали AB тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

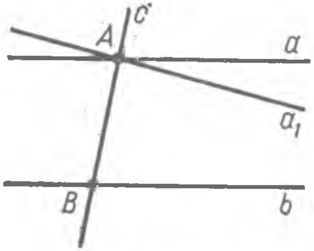
Ечилиши. AC тўғри чизиқ текисликни иккита ярим текисликка ажратади (52-расм). B нуқта шулардан бирида ётади. CA ярим тўғри чизиқдан иккинчи ярим текисликка CAB бурчакка тенг ACD бурчакни қўямиз. У ҳолда AB ва CD тўғри чизиқлар параллел бўлади. Ҳақиқатан ҳам, бу тўғри чизиқлар ва AC кесувчи учун BAC ва DCA бурчаклар ички алмашинувчи бурчаклардир. Уларнинг тенглиги учун 4.2-теоремага кўра AB ва CD тўғри чизиқлар параллелдир.

3-масала тасдиғи билан V аксиомани (параллел тўғри чизиқларнинг асосий хоссасини) таққослаб, муҳим хулосага келамиз: ***берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқтадан унга параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат биргина.***

4.3-теорема (4.2-теоремага тескари теорема). ***Агар иккита параллел тўғри чизиқ учинчи тўғри чизиқ билан кесилса, у ҳолда ички алмашинувчи бурчаклар тенг, ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси эса 180° га тенг бўлади.***

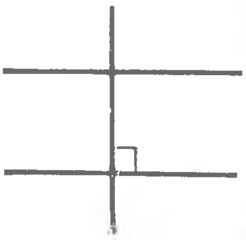
Исботи. a ва b параллел тўғри чизиқлар, c эса уларни кесувчи тўғри чизиқ бўлсин. A нуқта орқали a_1 тўғри чизиқни шундай ўтказамизки, c кесувчи билан a ва b тўғри чизиқлар ҳосил қилган ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлсин (53-расм). У ҳолда a_1 тўғри чизиқ 4.2-теоремага кўра b тўғри чизиққа параллел бўлади. Аммо A нуқта орқали b

тўғри чизиққа параллел биттагина тўғри чизиқ ўта и. Демак, a тўғри чизиқ a_1 тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, c кесувчи билан a ва b параллел тўғри чизиқлар ҳосил қилган ички бир томонли бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг, демак, алмашинувчи бурчаклар тенг. Теорема исботланди.

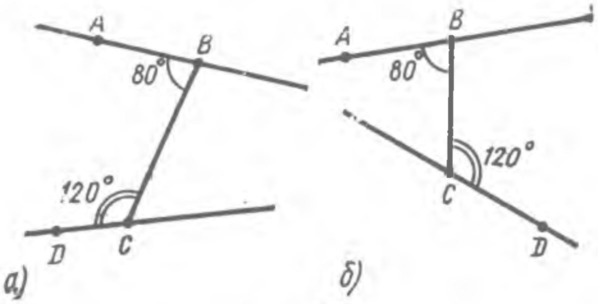


53- расм.

4.2. ва 4.3- теоремадан ушбу хулоса чиқарамиз: ***учинчи тўғри чизиққа перпендикуляр иккита тўғри чизиқ параллелдир. Агар тўғри чизиқ параллел тўғри чизиқлардан бирига перпендикуляр бўлса, у иккинчи тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр бўлади*** (54-расм).



54- расм.



55- расм.

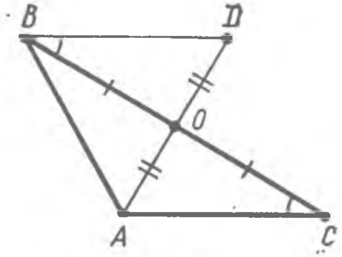
Масала (7). ABC бурчак 80° га тенг, BCD бурчак эса 120° га тенг. AB ва CD тўғри чизиқлар параллел бўла оладими? Жавобингизни асосланг.

Ечилиши. AB ва CD тўғри чизиқлар ҳамда BC кесувчи учун ABC ва BCD бурчаклар ё ички бир томонли (55-*а* расм), ёки ички алмашинувчи (55-*б* расм) бурчаклар бўлади. Агар AB ва CD тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар бўлганида эди ё $\angle ABC = \angle ABD$ бўлар эди, агар бурчаклар алмашинувчи бўлса, ёки $\angle ABC + \angle BCD = 180°$ бўлар эди, агар бурчаклар бир томонли бўлса. Аммо $80° \neq 120°$ ва $80° + 120° = 200° \neq 180°$. Демак, AB ва CD тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқлар бўла олмайди.

УЧБУРЧАК БУРЧАКЛАРИНИНГ ЙИҒИНДИСИ

4.4-теорема. ***Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси $180°$ га тенг.***

Исботи. ABC — берилган учбурчак бўлсин (56-расм). BC томоннинг ўртасини O билан белгилаймиз. AO кесма давомига OA кесмага тенг OD кесмани қўямиз. BOD ва COA учбурчаклар тенг, чунки уларнинг O учидаги бурчаклари вертикал бурчаклар сифатида тенг, ясашга кўра эса $OB = OC$, $OA = OD$. Учбурчакларнинг тенглигидан DBO бурчак ACO бурчакка тенглиги келиб чиқади.



56-расм.

AC, BD тўғри чизиқлар ва BC кесувчи учун DBO ва ACO бурчаклар ички алмашинувчи бурчаклардир. Ҳақиқатан ҳам, A ва D нуқталар BC тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётади, чунки AD кесма BC тўғри чизиқни (O нуқта) кесиб ўтади. Ички алмашинувчи DBO ва ACO бурчакларнинг тенглигидан 4.2-теоремага кўра AC ва BD тўғри чизиқлар параллел деган натижа чиқади.

AC, BD тўғри чизиқлар ва AB кесувчи учун DBA ва CAB бурчаклар ички бир томонли бурчаклардир. Ҳақиқатан ҳам, C ва D нуқталар AB тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда, яъни O нуқта ётган ярим текисликда ётади. AC ва BD тўғри чизиқлар параллел бўлгани учун ички бир томонли CAB ва DBA бурчакларнинг йиғиндиси $180°$ га тенг.

DBA бурчак DBC ва ABC бурчакларнинг йиғиндисига тенг, чунки BC нур охирлари ABD бурчак томонларида ётган AD кесмани кесиб ўтади. Исботланганига кўра DBC бурчак ACB бурчакка тенг. Демак, ABC учбурчак бурчакларининг йиғиндиси, яъни $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$ йиғинди AC ва BD параллел тўғри чизиқлар билан AB кесувчи ҳосил қилган ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндисига, яъни $180°$ га тенг. Теорема исботланди.

4.4-теоремадан, ***ҳар қандай учбурчакнинг ақалли иккита бурчаги ўткир бўлади,*** деган хулоса чиқади.

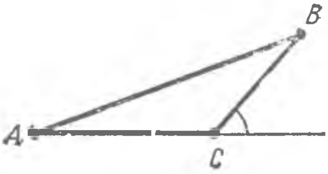
Исботи. Учбурчакнинг битта ўткир бурчаги бор ёки умуман ўткир бурчаги йўқ, деб фараз қилайлик. У ҳолда бу учбурчакнинг ҳар бири $90°$ дан кичик бўлмаган иккита бурчаги бўлади. Бу икки бурчак йиғиндисининг ўзи $180°$ дан кичик эмас. Бундай ҳол юз бериши мумкин эмас, чунки учбурчакнинг учала бурчагининг йиғиндиси 180° га тенг.

Масала (12). Тенг томонли учбурчакнинг бурчаклари нимага тенг?

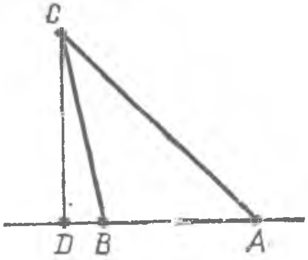
Ечилиши. Тенг томонли учбурчакнинг бурчаклари тенг бўлишини биз биламиз (3-§, 13-масала). Шу тенг бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенглиги учун, уларнинг ҳар бири 60° га тенг.

Учбурчакнинг берилган учидаги *ташқи бурчаги* деб учбурчакнинг шу учидаги бурчагига қўшни бурчакка айтилади (57-расм). Учбурчакнинг берилган учидаги бурчагини шу учидаги ташқи бурчаги билан аралаштириб юбормаслик учун *ички бурчак* деб аталади.

57-расм.



58-расм.



59-расм.

4.5-теорема. ***Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган иккита ички бурчак йиғиндисига тенг.***

Исботи. ABC—берилган учбурчак бўлсин (58-расм) 4.4-теоремага кўра: $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. Бундан $\angle A + \angle B = 180° - \angle C$. Бу тенгликнинг ўнг қисмида учбурчакнинг C учидаги ташқи бурчагининг градус ўлчови турибди. Теорема исботланди.

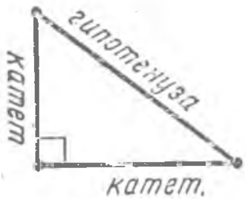
4.5-теоремадан ушбу хулоса чиқади: ***учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган исталган ички бурчагидан катта.***

Масала (28). ABC учбурчакнинг CD баландлиги ўтказилган. Агар учбурчакнинг A ва B бурчаклари ўткир бўлса, учта A, B, D нуқтадан қайси бири қолган иккитасининг орасида ётади?

Ечилиши. B нуқта A ва D нуқталар орасида ёта олмайди. Агар у A ва D нуқталар орасида ётганида эди (59-расм), у ҳолда ABC ўткир бурчак CBD учбурчакнинг ташқи бурчаги сифатида CDB тўғри бурчакдан катта бўлар эди. Шунга ўхшаш A нуқта ҳам B ва D нуқталар орасида ётмаслиги исботланади. Демак, D нуқта A ва B нуқталар орасида ётади.

ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАК

Агар учбурчакнинг тўғри бурчаги бўлса, у *тўғри бурчакли* учбурчак дейилади. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенглиги учун тўғри бурчакли учбурчакнинг фақат битта тўғри бурчаги бўлади. Тўғри бурчакли учбурчакнинг қолган иккита бурчаги ўткир бурчаклардир. Ўткир бурчаклар бир-бирини 90° га тўлдиради. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги қаршисида ётувчи томони *гипотенуза*, қолган икки томони *катетлар* деб аталади (60-расм).



60- расм.

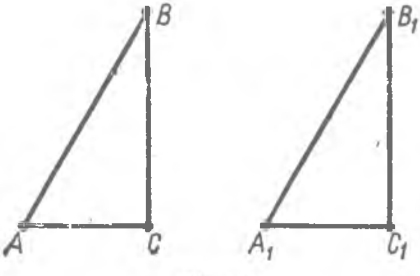
Тўғри бурчакли учбурчаклар учун учбурчаклар тенглигининг бизга маълум учта аломатидан бошқа аломатлари бор. Улар қуйидагилардир:

1. ***Тўғри бурчакли бир учбурчакнинг гипотенузаси ва ўткир бурчаги иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва ўткир бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*** (Гипотенузаси ва ўткир бурчагига кўра тенглик аломати.)

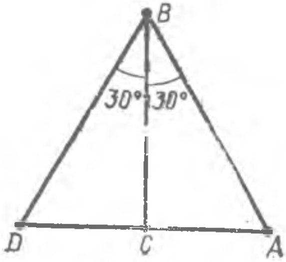
2. ***Тўғри бурчакли бир учбурчакнинг катети ва шу катети қаршисидаги бурчаги иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг катети ва шу катети қаршисидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*** (Катети ва шу катети қаршисидаги бурчагига кўра тенглик аломати.)

3. ***Тўғри бурчакли бир учбурчакнинг гипотенузаси ва бир катети иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва бир катетига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*** (Гипотенузаси ва бир катетига кўра тенглик аломати.)

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тўғри бурчаклари C ва C_1 дан иборат тўғри бурчакли учбурчаклар бўлсин (61-расм). Бу учбурчаклар учун қуйидаги шартлардан бири бажарилади:



61- расм.



62- расм.

1) $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$;
2) $BC = B_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$;
3) $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$.

Учбурчаклар тенг эканини исботлаймиз.

Олдинги икки аломатни исботлаш учун $\angle A = \angle A_1$ шарт бажарилгани учун $\angle B = \angle B_1$ эканини кўрсатиш етарли, чунки учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра иккала ҳолда ҳам учбурчаклар тенг бўлади.

Тўғри бурчакли учбурчакларнинг гипотенуза ва бир катетга кўра тенглиги аломатининг исботи 3- § даги 28- масаланинг ечилишида берилган эди.

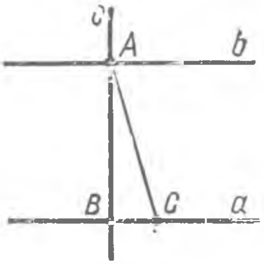
Масала (35). Бир бурчаги 30° га тенг тўғри бурчакли учбурчакнинг шу бурчаги қаршисида ётувчи катети гипотенузанинг ярмига тенглигини исботланг.

Ечилиши. Тўғри бурчаги C ва ўткир бурчаги B 30° га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак ABC бўлсин (62- расм). AC томон давомида AC га тенг CD кесмани қўямиз. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ABC, DBC учбурчаклар тенг. Уларнинг C учидаги бурчаклари тўғри, BC томон умумий, ясалишига кўра эса $AC = CD$. Учбурчаклар тенглигидан $\angle D = \angle A = 60°$, $\angle CBD = \angle CBA = 30°$, демак, $\angle ABD = 60°$. Бу эса ABD учбурчакнинг тенг томонли эканини билдиради. Шу сабабли $AC = \frac{1}{2} AD = \frac{1}{2} AB$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

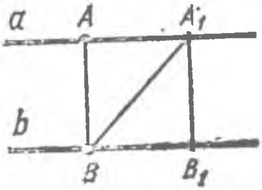
ТЎҒРИ ЧИЗИҚҚА ЎТКАЗИЛГАН ПЕРПЕНДИКУЛЯРНИНГ МАВЖУДЛИГИ ВА ЯГОНАЛИГИ

4.6- теорема. ***Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган исталган нуқтадан шу тўғри чизиққа перпендикуляр тушириш мумкин ва фақат битта.***

Исботи. a — берилган тўғри чизиқ, A эса унда ётмайдиган нуқта бўлсин (63- расм). A нуқта орқали a тўғри чизиққа параллел b тўғри чизиқни ўтказамиз (4- §, 3- масала). Кейин A нуқта орқали b тўғри чизиққа перпендикуляр c тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлади (4.3- теорема)



63- расм.



64- расм.

ва уни бирор B нуқтада кесиб ўтади. AB кесма a тўғри чизиққа A нуқтадан туширилган перпендикулярдир.

A нуқтадан a тўғри чизиққа иккита AB ва AC перпендикуляр тушириш мумкин деб фараз қилайлик. У ҳолда ABC учбурчакнинг иккита тўғри бурчаги бўлар эди. Бу мумкин эмас. Теорема исботланди.

Берилган нуқтадан тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги *нуқтадан тўғри чизиққача масофа* дейилади.

Масала (42). Тўғри чизиқнинг исталган иккита нуқтасидан унга параллел бўлган тўғри чизиққача масофаларнинг тенг эканини исботланг.

Ечилиши. a ва b параллел тўғри чизиқлар бўлсин (64- расм). a тўғри чизиқда иккита A ва A_1 нуқта белгилаймиз ҳамда улардан b тўғри чизиққа AB ва A_1B_1 перпендикулярларни туширамиз. ABA_1 ва B_1A_1B учбурчаклар гипотенузаси ва ўткир бурчагига кўра тенг. Уларда BA_1 гипотенуза умумий, AA_1B ва B_1BA_1 ўткир бурчаклар эса a ва b тўғри чизиқлар ҳамда BA_1 кесувчи ҳосил қилган ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун тенг. Ҳақиқатан ҳам, бу бурчаклар ё ички алмашинувчи бурчаклар, ёки ички бир томонли бурчаклардир. Улар ички бир томонли бурчаклар бўла олмайди, чунки ўткир бурчаклар бўла туриб, йиғиндида 180° ни бермайди. Учбурчакларнинг тенглигидан AB ва A_1B_1 томонларнинг тенглиги, яъни a тўғри чизиқнинг A ва A_1 нуқталаридан b тўғри чизиққача масофалар тенг деган натижа чиқади.

Кўриб турибмизки, тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталаридан унга параллел тўғри чизиққача масофалар тенг экан. Шу сабабли параллел тўғри чизиқларни бир хил узоқликдаги тўғри чизиқлар дейилади. *Параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа* деб уларнинг биридаги ихтиёрий нуқтадан иккинчи тўғри чизиққача масофага айтилади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Учинчи тўғри чизиққа параллел иккита тўғри чизиқ ўзаро параллеллигини исботланг.
2. Қандай бурчаклар ички бир томонли бурчаклар дейилишини тушунтиринг. Қандай бурчаклар ички алмашинувчи бурчаклар дейилади?
3. Бир жуфтнинг ички алмашинувчи бурчаклари тенг бўлса, у ҳолда иккинчи жуфтнинг ҳам ички алмашинувчи бурчаклари тенглигини, ҳар қайси жуфтнинг ички бир томонли бурчакларининг йиғиндиси эса 180° га тенглигини исботланг.

   Аксинча, бир жуфтнинг ички бир томонли бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, у ҳолда иккинчи жуфтнинг ҳам ички алмашинувчи бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенглигини, ҳар қайси жуфтнинг ички алмашинувчи бурчаклари эса тенглигини исботланг.
4. Тўғри чизиқларнинг кесувчи билан ҳосил қилган бурчаклари бўйича уларнинг параллел бўлиш аломатини ифодаланг ва исботланг.
5. Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқтадан унга параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг. Берилган тўғри чизиқда ётмайдиган нуқтадан унга нечта параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин?
6. Агар иккита параллел тўғри чизиқ учинчи тўғри чизиқ билан кесишса, у ҳолда ички алмашинувчи бурчаклар тенглигини, ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси эса 180° га тенглигини исботланг.
7. Учинчи тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган иккита тўғри чизиқ параллел бўлишини исботланг. Агар тўғри чизиқ иккита параллел тўғри чизиқдан бирига перпендикуляр бўлса, у иккинчи тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр бўлишини исботланг.
8. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси ҳақидаги 4.4- теореманинг исботига доир саволлар (56- расмга):

а) Нима учун CBD ва BCA бурчаклар AC, BD тўғри чизиқлар ва BC кесувчи учун ички алмашинувчи бурчаклар бўлишини тушунтиринг;

б) нима учун ABD ва BAC бурчаклар AC, BD тўғри чизиқлар ва AB кесувчи учун ички бир томонли бурчаклар бўлишини тушунтиринг;

в) нима учун ABD бурчак ABC ва DBC бурчакларнинг йиғиндисига тенглигини тушунтиринг.

9. Ҳар қандай учбурчакнинг камида иккита бурчаги ўткир бурчак бўлишини исботланг.
10. Учбурчакнинг ташқи бурчаги нима?
11. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган иккита ички бурчак йиғиндисига тенг эканини исботланг.
12. Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган ҳар қандай ички бурчакдан катта эканини исботланг.
13. Қандай учбурчак тўғри бурчакли учбурчак деб аталади?
14. Тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаклари йиғиндиси нимага тенг?
15. Тўғри бурчакли учбурчакнинг қайси томони гипотенуза деб аталади? Қайси томонлари катетлар деб аталади?
16. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглик аломатларини ифодаланг ва исботланг.
17. Тўғри чизиқда ётмайдиган ҳар қандай нуқтадан шу тўғри чизиққа битта ва фақат битта перпендикуляр тушириш мумкинлигини исботланг.
18. Нуқтадан тўғри чизиққача масофа деб нимага айтилади?
19. Параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофа нималигини тушунтириб беринг.

МАШҚЛАР

1. Агар бирор тўғри чизиқ иккита параллел тўғри чизиқдан бирини кесиб ўтса, у иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.
2. ABC учбурчак берилган. AB томонда B_1 нуқта, AC томонда C_1 нуқта белгиланган. AB, AC тўғри чизиқлар билан B_1C_1 кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган ички бир томонли ва ички алмашинувчи бурчакларни айтинг.
3. AB тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган C нуқта берилган. C нуқта орқали AB тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.
4. Параллел тўғри чизиқлар билан кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган ички алмашинувчи бурчаклар биссектрисаларининг параллеллигини, яъни параллел тўғри чизиқларда ётишини исботланг.
5. AB ва CD тўғри чизиқлар E нуқтада кесишади ва бу нуқтада тенг иккига бўлинади. AC ва BD тўғри чизиқларнинг параллел эканини исботланг.
6. ABC ва BAD учбурчаклар тенг. C ва D нуқталар AB тўғри чизиқдан турли томонда ётади. AC ва BD тўғри чизиқларнинг параллел эканини исботланг.
7. ABC бурчак $80°$ га, BCD бурчак эса $120°$ га тенг. AB ва CD тўғри чизиқлар параллел бўла оладими? Жавобингизни асосланг.
8. Иккита параллел тўғри чизиқ билан кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган иккита ички бир томонли бурчакнинг айирмаси $30°$ га тенг. Шу бурчакларни топинг.

9. Иккита параллел тўғри чизиқ билан кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган иккита ички алмашинувчи бурчакнинг йиғиндиси 150° га тенг. Шу бурчаклар нимага тенг?
10. Иккита параллел тўғри чизиқ билан кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган бурчаклардан бири 72° га тенг. Қолган еттита бурчакни топинг.
11. Иккита параллел тўғри чизиқ билан кесувчи тўғри чизиқ ҳосил қилган бурчаклардан бири 30° га тенг. Қолган еттита бурчакдан биронтаси 70° га тенг бўла оладими? Жавобингизни тушунтириб беринг.
12. Тенг томонли учбурчакнинг бурчаклари нимага тенг?
13. Параллел тўғри чизиқлардаги иккита ички бир томонли бурчакларнинг биссектрисалари қандай бурчак остида кесишади?
14. Агар учбурчакнинг иккита бурчаги: 1) 50° ва 30°; 2) 40° ва 75°; 3) 65° ва 80°; 4) 25° ва 120° га тенг бўлса, унинг номаълум бурчагини топинг.
15. Агар учбурчакнинг бурчаклари ушбу сонларга пропорционал бўлса, уларни топинг: 1) 1, 2, 3; 2) 2, 3, 4; 3) 3, 4, 5; 4) 4, 5, 6; 5) 5, 6, 7.
16. Учбурчакда: 1) иккита ўтмас бурчак; 2) ўтмас ва ўткир бурчак; 3) иккита тўғри бурчак бўлиши мумкинми?
17. Тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаги ўтмас бўла оладими?
18. Агар тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчаги: 1) 40°; 2) 55°; 3) 72° га тенг бўлса, унинг ён томонлари орасидаги бурчагини топинг.
19. Агар тенг ёнли учбурчакнинг ён томонлари орасидаги бурчаги: 1) 80°; 2) 120°; 3) 30° га тенг бўлса, унинг асосидаги бурчагини топинг.
20. Тенг ёнли учбурчакнинг бурчакларидан бири 100° га тенг. Қолган бурчакларини топинг.
21. Тенг ёнли учбурчакнинг бурчакларидан бири 70° га тенг. Қолган бурчакларини топинг. Масала нечта ечимга эга?
22. Асоси AC дан иборат ABC тенг ёнли учбурчакда CD биссектриса ўтказилган. ADC бурчак: 1) 60°, 2) 75°, 3) α га тенг бўлса, учбурчак бурчакларини топинг.
23. Асоси AC ва B учидаги бурчаги 36° га тенг бўлган тенг ёнли ABC учбурчакнинг AD биссектрисаси ўтказилган. CDA ва ADB учбурчакларнинг тенг ёнли эканини исботланг.
24. ABC учбурчакнинг A ва B учларидан биссектрисалар ўтказилган. Биссектрисаларнинг кесишиш нуқтаси D билан белгиланган. Агар: 1) $\angle A = 50°$, $\angle B = 100°$; 2) $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$; 3) $\angle C = 130°$; 4) $\angle C = \gamma$ бўлса, ADB бурчакни топинг.
25. Тенг ёнли учбурчакнинг ташқи бурчакларидан бири 70° га тенг. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.
26. Учбурчакнинг иккита учидаги иккита ташқи бурчаги 120° ва 150° га тенг эканини билган ҳолда унинг бурчакларини топинг.

27. Учбурчакнинг иккита ташқи бурчаги $100°$ ва $150°$ га тенг. Учинчи ташқи бурчагини топинг.

28. ABC учбурчакнинг CD баландлиги ўтказилган. Агар учбурчакнинг A ва B бурчаклари ўткир бурчаклар бўлса, учта A, B, D нуқтадан қайси бири қолган иккитаси орасида ётади?

29. ABC учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан BD баландлик ўтказилган. 1) $\angle A = 20°$; 2) $\angle A = 65°$; 3) $\angle A = \alpha$ эканини билган ҳолда CBD бурчакни топинг.

30. ABC учбурчакнинг ўтмас B бурчаги учидан BD баландлик ўтказилган. $\angle A = \alpha$, $\angle B = \beta$ эканини билган ҳолда ABD ва CBD учбурчакларнинг бурчакларини топинг.

31. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги ташқи бурчак биссектрисаси учбурчак асосига параллел эканини исботланг.

32. ABC учбурчакнинг A ва B учларидаги биттадан олинган ташқи бурчаклари йиғиндиси $240°$ га тенг. Учбурчакнинг C бурчаги нимага тенг?

33. ABC учбурчак берилган. AC томон давомига $AD = AB$ ва $CE = CB$ кесмалар қўйилган. ABC учбурчакнинг бурчакларини билган ҳолда DBE учбурчак бурчакларини қандай топиш мумкин?

34. Учбурчакнинг ички бурчакларидан бири $30°$ га, ташқи бурчакларидан бири $40°$ га тенг. Учбурчакнинг қолган ички бурчакларини топинг.

35. Тўғри бурчакли учбурчакда $30°$ ли бурчак қаршисидаги катет гипотенузасининг ярмига тенглигини исботланг.

36. Тўғри бурчакли тенг ёнли учбурчакнинг бурчакларини топинг.

37. Тенг томонли ABC учбурчакнинг AD медианаси ўтказилган. ABD учбурчакнинг бурчакларини топинг.

38. ABC учбурчакнинг A, C учларидан ўтказилган баландликлари M нуқтада кесишади. Агар $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$ бўлса, $\angle AMC$ ни топинг.

39. ABC учбурчакнинг BD медианаси AC томоннинг ярмига тенг. Учбурчакнинг B бурчагини топинг.

40. a тўғри чизиқ BC кесмани ўртасидан кесиб ўтади. B, C нуқталар a тўғри чизиқдан баравар узоқликда ётишини исботланг.

41. BC кесма a тўғри чизиқни O нуқтада кесиб ўтади. B, C нуқталардан a тўғри чизиққача масофалар бир-бирига тенг. O нуқта BC кесманинг ўртаси эканини исботланг.

42. Тўғри чизиқнинг ҳар қандай иккита нуқтасидан унга параллел бўлган тўғри чизиққача масофаларнинг тенглигини исботланг.

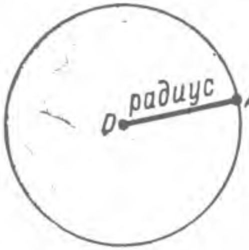
5-§. ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

АЙЛАНА

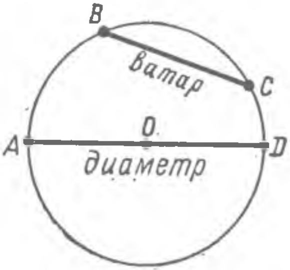
Таъриф. Текисликнинг берилган нуқтадан бир хил узоқлашган ҳамма нуқталаридан иборат фигура *айлана* дейилади. Берилган нуқта *айлананинг маркази* дейилади.

Айлана нуқталаридан унинг марказигача масофа *айлананинг радиуси* дейилади. Айлана нуқтасини унинг маркази билан туташтирувчи ҳар қандай кесма ҳам радиус дейилади (65-расм).

Айлананинг иккита нуқтасини туташтирувчи кесма *ватар* дейилади. Айлана марказидан ўтувчи ватар *айлана диаметри* дейилади. 66-расмда BC—ватар, AD—диаметр.



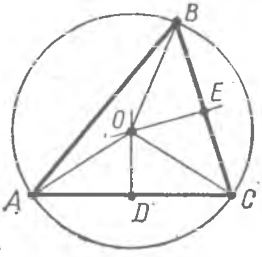
65- расм.



66- расм.

Учбурчакнинг ҳамма учларидан ўтган айлана шу учбурчакка *ташқи чизилган айлана* дейилади.

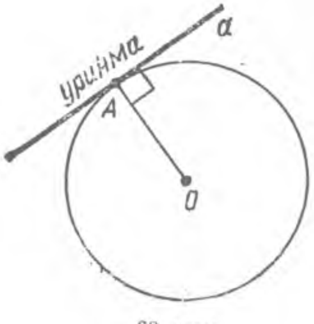
Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчак томонларининг ўрталаридан ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтасидан иборатдир.



67- расм.

Исботи. ABC — берилган учбурчак, O—шу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази бўлсин (67-расм). AOC учбурчак тенг ёнли; унинг OA ва OC томонлари радиуслар сифатида тенг. Бу учбурчакнинг OD медианаси бир вақтнинг ўзида унинг баландлиги ҳамдир. Шу сабабли айлананинг маркази AC томонга перпендикуляр бўлиб, унинг ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқда ётади. Худди шунга ўхшаш айлананинг маркази қолган икки томон ўрталарига ўтказилган перпендикулярда ётиши исботланади.

Эслатма. Кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр ҳолда ўтувчи тўғри чизиқ кўпинча *ўрта перпендикуляр* деб аталади. Шу муносабат билан баъзан учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчак томонлари ўрта перпендикулярларининг кесишиш нуқтасида ётади дейилади.



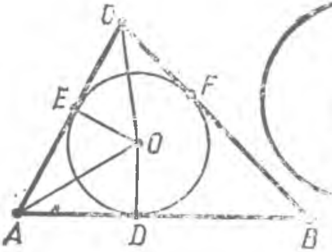
68- расм.

Айлананинг нуқтасидан унинг шу нуқтага ўтказилган радиусига перпендикуляр ҳолда ўтувчи тўғри чизиқ *айланага уринма* дейилади. Бунда айлананинг бу нуқтаси *уриниш нуқтаси* дейилади. 68-расмда a тўғри чизиқ айлананинг A нуқтасидан OA радиусига перпендикуляр қилиб ўтказилган. a тўғри чизиқ айланага уринмадир. A нуқта уриниш нуқтасидир. Айлана a тўғри чизиққа A нуқтада уринади дейиш ҳам мумкин.

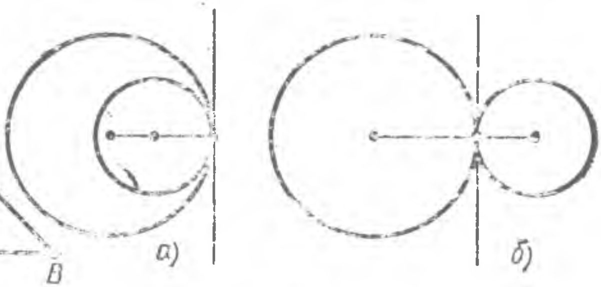
Агар айлана учбурчакнинг ҳамма томонига уринса, уни учбурчакка *ички чизилган* айлана дейилади.

Учбурчакка ички чизилган айлана маркази учбурчак биссектрисаларининг кесишиш нуқтасидан иборат.

Исботи. ABC—берилган учбурчак, O — унга ички чизилган айлана маркази, D, E, F — айлананинг учбурчак томонлари билан уриниш нуқталари бўлсин (69-расм). Тўғри бурчакли AOD, AOE



69- расм.



70- расм.

учбурчаклар гипотенузаси ва катети бўйича тенг. Уларда AO гипотенуза умумий, OD ва OE катетлар эса радиуслар сифатида тенг. Учбурчакларнинг тенглигидан OAD ва OAE бурчаклар тенг деган натижа чиқади. Бу эса O нуқта учбурчакнинг A учидан ўтказилган биссектрисада ётишини билдиради. O нуқта учбурчакнинг қолган иккита биссектрисасида ётиши ҳам худди шундай исботланади.

Умумий нуқтага эга бўлган иккита айлана шу умумий нуқтада умумий уринмага эга бўлса, улар бу нуқтада *уринади* дейилади (70- расм). Агар айланаларнинг марказлари уларнинг умумий уринмасидан бир томонда ётса, уриниш *ички уриниш* дейилади (70- *а* расм). Агар айланаларнинг марказлари уларнинг умумий уринмасидан турли томонда ётса, уриниш *ташқи уриниш* дейилади (70- *б* расм).

ЯСАШГА ДОИР МАСАЛА НИМА

Ясашга доир масалаларда берилган чизмачилик асбоблари ёрдамида геометрик фигураларни ясаш ҳақида сўз боради. Бундай асбоблар кўпинча чизғич ва циркулдир. Масалани ечиш фақат фигурани ясашдан иборат бўлмай, балки бу ишни қандай амалга ошириш ва тегишли исботни беришдан иборатдир. Агар фигурани ясаш усули кўрсатилса ҳамда кўрсатилган ясашларни бажариш натижасида талаб қилинган хоссаларга эга фигура ҳосил қилиниши исботланса, масала ечилган ҳисобланади.

Чизғичдан геометрик ясашлар асбоби сифатида фойдаланиб, ихтиёрий тўғри чизиқни; берилган нуқтадан ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқни; берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқни чизиш мумкин. Чизғич билан ясашга доир бошқа бирорта ишни бажариш мумкин эмас. Ҳатто бўлинмалари белгилаб қўйилган чизғич ёрдамида кесмаларни қўйиб чиқиш ҳам мумкин эмас.

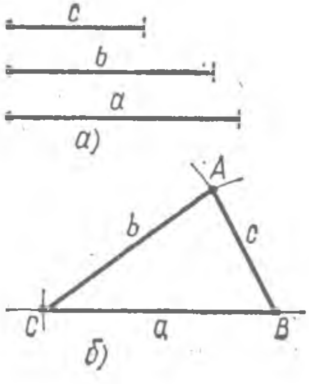
Циркуль геометрик ясашлар асбоби сифатида берилган марказдан берилган радиусли айлана чизиш имконини беради. Жумладан, циркуль ёрдамида берилган тўғри чизиқда берилган нуқтадан берилган кесмани қўйиб чиқиш мумкин.

Ясашга доир энг содда масалаларни қараймиз.

БЕРИЛГАН ТОМОНЛАРИГА КЎРА УЧБУРЧАК ЯСАШ

5.1.- масала. ***Берилган a, b, c томонларига кўра учбурчак ясаш*** (71- *а* расм).

Ечилиши. Чизғич ёрдамида ихтиёрий тўғри чизиқ ўтказамиз ва унда ихтиёрий *B* нуқтани белгилаймиз (71- *б* расм). Циркуль оёқларини *a* га тенг қилиб очиб, маркази *B* нуқтада ва радиуси *a* га тенг айлана чизамиз. *C* — шу айлананинг тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси бўлсин. Энди циркуль оёқларини *c* га тенг қилиб очиб, маркази *B* да бўлган айлана чизамиз, циркуль оёқларини *b* га тенг қилиб очиб, *C* марказли айлана чиза-



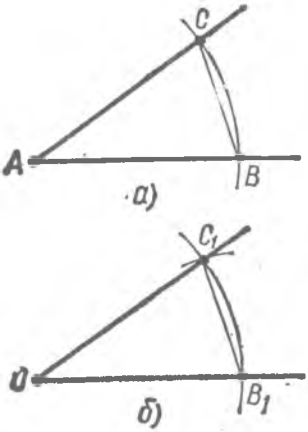
71- расм.

миз. A — шу айланаларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. AB ва AC кесмаларни ўтказамиз. ABC учбурчак томонлари a, b, c га тенг учбурчакдир.

БЕРИЛГАН БУРЧАККА ТЕНГ БУРЧАК ЯСАШ

5.2- масала. ***Берилган ярим тўғри чизиқдан берилган ярим текисликка берилган бурчакка тенг бурчак қўйиш.***

Ечилиши. Маркази берилган бурчакнинг A учида бўлган ихтиёрий айлана чизамиз (72- a расм). B, C — айлананинг бурчак томонлари билан кесишиш нуқталари бўлсин. AB радиус билан маркази O нуқтада, яъни берилган ярим тўғри чизиқнинг бошланғич нуқтасида бўлган айлана чизамиз (72- б расм). Бу айлананинг берилган ярим тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини B_1 билан белгилаймиз. Маркази B_1 нуқтада ва радиуси BC бўлган айлана чизамиз. Кўрсатилган ярим текисликда ясалган айланаларнинг кесишиш нуқтаси C_1 изланаётган бурчак томонида ётади. Исботлаш учун ABC ва OB_1C_1 учбурчакларнинг тенглигини назарга олсак бас, чунки уларнинг мос томонлари тенг. A ва O бурчаклар бу учбурчакларнинг мос бурчакларидир.

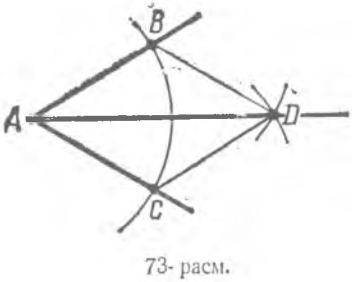


72- расм.

БУРЧАК БИССЕКТРИСАСИНИ ЯСАШ

5.3- масала. ***Берилган бурчак биссектрисасини ясаш.***

Ечилиши. Берилган бурчакнинг A учидан шу нуқтани марказ қилиб ихтиёрий радиусли айлана чизамиз (73- расм). B, C нуқталар айлананинг бурчак томонлари билан кесишиш нуқталари бўлсин. B, C нуқталардан ўша радиус билан айланалар чизамиз. D нуқта уларнинг A дан фарқли кесишиш нуқтаси бўлсин. AD ярим тўғри чизиқни ўтказамиз. У



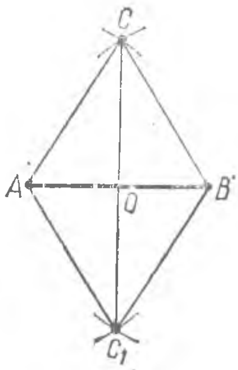
73- расм.

BAC бурчакни тенг иккига бўлади, чунки ABD, ACD учбурчаклар тенг ва уларнинг DAB, DAC бурчаклари мос бурчаклардир.

КЕСМАНИ ТЕНГ ИККИГА БЎЛИШ

5.4- масала. ***Кесмани тенг иккига бўлиш.***

Ечилиши. AB — берилган кесма бўлсин (74- расм). A, B нуқталардан AB радиусли айланалар чизамиз. C, C_1 — бу айланаларнинг кесишиш нуқталари бўлсин. Улар AB тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётади. CC_1 кесма AB тўғри чизиқни бирор O нуқтада кесиб ўтади. Ана шу O нуқта AB кесманинг ўртасидир.



74- расм.

Ҳақиқатан ҳам, учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра CAC_1 ва CBC_1 учбурчаклар тенг. Бундан ACO ва BCO бурчакларнинг тенглиги келиб чиқади. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ACO ва BCO учбурчаклар тенг. Бу учбурчакларнинг AO ва BO томонлари мос томонлардир, шу сабабли улар тенг. Шундай қилиб, O нуқта AB кесманинг ўртасидир.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИ ЯСАШ

5.5- масала. ***Берилган O нуқта орқали берилган a тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш.***

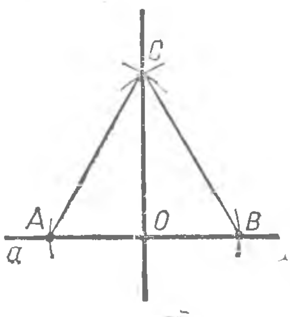
Ечилиши. Икки ҳол юз бериши мумкин:

1) O нуқта a тўғри чизиқда ётади;

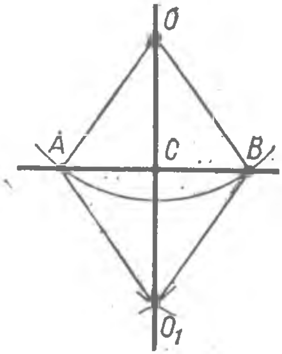
2) O нуқта a тўғри чизиқда ётмайди.

Биринчи ҳолни қараймиз (75- расм).

O нуқтадан иктиёрий радиусли айлана ўтказамиз. Бу айлана a тўғри чизиқни иккита A, B нуқтада кесиб ўтади. A, B нуқталардан AB радиусли айланалар ўтказамиз. C уларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. Изланаётган тўғри чизиқ O ва C нуқталардан ўтади. ACO ва BCO учбурчакларнинг O учидаги бурчаклари тенглигидан OC ва AB тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги келиб чиқади. Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра ACO ва BCO учбурчаклар тенг.



75- расм.



76- расм.

Иккинчи ҳолни қараймиз (76- расм).

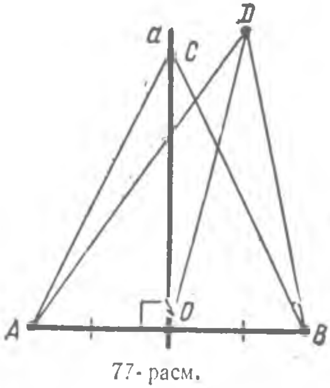
O нуқтадан a тўғри чизиқни кесувчи айлана ўтказамиз. A ва B нуқталар бу айлананинг a тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари бўлсин. A, B нуқталардан ўша радиусли айланалар ўтказамиз. O_1 нуқта бу айланаларнинг кесишиш нуқтаси бўлиб, у O нуқта ётган ярим текисликдан бошқа ярим текисликда ётсин. Изланаётган тўғри чизиқ O, O_1 нуқталар орқали ўтади. Шуни исботлаймиз. AB ва OO_1 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини C билан белгилаймиз. AOB ва AO_1B учбурчаклар учинчи аломатга кўра тенг. Шу сабабли OAC бурчак O_1AC бурчакка тенг. У ҳолда OAC ва O_1AC учбурчаклар биринчи аломатга кўра тенг. Демак, уларнинг ACO ва ACO_1 бурчаклари тенг. Булар қўшни бурчаклар бўлгани учун тўғри бурчаклардир. Шундай қилиб, OC—O нуқтадан a тўғри чизиққа туширилган перпендикулярдир.

НУҚТАЛАРНИНГ ГЕОМЕТРИК ЎРНИ

Ясашга доир масалаларни ечишнинг методларидан бири геометрик ўринлар методидир. Текисликнинг маълум хоссага эга бўлган барча нуқталаридан иборат фигура *нуқталарнинг геометрик ўрни* дейилади. Масалан, айланани берилган нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни деб таърифлаш мумкин.

Қуйидаги теорема нуқталарнинг муҳим геометрик ўрнини беради:

5.6- теорема. ***Берилган икки нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни берилган нуқталарни туташтирувчи кесмага перпендикуляр бўлиб, унинг ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқдан иборат.***



77- расм.

Исботи. A ва B—берилган нуқталар, a тўғри чизиқ эса AB кесманинг ўртаси бўлган O нуқтадан ўтиб, AB га перпендикуляр тўғри чизиқ бўлсин (77- расм). Биз қуйидагиларни исбот қилишимиз керак: 1) a тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси A, B нуқталардан тенг узоқлашган; 2) текисликнинг A, B нуқталардан тенг узоқлашган ҳар бир D нуқтаси a тўғри чизиқда ётади. a тўғри чизиқнинг ҳар бир C нуқтаси A, B нуқталардан бир хил узоқликда ётиши AOC ва BOC учбурчакларнинг тенглигидан келиб чиқади. Бу учбурчакларнинг O учидаги бурчаклари тўғри бурчаклардир, OC томон умумий, O нуқта AB кесманинг ўртаси бўлгани учун $AO = OB$. Энди текисликнинг A, B нуқталардан тенг узоқлашган ҳар бир D нуқтаси a тўғри чизиқда ётишини кўрсатамиз.

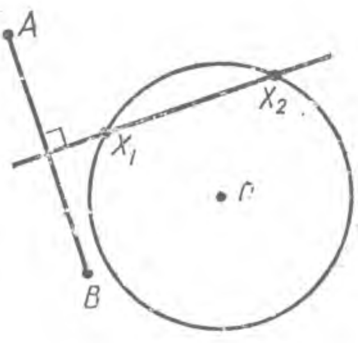
ADB учбурчакни қараймиз. $AD = BD$ бўлгани учун бу учбурчак тенг ёнлидир. Унда DO — медиана. Тенг ёнли учбурчакнинг хоссасига кўра асосга туширилган медиана баландликдир. 2.3- теоремага кўра OD тўғри чизиқ a билан устма-уст тушади, демак, D нуқта a тўғри чизиқда ётади. Теорема исботланди.

ГЕОМЕТРИК ЎРИНЛАР МЕТОДИ

Ясашга доир масалаларни ечишда қўлланиладиган геометрик ўринлар методининг моҳияти қуйидагидан иборат. Ясашга доир масалани ечаётганимизда иккита шартни қаноатлантирувчи X нуқтани топишимиз керак бўлсин. Биринчи шартни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни бирор F_1 фигура, иккинчи шартни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни бирор F_2 фигура бўлсин. Изланаётган X нуқта F_1 ва F_2 га тегишли, яъни уларнинг кесишиш нуқтасидир. Агар бу геометрик ўринлар содда (айтайлик, улар тўғри чизиқлар ва айланалардан иборат) бўлса, у ҳолда биз уларни ясай оламиз ва қизиқтираётган X нуқтани топа оламиз. Мисол келтирамиз.

Масала (38). Учта A, B, C нуқта берилган. A, B нуқталардан тенг узоқлашган ва C нуқтадан берилган масофада ётувчи X нуқтани ясанг.

Ечилиши. Изланаётган X нуқта иккита шартни қаноатлантиради: 1) у A ва B нуқталардан тенг узоқлашган; 2) у C нуқтадан берилган масофада ётади. Биринчи шартни қаноатлантирувчи нуқталарнинг геометрик ўрни AB кесмага перпендикуляр ва унинг ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқдир (78- расм). Иккинчи шартни қаноатлантирувчи нуқта-

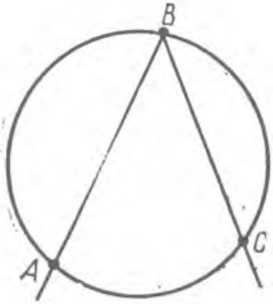


78- расм.

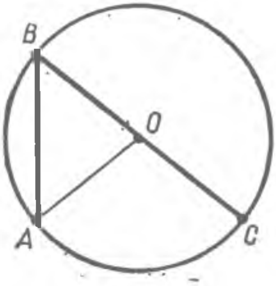
ларнинг геометрик ўрни маркази C нуқтада бўлган берилган радиусли айланадир. Изланаётган X нуқта бу геометрик ўринларнинг кесишмасида ётади.

АЙЛАНАГА ИЧКИ ЧИЗИЛГАН БУРЧАКЛАР

Учи айланада ётган, томонлари айланани кесувчи бурчак айланага *ички чизилган бурчак* дейилади. 79- расмдаги ABC бурчак айланага ички чизилган, чунки унинг B учи айланада ётади, томонлари эса унинг A ва C нуқталари орқали ўтади.



79- расм.



80- расм

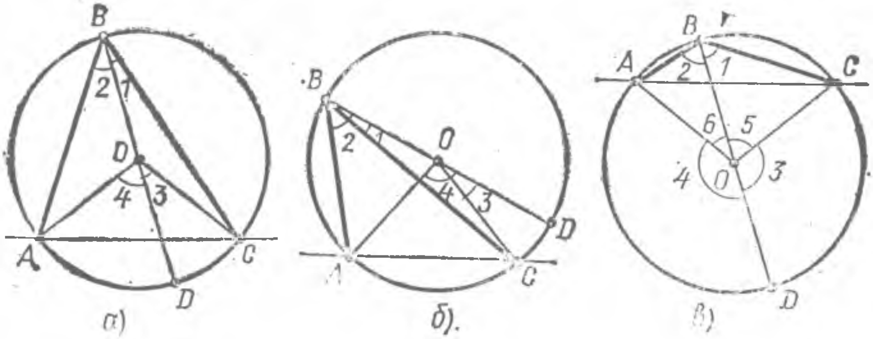
5.7- теорема. ***Айланага ички чизилиб, томонлари айлананинг берилган икки нуқтасидан ўтувчи бурчак шу нуқталарга ўтказилган радиуслар орасидаги бурчак ярмига тенг ёки шу ярим бурчакни 180° га тўлдиради.***

Исботи. Бурчак томонларидан бири айлана марказидан ўтган хусусий ҳолни қарайлик (80- расм). AOB учбурчак тенг ёнли, чунки унинг томонлари OA ва OB радиуслардан иборат. Шунинг учун учбурчакнинг A ва B бурчаклари тенг, аммо уларнинг йиғиндиси учбурчакнинг O учидаги ташқи бурчакка тенг, демак, B бурчак AOC бурчакнинг ярмига тенг. Шуни исботлаш керак эди.

Умумий ҳол билан иш кўрганда BD ёрдамчи диаметрни ўтказиб, уни қараб чиқилган хусусий ҳолга келтирилади (81- расм).

81- *а* расмда берилган ҳолни кўздан кечирайлик. Бу ҳолда ички чизилган ABC бурчак *1* ва *2* бурчаклар йиғиндисига тенг бўлиб, OA, OC радиуслар орасидаги бурчак эса *3* ва *4* бурчаклар йиғиндисига тенг. Исботга асосан бурчак *1* бурчак *3* нинг ярмига, бурчак *2* эса бурчак *4* нинг ярмига тенг. Шунинг учун ички чизилган ABC бурчак OA, OC радиуслар орасидаги бурчак ярмига тенг.

81- *б* расмда тасвирланган ҳолда ҳам шунинг сингари иш кў-



81- расм.

рамиз. Олдинги ҳолдан фарқи шундаки, ABC бурчак 2 ва 1 бурчакларнинг айирмасига, AOC бурчак 4 ва 3 бурчакларнинг айирмасига тенг бўлади. Иккала ҳолда ҳам ABC бурчак AOC бурчак ярмига тенг.

81- *в* расмда кўрсатилган ҳолда ABC бурчак 1 ва 2 бурчаклар йиғиндисига тенг, аммо AOC бурчак эса 3 в 4 бурчаклар йиғиндисига эмас, балки 5 ва 6 бурчаклар йиғиндисига тенг. Шунинг учун 3 ва 4 бурчаклар йиғиндисига тенг бўлган ABC бурчак

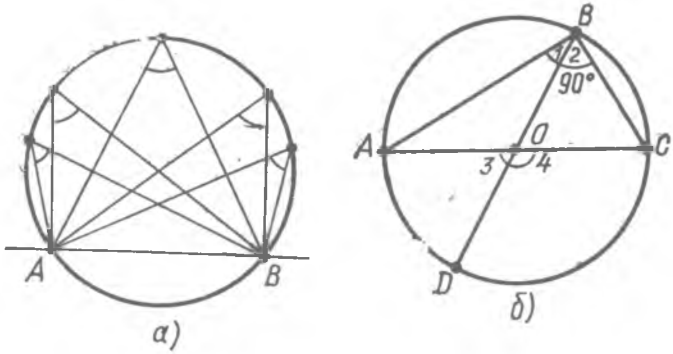
$$\frac{(180^\circ - \angle 5)}{2} + \frac{(180^\circ - \angle 6)}{2} = 180^\circ - \frac{\angle 5 + \angle 6}{2} = 180^\circ - \frac{1}{2}\angle AOC$$

га тенг бўлади. Теорема исботланди.

Эслатмалар. 5.7- теорема исботида қаралган биринчи ва иккинчи ҳолларнинг учинчи ҳолдан фарқи шундаки, олдинги икки ҳолда ички чизилган (B) бурчакнинг учи билан (O) айлана маркази AC тўғри чизиққа нисбатан бир томонда ётади, учинчи ҳолда эса турли томонда ётади. Ана шу аломатга суяниб, ички чизилган бурчак радиуслар орасидаги бурчак ярмига ёки шу ярим бурчакнинг 180° га тўлдирмасига тенглигини билиш мумкин.

Ушбуни ҳам таъкидлаб ўтайлик: радиуслар орасидаги бурчаклар ярми 90° дан ошмайди, демак, унинг 180° га тўлдирмаси 90° дан кам эмас. Бундан хулоса чиқарамиз: *агар ички чизилган бурчак ўткир бўлса, бу бурчак радиуслар орасидаги бурчак ярмига тенг, ўтмас бўлса, уни 180° га тўлдиради.*

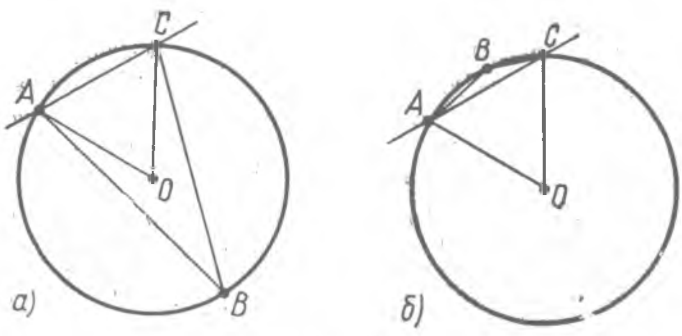
Натижа. *Томонлари айлананинг берилган икки нуқтасидан ўтадиган, учлари эса шу нуқталарни туташтирган тўғри чизиқдан бир томонда ётадиган бўлиб айланага ички чизилган барча бурчаклар тенг.* Жумладан, *томонлари айлана диаметри учларидан ўтган бурчаклар тўғри* (82- расм).



82- расм.

Масала (48). A, B, C нуқталар айланада ётади. Агар AC ватар айлана радиусига тенг бўлса, ABC бурчак нимага тенг? (Икки ҳол.)

Ечилиши. Агар B нуқта AC тўғри чизиққа нисбатан O марказ билан бир томонда ётса (83- *а* расм), у ҳолда ички чизилган бурчакнинг хоссасига кўра $\angle ABC = \frac{1}{2} \angle AOC$. Шартга кўра AC ватар радиусга тенг, шу сабабли AOC учбурчак тенг томонли, демак, AOC бурчак 60° га тенг. Шу сабабли $\angle ABC = 30°$. Агар B ва O нуқталар AC тўғри чизиқдан турли томонда ётса (83- *б* расм), у ҳолда ички чизилган бурчакнинг хоссасига кўра $\angle ABC = 180° - \frac{1}{2} \angle AOC = 150°$.



83- расм.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Айлана нима, унинг маркази, радиуси нима?
2. Айлананинг ватари нима? Қандай ватар диаметр деб аталади?
3. Қандай айлана учбурчакка ташқи чизилган айлана дейилади?
4. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчак томонларининг ўрта перпендикулярлари кесишган нуқтасида ётишини исботланг.
5. Қандай тўғри чизиқ айланага уринма тўғри чизиқ дейилади?
6. Қандай айлана учбурчакка ички чизилган айлана дейилади?
7. Учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази учбурчак биссектрисаларининг кесишиш нуқтасида ётишини исботланг.
8. Айланалар берилган нуқтада уринади, дейиш нимани билдиради?
9. Айланаларнинг қандай уринишлари ички, қандай уринишлари ташқи уриниш дейилади?
10. Учбурчакни учта томонига кўра қандай ясаш мумкинлигини тушунтиринг.
11. Берилган ярим тўғри чизиқдан берилган ярим текисликка берилган бурчакка тенг бурчакни қандай қўйиш мумкин?
12. Берилган бурчакни қандай қилиб тенг иккига бўлиш мумкинлигини тушунтиринг.
13. Кесмани қандай қилиб тенг иккига бўлиш мумкинлигини тушунтиринг.
14. Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқни қандай ўтказиш мумкинлигини тушунтиринг.
15. Нуқталарнинг геометрик ўрни нима?
16. Берилган икки нуқтадан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни нимадан иборат?
17. Ясашга доир масалаларни ечишда қўлланиладиган геометрик ўринлар методи нимадан иборат? Мисоллар келтиринг.
18. Қандай бурчак айланага ички чизилган бурчак дейилади?
19. Айланага ички чизилган бурчаклар ҳақидаги теоремани ифодаланг ва исботланг.
20. Қуйидаги шартлар бажарилганда айланага ички чизилган ABC бурчак нимага тенг бўлади: а) бурчакнинг B учи ва айлананинг O маркази AC тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда ётади; б) бурчакнинг B учи ва айлананинг O маркази AC тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётади; в) AC ватар айлана диаметридан иборат?
21. Айланага ички чизилган бурчак ўткир (ўтмас) бўлса, у нимага тенг?
22. Томонлари айлананинг берилган икки нуқтасидан ўтадиган, учлари эса шу нуқталарни туташтирган тўғри чизиқдан бир томонда ётадиган бўлиб айланага ички чизилган барча бурчакларнинг тенглигини исбот қилинг.

1. Айлана марказидан чиқадиган ҳар қандай нурнинг айланани битта нуқтада кесиб ўтишини исботланг.
2. Айлана марказидан ўтадиган тўғри чизиқнинг айланани икки нуқтада кесиб ўтишини исботланг.
3. Айлана ватарининг ўртасидан ўтадиган диаметрнинг шу ватарга перпендикуляр бўлишини исботланг.
4. 3- масала талабига тескари теоремани ифодаланг ва исботланг.
5. Айлананинг берилган нуқтасидан диаметр ва радиусга тенг ватар ўтказилган. Диаметр билан ватар орасидаги бурчакни топинг.
6. Берилган айлананинг нуқтасидан радиусга тенг иккита ватар ўтказилган. Улар орасидаги бурчакни топинг.
7. Айлана тўғри чизиққа иккита нуқтада уриниши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
8. Айланага уринма тўғри чизиқ айлана билан уриниш нуқтасидан ташқари бирорта ҳам умумий нуқтага эга эмаслигини исботланг.
9. Айлана радиусига тенг AB ватар A нуқтада ўтказилган уринма билан қандай бурчаклар ҳосил қилади?
10. Айлана радиусига тенг ватар охирларида айланага уринувчи тўғри чизиқлар қандай бурчаклар остида кесишишини топинг.
11. Радиуслари 30 см ва 40 см бўлган айланалар бир-бирига уринади. Ташқи ва ички уринишлар юз берган ҳоллардаги айланалар марказлари орасидаги масофани топинг.
12. Агар айланаларнинг радиуслари 25 см ва 50 см га тенг бўлиб, марказлари орасидаги масофа 60 см га тенг бўлса, айланалар уринадими?
13. 1) A, B, C нуқталар тўғри чизиқда ётади, O нуқта эса тўғри чизиқда ётмайди. Иккита AOB ва BOC учбурчак асослари AB, BC дан иборат тенг ёнли учбурчаклар бўла оладими? Жавобингизни асосланг.

    2) Айлана билан тўғри чизиқ иккитадан ортиқ нуқтада кесишиши мумкинми?
14. 1) Марказлари O, O_1 дан иборат айланалар A, B нуқталарда кесишади. AB тўғри чизиқнинг OO_1 тўғри чизиққа перпендикуляр эканини исботланг.

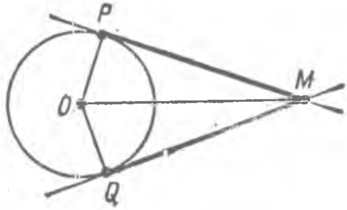
    2) Иккита айлана иккитадан ортиқ нуқтада кесиша олмаслигини исботланг.
15. 1) O марказли айлананинг A нуқтаси орқали айланага уринмайдиган тўғри чизиқ ўтказилган. OB шу тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр. AB кесманинг давомига $BC=AB$ кесма қўйилган. C нуқтанинг айланада ётишини исботланг.

    2) Тўғри чизиқ айлана билан биргина умумий нуқтага эга бўлса, тўғри чизиқнинг шу нуқтада айланага уринма бўлишини исботланг.

3) Агар иккита айлана биргина умумий нуқтага эга бўлса, улар шу нуқтада уринишини исботланг.

16. 1) Бир нуқтадан айланага иккита уринма ўтказилган (84-расм). Уринмаларнинг MP ва MQ кесмалари тенг эканини исботланг.

2) Бир нуқтадан айланага иккитадан ортиқ уринма ўтказиш мумкин эмаслигини исботланг.



84- расм.

17. Берилган a, b, c томонлари бўйича учбурчак ясанг, бунда: 1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см, 2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см; 3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см.

18. ABC учбурчак берилган. Унга тенг бошқа бир ABD учбурчак ясанг.

19. Иккита томони ва ташқи чизилган айлананинг радиуси бўйича учбурчак ясанг.

20. Берилган радиуси бўйича берилган икки нуқтадан ўтувчи айлана ясанг.

21. Қуйидаги маълумотларга кўра ABC учбурчакни ясанг:

1) икки томони ва улар орасидаги бурчагига кўра:

а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40°$;

б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70°$;

2) бир томони ва унга ёпишган бурчаклари бўйича:

а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 50°$;

б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.

22. Икки томони ва бу томонлардан каттаси қаршисида ётувчи бурчаги бўйича учбурчак ясанг:

1) $a = 6$ см, $b = 4$ см, $\alpha = 70°$;

2) $a = 4$ см, $b = 6$ см, $\beta = 100°$.

23. Ён томони ва асосидаги бурчагига кўра тенг ёнли учбурчак ясанг.

24. Бурчакни тўртта тенг қисмга бўлинг.

25. $60°$ ва $30°$ ли бурчаклар ясанг.

26. Икки томони ва бу томонлардан бирига ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

27. Икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

28. Учбурчак берилган. Унинг баландликлари ва медианаларини ясанг.

29. Бир томони, шу томонига ўтказилган медианаси ва ташқи чизилган айлананинг радиуси бўйича учбурчак ясанг.

30. Гипотенузаси ва бир катетига кўра тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

31. Икки томони ва учинчи томонига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

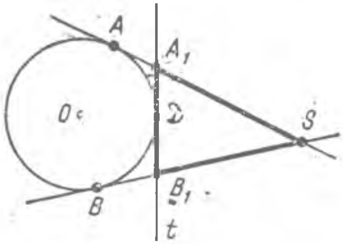
32. Бир томони ва шу томонига туширилган медианаси ва баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

33. Икки томони ва шу томонларидан бирига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.
34. Ён томони ва асосига туширилган баландлигига кўра тенг ёнли учбурчак ясанг.
35. Асосига ва ташқи чизилган айлананинг радиусига кўра тенг ёнли учбурчак ясанг.
36. Берилган тўғри чизиқдан h масофа қадар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрни берилган тўғри чизиққа параллел ва ундан h масофа қадар узоқлашган иккита тўғри чизиқдан иборат эканлигини исботланг.
37. Берилган тўғри чизиқда шундай нуқта топингки, у берилган иккинчи тўғри чизиқдан берилган масофа қадар нарида бўлсин.
38. Учта A, B, C нуқта берилган. A ва B нуқталардан бир хил узоқлашган ва C нуқтадан берилган масофа қадар узоқликда турган X нуқтани ясанг.
39. Берилган тўғри чизиқда берилган икки нуқтадан бир хил узоқлашган нуқтани топинг.
40. Тўртта A, B, C, D нуқта берилган. A, B нуқталардан бир хил узоқлашган ва C, D нуқталардан бир хил узоқлашган X нуқтани топинг.
41. Учбурчакнинг бир томони, унга ёпишган бурчаги ва қолган икки томонининг йиғиндиси берилган. Учбурчакни ясанг.
42. Учбурчакнинг бир томони, унга ёпишган бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси берилган. Учбурчакни ясанг.
43. Бир катети ва бошқа катети билан гипотенузасининг йиғиндисига кўра тўғри бурчакли учбурчак ясанг.
44. Бир томони, шу томони қаршисидаги бурчаги, шу бурчаги учидан туширилган баландлигига кўра учбурчак ясанг.
45. Берилган бурчак томонларига уринувчи шундай айлана ясангки, айлананинг бир уриниш нуқтаси берилган нуқтадан иборат бўлсин.
46. Учбурчакнинг бир томони 10 см га тенг, шу томон қаршисидаги бурчаги эса 150° га тенг. Ташқи чизилган айлана радиусини топинг.
47. A, B, C нуқталар айланада ётади. Агар ABC бурчак 30° га, айлана диаметри эса 10 см га тенг бўлса, AC ватар нимага тенг бўлади?
48. A, B, C нуқталар айланада ётади. AC ватар айлана радиусига тенг бўлса, ABC бурчак нимага тенг? (Икки ҳол.)
49. Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази гипотенузанинг ўртаси бўлишини исботланг.
50. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ўтказилган медиана уни иккита тенг ёнли учбурчакка ажратишини исботланг.
51. Гипотенузаси ва тўғри бурчаги учидан гипотенузасига туширилган баландлигига кўра тўғри бурчакли учбурчак ясанг.
52. Айланада тўртта A, B, C, D нуқта белгиланган. ABC бурчак α га тенг бўлса, ADC бурчак нимага тенг? (Икки ҳол.)
53. Айлананинг AD ва BC ватарлари кесишади. ABC бурчак 50° га, ACD бурчак эса 80° га тенг. CAD бурчакни топинг.

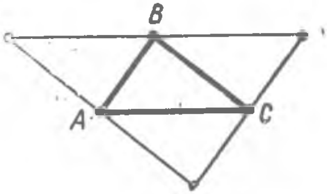
54. 1) Берилган нуқтадан берилган айланага уринувчи тўғри чизиқ ўтказинг.

2) Иккита айланага уринувчи уринмани қандай ясаш керак?

55. 1) S нуқта орқали айланага SA ва SB уринмалар ўтказилган (85- расм). t уринма SA, SB кесмаларни A_1, B_1 нуқталарда



85- расм.



86- расм.

кесиб ўтади. SA_1B_1 учбурчакнинг периметри t уринманинг қандай олинишига боғлиқ эмаслигини ва $SA+SB$ га тенг эканини исботланг.

2) Бурчак ва нуқта берилган. Бу нуқта орқали тўғри чизиқ қандай ўтказилганда, у берилган бурчакдан берилган периметрли учбурчак қирқади?

56. 1) Учбурчак икки томонининг ўрта перпендикулярлари кесишишини (нопараллел эканини) исботланг.

2) Учбурчак учта томонининг ўрта перпендикулярлари бир нуқтада кесишишини исботланг.

√ 3) Ҳар қандай учбурчакка битта ва фақат битта ташқи айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

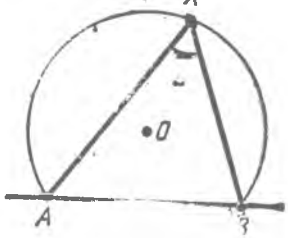
57. 1) ABC учбурчакнинг учларидан қарши томонларга параллел тўғри чизиқлар ўтказилган (86- расм). Уларнинг кесишиш нуқталари янги учбурчакнинг учларидир. Берилган учбурчак нинг учлари янги учбурчак томонларининг ўрталари эканини исботланг.

2) Учбурчакнинг баландликлари ётган тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишишини исботланг.

58. 1) Учбурчакнинг иккита биссектрисаси кесишишини исботланг.

2) Учбурчакнинг учта биссектрисаси бир нуқтада кесишишини исботланг.

3) Ҳар қандай учбурчакка битта ва фақат битта ички айлана чизиш мумкинлигини исботланг.



87- расм.

59. Градус ўлчови маълум ва томонлари берилган икки A, B нуқта орқали ўтадиган, учлари эса шу нуқталарни туташтирувчи тўғри чизиқдан бир томонда ётадиган бурчаклар учларининг геометрик ўрни айлананинг шу нуқталарга тиралган қисми эканини исботланг (87- расм).

7- синф

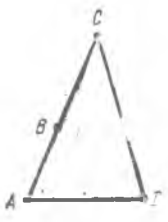
6- §. ТЎРТБУРЧАКЛАР

Тўртта нуқта ва бу нуқталарни кетма-кет туташтирувчи тўртта кесмадан иборат фигура *тўртбурчак* дейилади. Бунда нуқталардан ҳеч қандай учтаси бир тўғри чизиқда ётмаслиги, уларни туташтирувчи кесмалар эса кесишмаслиги керак. Берилган нуқталар тўртбурчакнинг *учлари*, уларни туташтирувчи кесмалар эса унинг *томонлари* дейилади.

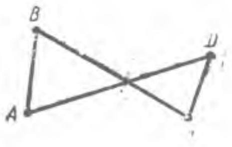
Масала (1). 88—90- расмларда учта фигура тасвирланган, уларнинг ҳар бири тўртта A, B, C, D нуқтадан ва уларни кетма-кет туташтирувчи тўртта кесмадан иборат. Бу фигуралардан қайси бири тўртбурчак бўлади?

Ечилиши. Фақат 90- расмда кўрсатилган фигура тўртбурчак бўлади, 88- расмдаги фигуранинг A, B, C нуқталари бир тўғри чизиқда ётади, 89- расмдаги фигуранинг BC, AD кесмалари кесишади.

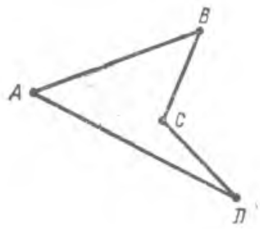
Агар тўртбурчакнинг учлари унинг томонларидан бирининг охирлари бўлса, улар *қўшни* учлар дейилади. Қўшни бўлмаган



88- расм.



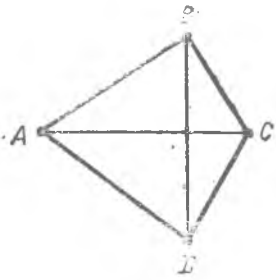
89- расм,



90- расм.

учлар *қарама-қарши ётувчи* учлар дейилади. Қарама-қарши учларни туташтирувчи кесмалар тўртбурчакнинг *диагоналлари* дейилади. 91- расмдаги тўртбурчакда AC, BD кесмалар диагоналлардир.

Тўртбурчакнинг бир учидан чиқувчи томонлари *қўшни томонлар* дейилади. Умумий охирга эга бўлмаган томонлар *қарама-қарши томонлар* дейилади. 91- расмдаги тўртбурчакда AB ва CD, BC ва AD томонлар қарама-қарши томонлардир.



91- расм.

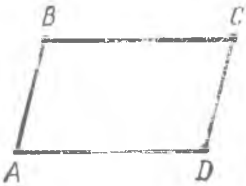
Тўртбурчак учларининг кўрсатилиши билан белгиланади. Масалан, 91- расмдаги тўртбурчак бундай белгиланади: $ABCD$. Белгилашда ёнма-ён турган учлар қўшни учлар бўлиши керак. 91- расмдаги тўртбурчакни $BCDA$ ёки $CDAB$ билан белгилаш ҳам мумкин. Аммо $ABDC$ деб белгилаш мумкин эмас (B ва D — қўшни бўлмаган учлар).

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

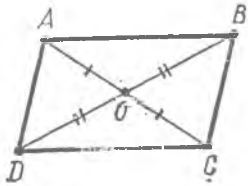
Қарама-қарши томонлари параллел бўлган, яъни параллел тўғри чизиқларда ётадиган тўртбурчак *параллелограммдир* (92- расм).

6.1- теорема. ***Агар тўртбурчакнинг диагоналлари кесишса ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинса, бу тўртбурчак параллелограммдир.***

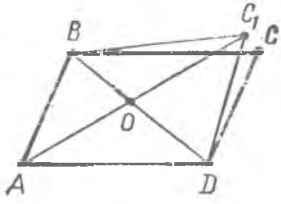
Исботи. $ABCD$ — берилган параллелограмм, O — унинг диагоналлари кесишган нуқта бўлсин (93- расм). AOD ва COB учбур-



92- расм.



93- расм.

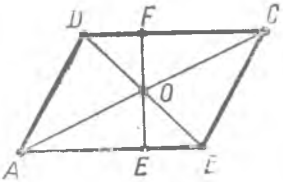


94- расм.

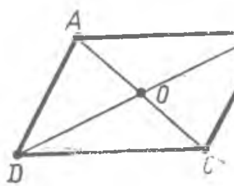
чаклар тенг. Уларнинг O учидаги бурчаклари вертикал бурчаклар бўлгани учун тенг, теорема шартига кўра эса $OB = OD$ ва $OA = OC$. Демак, OBC ва ODA бурчаклар тенг. Бу бурчаклар AD ва BC тўғри чизиқлар ҳамда BD кесувчи ҳосил қилган ички алмашинувчи бурчаклардир. 4.2- теоремага кўра AD ва BC тўғри чизиқлар параллел. AB ва CD тўғри чизиқларнинг параллеллиги AOB ва COD учбурчакларнинг тенглигига асосан исботланади. Теорема исботланди.

6.2- т е о р е м а (6.1- теоремага тескари). ***Параллелограммнинг диагоналлари кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади.***

И с б о т и. $ABCD$ — берилган параллелограмм бўлсин (94- расм). Унинг BD диагоналини ўтказамиз. Унинг ўртасини O билан белгилаймиз ва AO кесманинг давомига AO га тенг бўлган OC_1 кесмани қўямиз. 6.1- теоремага кўра ABC_1D тўртбурчак параллелограммдир. Демак, BC_1 тўғри чизиқ AD тўғри чизиққа параллел. Аммо B нуқта орқали AD тўғри чизиққа биттагина параллел тўғри чизиқ



95- расм.



96- расм.

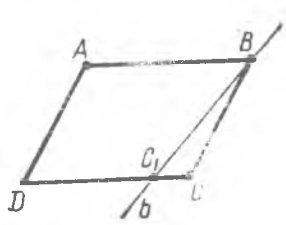
ўтказиш мумкин. Демак, BC_1 тўғри чизиқ BC тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. DC_1 тўғри чизиқ DC тўғри чизиқ билан устма-уст тушиши ҳам шунга ўхшаш исботланади. Демак, C_1 нуқта C нуқта билан устма-уст тушади. $ABCD$ параллелограмм ABC_1D параллелограмм билан устма-уст тушади. Шу сабабли унинг диагоналлари кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади. Теорема исботланди.

М а с а л а (6). Параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтасидан тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг параллел томонлар орасидаги қисми шу нуқтада тенг иккига бўлинишини исботланг.

Е ч и л и ш и. $ABCD$ — берилган параллелограмм ва EF эса AB ва CD параллел томонларни кесувчи тўғри чизиқ бўлсин (95- расм). Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра OAE ва OCF учбурчаклар тенг. Уларнинг OA ва OC томонлари тенг, чунки O нуқта AC диагоналнинг ўртаси (6.2- теорема). O учидаги бурчаклар вертикал бурчаклар бўлгани учун тенг, EAO ва FCO бурчаклар эса AB ва CD тўғри чизиқлар ҳамда AC кесувчи ҳосил қилган ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун тенг. Учбурчакларнинг тенглигидан OE ва OF томонларнинг тенглиги келиб чиқади. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

6.3- теорема. ***Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари тенг, қарама-қарши бурчаклари тенг.***

Исботи. $ABCD$ — берилган параллелограмм бўлсин (96- расм). Параллелограммнинг диагоналларини ўтказамиз. O — уларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. AOB ва COD учбурчакларнинг тенглигидан қарама- қарши AB ва CD томонларнинг тенглиги келиб чиқади. Бу учбурчакларнинг O учидаги бурчаклари вертикал бурчаклар бўлгани учун тенг, 6. 2- теоремага кўра эса $OA = OC$ ва $OB = OD$. Худди шунга ўхшаш, AOD ва COB учбурчакларнинг тенглигидан қарама-қарши томонларнинг иккинчи жуфти — AD ва BC томонларнинг тенглиги келиб чиқади.



97- расм.

ABC ва CDA учбурчакларнинг (уч томонига кўра) тенглигидан ABC ва CDA қарама-қарши бурчакларнинг тенглиги келиб чиқади. Уларда исботланганига кўра $AB = CD$ ва $BC = DA$, AC томон эса умумий. Худди шунга ўхшаш, BCD ва DAB учбурчакларнинг тенглигидан қарама-қарши BCD ва DAB бурчакларнинг тенглиги келиб чиқади. Теорема тўла исботланди.

Масала (15). Агар тўртбурчакнинг иккита томони параллел ва тенг бўлса, унинг параллелограмм эканини исботланг.

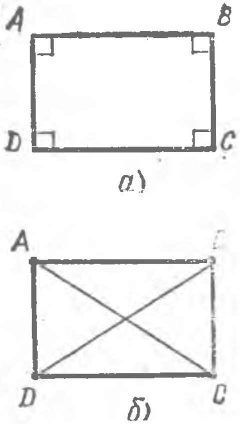
Ечилиши. $ABCD$ — берилган тўртбурчак бўлиб, унинг AB ва CD томонлари параллел ва тенг бўлсин (97- расм). B уч орқали AD томонга параллел b тўғри чизиқни ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ DC тўғри чизиқни бирор C_1 нуқтада кесиб ўтади. C_1 нуқта DC нурга тегишли, чунки тўлдирувчи нур ва b тўғри чизиқ AD тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётади. ABC_1D тўртбурчак параллелограммдир. 6.3- теоремага кўра $C_1D = AB$. Шартга кўра эса $AB = CD$. Демак, $DC = DC_1$. Бундан C ва C_1 нуқталарнинг устма-уст тушиши келиб чиқади. Шундай қилиб, $ABCD$ тўртбурчак ABC_1D параллелограмм билан устма-уст тушади, демак, у параллелограммдир.

ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАК. РОМБ. КВАДРАТ.

Тўғри тўртбурчак деганда ҳамма бурчаклари тўғри бўлган параллелограммни тушунамиз (98- *а*, расм).

6.4- теорема. ***Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг.***

Исботи. $ABCD$ — берилган тўғри тўртбурчак бўлсин (98- *б*, расм).



98- расм,

Теореманинг даъвоси BAD ва CDA тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглигидан келиб чиқади. Бу учбурчакларнинг BAD ва CDA бурчаклари тўғри, AD катет умумий, AB ва CD катетлар эса параллелограммнинг қарама-қарши томонлари бўлгани учун тенг. Учбурчакларнинг тенглигидан уларнинг гипотенузалари тенг деган натижа чиқади. Гипотенузалар эса тўғри тўртбурчакнинг диагоналларидир. Теорема исботланди.

Масала (21). Параллелограммнинг ҳамма бурчаклари тенг бўлса, унинг тўғри тўртбурчак эканини исботланг.

Ечилиши. Параллелограммнинг бир томонига ёпишган бурчаклари ички бир томонли бурчаклардир, шу сабабли уларнинг йиғиндиси 180° га тенг. Масала шартига кўра бу бурчаклар тенг, шунга кўра уларнинг ҳар бири тўғри бурчакдир. Ҳамма бурчаклари тўғри бўлган параллелограмм тўғри тўртбурчакдир.

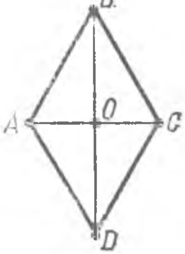
Ромб — ҳамма томонлари тенг бўлган параллелограммдир (99-расм).

6.5- теорема. ***Ромбнинг диагоналлари тўғри бурчак остида кесишади. Ромб диагоналлари унинг бурчакларининг биссектрисаларидир.***

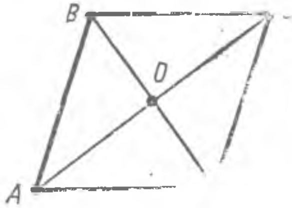
Исботи. $ABCD$ — берилган ромб (98- расмга қ.), O — унинг диагоналлари кесишган нуқта бўлсин. Параллелограммнинг хоссасига кўра $AO = OC$. Демак, тенг ёнли ABC учбурчакда BO кесма медианадир. Тенг ёнли учбурчакнинг хоссасига кўра унинг асосига ўтказилган медиана ҳам биссектриса, ҳам баландлик бўлади. Бу эса BD диагональ B бурчакнинг биссектрисаси ва AC диагоналга перпендикуляр эканини билдиради. Теорема исботланди.

Масала (28). Параллелограммнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, унинг ромб эканлигини исботланг.

Ечилиши. $ABCD$ — диагоналлари перпендикуляр бўлган параллелограмм ва O нуқта — диагоналларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин (100- расм). Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра AOB ва AOD учбурчаклар тенг. Уларнинг O учидаги бурчаклари шартга кўра тўғри бурчаклар, AO томон умумий, параллелограммнинг хоссасига кўра (6.2- теорема) $OB = OD$. Учбурчакларнинг тенглигидан томонларининг тенглиги келиб чиқади; $AB = AD$. 6.3- теоремага кўра эса $AD = BC$, $AB = CD$. Шундай қилиб, параллелограммнинг ҳамма томонлари тенг, демак, у ромбдир.



99- расм.



100- расм,

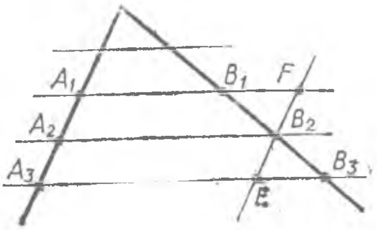
101- расм.

Квадрат — ҳамма томонлари тенг бўлган тўғри тўртбурчакдир (101- расм). Квадрат, шунингдек ромб ҳамдир, шу сабабли у тўғри тўртбурчак ва ромбнинг хоссаларига эга.

ФАЛЕС ТЕОРЕМАСИ

6.6- теорема (Фалес теоремаси)*. ***Агар бурчак томонини кесадиган параллел тўғри чизиқлар унинг бир томонидан тенг кесмалар ажратса, иккинчи томонидан ҳам тенг кесмалар ажратади*** (102- расм).

Исботи. A_1, A_2, A_3 — параллел тўғри чизиқларнинг бурчакнинг бир томони билан кесишиш нуқталари бўлиб, A_2 нуқта A_1 ва A_3 нуқталар орасида ётсин (102- расм). B_1, B_2, B_3 — шу тўғри чизиқларнинг бурчакнинг иккинчи томони билан кесишиш нуқталари бўлсин. $A_1A_2 = A_2A_3$ бўлса, $B_1B_2 = B_2B_3$ бўлишини исботлаймиз.



102- расм.

Аввал B_2 нуқта B_1 ва B_3 нуқталар орасида ётишини исботлаймиз. A_1 ва A_3 нуқталар A_2B_2 тўғри чизиқдан турли томонда ётади, чунки A_1A_3 кесма бу тўғри чизиқни кесиб ўтади (A_2 нуқтада), A_1 ва B_1 нуқталар A_2B_2 тўғри чизиқдан бир томонда ётади,

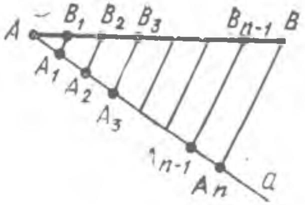
* Фалес Милетский (милетлик) — янги эрагача VI асрда яшаган қадимги грек олими.

чунки A_1B_1 кесма A_2B_2 тўғри чизиққа параллел, демак, уни кесиб ўтмайди. Худди шунга ўхшаш A_3 ва B_3 нуқталар A_2B_2 тўғри чизиқдан бир томонда ётади. Демак, B_1 ва B_3 нуқталар бу тўғри чизиқнинг турли томонида ётади, шу сабабли ҳам B_1B_3 кесма A_2B_2 тўғри чизиқни кесиб ўтади (B_2 нуқтада).

B_2 нуқта орқали A_1A_3 тўғри чизиққа параллел қилиб EF тўғри чизиқни ўтказамиз. Параллелограммнинг хоссасига кўра $A_1A_3 = FB_2$, $A_2A_3 = B_2E$. $A_1A_2 = A_2A_3$ бўлгани сабабли $FB_2 = B_2E$.

Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра B_2B_1F ва B_2B_3E учбурчаклар тенг. Исботланганига кўра уларда $B_2F = B_2E$. B_2 учидаги бурчаклар вертикал бурчаклар бўлгани учун тенг, B_2FB_1 ва B_2EB_3 бурчаклар эса A_1B_1 ва A_3B_3 параллел тўғри чизиқлар ҳамда EF кесувчи ҳосил қилган ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун тенг. Учбурчакларнинг тенглигидан томонлар тенг деган хулоса чиқади: $B_1B_2 = B_2B_3$. Теорема исботланди.

6.7- масала. ***Берилган AB кесмани n та тенг қисмга бўлинг.***



103- расм.

Ечилиши. A нуқтадан AB тўғри чизиқда ётмайдиган a ярим тўғри чизиқни ўтказамиз (103- расм). a ярим тўғри чизиққа AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ тенг кесмаларни қўямиз. A_n ва B нуқталар орқали b тўғри чизиқни ўтказамиз. b тўғри чизиққа параллел ва A_1, A_2, ... A_{n-1} нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқлар AB кесмани B_1, B_2, ... B_{n-1} нуқталарда кесиб ўтади, бу нуқталар AB тўғри чизиқни n та тенг қисмга ажратади (6.6- теорема).

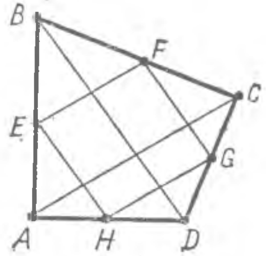
Учбурчакнинг *ўрта чизиғи* деб унинг икки томони ўрталарини туташтирувчи кесмага айтилади.

6.8- теорема. ***Учбурчакнинг берилган икки томони ўрталарини туташтирувчи ўрта чизиғи унинг учинчи томонига параллел ва шу томон ярмига тенг.***

104- расм.

Исботи. DE кесма ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлсин (104- расм). D нуқта орқали AB га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ 6.6-теоремага кўра AC кесмани унинг ўртасидан кесиб ўтади, яъни DE ўрта чизиқни ўз ичига олади. Биринчи даъво исботланди.

Энди DF ўрта чизиқни ўтказамиз. У AC томонга параллел. $AEDF$ тўртбурчак параллелограммдир. Параллелограммнинг хоссасига кўра $ED = AF$, $AF = FB$ бўлгани учун эса $ED = \frac{1}{2} AB$. Теорема исботланди.



105- расм.

Масала (47). Тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари эканини исботланг.

Ечилиши. $ABCD$ — берилган тўртбурчак ва E, F, G, H — унинг томонлари ўрталари (105- расм). EF кесма ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи бўлсин. Шу сабабли $EF \parallel AC$. GH кесма ADC учбурчакнинг ўрта чизиғи. Шу сабабли $GH \parallel AC$. Шундай қилиб, $EF \parallel GH$, яъни $EFGH$ тўртбурчакнинг қарама-қарши EF ва GH томонлари параллел. Иккинчи жуфт қарама-қарши томонларнинг параллеллиги ҳам шунга ўхшаш исботланади. Демак, $EFGH$ тўртбурчак параллелограммдир.

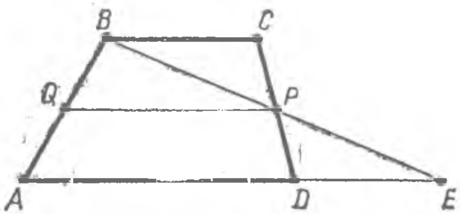
ТРАПЕЦИЯ

Иккита қарама-қарши томонларигина параллел бўлган тўртбурчак *трапеция* деб аталади (106- расм). Бу параллел томонлар трапециянинг *асослари* дейилади. Бошқа икки томони эса унинг *ён томонлари* дейилади. Ён томонлари тенг трапеция *тенг ёнли трапеция* дейилади. Трапеция ён томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесма *трапециянинг ўрта чизиғи* дейилади.

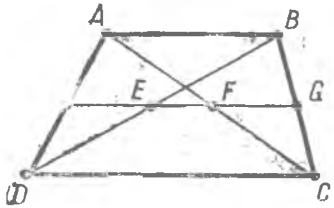
6.9- теорема. ***Трапециянинг ўрта чизиғи асосларига параллел ва улар йиғиндисининг ярмига тенг.***

Исботи. $ABCD$ — берилган трапеция бўлсин (107- расм). B уч ва CD ён томоннинг ўртаси P нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. У AD тўғри чизиқни бирор E нуқтада кесиб ўтади. Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра PBC ва PED учбурчаклар тенг. Ясашга кўра уларда $CP = DP$, P учидаги бур-


106- расм.



107- расм.



108- расм.

чаклар вертикал бурчаклар бўлгани учун тенг, PCB ва PDE бурчаклар эса BC ва AD параллел тўғри чизиқлар ҳамда CD кесувчи ҳосил қилган ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун тенг. Учбурчакларнинг тенглигидан томонлар тенг деган хулоса чиқади: $PB = PE$, $BC = ED$. Демак, трапециянинг PQ ўрта чизиғи ABE учбурчакнинг ўрта чизиғи экан. Учбурчак ўрта чизиғининг хоссасига кўра $PQ \parallel AE$ ва $PQ = \frac{1}{2} AE = \frac{1}{2}(AD + BC)$. Теорема исботланди.

Масала (60). Трапеция диагоналларининг ўрталарини туташтирувчи кесма асосларга параллел ва асослар айирмасининг ярмига тенглигини исботланг.

Ечилиши. $ABCD$ — берилган трапеция, CD унинг катта асоси бўлсин (108- расм). BC ён томоннинг G ўртаси орқали асосларга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. У диагоналларни E ва F нуқталарда кесиб ўтади, бу нуқталар диагоналларнинг ўрталаридир. EG кесма DBC учбурчакнинг ўрта чизиғи, FG эса ABC учбурчакнинг ўрта чизиғи. EF кесма бу ўрта чизиқларнинг айирмасига тенг:

$$EF = \frac{CD}{2} - \frac{AB}{2} = \frac{CD - AB}{2}.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай фигура тўртбурчак деб аталади?
2. Тўртбурчакнинг қандай учлари қўшни учлар, қандай учлари қарама-қарши учлар дейилади?
3. Тўртбурчакнинг диагоналлари деб нимага айтилади?
4. Тўртбурчакнинг қандай томонлари қўшни томонлар дейилади? Қандай томонлари қарама-қарши томонлар дейилади?
5. Тўртбурчак қандай белгиланади?
6. Параллелограмм нима?
7. Агар тўртбурчакларнинг диагоналлари кесишса ва шу кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинса, тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.
8. Параллелограммнинг диагоналлари кесишишини ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.
9. Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари тенг, қарама-қарши бурчаклари тенг эканини исботланг.
10. Тўғри тўртбурчак нима?
11. Тўғри тўртбурчакнинг диагоналлари тенг эканини исботланг.

12. Ромб нима?
13. Ромбнинг диагоналлари тўғри бурчак остида кесишишини исботланг; ромбнинг диагоналлари унинг бурчаклари биссектрисалари эканини исботланг.
14. Квадрат нима? Квадратнинг хоссаларини айтинг.
15. Фалес теоремасини исботланг.
16. Учбурчакнинг ўрта чизиғи мос томон ярмига тенг эканини исботланг.
17. Қандай тўртбурчак трапеция дейилади?
18. Трапециянинг ўрта чизиғи асослар йиғиндисининг ярмига тенглигини исботланг.

МАШҚЛАР

1. 88, 89 ва 90- расмларда учта фигура тасвирланган бўлиб, уларнинг ҳар бири тўртта нуқта ва уларни кетма-кет туташтирувчи тўртта кесмадан тузилган. Бу фигуралардан қайси бири тўртбурчак бўлади?
2. Бирор $PQRS$ тўртбурчак ясанг. Унинг қарама-қарши томонларини ва учларини кўрсатинг.
3. Учлари бир тўғри чизиқда ётмаган берилган учта нуқтадан иборат нечта параллелограмм ясаш мумкин?
4. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 5 м га тенг. Шу учбурчакнинг асосида олинган нуқтадан унинг ён томонларига параллел иккита тўғри чизиқ ўтказилган. Ҳосил қилинган параллелограммнинг периметрини (ҳамма томонлари узунликлари йиғиндисини) топинг.
5. $ABCD$ тўртбурчак периметри 10 см бўлган параллелограммдан иборат. ABD учбурчакнинг периметри 8 см эканини билган ҳолда BD диагоналнинг узунлигини топинг.
6. Параллелограмм диагоналларининг кесишган нуқтаси орқали тўғри чизиқ ўтказилган. Шу тўғри чизиқнинг параллелограммнинг параллел томонлари орасидаги кесмаси бу нуқтада тенг иккига бўлинишини исботланг.
7. $ABCD$ параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси орқали тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқ BC ва AD томонлардан $BE = 2$ м ва $AF = 2{,}8$ м кесмаларни ажратади. BC ва AD томонларни топинг.
8. Параллелограмм бурчакларидан бири 40° га тенг. Қолган бурчакларини топинг.
9. Параллелограмм бурчакларидан бири иккинчисидан 50° катта, унинг бурчакларини топинг.
10. Параллелограммнинг бир бурчаги 40°, иккинчиси 50° бўла оладими?
11. Параллелограммнинг диагонали унинг икки томони билан 25° ли ва 35° ли бурчак ҳосил қилади. Параллелограммнинг бурчакларини топинг.
12. Параллелограмм бурчакларидан иккитасининг йиғиндиси:
1) 80° га; 2) 100° га; 3) 160° га тенг бўлса, параллелограммнинг ҳамма бурчакларини топинг.

13. Параллелограмм бурчакларидан иккитасининг айирмаси: 1) 70° га; 2) 110° га; 3) 140° га тенг бўлса, параллелограммнинг ҳамма бурчакларини топинг.
14. $ABCD$ параллелограммнинг BC томони ўртаси E нуқтадан, AD томони ўртаси F нуқтадан иборат. $BEDF$ тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.
15. Тўртбурчакнинг иккита томони параллел ва тенг бўлса, унинг параллелограмм эканини исботланг.
16. $ABCD$ параллелограммнинг A бурчаги биссектрисаси ўтказилган, бу биссектриса BC томонни E нуқтада кесиб ўтади. Агар $AB = 9$ см, $AD = 15$ см бўлса, BE ва EC кесмалар нимага тенг?
17. Параллелограммнинг икки томони нисбати 3:4 га тенг. Унинг периметри эса 2,8 м га тенг. Параллелограмм томонларини топинг.
18. $ABCD$ параллелограммнинг B учидан AD томонга туширилган перпендикуляр шу томонни тенг иккига бўлади. Параллелограммнинг периметри 3,8 м га, ABD учбурчакнинг периметри эса 3 м га тенг экани маълум бўлса, BD диагонални ва параллелограмм томонларини топинг.
19. 1) Икки томони ва диагоналига кўра параллелограмм ясанг; 2) бир томони ва иккита диагоналига кўра параллелограмм ясанг.
20. 1) Икки томони ва бир бурчагига кўра параллелограмм ясанг; 2) диагоналлари ва улар орасидаги бурчагига кўра параллелограмм ясанг.
21. Параллелограммнинг ҳамма бурчаклари тўғри бўлса, у тўғри тўртбурчак эканлигини исботланг.
22. Параллелограммнинг диагоналлари тенг бўлса, у тўғри тўртбурчак бўлишини исботланг.
23. Тўғри тўртбурчакнинг биссектрисаларидан бири тўғри тўртбурчак томонини тенг иккига бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг кичик томони 10 см га тенг бўлса, унинг периметрини топинг.
24. Тўғри тўртбурчак диагоналларининг кесишиш нуқтаси катта томонга қараганда кичик томондан 4 см узоқроқда ётади. Тўғри тўртбурчак периметри 56 см га тенг. Тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.
25. Айлананинг бир нуқтасидан марказдан 6 см ва 10 см узоқликда ўзаро перпендикуляр иккита ватар ўтказилган. Шу ватарлар узунликларини топинг.
26. Ҳар бир катети 6 см га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак ичига берилган учбурчак билан умумий бурчакка эга бўлган тўғри тўртбурчак чизилган. Тўғри тўртбурчакнинг периметрини топинг.
27. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакка тўғри тўртбурчак шундай ички чизилганки, унинг икки учи гипотенузада, қолган икки учи катетларда ётади. Агар тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати 5:2 га тенг бўлиши, учбурчак гипотенузаси

эса 45 см га тенг экани маълум бўлса, тўғри тўртбурчакнинг томонлари нимага тенг?

28. Параллелограммнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, унинг ромб эканлигини исботланг.

29. Параллелограммнинг диагонали унинг бурчаклари биссектрисаси бўлса, унинг ромб эканини исботланг.

30. Ромбнинг томонларидан бири билан унинг диагоналлари ҳосил қиладиган бурчаклари нисбати 4:5 га тенг. Ромбнинг бурчакларини топинг.

31. Ҳамма томонлари тенг тўртбурчакнинг ромб эканини исботланг.

32. Ромб диагоналларидан бири унинг томонига тенг. Ромбнинг бурчакларини топинг.

33. 1) Бир бурчаги ва шу бурчаги учидан чиққан диагоналига кўра ромб ясанг; 2) диагонали ва шу диагонал қаршисидаги бурчаги бўйича ромб ясанг.

34. 1) Бир томони ва диагоналига кўра ромб ясанг; 2) иккита диагоналига кўра ромб ясанг.

35. Ҳар бир катети 2 м дан бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак ичига квадрат чизилган бўлиб, у учбурчак билан умумий бурчакка эга. Квадрат периметрини топинг.

36. $ABCD$ квадрат берилган. Унинг ҳар бир томонига тенг кесмалар қўйилган: $AA_1 = BB_1 = CC_1 = DD_1$. $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчакнинг квадрат эканини исботланг.

37. Квадратнинг диагонали 4 м га тенг. Унинг томони иккинчи квадратнинг диагоналига тенг. Иккинчи квадратнинг томонини топинг.

38. Томони 1 м га тенг квадрат берилган, бу квадратнинг диагонали иккинчи квадратнинг томонига тенг. Иккинчи квадратнинг диагоналини топинг.

39. Квадрат ичига тўғри тўртбурчак шундай чизилганки, квадратнинг ҳар бир томонида тўғри тўртбурчакнинг битта учи ётади ва тўғри тўртбурчакнинг томонлари квадрат диагоналларига параллел. Тўғри тўртбурчакнинг бир томони иккинчисидан икки марта катта ва квадратнинг диагонали 12 м га тенг эканини билган ҳолда тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

40. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчак ичига квадрат шундай тузилганки, унинг иккита учи гипотенузада, қолган иккита учи эса катетларда ётади. Гипотенуза 3 м га тенг экани маълум бўлса, квадрат томонини топинг.

41. Ташқи нуқтадан айланага ўзаро перпендикуляр иккита уринма ўтказилган; айлана радиуси 10 см. Уринмалар узунликларини (берилган нуқтадан уриниш нуқтасигача масофани) топинг.

42. Учбурчакнинг томонлари 8 см, 10 см, 12 см га тенг. Учлари шу учбурчак томонларининг ўрталарида ётган учбурчак томонларини топинг.

43. Учбурчакнинг периметри 12 см га тенг; томонларининг ўрталари кесмалар билан туташтирилган. Ҳосил қилинган учбурчак периметрини топинг.

44. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига параллел ўрта чизиғи 3 см

га тенг. Учбурчакнинг периметри 16 см бўлса, унинг томонларини топинг.

45. Учбурчак томонларининг ўрталари берилган бўлса, учбурчакни қандай ясаш мумкин?

46. Учбурчакнинг учлари унинг икки томони ўрталаридан ўтадиган тўғри чизиқдан тенг узоқликда ётишини исботланг.

47. Тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари бўлишини исботланг.

48. Тўртбурчакнинг диагоналлари 10 м ва 12 м бўлса, олдинги масаладаги параллелограммнинг томонларини топинг.

49. Тўртбурчакнинг диагоналлари a ва b га тенг. Учлари берилган тўртбурчак томонларининг ўрталарида ётган тўртбурчак периметрини топинг.

50. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари ромбнинг учлари эканини исботланг. Ва аксинча, ромб томонларининг ўрталари тўғри тўртбурчакнинг учлари эканини исботланг.

51. Берилган кесмани: 1) 3 та; 2) 5 та; 3) 6 та тенг қисмларга бўлинг.

52. Трапециянинг ён томони учта тенг қисмга бўлинган, бўлиниш нуқталаридан иккинчи томонига параллел қилиб кесмалар ўтказилган. Трапециянинг асослари 2 м ва 5 м га тенг бўлса, бу кесмаларнинг узунликлари нимага тенг?

53. Тенг ёнли трапециянинг асосларидаги бурчаклари тенг эканини исботланг.

54. Тенг ёнли трапециянинг қарама-қарши бурчаклари айирмаси $40°$ га тенг экани маълум бўлса, унинг бурчаклари нимага тенг?

55. Тенг ёнли трапециянинг катта томони 2,7 м га, ён томони 1 м га, улар орасидаги бурчак $60°$ га тенг. Трапециянинг кичик асосини топинг.

56. Тенг ёнли трапециянинг ўтмас бурчаги учидан ўтказилган баландлик катта асосини 6 см ва 30 см ли кесмаларга бўлади. Трапеция асосларини топинг.

57. Тенг ёнли трапециянинг кичик асоси ён томонига тенг, диагонали ён томонига перпендикуляр. Трапециянинг бурчакларини топинг.

58. Берилган тўғри чизиқнинг бир томонида ундан 10 м ва 20 м масофада иккита A, B нуқта берилган. AB кесманинг ўртасидан берилган тўғри чизиққача масофани топинг.

59. Берилган тўғри чизиқнинг турли томонларида ундан 10 см ва 4 см масофада иккита A, B нуқта берилган. AB кесманинг ўртасидан берилган тўғри чизиққача масофани топинг.

60. Трапеция диагоналларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесма асосларга параллел ва асослар айирмасининг ярмига тенг эканини исботланг.

61. Трапеция асосларининг нисбати 2:3 га тенг, ўрта чизиғи эса 5 м га тенг. Трапеция асосларини топинг.

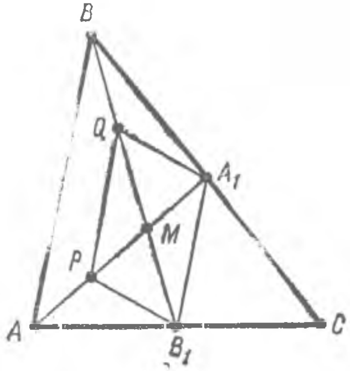
62. Айлана диаметрининг учлари айланага ўтказилган уринмадан 1,6 м ва 0,6 м узоқлаштирилган. Диаметр узунлигини топинг.

63. Трапециянинг ўрта чизиғи 7 см га тенг, унинг асосларидан бири эса иккинчисидан 4 см катта. Трапеция асосларини топинг.

64. Тенг ёнли трапециянинг ўтмас бурчаги учидан ўтказилган баландлик унинг катта асосини узунликлари a ва b га тенг ($a > b$) кесмаларга ажратади. Трапециянинг ўрта чизиғини топинг.

65. Асослари ва ён томонларига кўра трапеция ясанг.

66. Асослари ва диагоналларига кўра трапеция ясанг.



109- расм.

67. 1) ABC учбурчакнинг AA_1 ва BB_1 медианалари ўтказилган, бу медианалар M нуқтада кесишади (109- расм). AMB учбурчакнинг PQ ўрта чизиғи ўтказилган. A_1B_1PQ тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.

2) Учбурчакнинг ихтиёрий иккита медианаси кесишади ва бўлиниш нуқтасида, учидан ҳисоблаганда, 2:1 га тенг нисбатда бўлинади. Шуни исботланг.

3) Учбурчакнинг учала медианаси ҳам бир нуқтада кесишишини исботланг.

68. Айланага ички чизилган тўртбурчак қарама-қарши бурчаклари йиғиндиси 180° га тенглигини исботланг.

69. Айланага ташқи чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари узунликларининг йиғиндиси бир хил эканини исботланг.

7- §. ПИФАГОР ТЕОРЕМАСИ

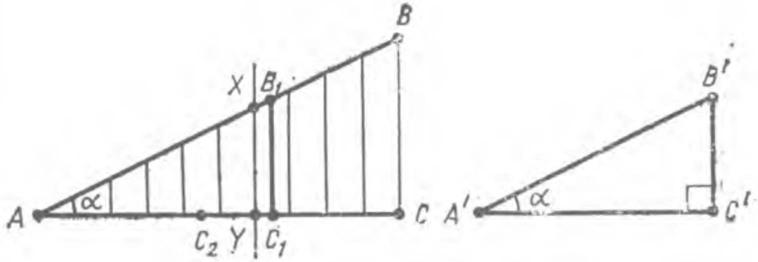
БУРЧАК КОСИНУСИ

Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг *косинуси* деб шу бурчакка ёпишган катетнинг гипотенузага нисбатига айтилади. α бурчакнинг косинуси мана шундай белгиланади; $\cos\alpha$. Маълум бўлишича, бурчакнинг косинуси бурчакнинг фақат градус ўлчовига боғлиқ бўлиб (7.1- теорема), учбурчакнинг ўлчамларига ва жойлашишига боғлиқ эмас, яъни ўткир бурчаклари бир хил бўлган иккита учбурчакнинг шу бурчаклари косинуслари бир хилдир.

7.1- теорема. ***Бурчакнинг косинуси унинг фақат градус ўлчовига боғлиқ.***

Исботи. ABC ва $A'B'C'$ учбурчаклар A ва A' учларидаги бурчаклари бир хил, яъни α га тенг учбурчаклар бўлсин (110- расм).

$$\frac{A'C'}{A'B'} = \frac{AC}{AB} \qquad (*)$$



110- расм.

ни исботлаш талаб қилинади. AB нурга $A'B'$ кесмага тенг AB_1 кесмани қўямиз ва AC тўғри чизиққа B_1C_1 перпендикуляр туширамиз. AB_1C_1 ва $A'B'C'$ учбурчаклар гипотенузаси ва ўткир бурчагига кўра тенг. Шу сабабли $A'C' = AC_1$. Шундай қилиб, (*) тенгликни исботлаш учун

$$\frac{AC_1}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$$

эканини исботлаш етарли.

$\frac{AC_1}{AB_1} \neq \frac{AC}{AB}$ бўлсин, масалан, $\frac{AC_1}{AB_1} > \frac{AC}{AB}$ бўлсин дейлик. AC_1 кесмада C_2 нуқтани шундай оламизки, у $\frac{AC_2}{AB_1} = \frac{AC}{AB}$ тенгликни қаноатлантирсин. AC кесмани катта сондаги n та тенг қисмларга бўламиз ва бўлиниш нуқталаридан BC тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Фалес теоремасига кўра бу тўғри чизиқлар AB кесмани n та тенг қисмга ажратади. n етарлича катта бўлганда C_1C_2 кесмада бўлиниш нуқталари мавжуд. Улардан бирини Y билан, AB томонда унга мос нуқтани эса X билан белгилаймиз.

$a = \frac{AC}{n}$, $b = \frac{AB}{n}$ бўлсин ва m — AY кесмадаги бўлиниш натижасида ҳосил қилинган кичик кесмалар сони бўлсин. Ушбуларга эгамиз: $AC = na$, $AB = nb$, $AY = ma$, $AX = mb$. Булардан

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AY}{AX}$$

эканини кўриб турибмиз. Тенгликнинг ўнг қисмидаги AY ни ундан кичик бўлган AC_2 билан, AX ни эса ундан катта AB_1 билан алмаштирамиз. У ҳолда ўнг қисм кичиклашади ва биз $\frac{AC}{AB} > \frac{AC_2}{AB_1}$ тенгсизликка эга бўламиз. C_2 нуқтани танлашимизга кўра $\frac{AO}{AB} = \frac{AC_2}{AB_1}$ бўлиши керак. Биз зидликка келдик. Теорема исботланди.

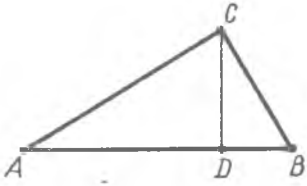
Масала (1). Косинуси $\frac{3}{5}$ га тенг бурчакни ясанг.

Ечилиши. Бир катети узунлиги 3 бирликка ва гипотенузаси 5 бирликка тенг тўғри бурчакли учбурчак ясаймиз. Бу учбурчакнинг иккинчи катети қаршисида ётувчи бурчак изланаётган бурчак бўлади.

ПИФАГОР ТЕОРЕМАСИ

7.2- теорема (Пифагор теоремаси*). ***Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катетлари квадратларининг йиғиндисига тенг.***

Исботи. ABC — берилган тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унда C бурчаги тўғри бурчак бўлсин. Тўғри бурчакнинг C учидан CD баландликни ўтказамиз (111- расм).



111- расм.

Бурчак косинусининг таърифига кўра:

$$\cos A = \frac{AC}{CD} = \frac{AC}{AB}. \text{ Бундан } AB \cdot AD = AC^2.$$

Шунга ўхшаш

$$\cos B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}. \text{ Бундан } AB \cdot BD = BC^2.$$

Ҳосил бўлган тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб ва $AD + DB = AB$ эканини ҳисобга олиб

$$AC^2 + BC^2 = AB\,(AD + DB) = AB^2$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.

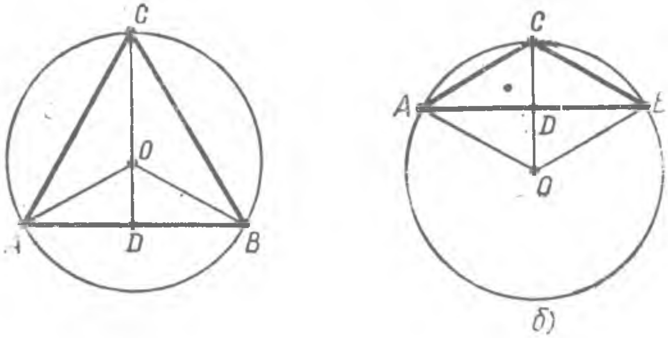
Пифагор теоремасидан ушбу натижа чиқади: ***тўғри бурчакли учбурчакнинг исталган катети гипотенузасидан кичик.*** Бундан ўз навбатида қуйидаги натижа чиқади: ***ҳар қандай α ўткир бурчак учун*** $\cos\alpha < 1$.

Масала (16). Асоси a га ва ён томони b га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

Ечилиши. Асосга туширилган CD баландликни топамиз (112- расм). Пифагор теоремасига кўра:

---

* Пифагор — эрамизгача VI асрда яшаган қадимги грек олими.



112- расм.

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}.$$

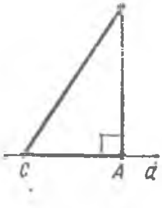
Ташқи чизилган айлана радиусини R билан белгилаймиз. Агар айлананинг O маркази CD баландликда ётса (112-*а* расм), у ҳолда $OD = CD - R$. Агар айлананинг маркази баландликнинг давомида ётса (112-*б* расм), у ҳолда $OD = R - CD$. Пифагор теоремасига кўра $AO^2 = OD^2 + AD^2$ ёки

$$R^2 = \left(\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} - R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

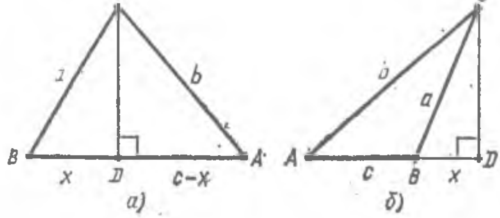
Бундан:

$$R = \frac{b^2}{2\sqrt{b^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2}}.$$

BA кесма a тўғри чизиққа B нуқтадан туширилган перпендикуляр ва C нуқта a тўғри чизиқнинг A дан бошқа ихтиёрий нуқтаси бўлсин. BC кесма B нуқтадан a тўғри чизиққа ўтказилган *оғма* дейилади (113-расм). C нуқта *оғма асоси* дейилади. AC кесма *оғма проекцияси* дейилади.



113- расм.



114- расм.

Пифагор теоремасидан қуйидаги хулосалар чиқади, агар бир нуқтадан тўғри чизиққа перпендикуляр ва оғмалар ўтказилса, ***оғма перпендикулярдан катта, тенг оғмалар тенг проекцияларга эга, иккита оғмадан қайси бирининг проекцияси катта бўлса, ўша оғма катта бўлади.***

Масала (21). Учбурчакнинг томонлари a, b, c га тенг. Учбурчакнинг c томонига туширилган баландлигини топинг.

Ечилиши. a томоннинг c томон ётган тўғри чизиққа туширилган проекциясини x билан белгилаймиз. У ҳолда b томоннинг шу тўғри чизиққа проекцияси ё $c - x$ га (114- *а* расм), ёки $c + x$ га тенг бўлади (114- *б* расм). Пифагор теоремасига кўра биринчи ҳолда:

$$CD^2 = a^2 - x^2,\ CD^2 = b^2 - (c - x)^2.$$

Бундан ушбу тенгламани ҳосил қиламиз:

$$a^2 - x^2 = b^2 - (c -)x^2.$$

Бу тенгламани ечамиз:

$$a^2 - x^2 = b^2 - c^2 + 2cx - x^2,\ a^2 = b^2 - c^2 + 2cx,$$

$$x = \frac{1}{2c}\ (a^2 - b^2 + c^2).$$

CD баландликни топамиз:

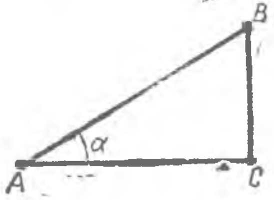
$$CD = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4c^2}\ (a^2 - b^2 + c^2)^2}.$$

Иккинчи ҳолда ҳам жавоб шундай чиқади. Ҳисоблашларни мустақил бажаринг.

ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ УЧБУРЧАКДА ТОМОНЛАР БИЛАН БУРЧАКЛАР ОРАСИДАГИ МУНОСАБАТЛАР

ABC — тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унинг тўғри бурчаги C ва A учидаги ўткир бурчаги α га тенг бўлсин (115- расм). Таърифга кўра *α бурчакка ёпишган катетнинг гипотенузага нисбати* $\cos \alpha$ *га тенг.*

α бурчакнинг синуси деб ($\sin \alpha$ билан белгиланади) α бурчак қаршисида ётган BC катетнинг AB гипотенузага нисбатига айтилади:



115-расм

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}.$$

α бурчакнинг тангенси деб ($\mathrm{tg}\ \alpha$ билан белгиланади) α бурчак қаршисида ётган катетнинг ёпишган катетга нисбатига айтилади:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC}.$$

Бурчакнинг синуси ва тангенси, косинус сингари, бурчакнинг фақат катталигига боғлиқ.

Ҳақиқатан ҳам, Пифагор теоремасига кўра

$$BC = \sqrt{AB^2 - AC^2},$$

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB} = \sqrt{1 - \left(\frac{AC}{AB}\right)^2} = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}.$$

$\cos\alpha$ бурчакнинг фақат катталигига боғлиқлиги сабабли $\sin\alpha$ ҳам фақат бурчакнинг катталигига боғлиқ. Сўнгра,

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{BC}{AC} = \frac{BC}{AB} : \frac{AC}{AB} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Бундан $\operatorname{tg}\alpha$ ҳам фақат бурчакнинг катталигига боғлиқ эканлиги кўринади.

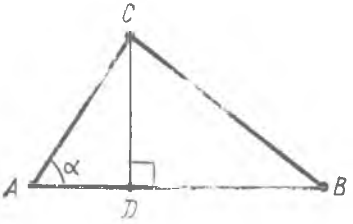
$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ нинг таърифларидан қуйидаги қоидаларга эга бўламиз:

α бурчак қаршисидаги катет гипотенуза билан $\sin\alpha$ ***нинг кўпайтмасига тенг.***

α бурчакка ёпишган катет гипотенуза билан $\cos\alpha$ ***нинг кўпайтмасига тенг.***

α бурчак қаршисидаги катет иккинчи катет билан $\operatorname{tg}\alpha$ ***нинг кўпайтмасига тенг.***

Бу қоидалар тўғри бурчакли учбурчакнинг томонларидан бирини ва ўткир бурчагини билган ҳолда қолган иккита томонини топиш имконини беради; иккита томонини билган ҳолда ўткир бурчакларини топиш имконини беради.



116- расм.

Масала (31). Тўғри бурчакли учбурчакнинг c гипотенузаси ва ўткир бурчаги α берилган. Катетларни, уларнинг гипотенузага туширилган проекцияларини ва гипотенузага туширилган баландликни топинг.

Ечилиши (116-расм). $AC = AB\cos\alpha = c\cos\alpha$; $BC = AB\sin\alpha = c\sin\alpha$; $BD = BC\sin\alpha = c\sin^2\alpha$; $AD = AC\cos\alpha = c\cos^2\alpha$; $CD = AC\sin\alpha = c\sin\alpha\cos\alpha$.

Бу ифодалардан қуйидаги муносабатлар чиқади:

$$AC = \sqrt{AB\cdot AD},\quad BC = \sqrt{AB\cdot BD},\quad CD = \sqrt{AD\cdot BD}.$$

Бу муносабатларни эсда сақлаш фойдали. Улар сўзлар билан бундай ифодаланади:

Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза билан шу катетнинг гипотенузага туширилган проекцияси орасидаги ўрта пропорционалдир.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан туширилган баландлиги катетларнинг гипотенузага туширилган проекциялари орасидаги ўрта пропорционалдир.

«Ўрта пропорционал» деган номнинг тўғрилиги $x = \sqrt{ab}$ сонининг $a:x = x:b$ пропорциянинг ўрта ҳади эканлигидан дарак беради.

СИНУСЛАР, КОСИНУСЛАР ВА ТАНГЕНСЛАР ЖАДВАЛЛАРИДАН ҚАНДАЙ ФОЙДАЛАНИШ КЕРАК

$\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ учун махсус жадваллар тузилган. Бу жадваллар берилган α бурчак бўйича $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ ни топиш ёки $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ нинг қийматлари бўйича тегишли бурчакларни топиш имкониятини беради. Бу жадваллардан қандай фойдаланишни 32-масалани ечиш намунасида кўрсатамиз.

Масала (32). 1) Жадваллардан фойдаланиб топинг: $\sin 22°$, $\sin 22°36'$, $\sin 22°38'$, $\sin 22°41'$, $\cos 68°$, $\cos 68°18'$, $\cos 68°20'$, $\cos 68°23'$.

2) Агар $\sin x = 0{,}2840$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$ бўлса, x бурчакни топинг.

Ечилиши (В. М. Брадис жадвалларининг 52-бетига қ.). 1) $\sin 22°$ ни топамиз. Жадвалнинг биринчи устунидан $22°$ ни излаймиз. Иккинчи устундан $22°$ ёнида 0,3746 сонини кўрамиз. Ана шу сон $\sin 22°$ дир.

$\sin 22°36'$ ни топамиз. Яна биринчи устундан $22°$ ни излаймиз. Сўнгра $22°$ турган сатр бўйича сурилиб, тепасида $36'$ турган устунни излаймиз. Ана шу устунда $\sin 22°36'$ бўлади. У 0,3843 га тенг.

$\sin 22°38'$ ни топамиз. 6 га каррали 38 га яқин сонни излаймиз. Бу 36 бўлади. $\sin 22°36'$ ни топамиз ва унга $2'$ га тегишли тузатмани қўшамиз $1'$, $2'$ ва $3'$ га доир тузатмалар жадвалларнинг охирги учта устунида берилган. $22°$ турган сатрдан $2'$ га доир тузатмани топамиз. У 5 га тенг. Энди топамиз: $\sin 22°38' = 0{,}3843 + 0{,}0005 = 0{,}3848$.

$\sin 22°41'$ ни топамиз. $\sin 22°42°$ ни излаймиз ва $1'$ га доир тузатмани айириб ташлаймиз. Топамиз: $\sin 22°41' = 0{,}3856$.

Қосинуснинг қийматларини $\cos\alpha = \sin(90° - \alpha)$ тенгликдан фойдаланиб, синуслар жадвали ёрдамида топиш мумкин (бу тенглик 7.3-теоремада исботланади). Аммо косинусни бевосита топиш ҳам мумкин. $\cos 68°$ ни топамиз. Жадвалнинг ўнг томонидаги тўртинчи устундан $68°$ ни излаймиз. Унинг чап томонида 0,3746 сони турибди. Ана шунинг ўзи $\cos 68°$ дир. Шуни айтамизки, $\cos 68° = \cos (90° - 22°) = \sin 22°$. Шунингдек, $\sin 22°$ ҳам 0,3746 га тенг.

$\cos 68°18'$ ни топамиз. $68°$ турган сатрни излаймиз. Шу сатр бўйлаб чапга сурилами. Тагида $18'$ турган устундан $\cos 68°18'$ ни топамиз. У 0,3697 га тенг.

$\cos 68°20'$ ни топиш учун $\cos 68°18'$ ни оламиз ва $2'$ га доир тузатмани ҳисобга оламиз. Тузатмани айириш керак $\cos 68°20' = 0,3697 - 0,0005 = 0,3692$ эканини топамиз.

$\cos 68°23'$ ни топиш учун $\cos 68°24°$ ни оламиз ва $1'$ га доир тузатмани ҳисобга оламиз. Тузатмани қўшиш керак. $\cos 68°23' = 0,3681 + 0,0003 = 0,3684$ эканини топамиз.

Тузатмалар билан ишлашда шуни назарда тутиш керакки, бурчак катталашганда синус катталашади, косинус эса кичиклашади (7.4-теоремага қ.). Шу сабабли тузатмани қўшиш ёки айириш кераклигини фаҳмлаш қийин эмас.

Тангенснинг қийматларини тангенслар жадвалидан, синуснинг қийматларини синуслар жадвалидан қандай топилган бўлса, шундай топилади.

2) $\sin x = 0,2840$; x бурчакни топамиз. Синуслар жадвалидан 0,2840 сонини излаймиз. Бу сон чап томонида $16°$ турган сатрда ва устида $30'$ турган устунда турганини кўриб турибмиз. Демак, $x = 16°30'$.

$\sin x = 0,2844$; x ни топамиз. Синуслар жадвалидан 0,2844 сонини ёки унга яқин сонни излаймиз. Унга яқин сон 0,2840 бўлади. Бу $\sin 16°30'$ дир. Агар $1'$ га доир тузатмани қўшсак, 0,2843 бўлади. Агар $2'$ га доир тузатмани қўшсак, 0,2846 га эга бўламиз. Шу сабабли $1'$ гача аниқликда $x = 16°31'$ ни олиш керак.

$\cos x = 0,2710$; x ни топамиз. Жадвалдан 0,2710 ни ёки. унга яқин сонни излаймиз. Бу сон 0,2706 дан иборат. У $\cos 74°18'$ дир. Олинган сон эса катта. Демак, бурчак кичик. $1'$ га доир тузатма 0,0003, $2'$ га доир тузатма эса 0,0006 бўлади. $1'$ га доир тузатмани оламиз. $1'$ гача аниқликдаги бурчакни ҳосил қиламиз: $x = 74°17'$.

Тангенснинг қийматига кўра бурчак тангенслар жадвали ёрдамида, синус қийматига кўра бурчак синуслар жадвали ё дамида қандай изланса, шундай изланади.

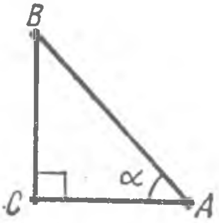
АСОСИЙ ТРИГОНОМЕТРИК АЙНИЯТЛАР

Қуйидаги айниятларни исботлаймиз:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

A учидаги бурчаги α га тенг бўлган тўғри бурчакли ихтиёрий ABC учбурчакни оламиз (117-расм). Пифагор теоремасига биноан:

$$BC^2 + AC^2 = AB^2.$$



117-расм.

Тенгликнинг иккала қисмини AB^2 га бўламиз. Ушбуга эга бўламиз:

$$\left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = 1.$$

Аммо $\frac{BC}{AB} = \sin\alpha$, $\frac{AC}{AB} = \cos\alpha$. Шундай қилиб,

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Бу тенглик айниятдир. У ҳар қандай α ($\alpha < 90°$) да тўғри.

Иккинчи айниятни ҳосил қилиш учун ҳосил қилинган айниятнинг иккала қисмини $\cos^2\alpha$ га бўламиз:

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha} \quad \text{ёки} \quad 1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}.$$

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ айниятнинг иккала қисмини $\sin^2\alpha$ га бўлиб, учинчи айният ҳосил қиламиз:

$$1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$

Бу айниятларнинг аҳамияти шундан иборатки, улар $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ёки $\operatorname{tg}\alpha$ дан бирини билган ҳолда қолган иккитасини топиш имконини беради.

Масала (47). Агар $\cos\alpha = \frac{5}{13}$ бўлса, $\sin\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ нинг қийматларини ҳисобланг.

Ечилиши. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ бўлгани учун:

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \left(\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{12}{5}.$$

БАЪЗИ БУРЧАКЛАРНИНГ СИНУС, КОСИНУС ВА ТАНГЕНСЛАРИ УЧУН ҚИЙМАТЛАР

7.3-теорема. *Ҳар қандай ўткир α бурчак учун* $\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$.

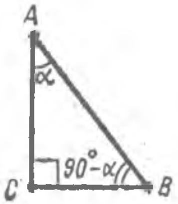
Исботи. ABC учбурчак A учидаги ўткир бурчаги α га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчак бўлсин (118-расм). У ҳолда унинг B учидаги ўткир бурчаги $90° - \alpha$ га тенг. Таърифга биноан:

$$\sin \alpha = \frac{BC}{AB}, \ \cos \alpha = \frac{AC}{AB},$$

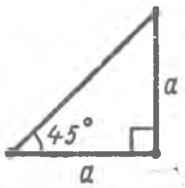
$$\sin (90° - \alpha) = \frac{AC}{AB}, \ \cos (90° - \alpha) = \frac{BC}{AB}.$$

Иккинчи ва учинчи тенгликлардан: $\sin (90° - \alpha) = \cos \alpha$. Биринчи ва тўртинчи тенгликлардан: $\cos (90° - \alpha) = \sin \alpha$. Теорема исботланди.

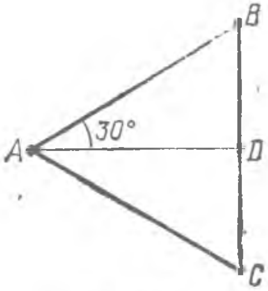
$45°$ *ли бурчакнинг синуси, косинуси ва тангенсини топамиз.* Бунинг учун ўткир бурчаги $45°$ га тенг бўлган тўғри бурчакли



118- расм.



119- расм.



120- расм.

учбурчак ясаймиз (119- расм). Бу учбурчакнинг иккинчи ўткир бурчаги ҳам $45°$ га тенг, шу сабабли учбурчак тенг ёнли. Учбурчакнинг катетлари a га тенг бўлсин. Пифагор теоремасига кўра гипотенуза $a\sqrt{2}$ га тенг бўлади. Қуйидагиларни топамиз:

$$\sin 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos 45° = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \ \mathrm{tg}\ 45° = \frac{a}{a} = 1.$$

$30°$ *ли бурчакнинг синуси, косинуси ва тангенсини топамиз.* Тенг томонли ABC учбурчакни оламиз (120- расм). Унинг AD медианасини ўтказамиз. У биссектриса ва баландлик бўлади. Шу сабабли ABD учбурчак A учидаги ўткир бурчаги $30°$ га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакдир. Тенг томонли учбурчакнинг томони a га тенг бўлсин. У ҳолда $BD = \frac{a}{2}$. Пифагор теоремасига кўра:

$$AD = \sqrt{AB^2 - BD^2} = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Демак,

$$\sin 30° = \frac{a}{2} : a = \frac{1}{2}; \quad \cos 30° = \frac{a\sqrt{3}}{2} : a = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7.3- теоремага кўра:

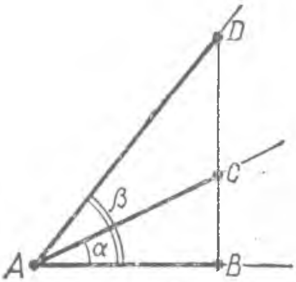
$$\sin 60° = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \cos 60° = \sin 30° = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60° = \frac{\sin 60°}{\cos 60°} = \sqrt{3}.$$

α БУРЧАКНИНГ ЎСИШИ БИЛАН $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ВА $\operatorname{tg}\alpha$ НИНГ ЎЗГАРИШИ

7.4-теорема. ***Ўткир бурчакнинг катталашиши билан*** $\sin\alpha$ ***ва*** $\operatorname{tg}\alpha$ ***орта боради (ўсади),*** $\cos\alpha$ ***эса камая боради.***

Исботи. α ва β — ўткир бурчаклар, шу билан бирга $\alpha < \beta$ бўлсин. α ва β бурчакларни AB ярим тўғри чизиқдан битта ярим текисликка қўямиз (121-расм). B нуқта орқали AB га перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқ бизнинг бурчаклар томонларини C ва D нуқталарда кесиб ўтади. $\alpha < \beta$ бўлгани учун C нуқта B ва D нуқталар орасида ётади. Шу сабабли $BC < BD$. Демак, бир нуқтадан тўғри чизиққа ўтказилган оғманинг хоссасига кўра, $AC < AD$.



121-расм.

$$\cos\alpha = \frac{AB}{AC}, \quad \cos\beta = \frac{AB}{AD}$$

бўлгани учун $\cos\alpha > \cos\beta$, яъни бурчак катталашганда косинус кичиклашади.

$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, $\cos\alpha$ эса α бурчак катталашганда кичиклашади, шу сабабли $\sin\alpha$ катталашади.

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, α катталашганда $\sin\alpha$ катталашади, $\cos\alpha$ эса кичиклашади, шу сабабли α катталашганда $\operatorname{tg}\alpha$ катталашади. Теорема исботланди.

УЧБУРЧАК ТЕНГСИЗЛИГИ

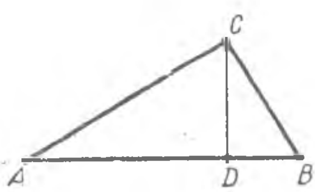
Агар A ва B турли нуқталар бўлса, улар орасидаги *масофа* деб AB кесма узунлигига айтилади. A ва B нуқталар устма-уст тушса, улар орасидаги масофа нолга тенг деб олинади.

Учбурчак тенгсизлиги деб учта нуқта орасидаги масофаларнинг қуйидаги теорема билан ифодаланувчи хоссасига айтилади:

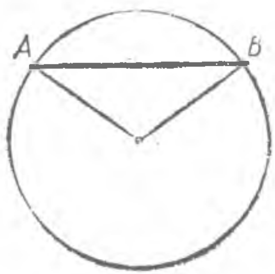
7.5-теорема. ***Учта нуқта ҳар қандай бўлганда ҳам бу нуқталарнинг исталган иккитаси орасидаги масофа улардан учинчи нуқтагача бўлган масофаларнинг йиғиндисидан катта эмас.***

Исботи. A, B, C — берилган учта нуқта бўлсин. Агар учта нуқтадан иккитаси ёки учала нуқтанинг ҳаммаси устма-уст тушса, теореманинг тасдиғи равшан. Агар нуқталарнинг ҳаммаси ҳар хил ва бир тўғри чизиқда ётса, улардан биттаси, масалан, B нуқта қолган иккитасининг орасида ётади. Бу ҳолда $AB + BC = AC$. Бундан, учта масофанинг ҳар бири қолган иккитасининг йиғиндисидан катта эмаслиги кўриниб турибди.

Энди нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди, деб фараз қилайлик (122-расм). $AB < AC + BC$ эканини исботлаймиз. AB тўғри чизиққа CD перпендикуляр туширамиз. Тўғри бурчакли учбурчак-



122-расм.



123-расм.

да катет гипотенузадан кичик бўлгани учун $AD < AC$, $BD < BC$.

Исботланганига кўра $AB \geqslant AD + BD$. Демак, $AB < AC + BC$. Теорема исботланди.

Шуни таъкидлаймизки, нуқталар бир тўғри чизиқда ётмаган ҳолда, учбурчак тенгсизлиги қатъийдир. Бу эса *ҳар қандай учбурчакда ҳар бир томон қолган икки томон йиғиндисидан кичик демакдир.*

Масала (70). Айлананинг ҳар қандай ватари диаметрдан катта эмаслигини ва ўзи диаметр бўлгандагина диаметрга тенг бўлишини исботланг.

Ечилиши (123-расм). Учбурчак тенгсизлигига кўра $AB \leqslant \leqslant OA + OB = 2R$, шу билан бирга, агар O марказ AB кесмада ётмаса, у ҳолда тенгсизлик қатъий бўлади. Тенглик (=) вагар марказдан ўтгандагина, яъни диаметр бўлганда ўринлидир.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг косинусига таъриф беринг.
2. Бурчакнинг косинуси бурчакнинг градус ўлчовигагина боғлиқ эканини исботланг.
3. Пифагор теоремасини исботланг.
4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси катетдан катта эканини исботланг.
5. α ўткир бурчак учун $\cos\alpha < 1$ эканини исботланг.
6. Бир нуқтадан тўғри чизиққа перпендикуляр ва оғмалар ўтказилса, оғманинг перпендикулярдан катта эканини исботланг. Тенг оғмалар тенг проекцияларга эга эканини, иккита оғмадан проекцияси катта бўлган оғма катта эканини исботланг.
7. Ўткир бурчакнинг синуси ва тангенсининг таърифини айтинг. Улар бурчакнинг градус ўлчовигагина боғлиқ эканини исботланг.
8. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети гипотенуза ва ўткир бурчаги орқали, ўткир бурчаги ва бошқа катети орқали қандай ифодаланади?
9. Берилган бурчак синусининг қийматини жадваллардан қандай топиш кераклигини тушунтиринг. Берилган бурчак косинуси ва тангенси қийматларини жадваллардан қандай топиш керак?
10. Бурчакнинг синуси, косинуси ёки тангенси берилган бўлса, бурчакни жадваллардан қандай топишни тушунтиринг.
11. Айниятларни исботланг: $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$;
$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha};\quad 1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}.$$
12. Ҳар қандай ўткир α бурчак учун
$$\sin(90° - \alpha) = \cos\alpha;\ \cos(90° - \alpha) = \sin\alpha$$
эканини исботланг.
13. 30°, 45°, 60° ли бурчакларнинг синуси, косинуси ва тангенсларининг қийматлари нимага тенг?
14. Ўткир бурчак α катталашган сари $\sin\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ катталашишини, $\cos\alpha$ эса камайишини исботланг.
15. «Учбурчак тенгсизлиги» ни исботланг.
16. Учбурчакнинг ҳар бир томони қолган икки томони йиғиндисидан кичик эканини исботланг.

МАШҚЛАР

1. Косинуси $\frac{3}{5}$ га тенг бурчакни ясанг.
2. Косинуси: 1) $\frac{4}{9}$; 2) 0,5; 3) 0,8 га тенг бурчакни ясанг.
3. Тўғри бурчакли учбурчакнинг иккита томони 3 м ва 4 м га тенг. Учинчи томонини топинг. (Иккита ечим.)

4. Ромбнинг диагоналлари: 1) 6 см ва 8 см; 2) 16 дм ва 30 дм; 3) 5 м ва 12 м бўлса, унинг томонини топинг.
5. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 60 см ва 91 см. Унинг диагонали нимага тенг?
6. Квадратнинг диагонали a га тенг. Квадратнинг томони нимага тенг?
7. Диаметри 1,4 м бўлган доиравий темир листдан томони 1 м бўлган квадрат қирқиш мумкинми?
8. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катети 5 м, унинг гипотенузага проекцияси эса 3 м. Гипотенузани ва иккинчи катетни топинг.
9. Агар тўғри бурчакли учбурчак катетларининг гипотенузага проекциялари: 1) 9 см ва 16 см; 2) 36 м ва 64 м бўлса, катетларини топинг.
10. a ва b кесмалар берилган. Қуйидаги кесмаларни қандай ясаш керак:

$$1)\ \sqrt{a^2+b^2};\ 2)\ \sqrt{a^2-b^2},\ a>b?$$

11. a ва b кесма берилган. $c=\sqrt{ab}$ кесмани қандай ясаш керак?
12. Фабриканинг иккита биноси орасига материалларни узатиш учун нишаб тарнов ўрнатилган. Бинолар орасидаги масофа 10 м, тарновнинг учлари эса ердан 8 м ва 4 м баландликда жойлашган. Тарнов узунлигини топинг.
13. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари a ва b га тенг. Ташқи чизилган айлананинг радиусини топинг.
14. Томонларининг нисбати 8:15 га тенг бўлган тўғри тўртбурчак айланага ички чизилган. Агар айлана радиуси 34 см бўлса, тўртбурчак томонларини топинг.
15. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 17 см, асоси эса 16 см. Асосга туширилган баландликни топинг.
16. Асоси a га, ён томони b га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусини топинг.
17. Томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчак баландлигини топинг.
18. Тенг ёнли трапециянинг асослари 10 см ва 24 см, ён томони 25 см. Трапеция баландлигини топинг.
19. Тенг ёнли трапециянинг ён томони 41 см, баландлиги 40 см, ўрта чизиғи эса 45 см. Трапеция асосларини топинг.
20. Учбурчакнинг ён томонлари 30 см ва 25 см, асосга туширилган баландлиги 24 см. Учбурчак асосини топинг*.
21. Учбурчакнинг томонлари a, b, c. Учбурчакнинг c томонига туширилган баландлигини топинг.
22. Учбурчакнинг ён томонлари 30 см ва 25 см. Учбурчакнинг: 1) 25 см; 2) 11 см га тенг асосига туширилган баландлигини топинг.

---

* Тенг ёнли эканлиги шарт бўлмаган ихтиёрий учбурчакда баъзан горизонтал ўтказилган томони асос деб, қолган икки томони ён томонлар деб аталади. Қаралаётган масалада аҳвол худди шундай.

23. Томонлари 13 см, 14 см ва 15 см бўлган учбурчак баландликларини топинг.
24. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 64 см га тенг, унинг ён томони эса асосидан 11 см ортиқ. Ён томонга туширилган баландликни топинг.
25. 1) a тўғри чизиққа B нуқтадан оғма ўтказилган. B нуқтадан a тўғри чизиққа узунлиги биринчи оғма узунлигига тенг яна битта оғма ўтказиш мумкинлигини исботланг. 2) Тўғри чизиқ ташқарисида ётган берилган нуқтадан бир хил узунликда учта оғма тушириш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг?
26. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети 8 см га тенг, шу катет қаршисидаги бурчакнинг синуси 0,8 га тенг. Гипотенуза ва иккинчи катетни топинг.
27. Асоси a га ва ён томони b га тенг бўлган тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.
28. Асоси 10 см ва ён томони 13 см бўлган тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлананинг r радиусини ва ташқи чизилган айлананинг R радиусини топинг.
29. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси a га, ўткир бурчакларидан бири α га тенг. Иккинчи ўткир бурчакни ва катетларни топинг.
30. Тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети a га ва шу катети қаршисидаги бурчаги α га тенг. Иккинчи ўткир бурчакни, шу бурчак қаршисидаги катетни ва гипотенузани топинг.
31. Тўғри бурчакли учбурчакнинг c гипотенузаси ва ўткир бурчаги α берилган. Катетларни, уларнинг гипотенузага туширилган проекцияларини ва гипотенузага туширилган баландликни топинг.
32. 1) Жадваллардан фойдаланиб топинг: $\sin 22°$, $\sin 22°36'$; $\sin 22°38'$; $\sin 22°41'$; $\cos 68°$, $\cos 68°18'$; $\cos 68°20'$; $\cos 68°23'$. 2) $\sin x = 0{,}2840$; $\sin x = 0{,}2844$; $\cos x = 0{,}2710$; x бурчакни топинг.
33. Қуйидаги бурчакларнинг синуслари ва косинуслари қийматларини жадваллар ёрдамида топинг: 1) $16°$; 2) $24°36'$; 3) $70°32'$; 4) $88°49'$.
34. 1) $\sin x = 0{,}0175$; 2) $\sin x = 0{,}5015$; 3) $\cos x = 0{,}6814$; 4) $\cos x = 0{,}0670$ жадваллардан фойдаланиб, x ўткир бурчак қийматларини топинг.
35. Жадваллардан фойдаланиб, бурчак тангенси қийматини топинг: 1) $10°$; 2) $40°40'$; 3) $50°30'$; 4) $70°15'$.
36. 1) $\operatorname{tg} x = 0{,}3227$; 2) $\operatorname{tg} x = 0{,}7846$; 3) $\operatorname{tg} x = 6{,}152$; 4) $\operatorname{tg} x = 9{,}254$. Жадваллардан фойдаланиб, ўткир бурчак x ни топинг.
37. Тенг ёнли учбурчакнинг баландлиги 12,4 м га, асоси эса 40,6 м га тенг. Учбурчакнинг бурчакларини ва ён томонини топинг.
38. Тўғри бурчакли учбурчак катетларининг нисбати 19 : 28 га тенг. Унинг бурчакларини топинг.

39. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 12,4 ва 26 га тенг. Унинг диагоналлари орасидаги бурчагини топинг.
40. Ромбнинг диагоналлари 4,73 ва 2,94 га тенг. Унинг бурчакларини топинг.
41. Ромбнинг томони 241 м ва баландлиги 120 м га тенг. Унинг бурчакларини топинг.
42. Айлананинг радиуси 5 м га тенг. Айлана марказидан 13 м наридаги нуқтадан айланага уринмалар ўтказилган. Уринмалар узунликларини ва улар орасидаги бурчакни топинг.
43. Баландлиги 7 м бўлган вертикал турган ёғочнинг сояси 4 м га тенг. Қуёшнинг горизонтдан баландлигини градусларда ифодаланг.
44. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг асоси a га тенг. Унинг ён томонини топинг.
45. Қуйидаги маълумотларга кўра, тўғри бурчакли учбурчакнинг номаълум томонлари ва ўткир бурчакларини топинг:

1) иккита катети бўйича:
а) $a = 3$, $b = 4$; б) $a = 9$, $b = 40$;
в) $a = 20$, $b = 21$; г) $a = 11$, $b = 60$;

2) гипотенузаси ва бир катети бўйича:
а) $c = 13$, $a = 5$; б) $c = 25$, $a = 7$;
в) $c = 17$, $a = 8$; г) $c = 85$, $a = 84$;

3) гипотенузаси ва ўткир бурчаги бўйича:
а) $c = 2$, $\alpha = 20°$; б) $c = 4$, $\alpha = 50°20'$;
в) $c = 8$, $\alpha = 70°36'$; г) $c = 16$, $\alpha = 76°21'$;

4) бир катети ва шу катет қаршисидаги бурчаги бўйича:
а) $a = 3$, $\alpha = 30°27'$; б) $a = 5$, $\alpha = 40°48'$;
в) $a = 7$, $\alpha = 60°35'$; г) $a = 9$, $\alpha = 68°$.

46. Ифодаларни соддалаштиринг: 1) $1 - \sin^2\alpha$;
2) $(1 - \cos\alpha)(1 + \cos\alpha)$; 3) $1 + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$;
4) $\sin\alpha - \sin\alpha\cos^2\alpha$; 5) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$;
6) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\alpha$; 7) $\cos^2\alpha + \operatorname{tg}^2\alpha\cos^2\alpha$;
8) $\operatorname{tg}^2\alpha(2\cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 1)$; 9) $\dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}^4\alpha}{\cos^2\alpha}$.
47. 1) $\cos\alpha = \frac{5}{13}$; 2) $\cos\alpha = \frac{15}{17}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$. $\sin\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ нинг қийматларини ҳисобланг.
48. 1) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{40}{41}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$. $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ ни топинг.
49. 1) $\cos\alpha = \frac{4}{7}$; 2) $\sin\alpha = \frac{4}{7}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}5$; 4) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{5}$;
5) $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}7$. α бурчакни ясанг.
50. Гипотенузаси a га, ўткир бурчаги 60° га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг шу ўткир бурчак қаршисидаги катетини топинг.
51. Томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакка ички чизилган айлананинг r радиусини ва ташқи чизилган айлананинг R радиусини топинг.

52. Учбурчакнинг асосидаги катта бурчаги 45° га тенг, баландлиги асосини 20 см ва 21 см га тенг қисмларга ажратади. Унинг катта ён томонини топинг.
53. Учбурчакнинг бир томони 1 м га тенг, унга ёпишган бурчаклари 30° ва 45° га тенг. Учбурчакнинг бошқа томонларини топинг.
54. Тўғри тўртбурчакнинг диагонали унинг бир томонидан икки марта катта. Унинг диагоналлари орасидаги бурчакларини топинг.
55. Ромбнинг диагоналлари a ва $a\sqrt{3}$ га тенг. Ромбнинг бурчакларини топинг.
56. 1) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$; $\sin\beta=\frac{1}{4}$; 2) $\sin\alpha=\frac{2}{3}$, $\sin\beta=\frac{3}{4}$;

3) $\cos\alpha=\frac{3}{7}$; $\cos\beta=\frac{2}{5}$; 4) $\cos\alpha=0{,}75$, $\cos\beta=0{,}74$;

5) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta=2{,}5$; 6) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{8}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=\frac{5}{2}$.

α ва β бурчаклардан қайси бири катта?
57. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг A бурчаги B бурчагидан катта. AC ва BC катетлардан қайси бири катта?
58. ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг BC катети AC катетидан катта. Қайси бурчаги катта: A ми ёки B ми?
59. Тенг ёнли учбурчакнинг томонлари 3 м ва 7 м га тенг. Уларнинг қайси бири асос бўлади?
60. Учбурчакнинг томонларида олинган ихтиёрий икки нуқта орасидаги масофа унинг энг катта томонидан катта эмаслигини исботланг.
61. Агар: 1) $AB=5$ м, $BC=7$ м, $AC=12$ м; 2) $AB=10{,}7$, $BC=17{,}1$, $AC=6{,}4$ бўлса, A, B, C нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.
62. Томонлари 4 см ва 7 см га тенг параллелограммнинг диагоналларидан бири 2 см га тенг бўла оладими?
63. Учбурчакнинг бир томони 1,9 м, иккинчи томони 0,7 м. Учинчи томоннинг узунлигини метр билан ҳисоблаганда бутун сонлар чиқиши маълум бўлса, шу учинчи томон нимага тенг?
64. ABC учбурчакнинг A учидан ўтказилган медиана AB ва AC томонлар йиғиндисининг ярмидан кичик эканини исботланг.
65. Учбурчак баландликларининг йиғиндиси унинг периметридан кичик эканини исботланг.
66. Тўртбурчак диагоналларининг кесишганлиги маълум. Улар узунликларининг йиғиндиси тўртбурчакнинг периметридан кичик, аммо ярим периметридан катта эканини исботланг.
67. Тўртта нуқта берилган: A, B, C, D. AB ва CD кесмаларнинг кесишганлиги маълум. Шундай нуқта топингки, ундан A, B, C, D нуқталаргача бўлган масофаларнинг йиғиндиси энг кам бўлсин.
68. Учбурчакнинг томонлари 1, 2, 3 сонларига пропорционал бўла оладими?
69. Учбурчакнинг ҳар бир томони периметри ярмидан кичик бўлишини исботланг.
70. Айлананинг исталган ватари диаметридан катта эмаслигини ва ўзи диаметр бўлгандагина диаметрга тенг бўлишини исботланг.

71. Радиуси R га тенг айлана ичида унинг марказидан d масофада нуқта олинган. Шу нуқтадан айлана нуқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофаларни топинг.
72. Радиуси R га тенг бўлган айланадан ташқарида унинг марказидан d масофада нуқта олинган. Шу нуқтадан айлана нуқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофаларни топинг.
73. Марказлари орасидаги масофа 20 см, радиуслари эса 8 см ва 11 см га тенг айланалар кесишадими? Жавобингизни тушунтиринг.
74. Марказлари орасидаги масофа 5 см, радиуслари эса 6 см ва 12 см га тенг айланалар кесишадими? Жавобингизни тушунтиринг.
75. 73-масалада айланаларнинг бири иккинчисидан ташқарида эканини, 74-масалада эса радиуси 6 см га тенг айлананинг радиуси 12 см га тенг айлана ичида ётганлигини исботланг.
76. Радиуслари R_1 ва R_2, марказлари орасидаги масофа d га тенг айланалар $R_1 + R_2 < d$ шартда кесишадими?

8- §. ТЕКИСЛИКДА ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИ

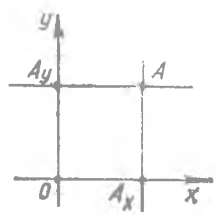
ТЕКИСЛИКДА КООРДИНАТАЛАРНИ КИРИТИШ

Текисликда O нуқта орқали ўзаро перпендикуляр иккита x ва y тўғри чизиқларни — *координаталар ўқларини* ўтказамиз (124-расм). x ўқи (у одатда горизонтал бўлади) *абсциссалар ўқи* дейилади, y ўқи эса *ординаталар ўқи* дейилади. Кесишиш нуқтаси ва *координаталар боши* деб аталган O нуқта ўқларнинг ҳар бирини иккита ярим ўққа ажратади. Улардан бирини *мусбат ярим ўқ* деб, уни стрелка билан белгилаймиз, иккинчисини *манфий ярим ўқ* деб аташга келишиб оламиз.

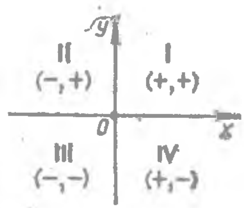
Текисликнинг ҳар бир A нуқтасига биз иккита сонни — *нуқта координаталарини* — абсцисса (x) ва ордината (y) ни қуйидагича мос қилиб қўямиз.

A нуқта орқали ординаталар ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз (125-расм). У абсциссалар ўқи x ни бирор A_x нуқтада кесиб ўтади. A нуқтанинг *абсциссаси* деб биз абсолют қиймати O нуқтадан A_x нуқтагача бўлган масофага тенг x сонини айтамиз. A_x нуқта мусбат ярим ўққа тегишли бўлса, бу сон мусбат, манфий ярим ўққа тегишли ҳолда — манфийдир. A нуқта ординаталар ўқи y да ётса, x ни нолга тенг деб оламиз.

124- расм,



125- расм,



126- расм,

A нуқтанинг ординатаси (y) ҳам шунга ўхшаш таърифланади. A нуқта орқали абсциссалар ўқи x га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз (125-расмга қ.). У ординаталар ўқи y ни бирор A_y нуқтада кесиб ўтади. A нуқтанинг *ординатаси* деб биз абсолют қиймати O нуқтадан A_y нуқтагача бўлган масофага тенг y сонини айтамиз. Агар A_y мусбат ярим ўққа тегишли бўлса, бу сон мусбат, манфий ярим ўққа тегишли ҳолда — манфий. A нуқта абсциссалар ўқи x да ётса, y ни нолга тенг деб оламиз.

Нуқтанинг координаталарини қавслар ичида нуқтанинг ҳарфий белгиси ёнига ёзамиз, масалан: A (x, y) (биринчи ўринда абсцисса, иккинчи ўринда ордината).

Координаталар ўқлари текисликни тўрт қисмга — чоракларга ажратади: I, II, III, IV (126-расм). Бир чорак ичида иккала координатанинг ишоралари сақланади ва расмда кўрсатилган қийматларга эга бўлади.

x (абсциссалар) ўқи нуқталари учун ординаталар нолга ($y = 0$), y (ординаталар) ўқи нуқталари учун абсциссалар нолга ($x = 0$) тенгдир. Координаталар бошининг ординатаси ҳам, абсциссаси ҳам нолга тенг.

Юқорида кўрсатилган усулда x ва y координаталар киритилган текисликни xy текислик деб атаймиз. Бу текисликда x ва y координаталарга эга бўлган нуқтани баъзан бевосита (x, y) билан белгилаймиз.

Текисликда киритилган x, y координаталарни, уларни илк бор ўз тадқиқотларида қўллаган француз олими Р. Декарт (1596 — 1650) номи билан Декарт координаталари деб аталади.

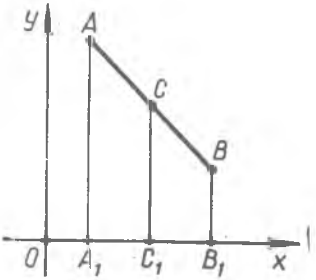
Масала (9). A $(-3,2)$ ва B $(4,1)$ нуқталар берилган. AB кесма y ўқини кесиб ўтишини, аммо x ўқни кесмаслигини исботланг.

Ечилиши. y ўқи xy текисликни иккита ярим текисликка ажратади. Битта ярим текисликда нуқталарнинг абсциссалари мусбат, иккинчисида эса манфий. A ва B нуқталарнинг абсциссалари қарама-қарши ишорали бўлгани учун A ва B нуқталар турли ярим текисликларда ётади. Бу эса AB кесма y ўқини кесиб ўтишини билдиради.

x ўқи ҳам xy текисликни иккита ярим текисликка ажратади. Битта ярим текисликда нуқталарнинг ординаталари мусбат, иккинчисида эса манфий. A ва B нуқталарнинг ординаталари бир хил ишорали (мусбат). Шундай қилиб, A ва B нуқталар битта ярим текисликда ётади. Демак, AB кесма x ўқини кесиб ўтмайди.

КЕСМА ЎРТАСИНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

A (x_1, y_1) ва B (x_2, y_2) — иккита ихтиёрий нуқта ва C (x, y) нуқта AB кесманинг ўртаси бўлсин. C нуқтанинг x ва y *координаталарини топамиз.* AB кесма y ўқига параллел бўлмасин, яъни $x_1 \neq x_2$ бўлсин. A, B, C нуқталар орқали y ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз (127- расм). Бу тўғри чизиқлар x ўқини A_1 $(x_1, 0)$, B_1 $(x_2, 0)$, C_1 $(x, 0)$ нуқталарда кесиб ўтади. Фалес теоремасига кўра C_1 нуқта A_1B_1 кесманинг ўртаси бўлади.



127- расм.

C_1 нуқта A_1B_1 кесманинг ўртаси бўлгани учун $A_1C_1 = B_1C_1$, демак, $|x - x_1| = |x - x_2|$. Бундан: ё $x - x_1 = x - x_2$, ёки $x - x_1 = -(x - x_2)$. Биринчи тенглик ўринли эмас, чунки $x_1 \neq x_2$. Шу сабабли иккинчи тенглик ўринли. Ундан эса ушбу формулани топамиз:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}.$$

$x_1 = x_2$, яъни AB кесма y ўқига параллел бўлса, учала нуқта — A_1, B_1, C_1 бир хил абсциссага эга бўлади. Демак, формула бу ҳолда ҳам ўринли бўлаверади.

C нуқтанинг ординатаси ҳам шунга ўхшаш топилади. A, B, C нуқталар орқали x ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказилади. Ушбу формула ҳосил бўлади:

$$y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Масала (17). $ABCD$ параллелограммнинг учта учи берилган: A (1, 0), B (2, 3), C (3, 2). Тўртинчи учи (D) нинг ва диагоналлари кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.

Ечилиши. Диагоналларнинг кесишиш нуқтаси улардан ҳар бирининг ўртасидир. Шу сабабли у AC кесманинг ўртаси бўлади, демак, ушбу координаталарга эга:

$$x = \frac{1+3}{2} = 2, \quad y = \frac{0+2}{2} = 1.$$

Энди диагоналлар кесишиш нуқтасининг координаталарини билган ҳолда, тўртинчи учи D нинг x, y координаталарини топамиз. Диагоналлар кесишиш нуқтаси BD кесманинг ўртаси эканидан фойдаланиб, ушбу тенгламаларни ҳосил қиламиз:

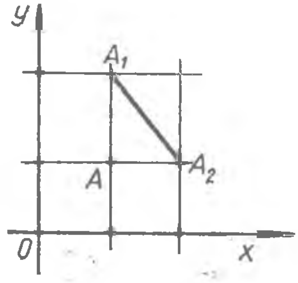
$$\frac{2+x}{2} = 2, \quad \frac{3+y}{2} = 1.$$

Бундан $x = 2$, $y = -1$.

НУҚТАЛАР ОРАСИДАГИ МАСОФА

xy текисликда иккита нуқта берилган бўлсин: координаталари x_1, y_1 дан иборат A_1 нуқта ва координаталари x_2, y_2 бўлган A_2 нуқта. A_1 ва A_2 *нуқталар орасидаги масофани уларнинг координаталари орқали ифодалаймиз.*

$x_1 \neq x_2$ ва $y_1 \neq y_2$ бўлсин, дейлик. A_1 ва A_2 нуқталар орқали координата ўқларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз ва уларнинг кесишиш нуқтасини A билан белгилаймиз (128-расм). A ва A_1 нуқталар орасидаги масофа $|y_1 - y_2|$ га тенг, A ва A_2 нуқталар орасидаги масофа эса $|x_1 - x_2|$ га тенг. Тўғри бурчакли AA_1A_2 учбурчакка Пифагор теоремасини қўлланиб топамиз:



128-расм.

$$d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2, \qquad (*)$$

бунда d — A_1 ва A_2 нуқталар орасидаги масофа.

Нуқталар орасидаги масофа формуласи(*)ни чиқаришда $x_1 \neq x_2$, $y_1 \neq y_2$ деб фараз қилинган бўлса ҳам, у бошқа ҳоллар учун ҳам ўз куч ни сақлайди. Ҳақиқатан ҳам, $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$ бўлса, $d = |y_1 - y_2|$. (*) формула ҳам шу натижани беради. $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$ бўлган ҳол ҳам шунга ўхшаш қаралади. $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$ ҳолда A_1 ва A_2 нуқталар устма-уст тушади ва (*) формула $d = 0$ ни беради.

Масала (27). x ўқда (1, 2) ва (2, 3) нуқталардан тенг узоқлашган нуқтани топинг.

Ечилиши. $(x, 0)$ — изланаётган нуқта бўлсин. Ундан берилган нуқтагача масофаларни тенглаштириб топамиз:

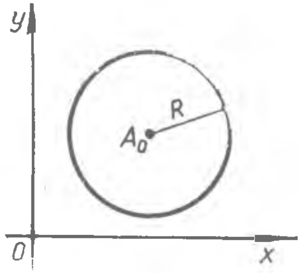
$$(x - 1)^2 + (0 - 2)^2 = (x - 2)^2 + (0 - 3)^2.$$

Бундан топамиз: $x = 4$. Шундай қилиб, изланаётган нуқта (4, 0).

АЙЛАНА ТЕНГЛАМАСИ

Текисликда *фигуранинг* декарт координаталардаги *тенгламаси* деб фигурага қарашли ҳар қандай нуқтанинг координаталари қаноатлантирадиган иккита x, y номаълумли тенгламага айтилади. Аксинча, бу тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай иккита сон фигуранинг бирор нуқтаси координаталари бўлади.

Маркази A_0 (a, b) нуқтада, радиуси эса R га тенг айлана тенгламасини тузамиз (129-расм). Айланада ихтиёрий A (x, y) нуқтани оламиз. Ундан A_0 марказгача масофа R га тенг. A



129- расм.

нуқтадан A_0 нуқтагача масофа квадрати $(x-a)^2+(y-b)^2$ га тенг. Шундай қилиб, айлананинг ҳар бир A нуқтасининг x, y координаталари

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2 \qquad (*)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Аксинча, координаталари (*) тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай A нуқта айланага тегишлидир, чунки ундан A_0 нуқтагача масофа R га тенг. Бундан (*) тенглама ҳақиқатан ҳам, маркази A_0 ва радиуси R дан иборат айлананинг тенгламаси эканлиги келиб чиқади.

Шуни таъкидлаймизки, айлананинг маркази координаталар бошидан иборат бўлса, айлана тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$x^2+y^2=R^2.$$

Масала (33). Қандай шартда радиуслари a ва b га, марказлари орасидаги масофа c га тенг айланалар кесишади?

Ечилиши. O ва O_1 — айланаларнинг марказлари бўлсин. O нуқтани декарт координаталари системасининг боши деб қабул қиламиз. OO_1 ярим тўғри чизиқни мусбат ярим ўқ x учун қабул қиламиз.

$$x^2+y^2=a^2,\ (x-c)^2+y^2=b^2 \qquad (**)$$

айланаларнинг тенгламаларидир.

Айланалар кесишса, кесишиш нуқтасининг x, y координаталари (**) даги иккала тенгламани ҳам қаноатлантиради. Аксинча, (**) тенгламалар системаси ечимга эга бўлса, яъни иккала тенгламани қаноатлантирувчи x, y мавжуд бўлса, бу сонлар айланаларнинг кесишган нуқтасининг координаталари бўлади. Агар айланалар кесишса, кесишиш нуқталарининг сони система ечимларининг сонига тенг.

(**) тенгламалар системасини ечамиз. Бунинг учун олдин тенгламаларни ҳадлаб айирамиз. Ушбу тенгликни ҳосил қиламиз: $2cx-c^2=a^2-b^2$. Бундан $x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$. x нинг бу қийматини биринчи тенгламага қўйиб топамиз:

$$\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2+y^2=a^2.$$

Бундан

$$y^2=a^2-\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2.$$

Тенгликнинг ўнг қисмини квадратларнинг айирмаси сифатида алмаштирамиз:

$$\left(a+\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)\left(a-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}\,(2ac+a^2+c^2-b^2)\,(2ac-a^2-c^2+b^2)=$$

$$=\frac{1}{4c^2}\,[(a+c)^2-b^2]\,[b^2-(a-c^2)]=$$

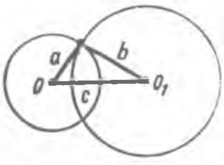
$$=\frac{1}{4c^2}\,(a+b+c)\,(a+c-b)\,(b+a-c)\,(b-a+c).$$

Шундай қилиб,

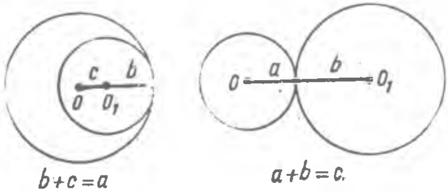
$$y^2=\frac{1}{4c^2}\,(a+b+c)\,(a+c-b)\,(a+b-c)\,(b+c-a).$$

Бундан $a+c>b$, $a+b>c$ ва $b+c>a$ шартларда тенгликнинг ўнг қисми мусбат ва демак, (**) системанинг ечимлари бор. Шу билан бирга бундай ечимлар иккитадир. Шунга мос равишда айланалар иккита нуқтада кесишади (130-расм).

$a+c-b$, $a+b-c$, $b+c-a$ кўпайтувчилардан ақалли биттаси нолга тенг бўлса, (**) система ечимга эга. Бунда айланалар уринади (131-расм).



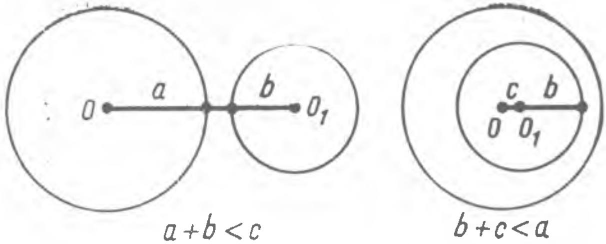
130-расм.



131-расм.

Агар ўнг қисмдаги кўпайтувчилардан бири манфий бўлса, (**) системанинг ечими йўқ, демак, айланалар кесишмайди (132-расм). Иккита кўпайтувчи манфий бўла олмайди, чунки манфий бўлган ҳолда уларнинг йиғиндиси манфийдир. Йиғинди эса кўриниб турибдики мусбат. Масалан, агар $a+c-b<0$ ва $a+b-c<0$ бўлса, уларнинг йиғиндиси нолдан кичик: $(a+c-b)+(a+b-c)=2a<0$. Бу эса мумкин эмас. Бошқа ҳолларда ҳам аҳвол шундай.

Шундай қилиб, ***a, b, c* сонлардан бири қолган иккитасининг йиғиндисидан катта бўлса, айланалар кесишмайди; агар бу сонлардан бири қолган иккитасининг**



132- расм.

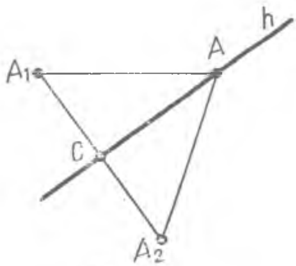
йиғиндисига тенг бўлса, айланалар уринади; бу сонларнинг ҳар бири қолган иккитасининг йиғиндисидан кичик бўлса, айланалар иккита нуқтада кесишади.

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ ТЕНГЛАМАСИ

Ҳар қандай тўғри чизиқнинг x, y декарт координаталарига нисбатан

$$ax + by + c = 0 \qquad (*)$$

кўринишдаги тенглама билан ифодаланишини исботлаймиз.



133- расм.

h тўғри чизиқ xy текисликдаги ихтиёрий тўғри чизиқ бўлсин. h га перпендикуляр бирор тўғри чизиқни ўтказамиз ва унга h тўғри чизиқ билан кесишган нуқтаси C дан бошлаб тенг CA_1 ва CA_2 кесмаларни қўямиз (133-расм).

a_1b_1 — A_1 нуқтанинг координаталари, $a_2\,b_2$ — A_2 нуқтанинг координаталари бўлсин. h тўғри чизиқдаги ҳар қандай A (x, y) нуқтанинг A_1, A_2 нуқталардан тенг узоқлашганлигини биламиз. Шу сабабли унинг координаталари

$$(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2 = (x - a_2)^2 + (y - b_2)^2 \qquad (**)$$

тенгламани қаноатлантиради.

Аксинча, бирор нуқтанинг x, y координаталари (**) тенгламани қаноатлантирса, у нуқта A_1, A_2 нуқталардан баравар узоқлашади, демак, h тўғри чизиққа тегишли бўлади. Шундай қилиб, (**) тенглама h тўғри чизиқнинг тенгламасидир. Бу тенгламадаги қавсларни очиб, тенгламанинг барча ҳадларини чап қисмга ўтказсак, у (*) кўринишни олади:

$$2\ (a_2 - a_1)\ x + 2\ (b_2 - b_1)\ y + (a_1^2 + b_1^2 - a_2^2 - b_2^2) = 0.$$

Юқоридаги фикр исботланди.

Масала (47). $A(-1, 1)$ ва B $(1, 0)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечилиши. Тўғри чизиқнинг $ax+by+c=0$ кўринишдаги тенглама билан ифодаланишини биламиз. A, B нуқталар тўғри чизиқда ётади, демак, уларнинг координаталари бу тенгламани қаноатлантиради. A, B нуқталарнинг координаталарини тўғри чизиқ тенгламасига қўйиб, ушбуларни ҳосил қиламиз:

$$-a+b+c=0, \quad a+c=0.$$

Бу тенгламалардан иккита коэффициентни, масалан, a, b коэффициентларни учинчиси орқали ифодалаш мумкин: $a=-c$, $b=-2c$. a ва b нинг бу қийматларини тўғри чизиқ тенгламасига қўйиб, топамиз:

$$-cx-2cy+c=0.$$

c га қисқартириш мумкин. У ҳолда:

$$-x-2y+1=0.$$

Мана шу тўғри чизиқ тенгламасидир.

ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИГА НИСБАТАН ЖОЙЛАШУВИ

Тўғри чизиқнинг $ax+by+c=0$ тенгламаси бирор хусусий кўринишга эга бўлса, тўғри чизиқ координаталар ўқларига нисбатан қандай жойлашганини аниқлаймиз.

1. $a=0$, $b\neq 0$. Бу ҳолда тўғри чизиқ тенгламасини

$$y=-\frac{c}{b}$$

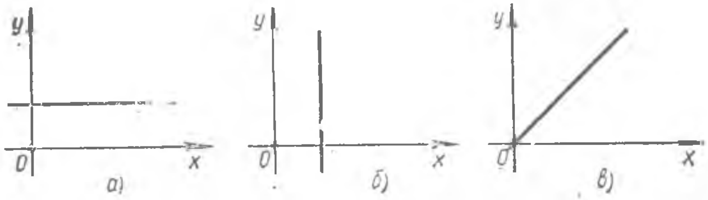
кўринишда ёзиш мумкин. Шундай қилиб, тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари бир хил $\left(-\frac{c}{b}\right)$ ординатага эга; демак, ***тўғри чизиқ x ўқига параллел*** (134-*а* расм). Жумладан, агар $c=0$ бўлса, тўғри чизиқ x ўқ билан устма-уст тушади.

2. $b=0$, $a\neq 0$. Бу ҳол олдинги ҳолга ўхшаш қаралади. ***Тўғри чизиқ у ўқига параллел*** (134-*б* расм) ва $c=0$ бўлса, у билан устма-уст тушади.

3. $c=0$. ***Тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади,*** чунки координаталар бошининг (O, O) координаталари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради (134-*в* расм).

Тўғри чизиқнинг $ax+by+c=0$ умумий тенгламасида y олдидаги коэффициент нолга тенг бўлмаса, бу тенгламани y га нисбатан ечиш мумкин:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}.$$



134 расм.

Ёки, $-\frac{a}{b} = k, -\frac{c}{b} = q$ деб белгилаб,

$$y = kx + q$$

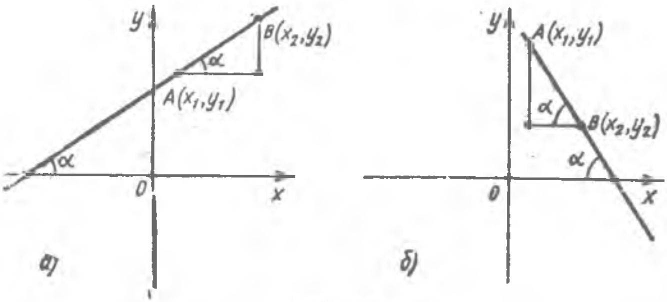
тенгламани ҳосил қиламиз. *Бу тенгламадаги k коэффициентнинг геометрик мазмунини* аниқлаймиз. Тўғри чизиқда иккита A (x_1, y_1) ва B (x_2, y_2) ($x_1 < x_2$) нуқта оламиз. Уларнинг координаталари тўғри чизиқ тенгламасини қаноатлантиради:

$$y_1 = kx_1 + q, \quad y_2 = kx_2 + q.$$

Бу тенгликларни ҳадма-ҳад айириб, топамиз: $y_2 - y_1 = k\,(x_2 - x_1)$. Бундан

$$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

135-*а* расмда кўрсатилган ҳолда $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\alpha$. 135-*б* расмда кўрсатилган ҳолда $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\operatorname{tg}\alpha$. Шундай қилиб, тўғри чизиқ тенгламасидаги k коэффициентнинг ишорасидан қатъи назар, у тўғри



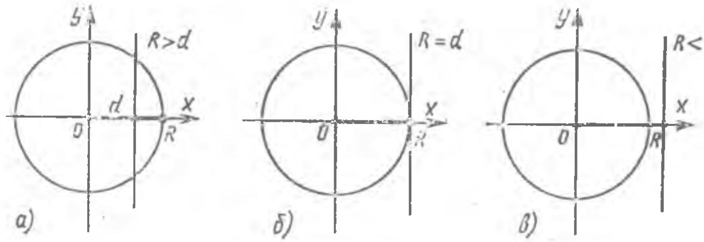
135- расм.

чизиқнинг x ўқи билан ташкил қилган ўткир бурчагининг тангенсига тенг.

Тўғри чизиқ тенгламасидаги k коэффициент *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти* дейилади.

ТЎҒРИ ЧИЗИҚНИНГ АЙЛАНА БИЛАН КЕСИШИШИ

Тўғри чизиқнинг айлана билан кесишиши масаласини қараб чиқамиз. R — айлананинг радиуси, d — айлана марказидан тўғри чизиққача масофа бўлсин. Айлана марказини координаталар боши, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқни x ўқи сифатида қабул қиламиз (136-расм). У ҳолда айлана тенгламаси



136- расм.

$x^2 + y^2 = R^2$ дан, тўғри чизиқ тенгламаси $x = d$ дан иборат. Тўғри чизиқнинг айлана билан кесишиши учун иккита тенгламадан тузилган ушбу

$$x^2 + y^2 = R^2, \ x = d$$

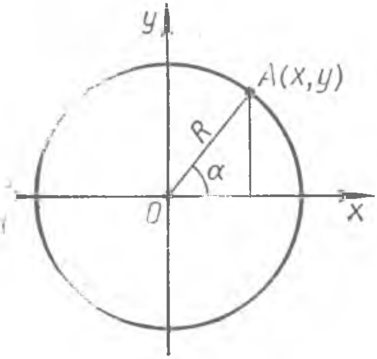
система ечимга эга бўлиши керак. Аксинча, бу системанинг ҳар қандай ечими тўғри чизиқнинг айлана билан кесишиш нуқтасининг x, y координаталарини беради. Системани ечиб топамиз:

$$x = d, \ y = \pm \sqrt{R^2 - d^2}.$$

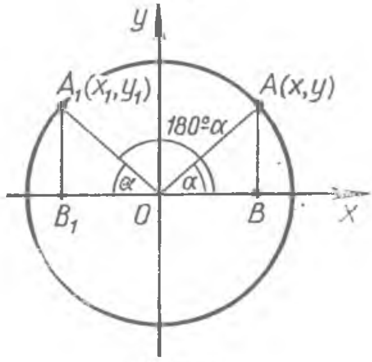
y нинг ифодасидан системанинг иккита ечими борлиги кўриниб турибди, яъни ***$R > d$ бўлса, айлана билан тўғри чизиқ иккита нуқтада кесишади*** (136-*а* расм). $R = d$ бўлса, система битта ечимга эга ***(тўғри чизиқ айланага уринади***, (136-*б* расм). ***$R < d$ бўлса,*** система ечимга эга эмас, яъни ***тўғри чизиқ билан айлана кесишмайди*** (136-*в* расм).

0° ДАН 180° ГАЧА БЎЛГАН ҲАР ҚАНДАЙ БУРЧАКНИНГ СИНУСИ, КОСИНУСИ ВА ТАНГЕНСИНИ ТАЪРИФЛАШ

Ҳозирга қадар синус, косинус ва тангенснинг қийматлари фақат ўткир бурчаклар учун аниқланган эди. Энди биз уларни 0^0 дан 180^0 гача бўлган ҳар қандай бурчакка жорий қиламиз. *xy*



137- расм.



138- расм.

текисликда маркази координаталар бошида ва радиуси R га тенг бўлган айлана оламиз (137-расм). α— — OA радиус мусбат ярим ўқ x билан ҳосил қилган ўткир бурчак бўлсин. x ва y A нуқтанинг координаталари бўлсин. α ўткир бурчак учун $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha$ нинг қийматлари A нуқтанинг координаталари орқали ифодаланади:

$$\cos\alpha = \frac{x}{R}, \ \sin\alpha = \frac{y}{R}, \ \mathrm{tg}\alpha = \frac{y}{x}.$$

Энди $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ва $\mathrm{tg}\alpha$ нинг қийматларини шу формулалар орқали *ҳар қандай* α *бурчак учун* аниқлаймиз. ($\mathrm{tg}\alpha$ билан иш кўрганда $\alpha = 90^0$ ли бурчак чиқариб ташланади, яъни қаралмайди). Бундай аниқлашда (ёндашганда) $\sin 90^0 = 1$, $\cos 90^0 = 0$, $\sin 180^0 = 0$, $\cos 180^0 = -1$, $\mathrm{tg} 180^0 = 0$. Уст-ма-уст тушувчи нурлар 0^0 ли бурчак ҳосил қилишини ҳисобга олиб, ушбуларга эга бўламиз: $\sin 0^0 = 0$, $\cos 0^0 = 1$, $\mathrm{tg} 0^0 = 0$.

8.1-теорема. ***Ҳар қандай*** α, $0^0 < \alpha < 180^0$ ***бурчак учун*** $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$. $\alpha \neq 90^0$ ***бурчак учун*** $\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.

Исботи. OAB ва OA_1B_1 учбурчаклар гипотенузаси ва ўткир бурчагига кўра тенг (138-расм). Учбурчакларнинг тенглигидан $AB = A_1B_1$, яъни $y = y_1$, $OB = OB_1$; демак, $x = -x_1$. Шу сабабли:

$$\sin(180^0 - \alpha) = \frac{y_1}{R} = \frac{y}{R} = \sin\alpha,$$

$$\cos(180^0 - \alpha) = \frac{x_1}{R} = \frac{-x}{R} = -\cos\alpha.$$

$\sin(180 - \alpha) = \sin\alpha$ тенгликни $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$ тенгликка ҳадма-ҳад бўлиб, $\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$ ни ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.

Такрорлаш учун саволлар

1. Нуқтанинг координаталари қандай таърифланишини тушунтириб беринг.

2. Агар нуқта биринчи (иккинчи, учинчи, тўртинчи) чоракка тегишли бўлса, унинг координаталарининг ишораси қандай бўлади?
3. Ординаталар ўқида ётувчи нуқтанинг абсциссалари нимага тенг? Абсциссалар ўқида ётувчи нуқтанинг ординаталари нимага тенг? Координаталар бошининг координаталари нимага тенг?
4. Кесма ўртасининг координаталари учун формулалар чиқаринг.
5. Нуқталар орасидаги масофа учун формула чиқаринг.
6. Фигуранинг декарт координаталаридаги тенгламаси нима?
7. Айлана тенгламасини чиқаринг.
8. Тўғри чизиқнинг декарт координаталарида $ax + by + ç = 0$ кўринишдаги тенгламага эга бўлишини исботланг.
9. Тўғри чизиқнинг $ax + by + ç = 0$ тенгламасида $a = 0$ бўлса ($b = 0$ бўлса, $c = 0$ бўлса), тўғри чизиқ қандай жойлашади?
10. Тўғри чизиқнинг $y = kx + q$ тенгламасидаги k коэффициентнинг геометрик маъноси нима?
11. Қандай шартда тўғри чизиқ билан айлана иккита нуқтада кесишади, кесишмайди, уринади?
12. 0^0 дан 180^0 гача бўлган ҳар қандай бурчак учун синуснинг, косинуснинг ва тангенснинг таърифини беринг.
13. Ҳар қандай α, $0^0 < \alpha < 180^0$ бурчак учун қуйидагиларни исботланг: $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$, $\cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$, $\mathrm{tg}(180^0 - \alpha) = -\mathrm{tg}\alpha$.

Машқлар

1. Координаталар ўқларини ўтказинг, ўқларда узунлик бирлигини танланг, координаталари (1, 2), (—2, 1), (—1, —3), (2, —1) дан иборат нуқталар ясанг.
2. xy текисликда исталган тўртта нуқта танланг. Шу нуқталарнинг координаталарини топинг.
3. x ўқига параллел тўғри чизиқда иккита нуқта олинган. Улардан бирининг ординатаси $y = 2$. Иккинчи нуқтанинг ординатаси нимага тенг?
4. x ўқига перпендикуляр тўғри чизиқда иккита нуқта олинган. Улардан бирининг абсциссаси $x = 3$. Иккинчи нуқтанинг абсциссаси нимага тенг?
5. A (2, 3) нуқтадан x ўқига перпендикуляр туширилган. Перпендикуляр асосининг координаталарини топинг.
6. A (2, 3) нуқтадан x ўқига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Шу тўғри чизиқнинг y ўқи билан кесишиш нуқтасининг координаталарини топинг.
7. xy текисликнинг абсциссалари $x = 3$ га тенг нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.
8. xy текисликнинг $|x| = 3$ тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.
9. A (—3,2) ва B (4, 1) нуқталар берилган. AB кесманинг y ўқи билан кесишишини, аммо x ўқи билан кесишмаслигини исботланг.
10. Олдинги масалада AB кесма y ўқининг қандай ярим ўқини (мусбатиними ёки манфийсиними) кесиб ўтади?

11. $(-3,\ 4)$ нуқтадан: 1) x ўқигача; 2) y ўқигача масофани топинг.
12. $(-3,\ 4)$ нуқтадан координаталар бошигача масофани топинг.
13. Биринчи чоракнинг биссектрисасида ординатаси $y=2$ бўлган нуқта олинган. Шу нуқтанинг абсциссаси нимага тенг?
14. Олдинги масалани нуқта иккинчи чоракнинг биссектрисасида ётган ҳол учун ечинг.
15. xy текисликнинг $x=y$ тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.
16. xy текисликнинг $x=-y$ тенгликни қаноатлантирувчи нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.
17. $ABCD$ параллелограммнинг учта учи берилган: $A\ (1,\ 0)$, $B\ (2,3)$, $C\ (3,\ 2)$. Тўртинчи учи D нинг ва диагоналлари кесишган нуқтанинг координаталарини топинг.
18. Учлари $A\ (-1,\ -2)$, $B\ (2,\ -5)$, $C\ (1,\ -2)$, $D\ (-2,\ 1)$ нуқталарда бўлган $ABCD$ тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг. Унинг диагоналлари кесишган нуқтани топинг.
19. Учлари $(2,\ 0)$ ва $(0,\ 2)$ бўлган кесма ўртасининг координаталарини топинг.
20. Кесманинг бир учи $(1,\ 1)$ ва унинг ўртаси $(2,\ 2)$ берилган. Кесманинг иккинчи учини топинг.
21. Учлари $A\ (4,1)$, $B\ (0,\ 4)$, $C\ (-3,\ 0)$, $D\ (1,\ -3)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканини исботланг.
22. $(1,\ 0)$, $(-1,\ 0)$ $(0,\ 1)$ $(0,\ -1)$ тўртта нуқтанинг квадрат учлари эканини исботланг.
23. 1) $(1,\ 0)$ ва $(3,\ 0)$; 2) $(1,\ 0)$ ва $(-3,\ 0)$ нуқталар орасидаги масофани топинг.
24. x ўқнинг $(x_1,\ 0)$ ва $(x_2,\ 0)$ нуқталари орасидаги масофа ҳар қандай x_1 ва x_2 ларда $d=|x_2-x_1|$ формула бўйича топилишини исботланг.
25. Учта нуқта берилган: $A\ (4,\ -2)$; $B\ (1,\ 2)$; $C\ (-2,\ 6)$. Шу нуқталардан ҳар иккитасининг орасидаги масофаларни топинг.
26. 25-масаладаги A, B, C нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исботланг. Улардан қайси бири қолган иккитасининг орасида ётади?
27. x ўқда $(1,\ 2)$ ва $(2,\ 3)$ нуқталардан баравар узоқлашган нуқтани топинг.
28. Координаталар ўқларидан ва $(3,\ 6)$ нуқтадан тенг узоқлашган нуқтани топинг.
29. $(1,\ 2)$, $(3,\ 4)$, $(-4,\ 3)$, $(0,\ 5)$, $(5,\ -1)$ нуқталардан қайсилари $x^2+y^2=25$ тенглама билан берилган айланада ётади?
30. $x^2+y^2=169$ тенглама билан берилган айланада: 1) абсциссаси 5 га тенг; 2) ординатаси -12 га тенг нуқталарни топинг.
31. $A\ (2,\ 0)$ ва $B\ (-2,\ 6)$ нуқталар берилган. Диаметри AB кесмадан иборат айлана тенгламасини тузинг.
32. $A\ (-1,\ -1)$ ва $C\ (-4,\ 3)$ нуқталар берилган. Маркази C нуқтада бўлиб, A нуқта орқали ўтадиган айлана тенгламасини тузинг.
33. Қандай шартларда радиуслари a ва b га, марказлари орасидаги масофа эса c га тенг айланалар кесишади?

34. Агар a, b, c, дан иборат учта мусбат сондан ҳар бири қолган иккитасининг йиғиндисидан кичик бўлса, томонлари a, b, c га тенг учбурчакнинг мавжудлигини исботланг.
35. Томонлари қуйидагиларга тенг учбурчак ясаш мумкинми:
1) $a = 1$см, $b = 2$ см, $c = 3$ см; 2) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$см; 3) $a = 3$ см, $b = 7$ см, $c = 11$ см; 4) $a = 4$см, $b = 9$ см, $c = 5$ см?
36. Айлананинг (1, 4) нуқтадан ўтиши ва айлана радиуси 5 га тенг экани маълум; x ўқида айлана марказини топинг.
37. $x^2 + y^2 - 8x - 8y + 7 = 0$ айлананинг x ўқи билан кесишиш нуқталари координаталарини топинг.
38. Иккита айлананинг кесишиш нуқталари координаталарини топинг:

$$x^2 + y^2 + 8x - 8y - 8 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - 8x + 8y - 8 = 0.$$

39. Маркази (1, 2) нуқтада бўлиб, x ўқига уринувчи айлана тенгламасини тузинг.
40. Маркази (— 3, 4) нуқтада бўлиб, координаталар бошидан ўтувчи айлана тенгламасини тузинг.
41. $x^2 + y^2 + 2ax + 1 = 0$ айлананинг y ўқи билан кесишмаслигини исботланг.
42. $x^2 + y^2 + 2ax = 0$ айлананинг y ўқига уринишини исботланг.
43. Берилган икки (0, 1) ва (1, 2) нуқтадан баравар узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.
44. 1) $x + 2y + 3 = 0$; 2) $3x + 4y = 12$; 3) $3x - 2y + 6 = 0$; 4) $4x - 2y - 10 = 0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқнинг координаталар ўқлари билан кесишиш нуқталарини топинг.
45. $3x + 4y = 1$ тенглама билан берилган тўғри чизиқда абсциссаси $x = -1$ га тенг нуқтани; ординатаси $y = -2$ га тенг нуқтани топинг.
46. Қуйидаги тенгламалар билан берилган тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталарини топинг:

1) $x + 2y + 3 = 0$ $\quad 4x + 5y + 6 = 0$;
2) $3x - y - 2 = 0$, $\quad 2x + y - 8 = 0$;
3) $4x + 5y + 8 = 0$, $\quad 4x - 2y - 6 = 0$.

47. A (— 1, 1) ва B (1, 0) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.
48. Координаталари: 1) (2, 3) ва (3, 2); 2) (4, —1) ва (—6, 2); 3) (5, — 3) ва (—1, —2) дан иборат иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.
49. Агар $ax + by = 1$ тўғри чизиқнинг (1, 2) ва (2, 1) нуқталардан ўтиши маълум бўлса, унинг тенгламасидаги a ва b коэффициентлар нимага тенг?
50. $x + y + c = 0$ тўғри чизиқ (1, 2) нуқтадан ўтса, унинг тенгламасидаги c коэффициент нимага тенг?
51. c нинг қандай қийматида $x + y + c = 0$ тўғри чизиқ $x^2 + y^2 = 1$ айланага уринади?

52. $x+2y=3$, $2x-y=1$, $3x+y=4$; бу учта тўғри чизиқнинг бир нуқтада кесишишини исботланг.

53. $x+2y=3$ ва $2x+4y=3$ тўғри чизиқларнинг кесишмаслигини исботланг.

54. Тўғри чизиқнинг x ўқига параллеллиги ва (2, 3) нуқтадан ўтиши маълум; унинг тенгламасини тузинг.

55. Тўғри чизиқнинг координаталар боши ва (2, 3) нуқтадан ўтиши маълум; унинг тенгламасини тузинг.

56. 120^0, 135^0, 150^0 ли бурчакларнинг синус, косинус ва тангенсларини топинг.

57. Жадваллардан фойдаланиб топинг: 1) $\sin 160^0$, 2) $\cos 140^0$, 3) $\operatorname{tg} 130^0$.

58. Жадваллардан фойдаланиб, қуйидаги бурчакларнинг синусларини, косинусларини ва тангенсларини топинг: 1) 40^0; 2) $14^0 36'$, 3) $70^0 20'$; 4) $80^0 16'$; 5) 145^0; 6) $150^0 30'$; 7) $150^0 33'$; 8) $170^0 28'$.

59. Жадваллардан фойдаланиб, бурчакларни топинг: 1) $\sin\alpha_1 = 0{,}2$, 2) $\cos\alpha_2 = -0{,}7$, 3) $\operatorname{tg}\alpha_3 = -0{,}4$.

60. 1) $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; 2) $\cos\alpha = -0{,}5$; 3) $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; 4) $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\sin\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ нинг қийматларини топинг.

61. 1) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0^0 < \alpha < 90^0$; 2) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90^0 < \alpha < 180^0$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $0^0 < \alpha < 180^0$. $\cos\alpha$ ва $\operatorname{tg}\alpha$ нинг қийматларини топинг.

62. $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{5}{12}$ экани маълум; $\sin\alpha$ ва $\cos\alpha$ ни топинг.

63. $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ экани маълум; α бурчакни ясанг.

64. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$ экани маълум; α бурчакни ясанг.

65. $\cos\alpha = \cos\beta$; $\alpha = \beta$ бўлишини исботланг.

66. $\sin\alpha = \sin\beta$; ё $\alpha = \beta$ бўлишини, ёки $\alpha = 180^0 - \beta$ бўлишини исботланг.

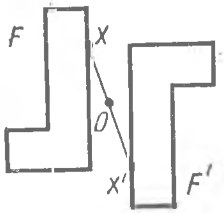
9- §. ФИГУРАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

ФИГУРАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ МИСОЛЛАРИ

Агар берилган фигуранинг ҳар бир нуқтаси бирор тарзда силжитилса, янги фигура ҳосил қилинади. Бу фигура берилган фигурадан *алмаштириш* натижасида ҳосил қилинди дейилади. Бир нечта мисол келтирамиз.

Нуқтага нисбатан симметрия. Айтайлик, O — белгили нуқта ва X — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (139- расм). OX кесманинг давомида O нуқтадан нарига OX кесмага тенг OX' кес-

139-расм.



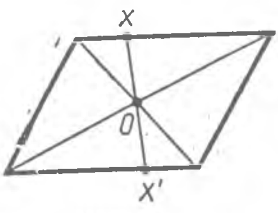
140-расм.

мани қўямиз. X' нуқта O нуқтага нисбатан X нуқтага *симметрик нуқта* дейилади. O нуқтага симметрик нуқта шу O нуқтанинг ўзидан иборат. Равшанки, X' нуқтага симметрик нуқта X нуқтанинг ўзидир.

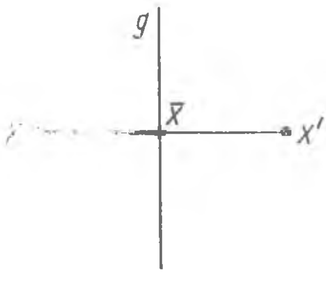
F фигурани F' фигурага алмаштиришда F нинг ҳар бир X нуқтаси O нуқтага нисбатан симметрик X' нуқтага ўтса, бу алмаштириш *O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш* дейилади. Бунда F ва F' фигуралар O нуқтага нисбатан *симметрик фигуралар* дейилади (140-расм).

Агар O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш F фигурани ўз-ўзига ўтказса, у ***марказий симметрик алмаштириш*** дейилади, O нуқта ***симметрия маркази*** дейилади. Масалан, параллелограмм марказий симметрик фигурадир. Унинг симметрия маркази диагоналларининг кесишиш нуқтасидан иборат (141-расм).

Тўғри чизиққа нисбатан симметрия. Айтайлик, g — белгили тўғри чизиқ бўлсин (142-расм). Ихтиёрий X нуқтани оламиз ва



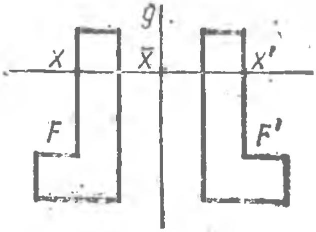
141-расм.



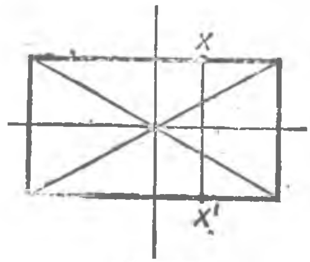
142-расм.

ундан g тўғри чизиққа $X\bar{X}$ перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг давомига $\bar{X}$ нуқтадан $\bar{X}X$ кесмага тенг $\bar{X}X'$ кесмани қўямиз. X' нуқта g тўғри чизиққа нисбатан X нуқтага *симметрик нуқта* дейилади. Агар X нуқта g тўғри чизиқда ётса, унга симметрик нуқта унинг ўзидан иборат. Равшанки, X' нуқтага симметрик нуқта X нуқтадан иборат.

F фигурани F' фигурага алмаштиришда F нинг ҳар бир X нуқтаси берилган g тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган X' нуқтага ўтса, бундай алмаштириш *g тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш* дейилади. Бунда F ва F' фигуралар g тўғри чизиққа нисбатан *симметрик фигуралар* дейилади (143-расм).

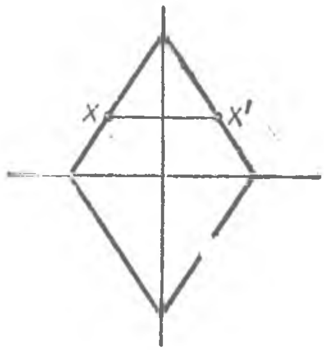


143-расм.

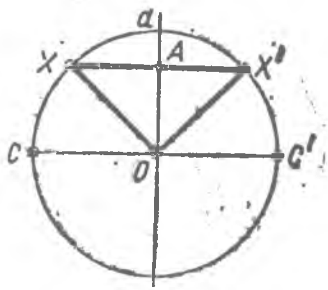


144-расм.

Агар g тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришда F фигура ўз-ўзига ўтса, бу фигура *g тўғри чизиққа нисбатан симметрик фигура* дейилади, g тўғри чизиқ эса фигуранинг *симметрия ўқи* дейилади. Масалан, тўғри тўртбурчак диагоналларининг кесишиш нуқтасидан унинг томонларига параллел равишда ўтувчи тўғри чизиқлар тўғри тўртбурчакнинг симметрия ўқлари бўлади (144-расм). Ромбнинг диагоналлари ётган тўғри чизиқлар унинг симметрия ўқлари бўлади (145-расм).



145-расм.



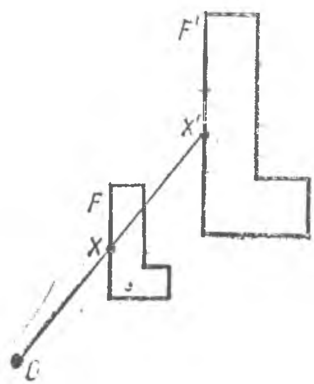
146-расм.

Масала (6). Айлананинг марказидан ўтувчи тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи эканлигини исботланг.

Ечилиши. O — айлананинг маркази, a — O нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқ бўлсин (146-расм). Равшанки, a тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш айлананинг C нуқтасини C' нуқтага ўтказади, O нуқтани эса ўрнида қолдиради. Айланада ихтиёрий X нуқта оламиз ва a тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришда X нуқта ўтадиган X' нуқтани ясаймиз.

OAX ва OAX' учбурчаклар биринчи аломатга кўра тенг. Уларнинг A учидаги бурчаклари тўғри бурчаклардир, OA томони умумий, AX ва AX' томонлар эса симметрия таърифига кўра тенг. Учбурчакларнинг тенглигидан OX ва OX' томонлар тенг деган натижа чиқади, яъни X' нуқта айланада ётади. Бу эса, a тўғри чизиққа нисбатан симметрияда айлананинг ўз-ўзига ўтишини, яъни a тўғри чизиқ айлананинг симметрия ўқи эканини билдиради.

Гомотетия. Айтайлик, F — берилган фигура, O — белгили нуқта бўлсин (147-расм). F фигуранинг ихтиёрий X нуқтаси орқали OX нур ўтказамиз ва унга $k \cdot OX$ га тенг OX' кесмани қўямиз, бунда k мусбат сон. F фигурани алмаштиришда унинг ҳар бир X нуқтаси кўрсатилган усул билан ясалган X' нуқтага ўтса, бу алмаштириш *О марказга нисбатан гомотетия* дейилади. k сони *гомотетия коэффициенти* дейилади. F, F' фигуралар *гомотетик фигуралар* дейилади.



147-расм.

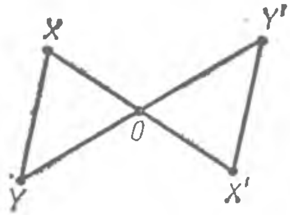
ҲАРАКАТ

F фигурани F' фигурага алмаштиришда нуқталар орасидаги масофалар сақланса, яъни F фигуранинг исталган иккита X ва Y нуқтасини F' фигуранинг X' ва Y' нуқтасига ўтказса ҳамда $XY = X'Y'$ тенглик бажарилса, бу алмаштириш *ҳаракат* дейилади.

Эслатма. Геометрияда ҳаракат тушунчаси силжитиш ҳақидаги оддий тасаввур билан боғлиқ. Агар силжитиш ҳақида гапирилганда узлуксиз жараённи кўз олдимизга келтирсак, геометрияда фигуранинг бошланғич ва охирги вазиятлари биз учун аҳамиятга эга бўлади.

9.1-теорема. ***Нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш ҳаракатдир.***

Исботи. X ва Y — F фигуранинг ихтиёрий иккита нуқтаси бўлсин (148-расм). O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш бу

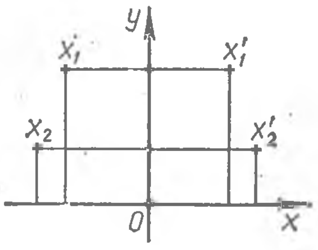


148-расм.

нуқталарни X' ва Y' нуқталарга ўтказади. XOY ва $X'OY'$ учбурчакларни қараймиз. Улар учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра тенг. Уларнинг O учидаги бурчаклари вертикал бурчаклар бўлгани сабабли бир-бирига тенг. O нуқтага нисбатан симметриянинг таърифига биноан $OX = OX'$, $OY = OY'$. Учбурчакларнинг тенглиги учун томонлар тенг: $XY = X'Y'$. Бу эса O нуқтага нисбатан симметриянинг ҳаракат эканини билдиради. Теорема исботланди.

9.2.-теорема. ***Тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш ҳаракатдир.***

Исботи. Берилган тўғри чизиқни декарт координаталари системасининг y ўқи учун қабул қиламиз (149-расм). F фигуранинг ихтиёрий X (x, y) нуқтаси F' фигуранинг $X'(x', y')$ нуқтасига ўтсин. Тўғри чизиққа нисбатан симметриянинг таърифидан X ва X' нуқталарнинг ординаталари тенг, абсциссалари эса ишоралари билан фарқ қилиши, яъни $x' = -x$ экани келиб чиқади.



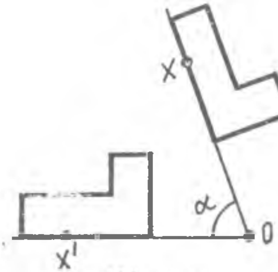
149-расм.

Иккита ихтиёрий $X_1(x_1, y_1)$ ва X_2 (x_2, y_2) нуқтани оламиз. Улар X_1' $(-x_1, y_1)$ ва X_2' $(-x_2, y_2)$ нуқталарга ўтади.

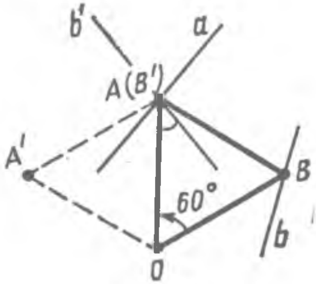
Ушбуларга эгамиз:

$$X_1X_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$X_1'X_2'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Бундан $X_1X_2 = X_1'X_2'$ экани келиб чиқади. Бу эса тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришнинг ҳаракат эканини билдиради. Теорема исботланди.



150- расм.



151- расм.

Берилган нуқта атрофида *буриш* деб шундай ҳаракатга айтиладики, унда шу нуқтадан чиқувчи ҳар бир нур бир хил йўналишда (соат стрелкаси йўналиши бўйича ёки унга тескари йўналишда) бир хил бурчакка бурилади (150-расм).

Масала (14). Бир учи берилган, қолган икки учи берилган иккита тўғри чизиқда ётувчи тенг томонли учбурчак ясанг.

Ечилиши. OAB — изланаётган учбурчак бўлиб, унинг O учи берилган. A ва B учлари эса берилган a ва b тўғри чизиқларда ётсин (151-расм). b тўғри чизиқни O нуқта атрофида 60^0 га бурамиз. Бу буришда у A нуқтадан ўтувчи b' тўғри чизиққа алмашинади. Шундай қилиб, A учни топиш учун b' тўғри чизиқни ясаш етарли. A уч a ва b' тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлади.

b' тўғри чизиқни ясаш учун b тўғри чизиқнинг ихтиёрий иккита нуқтасини олиш ва бўриш натижасида улар ўтадиган нуқталарни ясаш етарли. b' тўғри чизиқ шу нуқталар орқали ўтади.

A учни ясагандан кейин B учни ясаймиз. B нуқта OA кесмага ўтказилган ўрта перпендикуляр билан b тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси бўлади. O, A, B нуқталарни кесмалар билан туташтириб, изланаётган учбурчакни ҳосил қиламиз.

ҲАРАКАТНИНГ ХОССАЛАРИ

9. 3-теорема. ***Ҳаракатда тўғри чизиқда ётувчи нуқталар тўғри чизиқда ётувчи нуқталарга ўтади ва уларнинг ўзаро жойлашув тартиби сақланади.***

Бу эса, агар тўғри чизиқда ётувчи A, B, C нуқталар A_1, B_1, C_1 нуқталарга ўтса, бу нуқталарнинг ҳам тўғри чизиқда ётишини ва бундан ташқари, B нуқта A ва C нуқталар орасида ётса, B_1 нуқтанинг A_1 ва C_1 нуқталар орасида ётишини билдиради.

Исботи. B нуқта A ва C нуқталар орасида ётсин. Агар A_1, B_1, C_1 нуқталар тўғри чизиқда ётмаса, улар учбурчакнинг учлари бўлади.

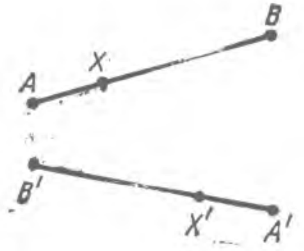
Шу сабабли $A_1C_1 < A_1B_1 + B_1C_1$. Бундан ҳаракатнинг таърифига кўра ушбу $AC < AB + BC$ хулоса чиқади. Аммо кесмаларни ўлчашнинг хоссасига кўра $AC = AB + BC$.

Биз зидликка келдик. Теореманинг биринчи тасдиғи исботланди.

Энди B_1 нуқтанинг A_1 ва C_1 нуқталар орасида ётишини кўрсатамиз. A_1 нуқта B_1 ва C_1 нуқталар орасида ётсин. У ҳолда $A_1B_1 + A_1C_1 = B_1C_1$; демак, $AB + AC = BC$. Бу эса $AB + BC = AC$ тенгликка зид. Шундай қилиб, A_1 нуқта B_1 ва C_1 нуқталар орасида ётмайди. C_1 нуқта A_1 ва B_1 нуқталар орасида ёта олмаслиги ҳам шунга ўхшаш исботланади. A_1, B_1, C_1 учта нуқтадан бири қолган иккитасининг орасида ётгани учун, бу нуқта фақат B_1 нуқтадан иборат бўлиши мумкин. Теорема тўла исботланди.

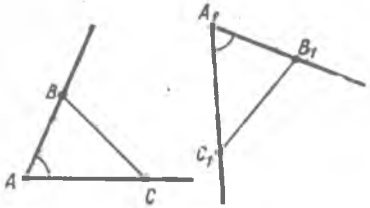
9.3- теоремадан қуйидаги натижа чиқади: ***ҳаракатда тўғри чизиқлар тўғри чизиқларга, ярим тўғри чизиқлар ярим тўғри чизиқларга, кесмалар кесмаларга ўтади.***

Бу фикрни кесма мисолида тушунтирамиз. AB — берилган кесма бўлсин. Ҳаракат натижасида A ва B нуқталар бирор A' ва B' нуқталарга ўтади (152- расм). AB кесманинг $A'B'$ кесмага ўтишини кўрсатамиз. AB кесмада ихтиёрий X нуқта оламиз. Бу нуқта $A'B'$ тўғри чизиқнинг A' ва B' нуқталари орасида ётувчи бирор X' нуқтасига ўтади (9.3- теорема), яъни AB кесманинг X нуқтаси $A'B'$ кесманинг X' нуқтасига ўтади. Ҳаракат натижасида $A'B'$ кесманинг ҳар қандай X' нуқтаси учун AB кесманинг X' нуқтага ўтадиган X нуқтаси топилаверадими? Ҳа, ҳар қандай нуқта учун топилаверади. Агар AB кесмада $AX = A'X'$ тенгликни қаноатлантирадиган X нуқта олинса, бу нуқта худди ўша X' нуқтага ўтади.

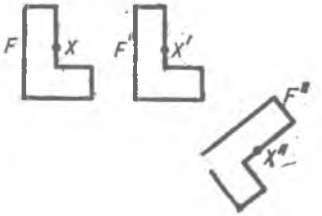


152-расм.

AB ва AC кесмалар битта A нуқтадан чиқадиган, бир тўғри чизиқда ётмайдиган ярим тўғри чизиқлар бўлсин (153- расм). Ҳаракатда бу ярим тўғри чизиқлар қандайдир A_1B_1 ва A_1C_1 ярим тўғри чизиқларга ўтади. Ҳаракат масофаларни сақлайди, шу сабабли учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра ABC ва $A_1B_1C_1$



153-расм.



154-расм.

учбурчаклар тенг. Учбурчакларнинг тенглигига асосан BAC ва $B_1A_1C_1$ бурчаклар тенгдир. Демак, ***ҳаракатда ярим тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар сақланади.***

Энди F фигура ҳаракат натижасида F' фигурага, F' фигура эса ҳаракат натижасида F'' фигурага алмашсин (154- расм). Биринчи ҳаракат F фигуранинг X нуқтасини F' фигуранинг X' нуқтасига, иккинчи ҳаракат эса F' фигуранинг X' нуқтасини F'' фигуранинг X'' нуқтасига ўтказсин дейлик. У ҳолда F фигурани F'' фигурага алмаштириш, бу алмаштиришда F фигуранинг ихтиёрий X нуқтаси F'' фигуранинг X'' нуқтасига ўтади, нуқталар орасидаги масофаларни сақлайди, демак, бу алмаштириш ҳам ҳаракатдир. Ҳаракатнинг бу хоссаси сўзлар билан бундай ифодаланади: ***кетма-кет бажарилган иккита ҳаракат яна ҳаракатни беради.***

F фигурани F' фигурага алмаштириш F фигуранинг турли нуқталарини F' фигуранинг турли нуқталарига ўтказсин деб фараз қилайлик. F фигуранинг ихтиёрий X нуқтаси F' фигуранинг X' нуқтасига ўтсин. F' фигурани F фигурага ўтказадиган алмаштириш (бу алмаштиришда X' нуқта X нуқтага ўтади) берилган алмаштиришга ***тескари алмаштириш*** дейилади. Ҳаракат нуқталар орасидаги масофаларни сақлайди, шу сабабли турли нуқталарни турли нуқталарга ўтказади. Демак, *ҳаракатга тескари алмаштириш ҳам ҳаракатдан иборат.*

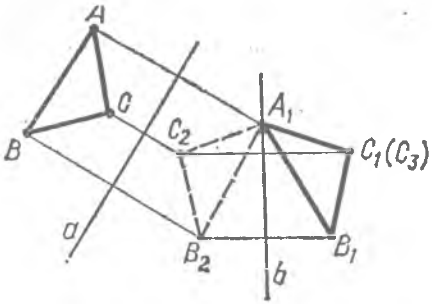
ФИГУРАЛАРНИНГ ТЕНГЛИГИ

Агар ҳаракат натижасида икки фигурадан бири иккинчисига ўтса, улар *тенг фигуралар* дейилади.

Фигураларнинг тенглигини белгилаш учун одатдаги тенглик белгисидан фойдаланилади. $F = F'$ ёзув F фигуранинг F' фигурага тенглигини билдиради. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тенглигининг $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ ёзилишида ҳаракат натижасида устма-уст келтирилган учлари тегишли ўринларда турибди, деб фараз қилинади. Бундай шартда *учбурчакларни ҳаракат натижасида устма-уст келтириш тушунчаси орқали таърифланган тенглиги билан биз шу вақтга қадар тушуниб келган тенглик бир хил маънони билдиради.* Шуни исботлаймиз.

ABC учбурчак ҳаракат натижасида $A_1B_1C_1$ учбурчак билан устма-уст тушсин, бунда A уч A_1 учга, B уч B_1 учга ва C уч C_1 учга ўтсин. Ҳаракат натижасида масофа ва бурчаклар сақланади, шу сабабли қаралаётган учбурчак учун: $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$; яъни учбурчаклар тенглигини биз шу вақтгача қайси маънода тушуниб келаётган бўлсак, улар ўша маънода тенг.

Энди ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ бўлсин. Бу уч-



155- расм.

бурчаклар ҳаракат натижасида устма-уст тушишини, шу билан бирга A уч A_1 учга, B уч B_1 учга, C уч C_1 учга ўтишини исботлаймиз. ABC учбурчакни AA_1 кесмага перпендикуляр бўлиб, унинг ўртасидан ўтувчи a тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштирамиз (155- расм). $A_1B_2C_2$ учбурчак ҳосил бўлади. $A_1B_2C_2$ учбурчакни A_1 нуқтани B_1B_2 кесманинг ўртаси билан туташтирувчи b тўғри чизиққа нисбатан симметрик ўзгартирамиз. $A_1B_1C_3$ учбурчак ҳосил бўлади.

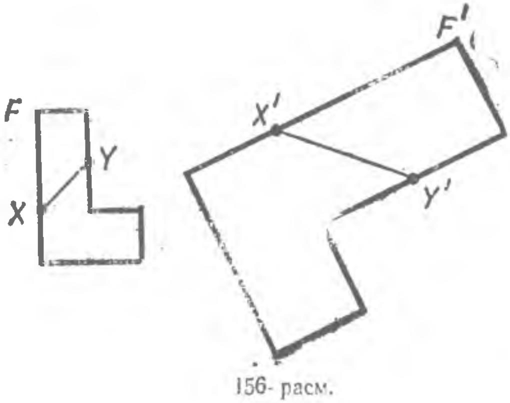
Агар C_1 ва C_3 нуқталар A_1B_1 тўғри чизиқдан бир томонда ётса, улар устма-уст тушади. Ҳақиқатан, $B_1A_1C_1$ ва $B_1A_1C_3$ бурчаклар тенг бўлгани учун A_1C_1 ва A_1C_3 нурлар устма-уст тушади, A_1C_1 ва A_1C_3 кесмаларнинг тенглиги учун C_1 ва C_3 нуқталар устма-уст тушади.

Шундай қилиб, ABC учбурчак ҳаракат билан $A_1B_1C_1$ учбурчакка ўтказилди.

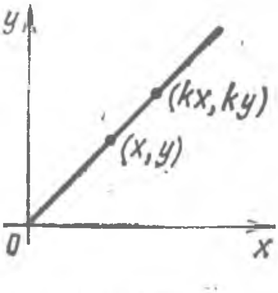
Агар C_1 ва C_3 нуқталар A_1B_1 тўғри чизиқнинг турли томонида ётса, A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан симметрияни ҳам қўлланиш керак.

ЎХШАШЛИК АЛМАШТИРИШИ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

Агар F фигурани F' фигурага алмаштиришда нуқталар орасидаги масофалар бир хил нисбатда ўзгарса, бундай алмаштириш *ўхшашлик алмаштириши* дейилади (156- расм). Бу эса, агар F фигуранинг ихтиёрий X, Y нуқталари ўхшашлик алмаштириши натижасида, F фигуранинг X', Y' нуқталарига ўтса, у ҳолда



156- расм.



157- расм.

$X'Y' = k \cdot XY$ бўлади, бунда k сони ҳамма X, Y нуқталар учун бир хил демакдир. k сони *ўхшашлик коэффициенти* дейилади. $k = 1$ бўлганда ўхшашлик алмаштириши, равшанки ҳаракатдан иборат бўлади.

9.4- теорема. ***Гомотетия ўхшашлик алмаштиришидир.***

Исботи. O нуқта гомотетия маркази, k эса гомотетия коэффициенти бўлсин (157- расм). O нуқтани координаталар боши деб қабул қилиб, x, y декарт координаталарини киритамиз. Ихтиёрий (x, y) нуқта (kx, ky) нуқтага ўтадиган алмаштиришни қарайлик. Ана шу алмаштиришнинг гомотетия эканини исбот қилмоқчимиз.

Айтайлик, $A\ (x_1, y_1)$ — фигуранинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У $A'\ (kx_1, ky_1)$ нуқтага ўтади. OA тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади, демак, унинг тенгламаси $ax + by = 0$ кўринишда бўлади. Бу тенгламани A' нуқтанинг координаталари қаноатлантиради, чунки $akx_1 + bky_1 = k\ (ax_1 + by_1) = 0$. Демак, A' нуқта OA тўғри чизиқда ётади. x_1 ва kx_1, y_1 ва ky_1 бир хил ишорали бўлгани учун A' нуқта OA нурда ётади.

Ушбуларга эгамиз:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},\ OA' = \sqrt{(kx_1)^2 + (ky_1)^2} = k\ \sqrt{x_1^2 + y_1^2}.$$

Бундан $OA' = k\ OA$. Демак, алмаштириш ҳақиқатан ҳам O марказга нисбатан коэффициенти k га тенг гомотетиядир.

Энди ихтиёрий иккита $A\ (x_1, y_1)$ ва $B\ (x_2, y_2)$ нуқта оламиз. Улар $A'(kx_1, ky_1)$, $B'(kx_2, ky_2)$ нуқталарга ўтади. Ушбуларга эгамиз:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$

$$A'B'^2 = (kx_2 - kx_1)^2 + (ky_2 - ky_1)^2 = k^2\ [(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2] = \\ = k^2\ AB^2.$$

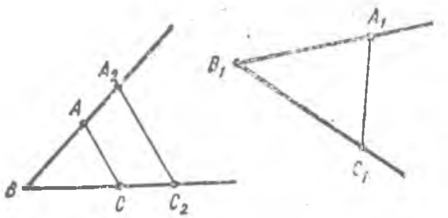
Бундан $A'B' = kAB$. Бу эса қаралаётган алмаштириш ўхшашлик алмаштириши эканлигини билдиради. Теорема исботланди.

Шуни эслатамизки, ҳар қандай ўхшашлик алмаштириши ҳам гомотетия бўлавермайди. Агар F фигурани гомотетик алмаштирсак, ҳосил бўлган F' фигурани ихтиёрий ҳаракатлантирсак, натижада бирор F'' фигурани ҳосил қиламиз. F фигурани F'' фигурага алмаштириш, равшанки ўхшашлик алмаштириши бўлади, аммо бу алмаштириш, умуман айтганда гомотетия бўлмайди.

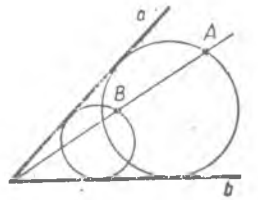
Ҳаракат билан иш кўрганимиз сингари ўхшашлик алмаштиришида бир тўғри чизиқда ётувчи учта A, B, C нуқта бир тўғри чизиқда ётувчи учта A_1, B_1, C_1 нуқтага ўтиши исботланади. Шу билан бирга, агар B нуқта A ва C нуқталар орасида ётса, B_1 нуқта A_1 ва C_1 нуқталар орасида ётади. Бундан ушбу хулоса чиқади:

Ўхшашлик алмаштириши тўғри чизиқларни тўғри чизиқларга, ярим тўғри чизиқларни ярим тўғри чизиқларга, кесмаларни кесмаларга ўтказади.

Ўхшашлик алмаштириши ярим тўғри чизиқлар орасидаги бурчакларни сақлашини исботлаймиз. Ҳақиқатан ҳам, ABC бурчак коэффициенти k га тенг ўхшашлик алмаштиришида $A_1B_1C_1$ бурчакка ўтсин (158-расм). ABC бурчакни унинг B учига нисбатан гомотетия коэффициенти k га тенг гомотетик алмаштирамиз. Бунда A ва C нуқталар A_2 ва C_2 нуқталарга ўтади. A_2BC_2 ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар учинчи аломатга кўра тенг. Учбурчакларнинг тенглиги учун A_2BC_2 ва $A_1B_1C_1$ бурчаклар тенг.



158-расм.



159-расм.

Демак, ABC ва $A_1B_1C_1$ бурчаклар тенг. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

М а с а л а (36). (ab) бурчак ва унинг ичида А нуқта берилган. Бурчак томонларига уриниб, A нуқта орқали ўтувчи айлана ясанг.

Е ч и л и ш и. Бурчак томонларига уринувчи бирор айлана ясаймиз (159-расм). Бурчакнинг учи ва A нуқта орқали тўғри чизиқ ўтказамиз. B нуқта шу тўғри чизиқ билан ясалган айлананинг кесишиш нуқтаси бўлсин. Бурчакнинг учига нисбатан B нуқтани A нуқтага ўтказувчи гомотетия ясалган айланани изланаётган айланага ўтказади.

ФИГУРАЛАРНИНГ ЎХШАШЛИГИ

Агар икки F, F' фигура ўхшашлик алмаштиришида бир-бирига ўтса, улар *ўхшаш фигуралар* дейилади. Фигураларнинг ўхшашлигини белгилаш учун махсус белги қўлланилади: ∞. $F \infty F'$ ёзув бундай ўқилади: «F фигура F' фигурага ўхшаш». Учбурчаклар ўхшашликларининг ёзилишида $\triangle ABC \infty \triangle A_1B_1C_1$ ўхшашлик алмаштириши натижасида устма-уст тушадиган учлар тегишли ўринларда турибди, яъни A уч A_1 учга, B уч B_1 учга, C уч C_1 учга ўтади, деб фараз қилинади.

Ўхшашлик алмаштиришининг хоссаларидан ушбу хулоса чиқади: ***ўхшаш фигураларнинг мос бурчаклари тенг, мос кесмалари пропорционал.*** Жумладан, ABC ва $A_1B_1C_1$ ***ўхшаш учбурчакларда:***

$$\angle A = \angle A_1,\ \angle B = \angle B_1,\ \angle C = \angle C_1;$$
$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

Қуйидаги теорема учбурчакларнинг ўхшашлик аломатларини беради:

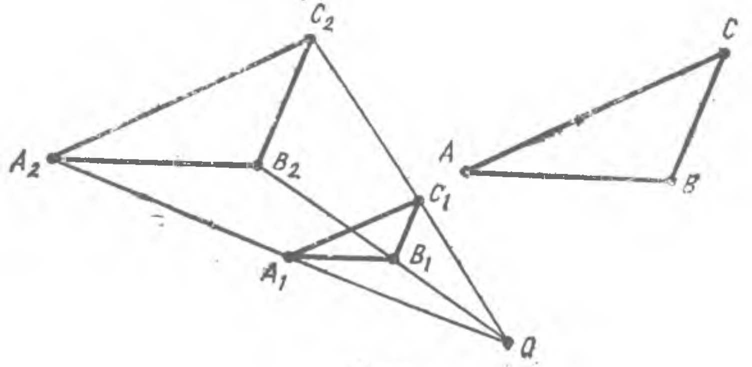
9.5-теорема. 1) ***Агар бир учбурчакнинг иккита бурчаги иккинчи учбурчакнинг иккита бурчагига мос равишда тенг бўлса;***

2) ***бир учбурчакнинг икки томони иккинчи учбурчакнинг икки томонига пропорционал бўлса ва бу томонлар ҳосил қилган бурчаклар тенг бўлса;***

3) ***бир учбурчакнинг томонлари иккинчи учбурчакнинг томонларига пропорционал бўлса, бундай иккита учбурчак ўхшаш бўлади.***

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ — қуйидаги шартлардан бири бажариладиган иккита учбурчак бўлсин: 1) $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$; 2) $\angle A = \angle A_1$, $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$; 3) $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$.

Учбурчакларнинг ўхшашлигини исботлаймиз. $k = \frac{AB}{A_1B_1}$ бўлсин. $A_1B_1C_1$ учбурчакни ўхшашлик коэффициенти k га тенг бўлган бирор ўхшашлик алмаштириши, масалан, гомотетик алмаштириш бажарамиз



160-расм.

(160-расм). Бунда ABC учбурчакка тенг бирор $A_2B_2C_2$ учбурчакни ҳосил қиламиз. Ҳақиқатан, биринчи ҳолда ушбуларга эга бўламиз:

$$\angle A = \angle A_1 = \angle A_2,\ \angle B = \angle B_1 = \angle B_2,$$
$$A_2B_2 = kA_1B_1 = AB.$$

Учбурч клар тенглигининг иккинчи аломатига кўра ABC ва $A_2B_2C_2$ учбурчаклар тенг.

Иккинчи ҳолда ушбуларга эгамиз:

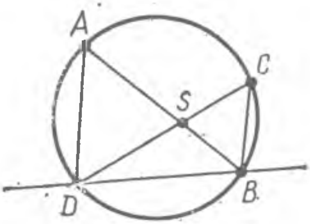
$$\angle A = \angle A_2, \ A_2B_2 = AB, \ A_2C_2 = AC.$$

Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра учбурчаклар тенг.

Учинчи ҳолда ушбуларга эгамиз:

$$A_2B_2 = AB, \qquad B_2C_2 = BC, \qquad A_2C_2 = AC.$$

Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра учбурчаклар тенг. $A_2B_2C_2$ учбурчак ABC учбурчакка тенг бўлгани учун $A_2B_2C_2$ учбурчак ABC учбурчакка ҳаракат натижасида ўтказилади. Демак, $A_1B_1C_1$ учбурчак ABC учбурчакка ўхшашлик алмаштириш билан ҳаракатни кетма-кет бажариш натижасида ўтказилади, бу эса ўхшашлик алмаштиришидир. Учбурчакларнинг ўхшашлик аломатлари исботланди.



161-расм.

Масала (37). Айлананинг AB ва CD ватарлари S нуқтада кесишади. $AS \cdot BS = CS \cdot DS$ эканини исботланг.

Ечилиши. BD тўғри чизиқни ўтказамиз (161-расм). A, C нуқталар BD тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда, яъни S нуқта ётган ярим текисликда ётади.

Демак, ички чизилган DCB ва DAB бурчаклар тенг. Ички чизилган ABC ва ADC бурчаклар тенглигини ҳам шунга ўхшаш усул билан исботлаймиз. Кўрсатилган бурчакларнинг тенглигидан ASD ва CSB учбурчаклар ўхшаш деган хулоса чиқади (9.5-теорема). Учбурчакларнинг тенглигидан ушбу пропорция келиб чиқади:

$$\frac{DS}{BS} = \frac{AS}{CS}.$$

Бундан: $AS \cdot BS = CS \cdot DS$.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Қандай нуқталар берилган нуқтага нисбатан симметрик нуқталар деб аталишини тушунтириб беринг.
2. Қандай алмаштириш берилган нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш дейилади?
3. Қандай фигура марказий симметрик фигура дейилади?
4. Фигуранинг симметрия маркази нима? Марказий симметрик фигурага мисол келтиринг.
5. Қандай нуқталар берилган тўғри чизиққа нисбатан симметрик нуқталар дейилади?

6. Қандай алмаштириш берилган тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш деб аталади?
7. Қандай фигура берилган тўғри чизиққа нисбатан симметрик фигура дейилади.
8. Фигуранинг симметрия ўқи нима? Мисол келтиринг.
9. Қандай алмаштириш гомотетия деб аталади. Гомотетия маркази нима, гомотетия коэффициенти нима?
10. Фигурани қандай алмаштириш ҳаракат дейилади?
11. Нуқтага нисбатан симметриянинг ҳаракат эканини исботланг.
12. Тўғри чизиққа нисбатан симметриянинг ҳаракат эканини исботланг.
13. Буриш нима эканини тушунтиринг.
14. Ҳаракатда тўғри чизиқда ётувчи нуқталар тўғри чизиқда ётувчи нуқталарга ўтишини ва уларнинг ўзаро жойлашув тартиби сақланишини исботланг.
15. Тўғри чизиқлар, ярим тўғри чизиқлар, кесмалар ҳаракат натижасида нимага алмашинади?
16. Ҳаракат натижасида бурчакнинг сақланишини исботланг.
17. Қандай фигуралар тенг фигуралар дейилади?
18. Ўхшашлик алмаштириши нима?
19. Гомотетиянинг ўхшашлик алмаштириши эканини исботланг.
20. Ўхшашлик алмаштиришининг бурчакларни сақлашини исботланг.
21. Қандай фигуралар ўхшаш фигуралар дейилади?
22. Учбурчакларнинг ўхшашлик аломатларини ифодаланг ва исботланг.

МАШҚЛАР

1. A (1, 1), B (2, 3), C (—3, 1), D (—2, 2), E (—3, —4), F (2, —1) нуқталарга координаталар бошига нисбатан симметрик бўлган нуқталарни ясанг.
2. Учбурчакнинг икки учига унинг учинчи учига нисбатан симметрик бўлган нуқталарни ясанг.
3. Айлананинг маркази унинг симметрия маркази эканини исботланг.
4. 1) A (1, 1), B (—2, 3), C (0, —1) нуқталарга x ўқига нисбатан симметрик нуқталарни ясанг.
   2) D (2, 0), E (—4, 1), F (—2, —2) нуқталарга y ўқига нисбатан симметрик нуқталарни ясанг.
5. ABC учбурчак берилган. Циркулдан фойдаланиб, C нуқтага AB тўғри чизиққа нисбатан симметрик C' нуқтани ясанг.
6. Айлана марказидан ўтувчи тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи эканини исботланг.
7. Агар гомотетия коэффициенти: 1) 2; 2) 3 га тенг бўлса, маркази координаталар бошида бўлган гомотетияда A (1, 2), B(2, 2), C (—1, 1), D (3, —1) нуқталар ўтадиган нуқталарни ясанг.
8. Гомотетияда X нуқта X' нуқтага, Y нуқта эса Y' нуқтага ўтади. Агар X, X', Y, Y' нуқталар бир тўғри чизиқда ётмаса, гомотетия марказини топинг.
9. Гомотетияда X нуқта X' нуқтага ўтади. Агар k: 1) 2; 2) 3; 3) 4 га тенг бўлса, гомотетия марказини ясанг.

10. Бирор нуқтага нисбатан симметрияда X нуқта X' нуқтага ўтади. Шу симметрияда Y нуқта ўтадиган нуқтани ясанг.
11. Бирор тўғри чизиққа нисбатан симметрияда X нуқта X' нуқтага ўтади. Шу симметрияда Y нуқта ўтадиган нуқтани ясанг.
12. Бир фигуранинг исталган икки нуқтаси орасидаги масофа 10 см дан кичик, бошқа бир фигуранинг исталган икки нуқтаси орасидаги масофа 10 см дан катта. Бу икки фигура: 1) нуқтага нисбатан; 2) тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлиши мумкинми?
13. ABC учбурчакни C учи атрофида: 1) соат стрелкаси йўналишида 60^0 га буришда; 2) соат стрелкаси йўналишига тескари йўналишда 60^0 га буришда шу учбурчак ўтадиган фигурани ясанг.
14. Бир учи берилган, қолган иккита учи берилган икки тўғри чизиқда ётувчи тенг томонли учбурчак ясанг.
15. Учбурчакнинг симметрия маркази мавжудми?
16. Симметрия маркази бор бўлган тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.
17. Тенг ёнли учбурчакнинг асосига ўтказилган медиана ётувчи тўғри чизиқ учбурчакнинг симметрия ўқи бўлишини исботланг.
18. 1) Агар учбурчакнинг симметрия ўқи бор бўлса, у учбурчак учларининг биридан ўтишини исботланг.

    2) Агар учбурчакнинг симметрия ўқи бор бўлса, бу учбурчак тенг ёнли бўлишини исботланг.

    3) Агар учбурчакнинг иккита симметрия ўқи бўлса, бу учбурчак тенг томонли бўлишини исботланг.
19. Бурчакнинг биссектрисаси ётган тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи эканини исботланг.
20. AB кесма ва AB тўғри чизиқда ётмайдиган O нуқта берилган. O нуқтага нисбатан AB кесмага симметрик фигура нимадан иборат? Уни ясанг.
21. a тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиқда ётмайдиган O нуқта берилган. O нуқтага нисбатан a тўғри чизиққа симметрик фигура нимадан иборат? Уни ясанг.
22. Иккита параллел тўғри чизиқдан иборат фигуранинг нечта симметрия маркази бор? Улар қаерда жойлашган?
23. Тенг томонли учбурчакнинг нечта симметрия ўқи бор?
24. Параллелограмм диагоналларининг кесишиш нуқтаси унинг симметрия маркази эканини исботланг.
25. Кесманинг нечта симметрия ўқи бор?
26. Тўғри чизиқнинг нечта симметрия ўқи бор?
27. Квадрат диагоналларининг кесишиш нуқтасидан унинг томонларига параллел равишда ўтувчи тўғри чизиқлар унинг симметрия ўқлари бўлишини исботланг.
28. Ромбнинг диагоналлари унинг симметрия ўқлари эканини исботланг.
29. 1) Кесишувчи тўғри чизиқлар ва бу тўғри чизиқларда ётмайдиган нуқта берилган. Охирлари берилган тўғри чизиқларда, ўртаси берилган нуқтада бўлган кесма ясанг.

    2) Иккитадан кесишувчи учта тўғри чизиқ a, b c берилган. b

тўғри чизиққа перпендикуляр, ўртаси шу b тўғри чизиқдан ўтувчи, охирлари эса a ва c тўғри чизиқларда ётувчи кесма ясанг.

30. Узунликлари тенг кесмалар ва градус ўлчовлари тенг бурчакларнинг ҳаракат натижасида устма-уст тушишини исботланг.

31. $ABCD$ ва $A_1B_1C_1D_1$ параллелограммларда: $AB = A_1B_1$, $AD = A_1D_1$ ва $\angle A = \angle A_1$. Параллелограммлар тенглигини, яъни уларнинг ҳаракат натижасида устма-уст тушишини исботланг.

32. Диагоналлари тенг ромбларнинг тенг бўлишини исботланг.

33. Радиуслари бир хил бўлган иккита айлананинг тенглигини, яъни ҳаракат натижасида устма-уст тушишларини исботланг.

34. Айланага ўхшаш фигура айлана эканлигини исботланг.

35. Умумий учи айлананинг берилган нуқтасидан иборат барча ватарларни $m:n$ га тенг нисбатда бўлиб юборадиган нуқталарнинг геометрик ўрнини топинг.

36. Бурчак ва унинг ичида A нуқта берилган. Бурчак томонларига уриниб, A нуқтадан ўтувчи айлана ясанг.

37. Айлананинг AB ва CD ватарлари S нуқтада кесишади. $AS \cdot BS = CS \cdot DS$ эканини исботланг.

38. Берилган учбурчак ичига квадрат чизинг, бу квадратнинг икки учи учбурчакнинг берилган томонида ётсин.

39. Учбурчак томонларининг нисбати 4:5:6 каби. Унга ўхшаш учбурчакнинг энг кичик томони 0,8 м га тенг бўлса, шу ўхшаш учбурчак томонларини топинг.

40. Учбурчак томонларининг нисбати 2:5:4 каби. Унга ўхшаш учбурчакнинг периметри 55 м га тенг бўлса, шу ўхшаш учбурчак томонларини топинг.

41. Тенг ёнли учбурчакларнинг асослари қаршисидаги бурчаклари тенг. Бу учбурчакларнинг ўхшашлигини исботланг.

42. Тенг ёнли иккита учбурчакнинг ён томонлар орасидаги бурчаклари тенг. Бир учбурчакнинг ён томони ва асоси 17 см ва 10 см; иккинчи учбурчакнинг асоси 8 см. Иккинчи учбурчакнинг ён томонини топинг.

43. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда: $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $AB = 5$ м, $BC = 7$ м, $A_1B_1 = 10$ м, $A_1C_1 = 8$ м. Учбурчакларнинг қолган томонларини топинг.

44. 43-масалани ушбу шартларда ечинг: $AB = 16$ см, $BC = 20$ см, $A_1B_1 = 12$ см, $AC - A_1C_1 = 6$ см.

45. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан туширилган баландлиги уни ўзига ўхшаш иккита учбурчакка бўлишини исботланг.

46. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига туширилган баландлигининг асоси гипотенузани 9 см ва 16 см ли кесмаларга ажратади. Учбурчак томонларини топинг.

47. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 25 см га, катетларидан бири 10 см га тенг. Иккинчи катетнинг гипотенузага туширилган проекциясини топинг.

48. Ўхшаш ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг BD ва B_1D_1 баландликлари ўтказилган. $\frac{BD}{B_1D_1} = \frac{AB}{A_1B_1}$ эканини исботланг.

49. Асоси a ва баландлиги h га тенг учбурчакка квадрат ички чизилган бўлиб, унинг икки учи учбурчак асосида ётади, қолган икки учи эса ён томонларда ётади. Квадрат томонини ҳисобланг.

50. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг B ва B_1 бурчаклари тенг. ABC учбурчакнинг B бурчагига ёпишган томонлари $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг B_1 бурчагига ёпишган томонларидан 2,5 марта катта. AC ва A_1C_1 томонларнинг йиғиндиси 4,2 м га тенг бўлса, шу томонларни топинг.

51. ABC учбурчакда $AB = 15$ м, $AC = 20$ м, AB томонга $AD = 8$ м ли кесма, AC томонга эса $AE = 6$ м ли кесма қўйилган. 1) ABC ва ADE; 2) ABC ва AED учбурчаклар ўхшашми?

52. Олдинги масалани $AD = 9$ м ва $AE = 12$ м бўлган ҳол учун ечинг.

53. Агар тўғри бурчакли иккита учбурчакнинг бирида 40^0 ли, иккинчисида эса: 1) 50^0 ли; 2) 60^0 ли бурчаклар бўлса, бу учбурчаклар ўхшаш бўладими?

54. ABC учбурчакнинг AB томонига параллел тўғри чизиқ AC томонни P нуқтада, BC томонни эса Q нуқтада кесиб ўтади. ABC ва PQC учбурчакларнинг ўхшаш эканини исботланг.

55. ABC учбурчакнинг AB томонига параллел тўғри чизиқ унинг AC томонини, C учидан бошлаб ҳисоблаганда, $m:n$ га тенг нисбатда бўлади. BC томонни у қандай нисбатда бўлади?

56. ABC учбурчакнинг AC томонига параллел DE кесма ўтказилган (кесманинг D охири AB томонда, E охири BC томонда ётади). $AB = 16$ см, $AC = 20$ см, $DE = 15$ см бўлса, AD ни топинг.

57. 56- масалада $AC : DE = 55 : 28$ экани маълум бўлса, $AD : BD$ нисбатни топинг.

58. 56- масалада:
1) $AC = 20$ см, $AB = 17$ см ва $BD = 11{,}9$ см;
2) $AC = 18$ дм, $AB = 15$ дм ва $AD = 10$ дм
бўлса, DE кесма узунлигини топинг.

59. a, b, c кесмалар берилган. $x = \frac{ac}{b}$ кесмани ясанг.

60. Тенг томонли иккита учбурчак ўхшаш бўладими?

61. Агар:
1) $AB = 1$ м, $AC = 1{,}5$ м, $BC = 2$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 15$ см, $B_1C_1 = 20$ см;
2) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}5$ м; $A_1B_1 = 8$ дм, $A_1C_1 = 16$ дм $B_1C_1 = 12$ дм;
3) $AB = 1$ м, $AC = 2$ м, $BC = 1{,}25$ м; $A_1B_1 = 10$ см, $A_1C_1 = 20$ см, $B_1C_1 = 13$ см
бўлса, ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар ўхшаш бўладими?

62. Учбурчакнинг томонлари 0,8 м, 1,6 м ва 2 м. Шу учбурчакка ўхшаш, периметри эса 5,5 м га тенг учбурчак томонларини топинг.

63. Бир учбурчакнинг периметри ўзига ўхшаш учбурчак периметрининг $\frac{11}{13}$ қисмини ташкил қилади. Иккита мос томоннинг айирмаси 1 м га тенг. Шу томонларни топинг.

64. Фабрика трубаси соясининг узунлиги 35,8 м га тенг; шу вақт ерга тик қоқилган, баландлиги 1,9 м бўлган қозиқ соясининг узунлиги 1,62 м га тенг. Труба баландлигини топинг.

65. Берилган периметрига кўра берилган учбурчакка ўхшаш учбурчак ясанг.

66. ABC учбурчакка $ADEF$ ромб шундай ички чизилганки, улар учун A бурчак умумий, E уч эса BC томонда ётади. $AB = c$, $AC = b$ бўлса, ромб томонини топинг.

67. Трапеция асосларининг нисбати $m : n$ га тенг; трапециянинг бир диагонали иккинчи диагоналини кесмаларга ажратди. Шу кесмалар нисбатини топинг.

68. Трапеция диагоналларининг кесишган нуқтасидан ўтадиган тўғри чизиқ трапециянинг бир асосини $m : n$ га тенг нисбатда бўлади. Бу тўғри чизиқ иккинчи диагонални қандай нисбатда бўлади?

69. Диагонали AC дан иборат $ABCD$ трапецияда ABC ва ACD бурчаклар тенг. BC ва AD асослар мос равишда 12 м ва 27 м бўлса, AC диагонални топинг.

70. Трапеция асосларига параллел тўғри чизиқ бир ён томонни $m : n$ га тенг нисбатда бўлади. У иккинчи ён томонни қандай нисбатда бўлади?

71. $ABCD$ трапециянинг AB ва CD ён томонларининг давоми E нуқтада кесишади. $AB = 5$ см, $BC = 10$ см, $CD = 6$ см, $AD = 15$ см бўлса, AED учбурчак томонларини топинг.

72. 71-масалада $BC = 7$ см, $AD = 21$ см ва трапеция баландлиги 3 см бўлса, AED учбурчак баландлигини топинг.

73. Асоси AC ва шу асос қаршисидаги бурчаги 36^0 бўлган тенг ёнли ABC учбурчакнинг AD биссектрисаси ўтказилган. 1) ABC ва CAD учбурчакларнинг ўхшашлигини исботланг. 2) ABC учбурчакнинг ён томони a га тенг бўлса, унинг асосини топинг.

74. $ABCD$ тўртбурчакнинг диагоналлари N нуқтада кесишади. Агар $AN \cdot CN = BN \cdot DN$ бўлса, тўртбурчак ташқарисига айлана чизиш мумкинлигини исботланг.

75. Айланадан ташқарида ётувчи A нуқтадан иккита кесувчи ўтказилган, бу кесувчилар айланани B_1 ва C_1, B_2 ва C_2 нуқталарда кесиб ўтади (B_1 нуқта A ва C_1 нуқталар орасида, B_2 эса A ва C_2 нуқталар орасида ётади). 1) AB_1C_2 ва AB_2C_1 учбурчакларнинг ўхшашлигини исботланг. 2) $AB_1 \cdot AC_1 = AB_2 \cdot AC_2$ эканини исботланг.

76. M нуқтадан айланани A, B нуқталарда кесиб ўтадиган кесувчи ва C нуқтада уринадиган уринма ўтказилган. Уринма кесмасининг квадрати кесувчи кесмаларнинг кўпайтмасига тенг эканлигини, яъни $MC^2 = MA \cdot MB$ эканлигини исботланг.

77. Ер радиуси 6370 км га тенг; Ердан 4 км баландликда учаётган самолётдан Ернинг қандай узоқликдаги нуқтасини кўриш мумкин?

78. Останкино телеминорасининг баландлиги 533 м. Минора учидан кўринаётган горизонт радиусини ҳисобланг.

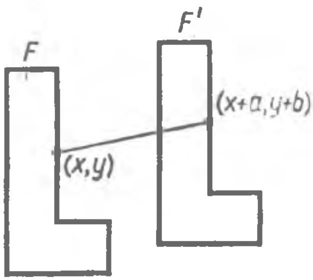
10-§. ТЕКИСЛИКДА ВЕКТОРЛАР

ПАРАЛЛЕЛ КЎЧИРИШ ВА УНИНГ ХОССАЛАРИ

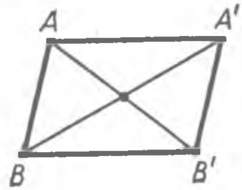
Текисликда декарт координаталари x, y ни киритимиз. F фигурани алмаштиришда унинг ихтиёрий (x, y) нуқтаси $(x+a, y+b)$ нуқтага ўтса, бундай алмаштириш *параллел кўчириш* дейилади, бунда a ва b ўзгармас сонлар (162-расм). Параллел кўчириш ушбу формулалар билан берилади:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b. \qquad (*)$$

Бу формулалар параллел кўчиришда (x, y) нуқта ўтадиган нуқтанинг x', y' координаталарини ифодалайди.



162-расм.



163-расм.

Параллел кўчириш ҳаракатдир. Ҳақиқатан, ихтиёрий иккита A (x_1, y_1) ва B (x_2, y_2) нуқта A' (x_1+a, y_1+b), B' (x_2+a, y_2+b) нуқталарга ўтади. Шу сабабли:

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2;$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Бундан $AB = A'B'$. Шундай қилиб, алмаштиришда масофалар сақланади, демак, у ҳаракатдир.

«Параллел кўчириш» деб аталиш шу билан асосланадики, ***параллел кўчиришда нуқталар параллел (ёки устма-уст тушувчи) тўғри чизиқлар бўйлаб бир хил масофага***

силжайди. Ҳақиқатан, $A(x_1, y_1)$ ва $B(x_2, y_2)$ нуқталар $A'(x_1+a, y_1+b)$ ва $B'(x_2+a, y_2+b)$ нуқталарга ўтсин (163-расм). AB' кесманинг ўртаси ушбу координаталарга эга:

$$x = \frac{x_1+x_2+a}{2}, \qquad y = \frac{y_1+y_2+b}{2}.$$

$A'B$ кесманинг ўртаси ҳам шу координаталарга эга. Бундан $AA'B'B$ тўртбурчакнинг диагоналлари кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади деган хулоса чиқади. Демак, бу тўртбурчак параллелограммдир. Параллелограммда эса AA' ва BB' қарама-қарши ётган томонлар тенг ва параллел.

Шуни қайд қиламизки, $AA'B'B$ параллелограммнинг бошқа икки томони AB ва $A'B'$ ҳам параллел ва тенгдир. Бундан ушбу хулоса чиқади: ***параллел кўчиришда тўғри чизиқ параллел тўғри чизиққа (ёки ўз-ўзига) ўтади.***

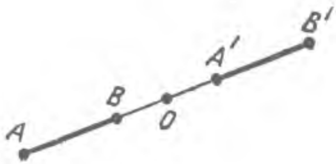
Эслатма. Бундан олдинги исботда B нуқта AA' тўғри чизиқда ётмайди, деб фараз қилинган эди. B нуқта AA' тўғри чизиқда ётган ҳолда B' нуқта ҳам шу тўғри чизиқда ётади, чунки AB' кесманинг ўртаси BA' кесманинг ўртаси билан устма-уст тушади (164-расм). Демак, A, B, A', B' нуқталарнинг ҳаммаси бир тўғри чизиқда ётади. Сўнгра,

$$AA' = \sqrt{(x_1+a-x_1)^2 + (y_1+b-y_1)^2} = \sqrt{a^2+b^2},$$
$$BB' = \sqrt{(x_2+a-x_2)^2 + (y_2+b-y_2)^2} = \sqrt{a^2+b^2}.$$

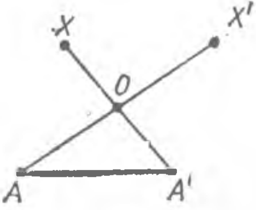
Шундай қилиб, бу ҳолда A ва B нуқталар AB тўғри чизиқ бўйлаб бир хил $\sqrt{a^2+b^2}$ масофага силжийди, AB тўғри чизиқ эса ўз-ўзига ўтади.

10.1-теорема. ***A ва A' нуқталар қандай бўлмасин, шундай ягона параллел кўчириш мавжудки, унда A нуқта A' нуқтага ўтади.***

Исботи. Ишни параллел кўчиришнинг ягоналигини исботлашдан бошлаймиз. X — фигуранинг ихтиёрий нуқтаси ва X' — параллел кўчириш натижасида X нуқта ўтадиган нуқта бўлсин (165-расм). Биз биламизки, XA' ва AX' кесмалар умумий O ўртага эга.



164-расм.



165-расм.

X нуқтанинг берилиши $A'X$ кесманинг ўртаси O ни бир қийматли аниқлайди. A, O нуқталар эса X' нуқтани бир қийматли аниқлайди, чунки O нуқта AX' кесманинг ўртасидир. X' нуқта аниқланишининг бир қийматли экани параллел кўчиришнинг ягоналигини билдиради.

A нуқтани A' нуқтага ўтказувчи параллел кўчиришнинг мавжудлигини исботлаймиз. Текисликда декарт координаталарини киритамиз. A нуқтанинг координаталари a_1, a_2 дан, A' нуқтанинг координаталари a_1', a_2' дан иборат бўлсин.

$$x' = x + a_1' - a_1, \quad y' = y + a_2' - a_2.$$

формула билан берилган параллел кўчириш A нуқтани A' нуқтага ўтказади. Ҳақиқатан, $x = a_1$ ва $y = a_2$ да $x' = a_1'$, $y' = a_2'$ га эга бўламиз. Теорема тўла исботланди.

Масала (3). Параллел кўчиришда (1, 1) нуқта (—1, 0) нуқтага ўтади. Координаталар боши қандай нуқтага ўтади?

Ечилиши. Ҳар қандай параллел кўчириш $x' = x + a$, $y' = y + b$ формулар билан ифодаланади. (1, 1) нуқта (—1, 0) нуқтага ўтгани учун $-1 = 1 + a$, $0 = 1 + b$. Бундан $a = -2, b = -1$. Шундай қилиб, (1, 1) нуқтани (—1, 0) нуқтага ўтказувчи параллел кўчириш $x' = x - 2$, $y' = y - 1$ формулалар билан ифодаланади. Бу формулаларга координаталар бошининг ($x = 0$, $y = 0$) координаталарини қўйиб топамиз: $x' = -2$, $y' = -1$. Шундай қилиб, координаталар боши (—2, —1) нуқтага ўтади.

10.2-теорема. ***Параллел кўчиришга тескари бўлган алмаштириш параллел кўчиришдир. Кетма-кет бажарилган иккита параллел кўчириш яна параллел кўчиришни беради.***

Исботи. Ҳар қандай параллел кўчириш

$$x' = x + a, \quad y' = y + b$$

кўринишидаги формулалар билан берилади. Тескари алмаштириш ҳам шу кўринишдаги

$$x = x' - a, \quad y = y' - b$$

формулалар билан берилади, демак, у параллел кўчириш бўлади. Теореманинг биринчи қисми исботланди.

Энди қуйидаги формулалар билан ифодаланган иккита параллел кўчиришни олайлик:

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b;$$
$$x'' = x' + c, \qquad y'' = y' + d.$$

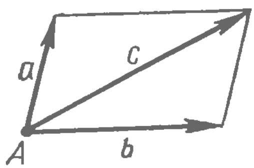
Бу параллел кўчиришларни кетма-кет бажариш натижасида ҳосил қилинадиган алмаштириш

$$x'' = x + a + c, \qquad y'' = y' + b + d$$

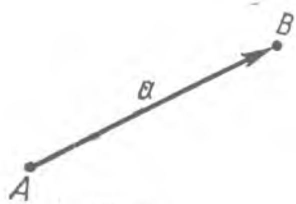
формулалар билан берилади. Бу алмаштириш параллел кўчиришдир. Теорема тўла исботланди.

ВЕКТОР ТУШУНЧАСИ

Баъзи физик катталиклар (куч, тезлик, тезланиш ва бошқалар) белгили ўлчов бирлигида олинган сон қийматлардан ташқари йўналишлари билан характерланади. Масалан, жисмнинг белгили пайтдаги ҳаракатини характерлаш учун у соатига 60 км билан ҳаракатланмоқда дейишнинг ўзи етарли эмас, яна унинг ҳаракати йўналишини, яъни тезлик йўналишини ҳам кўрсатиш керак. Шу муносабат билан айтиб ўтилган физик катталикларни йўналтирилган кесмалар билан тасвирлаш қулай. Физик катталикларни бундай тасвирлаш ўзининг аёнийлиги билангина фарқланмай, балки шу билан бирга бошқа асосларга ҳам эга. Мисол келтирамиз. Тажриба шуни кўрсатадики, агар A жисмга иккита a ва b куч таъсир эт-



166-расм.



167-расм.

тирилган бўлса (166-расм), у ҳолда уларнинг таъсири битта c куч таъсирига тенг бўлиб, бу c куч a ва b кесмалардан ясалган параллелограммнинг диагонали билан тасвирланади. Физик катталикларни йўналтирилган кесмалар билан тасвирлаганда улар устида бажариладиган операциялар, қаралган мисолдагидек, оддий геометрик ясашларга келтириладиган бошқа мисолларни ҳам келтириш мумкин.

Йўналтирилган кесма *вектор* деб аталади (167-расм). Векторларни белгилаш учун кичик латин ҳарфлари a, b, c, . . . дан фойдаланамиз. Баъзан вектор уни тасвирловчи кесманинг охирларини кўрсатиш билан белгиланади. Масалан, 167-расмда a векторни AB деб белгилаш мумкин. a векторни бундай усул билан белгилашда A нуқта *a векторнинг боши*, B нуқта эса унинг *охири* деб аталади. Векторни уни тасвирловчи кесманинг охирларини кўрсатиш билан белгилашда ҳар доим биринчи ўринга векторнинг боши қўйилади. Баъзан «вектор» сўзи ўрнига векторнинг ҳарфий белгиси устига стрелка ёки чизиқ қўйилади, масалан, $\overline{a}$ ёзув бундай ўқилади: «a вектор».

ВЕКТОРНИНГ АБСОЛЮТ ҚИЙМАТИ (МОДУЛИ) ВА ЙЎНАЛИШИ

Агар иккита ярим тўғри чизиқ (нур)* параллел кўчириш натижасида устма-уст тушса, улар *бир хил йўналган ярим тўғри чизиқ (нур) лар* дейилади. Бошқача айтганда, битта нурни иккинчи нурга ўтказувчи параллел кўчириш мавжуд.

Агар а ва b нурлар бир хил йўналган ҳамда b ва с нурлар бир хил йўналган бўлса, а ва с нурлар ҳам бир хил йўналган бўлади.

Ҳақиқатан, a ва b нинг йўналишлари бир хил, шу сабабли a нурни b нурга ўтказадиган параллел кўчириш мавжуд. b ва c бир хил йўналганлиги учун b нурни c нурга ўтказадиган параллел кўчириш мавжуд. Бу кетма-кет бажарилган иккита параллел кўчириш a ни c га ўтказадиган параллел кўчиришни беради. Демак, a ва c нурлар бир хил йўналган.

Агар иккита нурнинг ҳар бири иккинчисининг тўлдирувчи нури билан бир хил йўналган бўлса, бундай нурлар *қарама-қарши йўналган нурлар* дейилади.

Масала (5). AB ва CD параллел тўғри чизиқлар. A ва D нуқталар BC кесувчидан бир томонда ётади. BA ва CD нурларнинг бир хил йўналганлигини исботланг.

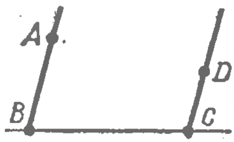
Ечилиши. CD нурни параллел кўчирамиз, натижада C нуқта B нуқтага ўтади (168-расм). Бунда CD тўғри чизиқ BA тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. D нуқта CB га параллел тўғри чизиқ бўйлаб силжиб, BC га нисбатан ўша ярим текисликда қолади. Шу сабабли CD нур BA нур билан устма-уст тушади, демак, бу нурлар *бир хил йўналган.*

Агар AB ва CD нурлар бир хил йўналган бўлса, $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар *бир хил йўналган векторлар* дейилади. *Векторнинг абсолют катталиги* (ёки *модули*) ** деб шу векторни тасвирловчи кесманинг узунлигига айтилади. $\overline{a}$ векторнинг модули $|\overline{a}|$ билан белгиланади.

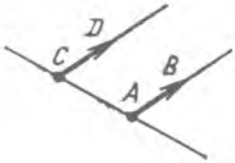
---

* Автор абсолютная величина билан модуль, шунингдек, полупрямая билан луч терминларни битта маънода ишлатади *(ред)*.

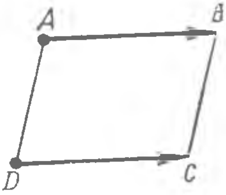
** Биз модуль терминини афзал кўрдик *(ред)*.



168- расм.



169- расм.



170- расм.

Агар параллел кўчириш натижасида иккита вектор устма-уст тушса, бундай векторлар *тенг векторлар* дейилади. Бу бир векторнинг боши ва охирини мос равишда иккинчи векторнинг боши ва охирига ўтказувчи параллел кўчириш мавжуд эканлигини билдиради. Бундан ушбу хулоса чиқади: ***тенг векторлар бир хил йўналган ва уларнинг модуллари тенг***. Аксинча, ***агар векторлар бир хил йўналган ва модуллари тенг бўлса, улар тенг бўлади***. Ҳақиқатан, $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ бир хил йўналган ва модуллари тенг векторлар бўлсин (169-расм). C нуқтани A нуқтага ўтказувчи параллел кўчириш CD ярим тўғри чизиқни AB ярим тўғри чизиқ билан устма-уст туширади, чунки улар бир хил йўналган. AB ва CD кесмалар тенг, шу сабабли D нуқта B нуқта билан устма-уст тушади, яъни параллел кўчириш $\overline{CD}$ векторни $\overline{AB}$ векторга ўтказади. Демак, $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар тенг.

М а с а л а (9). $ABCD$ — параллелограмм. $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторларнинг тенглигини исботланг.

Е ч и л и ш и. $\overline{AB}$ векторни параллел кўчирамиз, натижада A нуқта D нуқтага ўтади (170-расм). Бу параллел кўчиришда A нуқта AD тўғри чизиқ бўйлаб сурилади, демак, B нуқта унга параллел BC тўғри чизиқ бўйлаб сурилади. AB тўғри чизиқ параллел тўғри чизиққа, демак, DC тўғри чизиққа ўтади. Демак, B нуқта C нуқтага ўтади. Шундай қилиб, бу параллел кўчириш $\overline{AB}$ векторни $\overline{DC}$ векторга ўтказади, демак, бу векторлар тенг.

Векторнинг боши унинг охири билан устма-уст тушиши мумкин. Бундай вектор *ноль вектор* деб аталади. Ноль вектор устига чизиқча қўйилган ноль ($\overline{0}$) билан белгиланади. Ноль векторнинг йўналиши ҳақида сўз юритилмайди. Ноль векторнинг модули нолга тенг деб ҳисобланади. Таъриф бўйича барча ноль векторлар тенг.

Пара лел кўчиришнинг хоссасидан (10. 1-теоремадан) қуйидаги хулоса чиқади: ***ҳар қандай нуқтадан бошлаб берилган векторга тенг битта ва фақат битта вектор қўйиш мумкин.*** Исботлаш учун берилган векторнинг бошини берилган нуқтага ўтказувчи параллел кўчиришни бажариш етарли.

ВЕКТОРНИНГ КООРДИНАТАЛАРИ

A_1 (x_1, y_1) нуқта $\overline{a}$ векторнинг боши, A_2 (x_2, y_2) нуқта эса унинг охири бўлсин. $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$ сонларни $\overline{a}$ векторнинг *координаталари* деб атаймиз. Векторнинг координаталарини унинг ҳарф й белгиси ёнига қўямиз, қаралаётган ҳолда $\overline{a}\,(a_1, a_2)$ ёки тўғридан тўғри $(\overline{a_1, a_2})$. Ноль векторнинг координаталари нолга тенг.

Икки нуқта орасидаги масофани шу нуқталарнинг координаталари орқали ифодаловчи формуладан координаталари a_1, a_2 дан иборат векторнинг модули $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ га тенг деган натижа чиқади.

10.3-теорема. ***Тенг векторлар мос равишда тенг координаталарга эга.*** Ва аксинча, ***агар векторларнинг мос координаталари тенг бўлса, векторлар тенг бўлади.***

Исботи. A_1' (x_1, y_1) ва A_2 (x_2, y_2) нуқталар $\overline{a}$ векторнинг боши ва охири бўлсин. $\overline{a}$ векторга тенг $\overline{a'}$ вектор $\overline{a}$ векторни параллел кўчиришдан ҳосил қилингани учун $\overline{a'}$ векторнинг боши ва охири мос равишда A_1' $(x_1 + c, y_1 + d)$, A_2' $(x_2 + c, y_2 + d)$ нуқталардан иборат бўлади. Бундан иккала $\overline{a}$ ва $\overline{a'}$ векторнинг бир хил $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$ координаталарга эга эканлиги кўриниб турибди.

Энди тескари тасдиқни исботлаймиз. $\overline{A_1A_2}$ ва $\overline{A_1'A_2'}$ векторларнинг мос координаталари тенг бўлсин. Векторларнинг тенг эканини исботлаймиз. x_1' ва y_1' — A_1' нуқтанинг координаталари, x_2' ва y_2' эса A_2' нуқтанинг координаталари бўлсин. Теорема шартига кўра: $x_2 - x_1 = x_2' - x_1'$, $y_2 - y_1 = y_2' - y_1'$. Бундан $x_2' = x_2 + x_1' - x_1$, $y_2' = y_2 + y_1' - y_1$. $x' = x + x_1' - x_1$, $y' = y + y_1' - y$ формулалар билан берилган параллел кўчириш A_1 нуқтани A_1' нуқтага, A_2 нуқтани эса A_2' нуқтага ўтказади, яъни $\overline{A_1A_2}$ ва $\overline{A_1'A_2'}$ векторлар тенг. Теорема исботланди.

Масала (13). Учта нуқта берилган: $A\ (1,\ 1)$, $B\ (-1,\ 0)$, $C\ (0,\ 1)$. Шундай $D\ (x,\ y)$ нуқтани топингки, $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар тенг бўлсин.

Ечилиши. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари -2, -1 бўлади. $\overline{CD}$ векторнинг координаталари эса $x-0$, $y-1$. $\overline{AB}=\overline{CD}$ дан: $x-0=-2$, $y-1=-1$. Бундан D нуқтанинг координаталарини топамиз: $x=-2$, $y=0$.

ВЕКТОРЛАРНИ ҚЎШИШ

Координаталари a_1, a_2 ва b_1, b_2 бўлган $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ *векторларнинг йиғиндиси* деб координаталари a_1+b_1, a_2+b_2 бўлган $\overline{c}$ векторга айтилади, яъни

$$\overline{a}\ (a_1,\ a_2)+\overline{b}\ (b_1,\ b_2)=\overline{c}\ (a_1+b_1,\ a_2+b_2).$$

Ҳар қандай $\overline{a}\ (a_1, a_2)$, $\overline{b}\ (b_1, b_2)$, $\overline{c}\ (c_1\ c_2)$ ***векторлар учун***

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a},$$
$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}.$$

Исботлаш учун тенгликнинг ўнг ва чап қисмларида турган векторларнинг мос координаталарини таққослаш етарли. Биз кўриб турибмизки, улар тенг. 10.3-теоремага кўра мос координаталари тенг векторлар тенг.

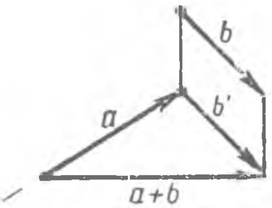
10.4-теорема. ***A, B, C нуқталар қандай бўлмасин,***

$$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$$

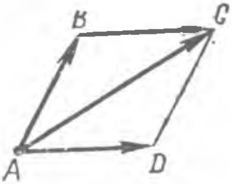
вектор тенглик ўринлидир.

Исботи. $A\ (x_1,\ y_1)$, $B\ (x_2,\ y_2)$, $C\ (x_3,\ y_3)$ — берилган нуқталар бўлсин. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари x_2-x_1, y_2-y_1, $\overline{BC}$ векторнинг координаталари x_3-x_2, y_3-y_2 бўлади. Демак, $\overline{AB}+\overline{BC}$ векторнинг координаталари x_3-x_1, y_3-y_1. Бу эса $\overline{AC}$ векторнинг координаталаридир. 10.3-теоремага кўра $\overline{AB}+\overline{BC}$ ва $\overline{AC}$ векторлар тенг. Теорема исботланди.

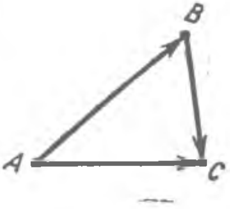
10.4-теорема ихтиёрий $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлар йиғиндисини ясашнинг ушбу усулини беради. $\overline{a}$ векторнинг охиридан $\overline{b}$ векторга тенг $\overline{b}'$ векторни қўйиш керак. У ҳолда боши $\overline{a}$ векторнинг боши билан устма-уст тушадиган, охири эса $\overline{b}'$ векторнинг охири билан устма-уст тушадиган вектор $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг йиғинди-



171- расм.



172- расм.



173- расм.

сини беради (171- расм). Икки вектор йиғиндисини ҳосил қилишнинг бундай усули векторларни қўшишнинг *«учбурчак қоидаси»* деб аталади.

Масала (16). $ABCD$ — параллелограмм. $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$ вектор тенгликни исботланг (векторларни қўшишнинг *«параллелограмм қоидаси»*).

Ечилиши. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ га эгамиз (172- расм). Аммо $\overline{BC}$ ва $\overline{AD}$ векторлар тенг (9- масалага қаранг). Шу сабабли $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

$\overline{a}$ (a_1, a_2) ва $\overline{b}$ (b_2, b_2) *векторларнинг айирмаси* деб шундай $\overline{c}$ (c_1, c_2) векторга айтиладики, унинг $\overline{b}$ вектор билан йиғиндиси $\overline{a}$ векторни беради: $\overline{b} + \overline{c} = \overline{a}$. Бундан $\overline{c} = \overline{a} - \overline{b}$ векторнинг координаталарини топамиз: $c_1 = a_1 - b_1$; $c_2 = a_2 - b_2$.

Масала (19). Боши умумий бўлган $\overline{AB}$ ва $\overline{AC}$ векторлар берилган (173- расм). $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$ эканини исботланг.

Ечилиши. $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$ тенгликка эгамиз. Бу эса $\overline{AC} - \overline{AB} = \overline{BC}$ эканини билдиради.

ВЕКТОРНИ СОНГА КЎПАЙТИРИШ

$\overline{(a_1, a_2)}$ *векторнин* λ *сонга кўпайтмаси деб*, $\overline{(\lambda a_1\ \lambda a_2)}$ векторга айтилади, яъни

$$\overline{(a_1,\ a_2)}\ \lambda = \overline{(\lambda a_1, a_2)}.$$

Таърифга кўра $\overline{(a_1,\ a_2)}\,\lambda = \lambda\ \overline{(a_1,\ a_2)}$.

Векторни сонга кўпайтириш амалининг таърифидан ***ҳар қандай*** $\overline{a}$ ***вектор ва*** λ, μ ***сонлар учун***

$$(\lambda + \mu)\ \overline{a} = \lambda\ \overline{a} + \mu\ \overline{a}$$

тенглик ўринли деган натижа чиқади.

Ҳар қандий иккита $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ вектор ҳамда λ сон учун

$$\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$$

тенглик ўринли.

10. 5-теорема. ***$\lambda\overline{a}$ векторнинг модули $|\lambda|\,|\overline{a}|$ га тенг. $\overline{a}\neq\overline{0}$ да $\lambda\overline{a}$ векторнинг йўналиши $\lambda>0$ ҳолда $\overline{a}$ векторнинг йўналиши билан бир хил, $\lambda<0$ ҳолда $\overline{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши.***

Исботи. Мос равишда $\overline{a}$ ва $\lambda\overline{a}$ векторларга тенг бўлган $\overline{OA}$ ва $\overline{OB}$ векторларни ясаймиз (O — координаталар боши). $\overline{a}$ векторнинг координаталари a_1 ва a_2 бўлсин. У ҳолда A нуқтанинг координаталари a_1 ва a_2 сонлардан, B нуқтанинг координаталари эса λa_1, λa_2 сонлардан иборат. OA тўғри чизиқнинг тенгламаси ушбу кўринишга эга:

$$\alpha x+\beta y=0.$$

Тенгламани A $(a_1,\ a_2)$ нуқтанинг координаталари қаноатлантиради, шу сабабли B $(\lambda a_1,\ \lambda a_2)$ нуқтанинг координаталари ҳам уни қаноатлантиради. Бундан B нуқта OA тўғри чизиқда ётади, деган хулоса чиқади. OA ярим тўғри чизиқда ётувчи ҳар қандай C нуқтанинг c_1, c_2 координаталари A нуқтанинг a_1, a_2 координаталари қандай ишорага эга бўлса, шундай ишорага эга, OA нинг тўлдирувчи нурида ётувчи ҳар қандай нуқтанинг координаталари қарама-қарши ишораларга эга. Шу сабабли, $\lambda>0$ бўлса, B нуқта OA нурда ётади, демак, $\overline{a}$ ва $\lambda\overline{a}$ векторлар бир хил йўналган бўлади. $\lambda<0$ бўлса, B нуқта тўлдирувчи нурда ётади, $\overline{a}$ ва $\lambda\overline{a}$ векторлар қарама-қарши йўналган бўлади.

$\lambda\overline{a}$ векторнинг модули ушбуга тенг: $|\lambda\overline{a}|=\sqrt{|\lambda a_1|^2+|\lambda a_2|^2}=|\lambda|\sqrt{a_1^2+a_2^2}=|\lambda|\,|\overline{a}|$.

Теорема исботланди.

Масала (22). A $(x_1,\ y_1)$ ва B $(x_2,\ y_2)$ нуқталар берилган. $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ векторларнинг қарама-қарши йўналганлигини исботланг.

Ечилиши. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари x_2-x_1 ва y_2-y_1, $\overline{BA}$ векторнинг координаталари x_1-x_2 ва y_1-y_2 бўлади. Кўриб турибмизки, $\overline{AB}=(-1)\,\overline{BA}$. Демак, 10. 5-теоремага кўра, $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ векторлар қарама-қарши йўналган.

Нолдан фарқли иккита вектор бир тўғри чизиқда ёки параллел тўғри чизиқларда ётса, бундай векторлар *коллинеар векторлар* дейилади.

10.6-теорема. ***Коллинеар векторларнинг мос координаталари пропорционалдир. Аксинча, иккита век-***

торнинг мос координаталари пропорционал бўлса, векторлар коллинеар бўлади.

Исботи. $\bar{a}(a_1, a_2)$ ва $\bar{b}(b_1, b_2)$ берилган векторлар бўлсин. Векторлар коллинеар ва бир хил йўналган бўлсин дейлик. $\bar{c}=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$ векторни қараймиз. $\bar{c}$ вектор $\bar{a}$ векторга тенг, чунки 10.5-теоремага кўра, улар бир хил йўналган ва модуллари тенг. $\bar{a}$ ва $\bar{c}$ векторларнинг координаталарини тенглаб, топамиз:

$$a_1=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}b_1,\ a_2=\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}b_2.$$

Бундан $\frac{b_1}{b_2}=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$, $\frac{b_2}{a_2}=\frac{|\bar{b}|}{|\bar{a}|}$. Демак, $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$, яъни $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторларнинг координаталари пропорционал.

Агар $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар қарама-қарши йўналган бўлса, исботлаш учун $\bar{c}=-\frac{|\bar{a}|}{|\bar{b}|}\bar{b}$ векторни қараш керак. У ҳолда юқоридагидек яна $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$ тенгликни ҳосил қиламиз.

Энди $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ ве торларнинг координаталари пропорционал бўлсин. Векторларнинг коллинеар эканини исботлаймиз. Ушбу тенгликка эгамиз:

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

Бу нисбатларнинг умумий қийматини λ билан белгилаб, $b_1=\lambda a_1$, $b_2=\lambda a_2$ тенгликларни ҳосил қиламиз. Бундан $\bar{b}=\lambda\bar{a}$ келиб чиқади. Бу эса (10.5-теорема) векторларнинг коллинеар эканини билдиради.

Масала (31). $\bar{a}(1, -1)$ ва $\bar{b}(-2, m)$ векторларнинг коллинеар экани маълум. m нимага тенг эканини топинг.

Ечилиши. Коллинеар векторларнинг координаталари пропорционал. Демак, $\frac{-2}{1}=\frac{m}{-1}$. Бундан $m=2$.

Модули бирга тенг вектор *бирлик вектор* дейилади. Координаталарнинг мусбат ярим ўқлари йўналишларидаги бирлик векторлар *координат векторлар ёки ортлар* дейилади. Биз уларни x ўқида $\bar{e}_1(1, 0)$, y ўқида $\bar{e}_2(0,1)$ каби белгилаймиз.

Ҳар қандай $\bar{a}(a_1, a_2)$ векторни

$$\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$$

кўринишда тасвирлаш мумкин.

Ҳақиқатан, $\overline{(a_1,\ a_2)}=\overline{(a_1,\ 0)}+\overline{(0,\ a_2)}=a_1\ \overline{(1,\ 0)}+a_2\ \overline{(0,\ 1)}=$ $=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}.$

М а с а л а (35). $\bar a$ (1, 0), $\bar b$ (1, 1), $\bar c$ (—1, 0) векторлар берилган. $\bar c = \lambda\,\bar a + \mu\,\bar b$ вектор тенгликни қаноатлантирадиган λ ва μ сонларни топинг.

Е ч и л и ш и. $\bar c$ ва $\lambda\bar a + \mu\bar b$ векторларнинг мос координаталарини тенглаб, иккита тенглама ҳосил қиламиз: $-1 = \lambda\cdot 1 + \mu\cdot 1$, $0 = \lambda\cdot 0 + \mu\cdot 1$. Булардан $\mu = 0$, $\lambda = -1$.

ВЕКТОРЛАРНИНГ СКАЛЯР КЎПАЙТМАСИ

$\bar a$ (a_1, a_2), $\bar b$ (b_1, b_2) векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб $a_1b_1 + a_2b_2$ сонга айтилади. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси учун ҳам сонларнинг кўпайтмаси сингари ёзувдан фойдаланилади. $\overline{a\,a}$ скаляр кўпайтма $\bar a^2$ билан белгиланади. Равшанки, $\bar a^2 = |\bar a|^2$.

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси таърифидан, ҳар қандай $\bar a(a_1, a_2)$, $\bar b(b_1, b_2)$, $\bar c$ (c_1, c_2) векторлар учун

$$(\bar a + \bar b)\ \bar c = \overline{a\,c} + \overline{b\,c}$$

тенглик ўринли деган натижа чиқади. Ҳақиқатан, тенгликнинг чап қисми $(a_1 + b_1)\ c_1 + (a_2 + b_2)\ c_2$ дан, ўнг қисми эса $a_1c_1 + a_2c_2 + b_1c_1 + b_2c_2$ дан иборат. Уларнинг тенг эканлиги равшан.

Нолдан фарқли $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ векторлар орасидаги *бурчак* деб BAC бурчакка айтилади. Ихтиёрий иккита $\bar a$, $\bar b$ вектор орасидаги бурчак деб бош нуқтаси умумий ва ўзлари шу векторларга тенг векторлар орасидаги бурчакка айтилади. Бир хил йўналган векторлар орасидаги бурчак нолга тенг ҳисобланади.

10.7- т е о р е м а. ***Векторларнинг скаляр кўпайтмаси улар модуллари билан улар орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг.***

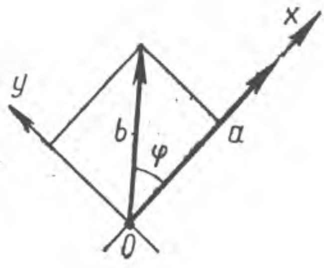
И с б о т и. $\bar a$ ва $\bar b$ — берилган векторлар ва φ — улар орасидаги бурчак бўлсин. Ушбуларга эгамиз:

$$(\bar a + \bar b)^2 = (\bar a + \bar b)\ (\bar a + \bar b) = (\bar a + \bar b)\ \bar a + (\bar a + \bar b)\bar b = \overline{a\,a} + \overline{b\,a} + \overline{a\,b} + \overline{b\,b} = \bar a^2 + 2\overline{ab} + \bar b^2$$

ёки

$$|\bar a + \bar b|^2 = |\bar a|^2 + |\bar b|^2 + 2\overline{a\,b}.$$

Бундан $\overline{a\,b}$ скаляр кўпайтма $\bar a$, $\bar b$ ва $\overline{a + b}$ векторлар узунликлари орқали ифодаланиши кўриниб турибди, шу сабабли координаталар системасини танлашга боғлиқ эмас, яъни координаталар системасини махсус танлашдан скаляр кўпайтма ўзгармайди. Координаталарнинг xy системасини 174-расмда кўрсатилганидек оламиз. Координаталар системасини бундай танлашда $\bar{a}$ векторнинг координаталари $|\bar{a}|$ ва 0 дан, $\bar{b}$ векторнинг координаталари $|\bar{b}|\cos\varphi$, $|\bar{b}|\sin\varphi$дан иборат. Скаляр кўпайтма эса ушбуга тенг:



174-расм.

$$\overline{ab} = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi + 0\,|\bar{b}|\sin\varphi = |\bar{a}|\,|\bar{b}|\cos\varphi.$$

Теорема исботланди.

10.7-теоремадан ушбу хулоса чиқади: ***агар векторлар перпендикуляр бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг. Аксинча, нолдан фарқли векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, векторлар перпендикуляр бўлади.***

Масала (47). $\bar{a}$ (1, 0) ва $\bar{b}$ (1, 1) векторлар берилган. Шундай λ сонни топингки, $\bar{a} + \lambda\bar{b}$ вектор $\bar{a}$ векторга перпендикуляр бўлсин.

Ечилиши. Бу ерда: $\bar{a}\,(\bar{a} + \lambda\bar{b}) = 0$, $\bar{a}^2 + \lambda\,(\overline{ab}) = 0$. Бундан:

$$\lambda = -\frac{\bar{a}^2}{\overline{a\,b}} = -\frac{1}{1} = -1.$$

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Параллел кўчириш нима эканини тушунтиринг.
2. Параллел кўчириш ҳаракат эканини исботланг.
3. Параллел кўчиришда фигуранинг нуқталари параллел (ёки устма-уст тушувчи) тўғри чизиқлар бўйлаб бир хил масофага силжишини исботланг.
4. Параллел кўчиришда тўғри чизиқ параллел тўғри чизиққа (ўз-ўзига) ўтишини исботланг.
5. Берилган A нуқтани берилган A' нуқтага ўтказувчи параллел кўчиришнинг мавжудлигини ва ягоналигини исботланг.
6. Параллел кўчиришга тескари алмаштириш параллел кўчириш эканини исботланг. Кетма-кет бажарилган иккита параллел кўчириш яна параллел кўчиришни беришини исботланг.
7. Вектор нима?
8. Қандай ярим тўғри чизиқлар бир хил йўналган ярим тўғри чизиқлар дейилади?

9. Агар a ярим тўғри чизиқ b ва c ярим тўғри чизиқлар билан бир хил йўналган бўлса, b ва c ярим тўғри чизиқлар ҳам бир хил йўналган бўлади. Шуни исботланг.
10. Қандай ярим тўғри чизиқлар қарама-қарши йўналган дейилади?
11. $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар бир хил йўналган дейиш нимани билдиради?
12. Векторнинг модули нима?
13. Қандай векторлар тенг векторлар дейилади?
14. Ихтиёрий нуқтадан берилган векторга тенг битта ва фақат битта векторни қўйиш мумкинлигини исботланг.
15. Тенг векторларнинг бир хил йўналганлигини ва модулларининг тенг бўлишини исботланг. Аксинча, бир хил йўналган ва модуллари тенг векторларнинг тенг эканини исботланг.
16. Векторнинг координаталари нима?
17. Тенг векторлар мос равишда тенг координаталарга эга эканини, мос координаталари тенг векторларнинг тенглигини исботланг.
18. Векторларни қўшишнинг таърифини айтинг.
19. Исталган иккита $\overline{a}$, $\overline{b}$ вектор учун

$$\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$$

хоссанинг ўринли эканини исботланг.
20. Ҳар қандай учта $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ вектор учун

$$\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}$$

тенгликнинг ўринли эканини исботланг.
21. $\overline{AB}+\overline{AC}=\overline{AC}$ вектор тенгликни исботланг.
22. $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг йиғиндисини топиш учун $\overline{a}$ вектор охиридан бошлаб $\overline{b}$ векторга тенг $\overline{b'}$ векторни қўйиш керак. У ҳолда боши $\overline{a}$ векторнинг боши билан, охири эса $\overline{b'}$ векторнинг охири билан устма-уст тушадиган вектор $\overline{a}+\overline{b}$ га тенг бўлади. Шуни исботланг.
23. Векторлар айирмасининг таърифини айтинг.
24. Векторни сонга кўпайтиришнинг таърифини айтинг.
25. 1) $\lambda\overline{a}$ векторнинг модули $|\lambda|\,|\overline{a}|$ га тенглигини; 2) $\lambda\overline{a}$ векторнинг йўналиши, $\overline{a}\neq\overline{0}$ учун, $\lambda>0$ ҳолда $\overline{a}$ векторнинг йўналиши билан бир хиллигини, $\lambda<0$ ҳолда эса $\overline{a}$ векторнинг йўналишига қарама-қарши бўлишини исботланг.
26. Қандай векторлар коллинеар векторлар дейилади?
27. $\overline{(a_1,\ a_2)}$ ва $\overline{(b_1,\ b_2)}$ векторлар $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}$ бўлганда ва фақат шунда коллинеар бўлишини исботланг.
28. Қандай вектор бирлик вектор дейилади?
29. Ҳар қандай $\overline{a}(a_1,\ \ a_2)$ векторни $\overline{a}=a_1\overline{e}_1+a_2\overline{e}_2$ кўринишда тасвирлаш мумкинлигини исботланг, бунда $\overline{e}_1$ ва $\overline{e}_2$—координаталар ўқларининг бирлик векторлари.

30. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси таърифини айтинг.
31. Ҳар қандай учта $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ вектор учун

$$(\overline{a}+\overline{b})\,\overline{c}=\overline{a}\,\overline{c}+\overline{b}\,\overline{c}$$

хоссанинг ўринли эканини исботланг.
32. Векторлар орасидаги бурчак қандай аниқланади?
33. Йўналишлари бир хил векторлар орасидаги бурчак нимага тенг?
34. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси улар модуллари билан улар орасидаги бурчак косинуси кўпайтмасига тенг эканини исботланг.
35. Агар векторлар перпендикуляр бўлса, уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлади. Аксинча, нолдан фарқли векторларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлса, векторлар перпендикуляр бўлади. Шуни исботланг.

МАШҚЛАР

1. Параллел кўчириш $x'=x+1$, $y'=y-1$ формулалар билан берилади. Бу параллел кўчиришда (0, 0), (1, 0), (0, 2) нуқталар қандай нуқталарга ўтади?
2. Агар параллел кўчиришда: 1) (1, 2) нуқта (3, 4) нуқтага; 2) (2, —3) нуқта (—1, 5) нуқтага ўтиши; 3) (—1, —3) нуқта (0, —2) нуқтага ўтиши маълум бўлса, параллел кўчиришнинг $x'=x+a$, $y'=y+b$ формулаларидаги a, b сонларни топинг.
3. Параллел кўчиришда (1, 1) нуқта (—1, 0) нуқтага ўтади. Координаталар боши қандай нуқтага ўтади?
4. 1) (1, 2) нуқтани (3, 4) нуқтага, (0, 1) нуқтани эса (—1, 0) нуқтага; 2) (2, —1) нуқтани (1, 0) нуқтага, (—1, 3) нуқтани эса (0, 4) нуқтага ўтказадиган параллел кўчириш мавжудми?
5. AB ва CD — параллел тўғри чизиқлар. A, D нуқталар BC кесувчидан бир томонда ётади. BA, CD нурлар йўналишларининг бир хил эканини исботланг.
6. 5-масаладаги A, D нуқталар BC тўғри чизиқдан турли томонда ётса, BA ва CD нурларнинг қарама-қарши йўналишли эканини исботланг.
7. $ABCD$ тўртбурчак — параллелограмм. AB, BA, BC, CB, CD, DC, AD, DA нурлар орасидан бир хил йўналган ва қарама-қарши йўналган жуфтларини айтинг.
8. Тўғри чизиқда учта A, B, C нуқта берилган бўлиб, B нуқта A ва C нуқталар орасида ётади. $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BA}$ ва $\overline{BC}$ векторлар орасидан бир хил йўналганларини ва қарама-қарши йўналганларини айтинг.
9. $ABCD$ —параллелограмм. $\overline{AB}$ ва $\overline{DC}$ векторлар тенглигини исботланг.
10. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$ векторлар учун $|\overline{AC}|\leqslant|\overline{AB}|+|\overline{BC}|$ тенгсизликнинг ўринли эканини исботланг.

11. Исталган $\overline{a}$, $\overline{b}$ векторлар учун $|\overline{a}+\overline{b}| \leqslant |\overline{a}|+|\overline{b}|$ тенгсизлик ўринли эканини исботланг.
12. A (0, 1), B (1, 0), C (1, 2), D (2, 1) нуқталар берилган. $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ векторларнинг тенглигини исботланг.
13. A (1, 1), B (—1, 0), C (0, 1) нуқталар берилган. Шундай D (x, y) нуқтани топингки, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ векторлар тенг бўлсин.
14. $\overline{a}$ (5, m) векторнинг модули 13 га тенг. m ни топинг.
15. $\overline{b}$ (n, 24) векторнинг модули 25 га тенг. n ни топинг.
16. $ABCD$ — параллелограмм. $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$ вектор тенгликни исботланг.
17. Қуйидаги векторларнинг йиғиндиларини топинг:
1) $\overline{a}$ (1, —2) ва $\overline{b}$ (2, —3); 2) $\overline{a}$ (—3, 4) ва $\overline{b}$ (2, —3);
3) $\overline{a}$ (3, 1) ва $\overline{b}$ (—2, —1); 4) $\overline{a}$ (—5, 4) ва $\overline{b}$ (2, —2);
5) $\overline{a}$ (—1, 1) ва $\overline{b}$ (2, 4).
18. 1) $\overline{a}$ (1, 4), $\overline{b}$ (1, 3); 2) $\overline{a}$ (—3, 2), $\overline{b}$ (2, —1); 3) $\overline{a}$ (5, 3), $\overline{b}$ (4, 4); 4) $\overline{a}$ (3, 3), $\overline{b}$ (4, 2); 5) $\overline{a}$ (1, 5), $\overline{b}$ (2, 7).
$\overline{a}-\overline{b}$ векторни топинг.
19. Боши умумий бўлган $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ векторлар берилган. $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$ эканини исботланг.
20. 1) $\overline{a}$ (1, —4); $\overline{b}$ (—4, 8); 2) $\overline{a}$ (2, 5), $\overline{b}$ (4, 3); 3) $\overline{a}$ (10, 7), $\overline{b}$ (2, —2). $\overline{a}+\overline{b}$ векторнинг модулини топинг.
21. 1) $\overline{a}$ (1, —4), $\overline{b}$ (—4, 8); 2) $\overline{a}$ (—2, 7), $\overline{b}$ (4, —1); 3) $\overline{a}$(15,0), $\overline{b}$ (0, —8). $\overline{a}-\overline{b}$ векторнинг модулини топинг.
22. A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) нуқталар берилган. $\overline{AB}$ ва $\overline{BA}$ векторларнинг қарама-қарши йўналган эканини исботланг.
23. $\overline{a}$ (1; 2) ва $\overline{b}$ (0,5; 1) векторларнинг бир хил йўналганлигини, $\overline{c}$ (—1; 2) ва $\overline{d}$ (0,5; —1) векторларнинг қарама-қарши йўналганлигини исботланг.
24. $\overline{a}$ (3, 4) вектор берилган. $\overline{a}$ вектордан икки марта узун ва у билан: 1) бир хил йўналган, 2) қарама-қарши йўналган $\overline{b}$ (b_1, b_2) векторни топинг.
25. $\overline{a}$ (3, 2), $\overline{b}$ (0, —1) векторлар берилган. Ушбу векторларни топинг: 1) $-2\overline{a}+4\overline{b}$; 2) $3\overline{a}-\overline{b}$; 3) $4\overline{a}+\overline{b}$.
26. $\overline{a}$ (3, 2) ва $\overline{b}$ (0, —1) векторлар берилган. 1) $-2\overline{a}+4\overline{b}$; 2) $4\overline{a}+3\overline{b}$; 3) $5\overline{a}+10\overline{b}$ векторнинг модулини топинг.
27. Агар: 1) $\overline{a}$ (3, 4); 2) $\overline{a}$ (—5, 12); 3) $\overline{a}$ (—6, —8) бўлса, $3\overline{a}$ векторнинг модулини топинг.
28. $\lambda\overline{a}$ векторнинг модули 5 га тенг. Агар: 1) $\overline{a}$ (—6, 8); 2) $\overline{a}$(3, —4); 3) $\overline{a}$ (5, 12) бўлса, λ ни топинг.
29. $\overline{a}$ (2, —4), $\overline{b}$ (1, 2), $\overline{c}$ (1, —2), $\overline{d}$ (—2, —4) векторлар берилган. Коллинеар векторлар жуфтларини кўрсатинг.

30. 29-масаладаги қайси векторлар бир хил йўналган, қайсилари қарама-қарши йўналган? Бу векторлардан қайсиларининг модуллари тенг?
31. $\overline{a}$ (1, —1) ва $\overline{b}$ (—2, m) векторларнинг коллинеарлиги маълум. m нимага тенглигини топинг.
32. n нинг қандай қийматларида $\overline{a}$ (n, 1), $\overline{b}$ (4, n) векторлар коллинеар ва бир хил йўналган?
33. Ушбу $\overline{a}\left(-\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right)$, $\overline{b}\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, $\overline{c}$ (0, —1), $\overline{d}\left(\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right)$ векторлар орасидан бирлик векторларни топинг ва улардан қайсиларининг коллинеар эканлигини кўрсатинг.
34. $\overline{a}$ (6, 8) вектор билан коллинеар ва у билан бир хил йўналган бирлик векторни топинг.
35. $\overline{a}$ (1, 0), $\overline{b}$ (1, 1) ва $\overline{c}$ (—1, 0) векторлар берилган. Шундай λ ва μ сонларни топингки, $\overline{c}=\lambda\,\overline{a}+\mu\overline{b}$ векторли тенглик ўринли бўлсин.
36. M ва N нуқталар мос равишда AB ва CD кесмаларнинг ўрталари. $\overline{MN}=\frac{1}{2}\,(\overline{AC}+\overline{BD})$ векторли тенгликни исботланг.
37. $\overline{e}_1$ (1, 0) ва $\overline{e}_2$ (0, 1) — координата векторлари, $2\overline{e}_1-3\overline{e}_2$ векторнинг координаталари нимага тенг?
38. $\overline{a}$ (—5, 4) векторнинг

$$\overline{a}=\lambda\,\overline{e}_1+\mu\overline{e}_2$$

ифодасидаги λ ва μ сонлар нимага тенг?
39. Исталган $\overline{a}$, $\overline{b}$ вектор учун $(\overline{a}\,\overline{b})^2 \leqslant \overline{a}^2\overline{b}^2$ тенгсизликнинг ўринли эканини исботланг.
40. $\overline{a}$ (1, 2) ва $\overline{b}\left(1, -\frac{1}{2}\right)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.
41. $\overline{a}$, $\overline{b}$ векторлар берилган. Агар $\overline{a}$, $\overline{b}$ векторларнинг модуллари 1 га ва улар орасидаги бурчак 60^0 га тенг экани маълум бўлса, $\overline{a}+\overline{b}$ векторнинг модулини топинг.
42. Олдинги масаладаги $\overline{a}$ ва $\overline{a}+\overline{b}$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.
43. Учбурчакнинг A (1, 1), B (4, 1), C (4, 5) учлари берилган. Учбурчак бурчакларининг косинусларини топинг.
44. Учлари A (0, $\sqrt{3}$), B (2, $\sqrt{3}$), $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ бўлган учбурчакнинг бурчакларини топинг.
45. $\overline{a}$ (m, n) ва $\overline{b}$ (—n, m) векторларнинг перпендикуляр эканини ёки нолга тенглигини исботланг.
46. $\overline{a}$ (3, 4) ва $\overline{b}$ (m, 2) векторлар берилган. m нинг қандай қийматида бу векторлар перпендикуляр?
47. $\overline{a}$ (1, 0) ва $\overline{b}$ (1, 1) векторлар берилган. Шундай λ сонни топингки, $\overline{a}+\lambda\,\overline{b}$ вектор $\overline{a}$ векторга перпендикуляр бўлсин.

48. λ нинг қандай қийматида 47- масаладаги $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ вектор $\bar{b}$ векторга перпендикуляр бўлади?

49. $\bar{a}$, $\bar{b}$ — ноколлинеар бирлик векторлар. $\bar{a}+\bar{b}$ ва $\bar{a}-\bar{b}$ векторларнинг нолдан фарқли ва перпендикуляр векторлар эканини исботланг.

50. Бирлик $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлар 60° ли бурчак ташкил қилади. $2\bar{b}-\bar{a}$ вектор $\bar{a}$ векторга перпендикуляр эканини исботланг.

51. $\bar{a}+\bar{b}$ ва $\bar{a}-\bar{b}$ векторлар перпендикуляр. $|\bar{a}|=|\bar{b}|$ эканини исботланг.

52. Ромб диагоналларининг перпендикулярлигини векторлар ёрдамида исботланг.

53. Тўртта нуқта берилган: A (1, 1), B (2, 3), C (0, 4), D (—1,2). $ABCD$ тўртбурчакнинг тўғри тўртбурчак эканини исботланг.

54. Тўртта нуқта берилган: $A(0,0)$, $B(-1,1)$, $C(0,2)$, D (1,1). $ABCD$ тўртбурчакнинг квадрат эканини исботланг.

55. 1) O, A, B дан иборат учта нуқта берилган. X нуқта AB кесмани, A нуқтадан бошлаб ҳисоблаганда, $\lambda:\mu$ нисбатда бўлади. $\overline{OX}$ ни $\overline{OA}=\bar{a}$ ва $\overline{OB}=\bar{b}$ векторлар орқали ифодаланг. 2) Учбурчак медианаларининг бир нуқтада кесишганлигини, бу нуқта уларни тегишли учлардан бошлаб ҳисоблаганда, 2:1 нисбатда бўлишини исботланг.

11- §. УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

КОСИНУСЛАР ТЕОРЕМАСИ

11.1- теорема (косинуслар теоремаси). ***Учбурчак исталган томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндисидан шу икки томон билан улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг.***

Исботи. ABC— берилган учбурчак бўлсин (175- расм). $BC^2 = AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos A$ эканини исботлаймиз.

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ вектор тенгликка эгамиз. Бундан $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$. Бу тенгликни скаляр квадратга кўтариб, топамиз:

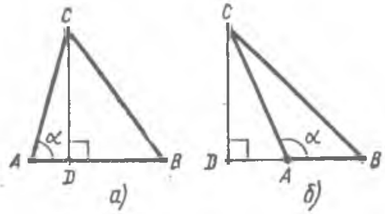
$$\overline{BC}^2=\overline{AB}^2+\overline{AC}^2-2\overline{AB}\cdot\overline{AC}.$$

Бундан

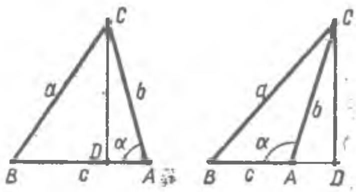
$$|\overline{BC}|^2=|\overline{AB}|^2+|\overline{AC}|^2-2\,|\overline{AB}|\cdot|\overline{AC}|\,\cos A.$$

Теорема исботланди.

Шуни эслатиб ўтамизки, $|\overline{AC}|\cos A$ нинг абсолют қиймати AC томоннинг AB томонга туширилган AD проекциясига (175- *а* расм) ёки AB томоннинг давомига туширилган проекциясига тенг (175- *б* расм). $|AC|\cos A$ нинг ишораси A бурчакка боғлиқ: A бурчак



175- расм.



176- расм.

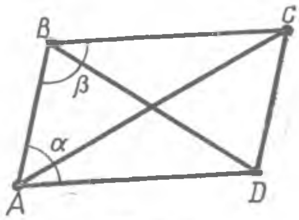
ўткир бўлса, «+», A бурчак ўтмас бўлса, «—» ишора олинади. Бундан ушбу натижа чиқади: ***учбурчак томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндиси „±" улардан бири билан иккинчиси проекциясининг иккиланган кўпайтмасига тенг.***
«+» ишорани қаршидаги бурчак ўтмас бўлганда, «—» ишорани эса қаршидаги бурчак ўткир бўлганда олиш керак.

Масала (1). Учбурчакнинг a, b, c томонлари берилган. Учбурчакнинг c томонига туширилган баландлигини топинг.

Ечилиши. Ушбу тенгликка эгамиз: $a^2 = b^2 + c^2 \pm 2\, c \cdot AD$ (176- расм). Бундан $AD = \pm \dfrac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}$. Пифагор теоремасига кўра:

$$CD = \sqrt{AC^2 - AD^2} = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{2c}\right)^2}.$$

Косинуслар теоремасидан ***параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг*** деган натижа чиқади. Ҳақиқатан, $ABCD$— параллелограмм бўлсин (177- расм). ABC ва ABD учбурчакларга косинуслар теоремасини қўлланиб, топамиз:



177- расм.

$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos\beta,$$
$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD \cos\alpha.$$

Бу тенгликларни қўшиб ва $\cos\beta = -\cos\alpha$, $BC = AD$, $AB = CD$ эканини ҳисобга олиб топамиз:

$$AC^2 + BD^2 = AB^2 + BC^2 + CD^2 + AD^2.$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

СИНУСЛАР ТЕОРЕМАСИ

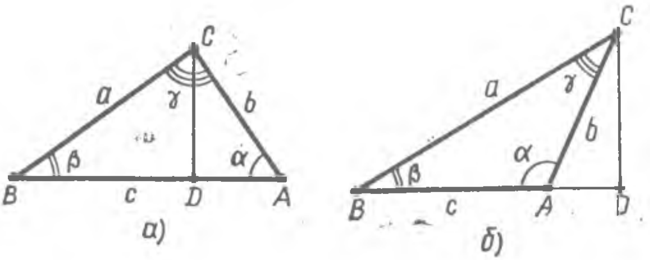
11.2- теорема (синуслар теоремаси). ***Учбурчакнинг томонлари қаршисидаги бурчақларнинг синусларига пропорционал.***

Исботи. ABC — томонлари a, b, c ва шу томонлари қаршисидаги бурчаклари α, β, γ бўлган учбурчак бўлсин (178- расм).

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

эканини исботлаймиз.

C учдан CD баландликни туширамиз. ACD тўғри бурчакли учбурчакдан α бурчак ўткир бўлган ҳолда топамиз: $CD = b\ \sin\alpha$



178- расм.

(178- a расм). Агар α ўтмас бурчак бўлса, у ҳолда $CD = b\sin(180^{\circ} - \alpha) = b\ \sin\alpha$ (178- $б$ расм). Шунга ўхшаш BCD учбурчакдан топамиз: $CD = a\ \sin\beta$. Шундай қилиб, $a\ \sin\beta = b\ \sin\alpha$.

Бундан

$$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\alpha}{a}.$$

Ушбу

$$\frac{\sin\beta}{b}=\frac{\sin\gamma}{c}$$

тенглик ҳам шунга ўхшаш исботланади.

Исботлаш учун учбурчакнинг A учидан унинг баландлигини ўтказиш керак. Теорема исботланди.

Масала (10). Учбурчак бурчагининг б ссектрисаси шу бурчак қаршисидаги томонни бурчакка ёпишган томонларга пропорционал бўлган кесмаларга ажратади. Шуни исботланг.

Исботи. ABC — берилган учбурчак ва BD унинг биссектрисаси бўлсин (179- расм). $\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}$ эканини исботлаймиз.

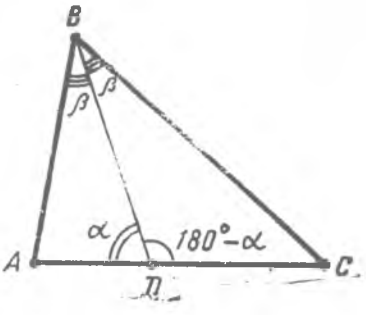
ABD ва CBD учбурчакларга синуслар теоремасини қўллаймиз:

$$\frac{AD}{\sin\beta}=\frac{AB}{\sin\alpha},\quad \frac{CD}{\sin\beta}=\frac{BC}{\sin(180^{\circ}-\alpha)}=\frac{BC}{\sin\alpha}.$$

Биринчи тенгликни иккинчисига бўлсак, ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\frac{AD}{CD}=\frac{AB}{BC}.$$

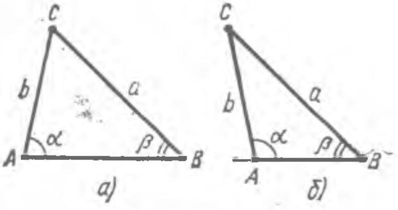
Шуни исботлаш талаб қилинган эди.



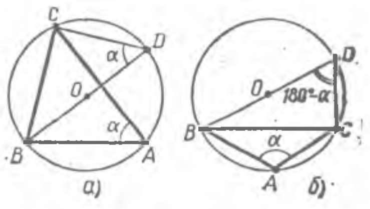
179- расм.

Синуслар теоремасидан қуйидагилар келиб чиқади: агар томонлари a ва b, шу томонлар қаршисидаги бурчаклари α ва β бўлган учбурчакда $\alpha > \beta$ бўлса, у ҳолда $a > b$ бўлади. Аксинча, $a > b$, у ҳолда $\alpha > \beta$. Қисқача айтганда, ***учбурчакнинг катта бурчаги қаршисида катта томон ётади, катта томони қаршисида катта бурчак ётади.***

Ҳақиқатан, α ва β бурчаклар ўткир бўлса (180-*а* расм), у ҳолда $\alpha > \beta$ учун $\sin\alpha > \sin\beta$. Аммо $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$ тенглик ўринлилиги сабабли $a > b$. α бурчак ўтмас бўлса (иккала бурчак ўтмас бўла олмайди), $180° - \alpha$ бурчак ўткирдир (180-*б* расм). Шу билан бирга $180° - \alpha$ бурчак β дан катта, чунки у учбурчакнинг α бурчагига қўшни бўлмаган ташқи бурчагидир. Шу сабабли $\sin\alpha = \sin(180° - \alpha) > \sin\beta$. Биз яна $a > b$ деган хулоса чиқарамиз. Тескари тасдиқ тескарисини фараз қилиш йўли билан исботланади.



180- расм.



181- расм.

М а с а л а (11). Синуслар теоремасида $\frac{\sin\alpha}{a}$, $\frac{\sin\beta}{b}$, $\frac{\sin\gamma}{c}$ учта нисбатнинг ҳар бири $\frac{1}{2R}$ га тенг эканини исботланг, бунда R учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси.

Е ч и л и ш и. BD диаметрни ўтказамиз (181-расм). Айланага ички чизилган бурчакларнинг хоссасига кўра BCD тўғри бурчакли учбурчакнинг D учидаги бурчаги A ва D нуқталар BC тўғри чизиқдан бир томонда ётса (181-*а* расм), α га тенг, бу нуқталар BC тўғри чизиқдан турли томонда ётса (181-*б* расм), $180° - \alpha$ га тенг. Биринчи ҳолда $BC = BD \sin\alpha$, иккинчи ҳолда $BC = BD \sin(180° - \alpha)$. $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$

бўлгани учун иккала ҳолда ҳам $a = 2R\ \sin\alpha$. Демак, $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{1}{2R}$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

УЧБУРЧАКЛАРНИ ЕЧИШ

Учбурчакларни ечиш учбурчакнинг маълум бурчаклари ва томонлари бўйича унинг номаълум томонлари ва бурчакларини топишдан иборатдир. Учбурчакнинг томонларини a, b, c билан, бурчакларини α, β, γ билан белгилаймиз.

I. масала. ***Учбурчакнинг a томони ва иккита бурчаги берилган, масалан β ва γ. Унинг учинчи бурчаги ва қолган икки томонини топиш керак.***

Ечиш усули. Учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг, шу сабабли учинчи бурчак бери ган бурчаклар орқали ифодаланади. Бир томон ва учта бурчакларнинг ҳаммасини билганимиз учун синуслар теоремасига кўра қолган икки томонни топамиз. Масала доим ечимга эга ва шу билан бирга ечим ягона. Берилган икки бурчакнинг йиғиндиси 180° дан кичик бўлиши керак, албатта. Ечимнинг ягоналиги учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатидан келиб чиқади.

II масала. ***Икки томони, масалан, a ва b томонлар ҳамда шу томонлар орасидаги γ бурчак берилган. Қолган иккита бурчакни ва учинчи томонни топиш керак.***

Ечиш усули. Косинуслар теоремасига кўра c томонни топамиз. Энди, учта томонни билгач, косинуслар теоремасига кўра қолган бурчакларнинг косинусларини ва бурчакларнинг ўзларини топиш мумкин. Аммо бунда синуслар теоремасидан фойдаланиб, номаълум бурчакларнинг синусларини топиш осонроқдир. Аммо бунда шуни назарда тутиш кераккн, синуснинг берилган қийматига иккита бурчак тўғри келади. Шу сабабли ҳосил қилинган бурчаклардан маълум муносабатларни қаноатлантирувчиларини олиш керак: учбурчак бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг, катта томон қаршисида катта бурчак ётади. Масала доим ечимга эга ва ечим ягона. Ечимнинг ягоналиги учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатидан келиб чиқади.

III. масала. ***Иккита томон, масалан, a ва b томонлар ҳамда шу томонлардан бирининг қаршисидаги, масалан, α бурчак берилган. Қолган иккита бурчакни ва учинчи томонни топиш керак.***

Ечиш усули. Синуслар теоремасига кўра $\sin\beta$ ни топамиз.

$\sin\beta$ бўйича унга жавоб берадиган β_1 ва β_2 бурчакларни топамиз. a ва b томонлардан каттаси қаршисида катта бурчак ётишини назарда тутиб, бу бурчаклардан биттасини ёки иккаласини танлаймиз. α ва β бурчакларни билган ҳолда $\gamma = 180^0 - \alpha - \beta$ бурчакни топамиз, сўнгра синуслар теоремасидан фойдаланиб, c томонни топамиз. Бу масала олдинги икки масаладан фарқ қилиб, ечимга эга бўлмаслиги, битта ёки иккита ечимга эга бўлиши мумкин.

IV. масала. ***Учбурчакнинг учта томони берилган. Унинг бурчакларини топиш керак.***

Ечиш усули. Косинуслар теоремасига кўра бурчаклардан бирини топамиз. Шундан кейин иккинчи масалада қилинганидек иш кўрамиз. Бу учбурчакнинг катта томони қолган икки томони йиғиндисидан кичик бўлса, масала ечимга эга. Ечимнинг ягоналиги учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатидан келиб чиқади.

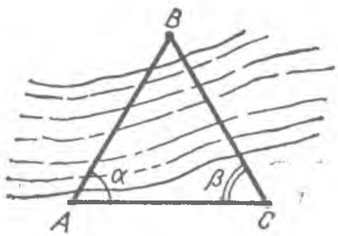
ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Косинуслар теоремасини ифодаланг ва исботланг.
2. Учбурчак томонининг квадрати қолган икки томони квадратлари йиғиндиси «$\pm$» улардан бири билан иккинчиси проекциясининг иккиланган кўпайтмасига тенг. Шуни исботланг. «$+$» ёки «$-$» ишора олиниши нимага боғлиқ?
3. Параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг эканини исботланг.
4. Синуслар теоремасини исботланг.
5. Ҳар қандай учбурчакда катта томон қаршисида катта бурчак ётишини ва катта бурчак қаршисида катта томон ётишини исботланг.
6. Учбурчакнинг бир томони ва иккита бурчаги берилган. Унинг учинчи бурчаги ва қолган икки томонини қандай топиш мумкин?
7. Учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги берилган. Унинг қолган икки бурчаги ва учинчи томонини қандай топиш мумкин?
8. Икки томон ва шу томонлардан бирининг қаршисида ётувчи бурчак берилган. Қолган иккита бурчак ва учинчи томонни қандай топиш мумкин?
9. Учбурчакнинг учта томони берилган. Унинг бурчакларини қандай топиш мумкин?

МАШҚЛАР

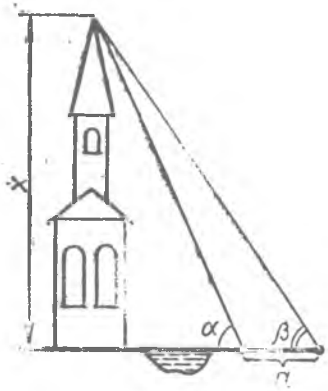
1. Учбурчакнинг a, b, c томонлари берилган. Учбурчакнинг c томонига туширилган баландлигини топинг.
2. Параллелограммнинг c ва d диагоналлари ҳамда улар орасидаги α бурчак берилган. Параллелограмм томонларини топинг.
3. Параллелограммнинг a ва b томонлари ҳамда бурчакларидан бири α берилган. Параллелограмм диагоналларини топинг.

4. a, b, c — учбурчакнинг томонлари. Пифагор теоремасига тескари теоремани исботланг: агар $a^2+b^2=c^2$ бўлса, учбурчак c томони қаршисидаги бурчаги тўғри бўлган тўғри бурчакли учбурчак эканини исботланг.
5. a, b, c — учбурчакнинг томонлари. Агар $a^2+b^2>c^2$ бўлса, у ҳолда c томон қаршисидаги бурчакнинг ўткир бўлишини исботланг. Агар $a^2+b^2<c^2$ бўлса, у ҳолда c томон қаршисидаги бурчакнинг ўтмас бўлишини исботланг.
6. Учбурчакнинг икки томони 20 м ва 21 м, улар орасидаги бурчакнинг синуси эса 0,6 га тенг. Учинчи томонни топинг.
7. Учбурчакнинг томонлари 13 м, 14 м ва 15 м. Учбурчак бурчакларининг косинусларини топинг.
8. Учбурчакнинг a, b, c томонлари берилган. Шу томонларга ўтказилган m_a, m_b, m_c медианаларни топинг.
9. Берилган икки нуқтагача бўлган масофалари квадратларининг йиғиндиси ўзгармас бўлган нуқталарнинг геометрик ўрни маркази берилган нуқталарни туташтирувчи кесманинг ўртасида бўлган айланадан иборат эканини исботланг.
10. Учбурчак бурчагининг биссектрисаси шу бурчакка қарши томонни ёпишган томонларга пропорционал бўлган кесмаларга ажратишини исботланг.
11. Синуслар теоремасида $\frac{\sin\alpha}{a}$, $\frac{\sin\beta}{b}$, $\frac{\sin\gamma}{c}$ учта нисбатнинг ҳар бири $\frac{1}{2R}$ га тенг эканини исботланг, бунда R — учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси.
12. Учбурчакнинг икки томони 5 см ва 6 см га тенг. 5 см ли томон қаршисидаги бурчак ўтмас бўлиши мумкинми?
13. ABC учбурчакда $AB=15$ см, $AC=10$ см. $\sin B=\frac{3}{4}$ бўла оладими?
14. AC масофани ҳамда α ва β бурчакларни билган ҳолда A нуқтадан бориб бўлмайдиган B нуқтагача бўлган масофани қандай топиш мумкин игини тушунтиринг (182- расм).



182- расм.

15. α ва β бурчаклар ҳамда a масофа бўйича бинонинг x баландлигини қандай топиш мумкинлигини тушунтиринг (183- расм).
16. ABC учбурчакнинг C учидан CD биссектриса ўтказилган. AC томон BC томондан катта. Қайси кесма катта: AD ми ёки BD ми?
17. ABC учбурчак берилган. CD унинг AB томонига ўтказилган биссектрисаси. Агар CAB бурчак CBA бурчакдан катта бўлса, AD кесма BD дан кичик бўлади. Шуни исботланг.
18. ABC учбурчакда $\angle A=40^\circ$, $\angle B=60^\circ$, $\angle C=80^\circ$. Учбурчакнинг қайси томони энг катта ва қайси томони энг кичик?



183- расм.

19. ABC учбурчакнинг томонлари $AB=5{,}1$ м, $BC=6{,}2$ м, $AC=7{,}3$ м. Учбурчакнинг қайси бурчаги энг катта ва қайси бурчаги энг кичик?

20. Агар тенг ёнли учбурчакнинг асосига ёпишган бурчаги 60^0 дан катта бўлса, шу учбурчакнинг асоси каттами ёки ён томони каттами?

21. ABC учбурчакнинг C бурчаги ўтмас бурчак. Агар X нуқта AC томонда ётса, у ҳолда $BX<AB$ бўлишини исботланг.

22. ABC учбурчакнинг C бурчаги ўтмас бурчак. Агар X нуқта AC томонда, Y нуқта эса BC томонда ётса, у ҳолда $XY<AB$ бўлишини исботланг.

23. ABC учбурчакнинг AB томонида D нуқта белгиланган. CD кесма ҳеч бўлмаганда AC ёки BC томонларнинг биридан кичик эканини исботланг.

24. ABC учбурчак берилган. CD — учбурчакнинг AB томонига ўтказилган медиана. Агар $AC>BC$ бўлса, у ҳолда ACD бурчакнинг BCD бурчакдан кичик эканини исботланг.

25. Учбурчакнинг бир учидаги биссектрисаси унинг шу учдан чиққан баландлигидан кичик эмаслигини, медианасидан эса катта эмаслигини исботланг.

26. Агар ABC учбурчакнинг C бурчаги катталашса-ю, AC ва BC томонлари ўзгаришсиз қолса, унинг AB томони қандай ўзгаради?

27. Учбурчакнинг бир томони ва иккита бурчаги берилган. Агар:

1) $a=5$,	$\beta=30^0$,	$\gamma=45^0$;
2) $a=20$,	$\alpha=75^0$,	$\beta=60^0$;
3) $a=35$,	$\beta=40^0$,	$\gamma=120^0$;
4) $b=12$,	$\alpha=36^0$,	$\beta=25^0$;
5) $c=14$,	$\alpha=64^0$,	$\beta=48^0$,

бўлса, унинг учинчи бурчагини ва қолган икки томонини топинг.

28. Учбурчакнинг икки томони ва учинчи томони қаршисидаги бурчаги берилган. Агар:

1) $a=12$,	$b=8$,	$\gamma=60^0$;
2) $a=7$,	$b=23$,	$\gamma=130^0$;
3) $b=9$,	$c=17$,	$\alpha=95^0$;
4) $b=14$,	$c=10$,	$\alpha=145^0$;
5) $a=32$,	$c=23$,	$\beta=152^0$;
6) $a=24$,	$c=18$,	$\beta=15^0$

бўлса, қолган икки бурчагини ва учинчи томонини топинг.

29. Учбурчакнинг икки томони a ва b ҳамда a томони қаршисидаги α бурчаги берилган. Агар:

1) $a = 12$, $b = 5$, $\alpha = 120°$;
2) $a = 27$, $b = 9$, $\alpha = 138°$;
3) $a = 34$, $b = 12$, $\alpha = 164°$;
4) $a = 2$, $b = 4$, $\alpha = 60°$;
5) $a = 6$, $b = 8$, $\alpha = 30°$

бўлса, унинг қолган бурчакларини ва учинчи томонини топинг.

30. Учбурчакнинг учта томони берилган. Агар:

1) $a = 2$, $b = 3$, $c = 4$;
2) $a = 7$, $b = 2$, $c = 8$;
3) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$;
4) $a = 15$, $b = 24$, $c = 18$;
5) $a = 23$, $b = 17$, $c = 39$;
6) $a = 55$, $b = 21$, $c = 38$

бўлса, унинг бурчакларини топинг.

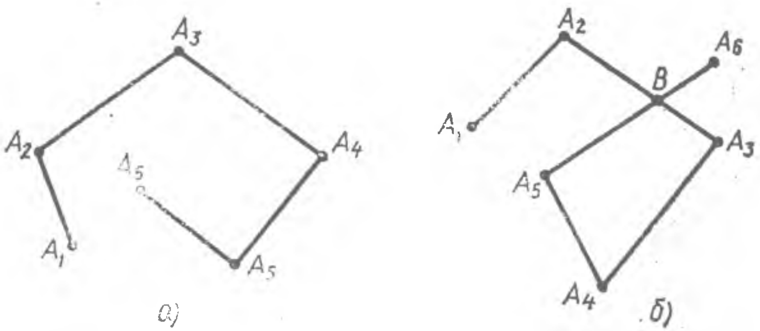
12- §. КЎПБУРЧАКЛАР

СИНИҚ ЧИЗИҚ

A_1, A_2, ..., A_n нуқталардан ва уларни туташтирувчи A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесмалардан иборат фигура $A_1A_2A_3 \dots A_n$ *синиқ чизиқ* деб аталади. A_1, A_2, ..., A_n нуқталар синиқ чизиқнинг *учлари*, A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{n-1}A_n$ кесмалар эса синиқ чизиқнинг *бўғинлари* деб аталади. Агар синиқ чизиқ ўз-ўзи билан кесишмаса, бундай синиқ чизиқ *содда синиқ чизиқ* дейилади. 184-*а* расмда содда синиқ чизиқ, 184-*б* расмда эса ўз-ўзи билан кесишадиган (B нуқтада) синиқ чизиқ кўрсатилган. Синиқ чизиқнинг ҳамма бўғинлари узунликларининг йиғиндиси шу *синиқ чизиқнинг узунлиги* дейилади.

12. 1-теорема. ***Синиқ чизиқнинг узунлиги унинг охирларини туташтирувчи кесма узунлигидан кичик эмас.***

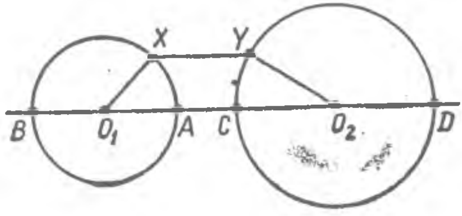
Исботи. $A_1A_2A_3 \dots A_n$ — берилган синиқ чизиқ бўлсин. Синиқ чизиқнинг A_1A_2 ва A_2A_3 бўғинларини битта A_1A_3 бўғин билан алмаштирамиз. $A_1A_3A_4 \dots A_n$ синиқ чизиқ ҳосил бўлади.



184-расм.

Бу синиқ чизиқ учбурчак тенгсизлигига кўра берилган синиқ чизиқ узунлигидан катта бўлмаган узунликка эга. Шу усул билан A_1A_3 ва A_3A_4 бўғинларни $A_1 A_4$ билан алмаштириб, $A_1 A_4 A_5 \dots A_n$ синиқ чизиққа келамиз, унинг узунлиги эса берилган синиқ чизиқ узунлигидан катта эмас. Шундай давом эттираверамиз. Ниҳоят синиқ чизиқ охирларини туташтирувчи $A_1 A_n$ кесмага келамиз. Бундан берилган синиқ чизиқ $A_1 A_n$ кесма узунлигидан кичик бўлмаган узунликка эга деган хулосага келамиз. Теорема исботланди.

Масала (1). Радиуслари R_1, R_2 га тенг иккита айлана ҳамда улар марказлари орасидаги масофа $d > R_1 + R_2$ берилган. Бу айланаларнинг X, Y нуқталари орасидаги энг катта ва энг кичик масофа нимага тенг?



185-расм.

Ечилиши. O_1XYO_2 синиқ чизиқ учун 12. 1-теоремага кўра $OO_1 \leqslant O_1X + XY + YO_2$ (185-расм). Демак, $d \leqslant R_1 + XY + R_2$. Бундан $XY \geqslant d - R_1 - R_2$. $AC = d - R_1 - R_2$ бўлгани учун айланалар нуқталари орасидаги энг кичик масофа $d - R_1 - R_2$ га тенг.

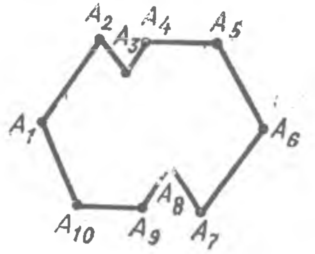
XO_1O_2Y синиқ чизиқ учун ўша теоремага кўра $XY \leqslant R_1 + d + R_2$. $BD = d + R_1 + R_2$, шунинг учун айланалар нуқталари орасидаги энг катта масофа $d + R_1 + R_2$ га тенг.

ҚАВАРИҚ КЎПБУРЧАКЛАР

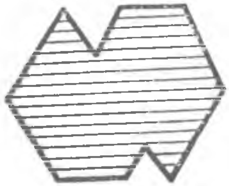
Синиқ чизиқнинг охирлари устма-уст тушса, бундай синиқ чизиқ *ёпиқ* дейилади. Қўшни бўғинлари бир тўғри чизиқда ётмаган содда ёпиқ синиқ чизиқ *кўпбурчак* дейилади (186-расм). Синиқ чизиқнинг учлари *кўпбурчакнинг учлари*, синиқ чизиқнинг бўғинлари *кўпбурчакнинг томонлари* деб аталади. Кўпбурчакнинг қўшни бўлмаган учларини туташтирувчи кесмалар *кўпбурчакнинг диагоналлари* дейилади. n учли кўпбурчак ва шунинг билан бирга n томонли кўпбурчак n бурчак деб аталади (тўртбурчак, бешбурчак,...).

Текисликнинг кўпбурчак билан чегараланган чекли қисми *ясси кўпбурчак* ёки *кўп бурчакли соҳа* дейилади (187-расм).

Агар кўпбурчак томонини ўз ичига олган ихтиёрий тўғри чизиққа нисбатан битта ярим текисликда ётса, у *қавариқ кўпбурчак* дейилади. Бунда тўғри чизиқнинг ўзи шу ярим текисликка тегиш-



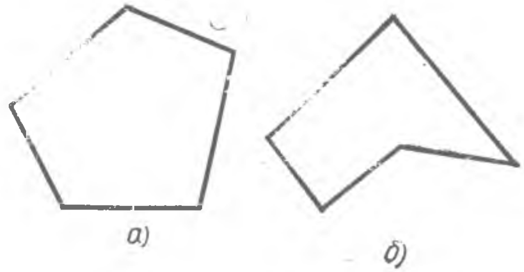
186-расм.



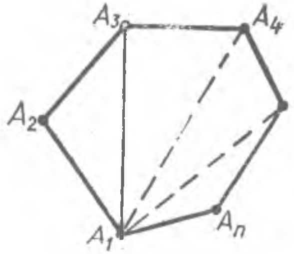
187-расм.

ли ҳисобланади. 188-*а* расмда қавариқ кўпбурчак, 188-*б* расмда эса ноқавариқ кўпбурчак тасвирланган. Кўпбурчакнинг берилган учидаги *бурчаги* деб унинг шу учида учрашувчи томонлари ҳосил қилган бурчакка айтилади.

12.2-теорема. ***Қавариқ п бурчак бурчакларининг йиғиндиси*** $180°(n-2)$ ***га тенг.***



188-расм.



189-расм.

Исботи. Айтайлик, P — берилган $A_1 A_2 \ldots A_n$ қавариқ кўпбурчак бўлсин (189-расм). $A_1 A_3$ диагоналини ўтказамиз. $A_1 A_2 A_3$ учбурчак ва $n-1$ та учли P_1 кўпбурчак $A_1 A_3 \ldots A_n$ ни ҳосил қиламиз. P кўпбурчакнинг A_1 ва A_3 учларидаги бурчаклари P_1 кўпбурчак бурчаклари билан $A_1 A_2 A_3$ учбурчакнинг шу учлардаги бурчаклари йиғиндисига тенг. Бунда P кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси P_1 кўпбурчак бурчаклари йиғиндисига $A_1 A_2 A_3$ учбурчак бурчаклари йиғиндиси, яъни 180° қўшилганига тенг. Шундан кейин худди шу усул билан P_1 кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси P_2, яъни $A_1 A_4 \ldots A_n$ кўпбурчак бурчаклари йиғиндисига 180° қўшилганига тенг, деган хулоса чиқарамиз. Демак, P кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси P_2 кўпбурчак бурчаклари йиғиндисига $180° \cdot 2$ ни қўшилганига тенг.

Шу усулда иш кўриб, $(n-3)$-қадамда биз $A_1 A_{n-1} A_n$ учбурчакка келамиз. Унинг бурчаклари йиғиндиси эса 180° га тенг.

Натижада P кўпбурчак бурчакларининг йиғиндиси $180°(n-3)+$ $+180°=180°(n-2)$ га тенг. Теорема исботланди.

Қавариқ кўпбурчакнинг берилган учидаги *ташқи бурчаги* деб унинг шу учидаги ички бурчагига қўшни бурчакка айтилади.

Масала (9). Қавариқ n бурчакнинг ҳар қайси учидан биттадан олинган ташқи бурчаклари йиғиндиси нимага тенг?

Ечилиши. Кўпбурчак ички бурчагининг унга қўшни ташқи бурчак билан йиғиндиси $180°$ га тенг. Шу сабабли барча ички ва ташқи бурчакларнинг йиғиндиси $180°\cdot n$ га тенг. Аммо 12.2-теоремага кўра ҳамма ички бурчакларнинг йиғиндиси $180°\cdot(n-2)$ га тенг. Демак, ҳар қайси учдан биттадан олинган ташқи бурчакларнинг йиғиндиси $180°n-180°(n-2)=360°$ га тенг экан.

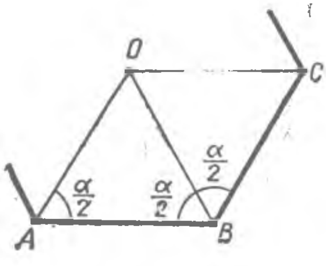
МУНТАЗАМ КЎПБУРЧАКЛАР

Ҳамма томонлари тенг ва ҳамма бурчаклари тенг бўлган қавариқ кўпбурчак *мунтазам кўпбурчак* дейилад .

Ҳамма учлари бирор айланада ётган кўпбурчак айланага *ички чизилган кўпбурчак* дейилади. Ҳамма томони бирор айланага уринган кўпбурчак айланага *ташқи чизилган кўпбурчак* дейилади.

12.3-теорема. ***Мунтазам қавариқ кўпбурчак айланага ички чизилган бўлиши ва айланага ташқи чизилган бўлиши мумкин.***

Исботи. A, B — кўпбурчакнинг иккита қўшни учлари бўлсин (190-расм). A, B учлардан кўпбурчак бурчаклари инг биссектрисаларини ўтказамиз. O — уларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. AOB учбурчак тенг ёнли учбурчак бў иб, асоси AB ва асосидаги бурчаклари $\frac{\alpha}{2}$ га тенг, бунда α — кўпбурчакнинг бурчаги. O нуқтани B учга қўшни бўлган C уч билан бирлаштирамиз. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ABO ва CBO учбурчаклар тенг. Уларда OB томон умумий, AB ва BC томонлар эса кўпбурчакнинг томонлари бўлгани учун тенг, B учдаги бурчаклар эса $\frac{\alpha}{2}$ га тенг.



190-расм.

Учбурчакларнинг тенглигидан OBC учбурчак тенг ёнли учбурчак бўлиб, C учидаги бурчаги $\frac{\alpha}{2}$ га тенглиги келиб чиқади. Демак, CO кесма кўпбурчакнинг C бурчаги биссектрисасидир.

Энди O нуқтани C га қўшни D уч билан туташтирамиз ҳамда COD тенг ёнли ва DO кесма кўпбурчакнинг D бурчаги биссектрисаси эканини исботлаймиз. Ва ҳоказо. Натижада бир томони кўпбурчакнинг томонидан, шу томони қаршисидаги уч. — O нуқтадан иборат ҳар бир учбурчак тенг ёнли экани билинади. Бу учбурчакларнинг ҳаммасининг ён томонлари тенг. Бундан кўпбурчакнинг ҳамма учлари маркази O нуқтада, радиуси эса учбурчакларнинг ён томонларига тенг бўлган айланада ётади, кўпбурчакнинг ҳамма томонлари эса маркази O нуқтада, радиуси эса учбурчакларнинг O учидан туширилган баландликларига тенг бўлган айланага уринади деган хулоса чиқарамиз. Теорема исботланди.

Томони a га ва томонларининг сони n га тенг бўлган мунтазам кўпбурчак учун ташқи чизилган айлананинг R радиусини ва ички чизилган айлананинг r радиусини топамиз (191-расм). Қуйидагиларга эгамиз:

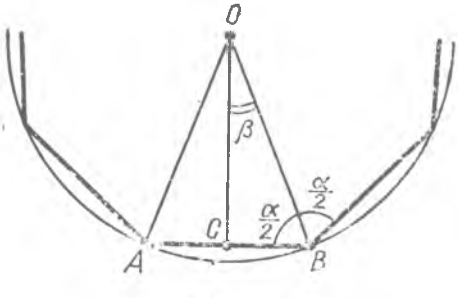
$$\beta = 90° - \frac{\alpha}{2} = 90° - \frac{(n-2)\,180°}{2n} = \frac{180°}{n};$$

$$R = OB = \frac{CB}{\sin\beta} = \frac{a}{2\sin\frac{180°}{n}}; \quad r = OC = \frac{CB}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180°}{n}}.$$

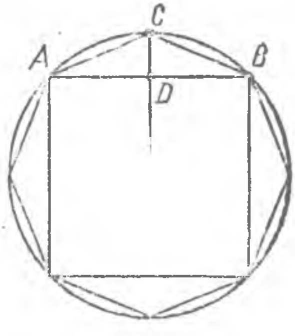
Мунтазам (*тенг томонли*) *учбурчак учун* $n = 3, \frac{180°}{3} = 60°,$

$$R = \frac{a}{2\sin 60°} = \frac{a}{\sqrt{3}}; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 60°} = \frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

Мунтазам тўртбурчак (квадрат) учун $n = 4, \frac{180°}{4} = 45°,$



191- расм.



192- расм,

$$R = \frac{a}{2\sin 45°} = \frac{a}{\sqrt{2}}; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 45°} = \frac{a}{2}.$$

Мунтазам олтибурчак учун $n = 6, \frac{180°}{6} = 30°,$

$$R = \frac{a}{2\sin 30°} = a; \quad r = \frac{a}{2\operatorname{tg} 30°} = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Масала (23). Мунтазам саккизбурчакнинг томони $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ формула бўйича ҳисобланишини исботланг, бунда R — ташқи чизилган айлананинг радиуси.

Ечилиши. AB — ички чизилган квадратнинг томони, AC — саккизбурчакнинг томони бўлсин (192-расм). Ушбуларга эгамиз: $AC = \sqrt{AD^2 + CD^2}$, $AD = \frac{AB}{2} = \frac{R\sqrt{2}}{2}$, $CD = OC - OD = R - \frac{R\sqrt{2}}{2}$, шу сабабли $a_8 = AC \sqrt{\left(R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(R - R\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

АЙЛАНА УЗУНЛИГИ

Айлана узунлиги ҳақидаги аёний тасаввур бундай ҳосил қилинади. Ипни айлана шаклига келтирилган деб тасаввур қиламиз. Уни қирқиб, учларидан тортамиз. Ҳосил қилинган кесманинг узунлиги айлана узунлиги бўлади. Айлана радиусини билган ҳолда унинг узунлигини қандай топиш мумкин? Аёний тасаввурдан равшанки, айлана узунлиги томонларининг узунлиги етарлича кичик бўлган ички чизилган қавариқ кўпбурчак периметридан жуда кам фарқ қилади. Шунга асосланиб, айлана узунлигининг баъзи хоссаларини исботлаймиз.

12.4-Теорема. ***Айлана узунлигининг диаметрига нисбати айланага боғлиқ эмас, яъни ҳар қандай иккита айлана учун ҳам бир хилдир.***

Исботи. Иккита ихтиёрий айлана оламиз. R_1 ва R_2 — уларнинг радиуслари, l_1 ва l_2 — узунликлари бўлсин. Теореманинг тасдиғи нотўғри ва $\frac{l_1}{2R_1} \neq \frac{l_2}{2R_2}$, масалан,

$$\frac{l_1}{2R_1} < \frac{l_2}{2R_2} \qquad (*)$$

деб фараз қилайлик.

Қаралаётган айланаларга томонларининг сони n катта бўлган қавариқ кўпбурчакларни ички чизамиз. Агар n жуда катта бўлса, у ҳолда қаралаётган айланаларнинг узунликлари ички чизилган кўпбурчакларнинг p_1, p_2 периметрларидан жуда кам фарқ қилади. Шу сабабли, агар (*) тенгсизликда l_1 ни p_1 га, l_2 ни эса p_2 га алмаштирилса, бу тенгсизлик бузилмайди:

$$\frac{p_1}{2R_1} < \frac{p_2}{2R_2}. \qquad (**)$$

p_1, p_2 периметрларни айланаларнинг радиуслари орқали ифодалаймиз. Мунтазам кўпбурчакка ташқи чизилган айлана радиусининг $R = \frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{n}}$ формуласидан ички чизилган кўпбурчакларнинг томонлари $2R_1 \sin\frac{180^\circ}{n}$ ва $2R_2 \sin\frac{180^\circ}{n}$ га тенг деган хулоса чиқади. Шу сабабли кўпбурчакларнинг периметрлари ушбуларга тенг: $p_1 = 2R_1 n\sin\frac{180^\circ}{n}$, $p_2 = 2R_2\ n\sin\frac{180^\circ}{n}$. Бундан $\frac{p_1}{2R_1} = n\sin\frac{180^\circ}{n}$, $\frac{p_2}{2R_2} = n\sin\frac{180^\circ}{n}$, яъни $\frac{p_1}{2R_1} = \frac{p_2}{2R_2}$. Бу эса (**) тенгсизликка зид. Теорема исботланди.

Айлана узунлигининг диаметрига нисбати грек ҳарфи π («пи» деб ўқилади) билан белгиланади:

$$\frac{l}{2R} = \pi.$$

π иррационал сондир. Унинг тақрибий қиймати ушбуга тенг:

$$\pi \approx 3,1416.$$

Шундай қилиб, ***айлана узунлиги***

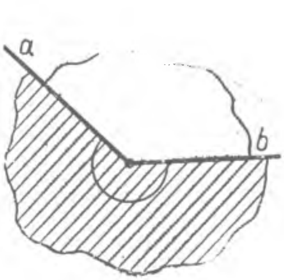
$$l = 2\pi R$$

формула бўйича ҳисобланади.

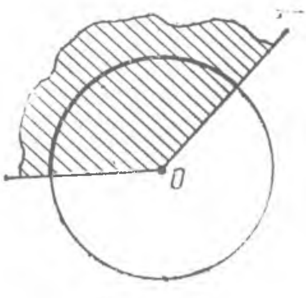
АЙЛАНАНИНГ МАРКАЗИЙ БУРЧАГИ ВА ЁЙИ

Текисликнинг бир нуқтадан чиққан иккита турли нур билан чегараланган қисми *ясси бурчак* дейилади. Бу нурлар бурчакнинг томонлари дейилади. Томонлари илгаридан маълум бўлган иккита ясси бурчак мавжуд. Улар *тўлдирувчи бурчаклар* дейилади. 193-расмда томонлари a, b га тенг ясси бурчаклардан бири штрихлаб кўрсатилган.

Агар ясси бурчак ярим текисликнинг қисми бўлса, унинг *градус ўлчови* деб томонлари оддий бурчакнинг томонларидан иборат бурчакнинг градус ўлчовига айтилади. Агар ясси бурчак ярим те-



193- расм.



194- расм.

кисликни ўз ичига олса, унинг градус ўлчови $360° - \alpha$ га тенг, бунда α — тўлдирувчи ясси бурчакнинг градус ўлчови.

Айланадаги *марказий бурчак* деб учи айлана марказида бўлган ясси бурчакка айтилади. Айлананинг ясси бурчак ичидаги қисми айлананинг шу марказий бурчакка мос келган *ёйи* дейилади (194-расм). Айлана ёйининг градус ўлчови деб тегишли марказий бурчакнинг градус ўлчовига айтилади.

$n°$ ли марказий бурчакка мос келувчи айлана ёйининг узунлигини топамиз. Ёйиқ бурчакка ярим айлананинг πR узунлиги тўғри келади. Демак, $1°$ ли бурчакка $\frac{\pi R}{180}$ ёй тўғри келади, $n°$ ли бурчакка эса

$$l = \frac{\pi R}{180} n$$

ёй мос келади. *Бурчакнинг радиан ўлчови* деб мос ёй узунлигининг айлана радиусига нисбатини айтилади. Айлана ёйи узунлигининг формуласидан

$$\frac{l}{R} = \frac{\pi}{180} n$$

келиб чиқади, яъни *бурчакнинг радиан ўлчови унинг градус ўлчовини $\frac{\pi}{180°}$ га кўпайтиришдан ҳосил қилинади.* Жумладан, $180°$ ли бурчакнинг радиан ўлчови π га, тўғри бурчакнинг радиан ўлчови $\frac{\pi}{2}$ га тенг.

Бурчакларнинг радиан ўлчови бирлиги *радиандир.* Бир радианли бурчак — ёйининг узунлиги радиусига тенг бурчакдир. Бир радианли бурчакнинг градус ўлчови $\frac{180°}{\pi} \approx 57°$ га тенг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Синиқ чизиқ деб нимага айтилади, унинг узунлиги нима?
2. Синиқ чизиқнинг узунлиги унинг охирларини туташтирувчи кесма узунлигидан кичик эмаслигини исботланг.
3. Кўпбурчак нима, қавариқ кўпбурчак нима?
4. Қавариқ кўпбурчакнинг берилган учидаги бурчаги нима?
5. Қавариқ кўпбурчакнинг ташқи бурчаги нима?
6. Қавариқ кўпбурчак бурчаклари йиғиндиси учун формула чиқаринг.
7. Қавариқ кўпбурчак айланага ички чизилган ҳам, ташқи чизилган ҳам бўлиши мумкинлигини исботланг.
8. Мунтазам n бурчакка ташқи чизилган ва ички чизилган айланалар радиуслари учун формулалар чиқаринг.
9. Мунтазам учбурчакка, квадратга, мунтазам олтибурчакка ички ва ташқи чизилган айланаларнинг радиусларини топинг.

10. Айлана узунлигининг диаметрига нисбати айланага боғлиқ эмаслигини, яъни ҳамма айланалар учун бир хил эканини исботланг.
11. Айлана узунлиги қандай формула бўйича ҳисобланади?
12. Ясси бурчак нима?
13. Марказий бурчак нима?
14. Айлананинг берилган марказий бурчакка мос келувчи ёйи нима?
15. Айлана ёйининг узунлиги қандай формула бўйича ҳисобланади?
16. Бурчакнинг радиан ўлчови нима?
17. 180° ва 90° ли бурчакларнинг радиан ўлчови нимага тенг?

МАШҚЛАР

1. Радиуслари R_1, R_2 бўлган иккита айлана ва улар марказлари орасидаги масофа $d > R_1 + R_2$ экани маълум. Шу айланаларнинг X, Y нуқталари орасидаги энг катта ва энг кичик масофалар нимага тенг?
2. 1-масалани $d < R_1 - R_2$ шартда ечинг.
3. Синиқ чизиқнинг учлари бир тўғри чизиқда ётмаса, у ҳолда синиқ чизиқнинг узунлиги унинг охирларини туташтирувчи кесма узунлигидан катта эканини исботланг.
4. Ёпиқ синиқ чизиқнинг ҳар қандай икки учи орасидаги масофа синиқ чизиқ узунлигининг ярмидан катта эмаслигини исботланг.
5. Ёпиқ синиқ чизиқнинг ҳар бир бўғини узунлиги қолган бўғинлар узунликлари йиғиндисидан катта эмаслигини исботланг.
6. Ёпиқ синиқ чизиқ 1 м, 2 м, 3 м, 4 м, 11 м узунликдаги бўғинларга эга бўлиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
7. Агар синиқ чизиқнинг охирлари берилган тўғри чизиқнинг турли томонларида ётса, синиқ чизиқ бу тўғри чизиқни кесиб ўтишини исботланг.
8. n бурчакнинг нечта диагонали бор?
9. Қавариқ n бурчакнинг ҳар бир учидан биттадан олинган ташқи бурчакларининг йиғиндиси нимага тенг?
10. Қавариқ тўртбурчакнинг бурчаклари 1, 2, 3, 4 сонларига пропорционал. Шу бурчакларни топинг.
11. Ички бурчакларининг ҳар бири: 1) 135°, 2) 150° га тенг бўлган мунтазам кўпбурчакнинг нечта томони бор?
12. Ташқи бурчагининг ҳар бири: 1) 36°, 2) 24° га тенг бўлган мунтазам кўпбурчакнинг нечта томони бор?
13. Мунтазам $2n$ бурчакнинг биттадан оралатиб олинган учлари бошқа мунтазам n бурчакнинг учлари бўлишини исботланг.
14. Мунтазам n бурчак томонларининг ўрталари бошқа мунтазам n бурчакнинг учлари бўлишини исботланг.
15. Томонлари бир хил бўлган n бурчакларнинг тенг бўлишини, яъни ҳаракат натижасида устма-уст тушишларини исботланг.
16. Мунтазам n бурчакларнинг ўхшаш эканини, яъни ўхшашлик алмаштириши натижасида бир-бирига ўтишини исботланг.
17. Радиусга перпендикуляр бўлиб, унинг ўртасидан ўтувчи ватар ички чизилган мунтазам учбурчакнинг томонига тенг эканини исботланг.

18. Мунтазам учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси ташқи чизилган айлана радиусидан икки марта кичик эканини исботланг.
19. Айланага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг томони a га тенг. Шу айланага ички чизилган квадрат томонини топинг.
20. Радиуси 4 дм бўлган айланага мунтазам учбурчак ички чизилган бўлиб, бу учбурчакнинг томонига квадрат яса ган. Квадратга ташқи чизилган айлана радиусини топинг.
21. Диаметри 4 см бўлган валикнинг охири квадрат шаклида қилиб арраланган. Квадратнинг томони энг кўпи билан неча сантиметр бўлиши мумкин?
22. Газ задвижкасининг охири мунтазам учёқлик шаклида. Винтнинг цилиндрик қисмининг диаметри 2 см га тенг бўлса, ҳар қайси ёқ энг кўпи билан неча сантиметрга тенг?
23. Мунтазам 8 бурчакнинг томони $a_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}}$ формула бўйича ҳисобланишини исботланг, бунда R — ташқи чизилган айлана радиуси.
24. Мунтазам 12 бурчакнинг томони $a_{12} = R\sqrt{2-\sqrt{3}}$ формула бўйича ҳисобланишини исботланг, бунда R — ташқи чизилган айлана радиуси.
25. Радиуси R га тенг айланага ички чизилган мунтазам беш бурчакнинг ва мунтазам 10 бурчакнинг томонларини топинг.
26. Мунтазам кўпбурчакнинг томони a га, ташқи чизилган айлана радиуси эса R га тенг. Ички чизилган айлана радиусини топинг.
27. Мунтазам кўпбурчакнинг томони a га, ички чизилган айлана радиуси эса r га тенг. Ташқи чизилган айлана радиусини топинг.
28. Ташқи чизилган мунтазам кўпбурчакнинг b томонини айлананинг R радиуси ва томонларининг сони яна ўшанча бўлган ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг a томони орқали ифодаланг.
29. Ички чизилган мунтазам кўпбурчакнинг a томонини айлананинг R радиуси ва томонларининг сони яна ўшанча бўлган ташқи чизилган кўпбурчакнинг b томони орқали ифодаланг.
30. Айлана ичига мунтазам 12 бурчак чизинг.
31. Айлана ташқарисига мунтазам 8 бурчак чизинг.
32. Айлана радиуси: 1) 10 м; 2) 15 м га тенг бўлса, шу айлана узунлигини топинг.
33. Айлана радиуси 1 мм ўзгарса, унинг узунлиги қанчага ўзгаради?
34. Ички чизилган мунтазам 8 бурчак периметрининг диаметрга нисбатини топинг ва уни π нинг тақрибий қиймати билан таққосланг.
35. 34- масалани мунтазам 12 бурчак учун ечинг.
36. 1 метр экватор узунлигининг 40 миллиондан бир улушига тенг эканини ҳисобга олиб, Ер шарининг радиусини топинг.
37. Ер шарининг радиуси 1 см узаядиган бўлса, Ер экватори қанча узайган бўлади?

38. Радиуси R га тенг айлана ичига жойлашган n та тенг айланалар ўзаро уринади ва берилган айланага ҳам уринишади. Агар айланаларнинг сони n: 1) 3; 2) 4; 3) 6 га тенг бўлса, шу айланаларнинг радиусларини топинг.

39. Олдинги масалани айланалар берилган айланадан ташқарида ётган ҳол учун ечинг.

40. Шкивнинг диаметри 1,4 м бўлиб, у минутига 80 марта айланади. Шкив айланасидаги нуқтанинг тезлигини топинг.

41. Қуйидагиларни билган ҳолда тўлдирувчи бурчакларни топинг: 1) тўлдирувчи бурчаклардан бири иккинчисидан 5 марта катта; 2) бири иккинчисидан 100°катта; 3) уларнинг айирмаси 20°га тенг.

42. Марказий бурчакка мос келувчи ёй айлананинг: 1) $\frac{1}{3}$; 2) $\frac{1}{4}$; 3) $\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{6}$; 5) $\frac{2}{3}$; 6) $\frac{3}{4}$ қисмига тенг бўлса, шу марказий бурчак неча градусга тенг?

43. Ер сиртининг ораларидаги масофа 1 км га тенг иккита нуқтасига ўтказилган Ер радиуслари қандай бурчак ташкил қилади? Ер радиуси 6370 км га тенг.

44. Берилган $R = 1$ м радиус бўйича: 1) 45°; 2) 30°; 3) 120°; 4) 45°45′; 5) 60°30′; 6) 150°36′ га тенг марказий бурчакка мос келувчи ёй узунлигини топинг.

45. Берилган a ватар бўйича унинг: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120° га тенг марказий бурчакларга мос келадиган ёй узунлигини топинг.

46. Агар ёй: 1) 60°; 2) 90°; 3) 120° га тенг бўлса, унинг l узунлиги бўйича ватарини топинг.

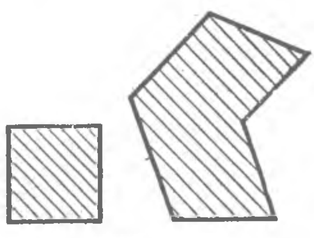
47. Қуйидаги бурчакларнинг радиан ўлчовларини топинг: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60°.

13- §. ФИГУРАЛАРНИНГ ЮЗЛАРИ

ЮЗ ТУШУНЧАСИ

Фигуралар юзларини аниқлаш масаласи жуда қадим замонларга бориб тақалади. Бу масалани одамларнинг амалий фаолияти тақозо қилган.

Бири квадрат шаклида, иккинчиси хоҳланган шаклдаги иккита ер участкасини тасаввур қилайлик (195- расм). Иккала участкага экин экилган, масалан, буғдой сепилган бўлсин. Дон сепиб бўлинганидан кейин биринчи участкага m кг, иккинчи участкага n кг дон сепилгани маълум бўлди, дейлик. Иккинчи участка биринчи участкадан $\frac{n}{m}$ марта катта деб ҳисоблаш табиий. Иккинчи участка биринчи участкадан қанча марта катта эканини кўрсатувчи сонни иккинчи



195- расм.

участканинг юзи деб атаймиз. Бунда биринчи участка ўлчов бирлигидир. Юз тушунчасининг бу таърифидан унинг қуйидаги хоссалари келиб чиқади.

Биринчидан, ҳар бир участкага сепиш учун маълум миқдорда дон талаб қилинади, шу сабабли ҳар қайси участка маълум юзга эга.

Иккинчидан, тенг участкаларга сепиш учун тенг миқдорда дон талаб қилинади, шу сабабли тенг участкалар тенг юзларга эга бўлади.

Учинчидан, берилган участкани икки бўлакка бўлинса, бутун участкага сепиладиган дон миқдори унинг бўлакларига сепиладиган донлар миқдори йиғиндисига тенг бўлади. Шу сабабли бутун участканинг юзи унинг бўлаклари юзлари йиғиндисига тенг.

Берган таърифимизга кўра, участканинг юзини билиш учун унга экин экиш (дон сепиш) керак. Аммо турмушда худди шунга тескари масалани ҳал қилишга тўғри келади. Дон сепишдан олдин сепиш учун қанча миқдорда дон кетишини аниқлаш талаб қилинади. Агар биз участка юзини билганимизда эди, у ҳолда юз бирлигига сепиш учун керак дон миқдорини участка юзига кўпайтириб, зарур бўлган дон миқдорини топган бўлар эдик. Участка юзини қандай билиш мумкин?

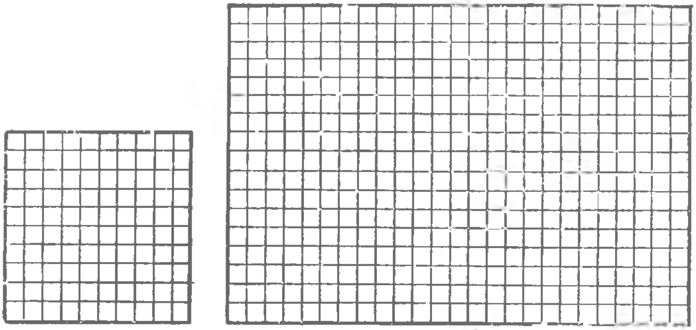
Ҳозир биз содда соҳалар юзларини ҳисоблаш формулаларини топамиз ва шу билан биз юзнинг юқорида айтилган учта хоссаси уни тўла аниқлашини исботлаймиз. Учбурчакнинг, параллелограммнинг, трапециянинг ва умуман кўпбурчакнинг юзи ҳақида гапирар эканмиз, улар ўраб олган соҳаларнинг, яъни уларга мос ясси кўпбурчакларнинг юзларини назарда тутамиз. Агар соҳа чекли сондаги учбурчакларга ажраладиган бўлса, уни *содда соҳа* деймиз. Бунда учбурчак дейилганда у чегаралайдиган соҳа тушунилади.

ТЎҒРИ ТЎРТБУРЧАКНИНГ ЮЗИ

Тўғри тўртбурчакнинг юзини топамиз. 196-расмда юзларни ўлчаш бирлиги бўлган квадрат ва юзини ўлчаш талаб қилинган тўғри тўртбурчак тасвирланган. Квадратнинг томони узунлик бирлиги бўлиб хизмат қилади.

Олдин тўғри тўртбурчак томонларининг a ва b узунликлари чекли ўнли касрлар билан ифодаланадиган ва вергулдан кейинги каср хоналари n дан ошмаган ҳолни қараймиз.

Квадратнинг томонини 10^n та тенг бўлакка бўламиз ва бўлиниш нуқталаридан унинг томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Натижада бу квадрат $10^n \cdot 10^n$ та кичик квадратга бўлиниб кетади. Расмда квадратнинг томони 10 та тенг бўлакка бўлинган. Кичик квадратлар сони $10 \cdot 10 = 100$ та.



196- расм.

Кичик квадрат юзини топамиз. Юзнинг хоссасига кўра катта квадратнинг юзи кичик квадратлар юзларининг йиғиндисига тенг. Катта квадратнинг юзи бирга тенг ва кичик квадратлар сони 10^{2n} талиги учун кичик квадратнинг юзи $\frac{1}{10^{2n}}$ га тенг.

$a: \frac{1}{10^n} = a \cdot 10^n$ ва $b: \frac{1}{10^n} = b \cdot 10^n$ сонлар бутун сонлар бўлгани учун тўғри тўртбурчакнинг томонларини $\frac{1}{10^n}$ га тенг ва миқдори бутун сонлар билан ифодаланадиган бўлакларга бўлиб юбориш мумкин. Айтилган қисмлар a томонда $a \cdot 10^n$ та, b томонда эса $b \cdot 10^n$ та дир. Томонлардаги бўлиниш нуқталаридан тўғри тўртбурчакнинг томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бунинг натижасида биз тўғри тўртбурчакни томони $\frac{1}{10^n}$ га тенг кичик квадратларга ажратган бўламиз. Уларнинг сони $a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n$ та бўлади. Тўғри тўртбурчакнинг юзи ундаги кичик квадратлар юзлари йиғиндисига тенг. Кичик квадратнинг юзи $\frac{1}{10^{2n}}$ га тенг, кичик квадратлар сони эса $ab \cdot 10^{2n}$ та эканлиги учун тўғри тўртбурчакнинг юзи $ab \cdot 10^{2n} \cdot \frac{1}{10^{2n}} = a \cdot b$ га тенгдир.

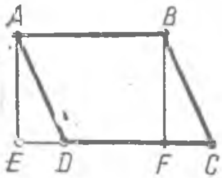
Энди тўғри тўртбурчакнинг a, b томонларидан ақалли биттаси чексиз ўнли каср билан ифодаланадиган бўлсин. a сонининг n та каср хонасигача аниқликда ками ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматларини a_1, a_2 билан белгилаймиз. b сонининг шундай аниқликда олинган тақрибий қийматларини b_1, b_2 билан белгилаймиз. Томонлари a_1, b_1 га тенг тўғри тўртбурчакнинг юзи берилган тўғри тўртбурчак юзидан кичик, чунки уни берилган квадрат ичига жойлаштириш мумкин. Томонлари a_2, b_2 га тенг тўғри тўртбурчакнинг юзи берилган тўғри тўртбурчак юзидан катта, чунки берилган тўғри тўртбурчакни унинг ичига жойлаштириш мумкин. Исботланганига кўра томонлари a_1, b_1 га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзи a_1b_1 га, томонлари a_2, b_2 га тенг тўғри тўртбурчакнинг юзи a_2b_2 га тенг. Шундай қилиб, берилган тўғри тўртбурчакнинг юзи a_1b_1 ва a_2b_2 юзлар орасида ётади. Агар n етарлича катта бўлса, a_1b_1 ва a_2b_2 сонлар ab нинг олдиндан берилган ҳар қандай аниқликдаги тақрибий қийматини бергани учун $S = ab$ бўлади. Шундай қилиб, ***тўғри тўртбурчакнинг юзи***

$$S = a \cdot b$$

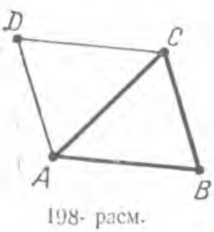
формула бўйича ҳисобланади.

СОДДА ФИГУРАЛАРНИНГ ЮЗЛАРИ

Параллелограммнинг юзини топамиз. $ABCD$ — берилган параллелограмм бўлсин (197- расм). Агар у тўғри тўртбурчак бўлмаса, унинг бурчакларидан бири, масалан, A ёки B ўткир бурчак бўлади. Аниқлик учун A бурчак, 197- расмда тасвирланганидек ўткир бурчак бўлсин. A учдан CD тўғри чизиққа AE перпендикуляр туширамиз. $ABCE$ трапециянинг юзи $ABCD$ параллелограмм юзи билан ADE учбурчак юзининг йиғиндисига тенг.



197- расм.



198- расм.

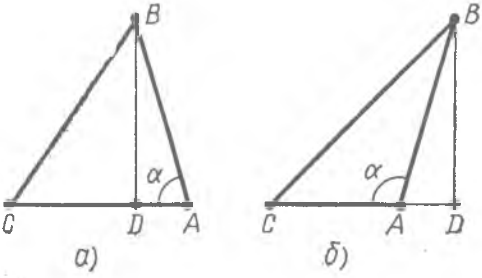
B учдан CD тўғри чизиққа BF перпендикуляр туширамиз. У ҳолда $ABCE$ трапециянинг юзи $ABFE$ тўғри тўртбурчак юзи билан BCF учбурчак юзи йиғиндисига тенг бўлади. Тўғри бурчакли ADE ва BCF учбурчаклар тенг, демак, уларнинг юзлари тенг. Бундан, $ABCD$ параллелограммнинг юзи $ABFE$ тўғри тўртбурчакнинг юзига, яъни $AB \cdot BF$ га тенг, деган натижа чиқади. BF кесмани тўғри тўртбурчакнинг AB ва CD томонларига мос келадиган *баландлиги* дейилади.

Шундай қилиб, ***параллелограммнинг юзи унинг томонини шу томонга туширилган баландлигига кўпайтирилганига тенг.***

Учбурчакнинг юзини топамиз. ABC — берилган учбурчак бўлсин (198- расм). Бу учбурчакни расмда кўрсатилганидек $ABCD$ параллелограммга тўлдирамиз. Параллелограммнинг юзи ABC ва CDA учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг. Бу учбурчаклар тенг бўлгани учун параллелограммнинг юзи ABC учбурчак юзининг иккиланганига тенг. Параллелограммнинг AB томонига мос баландлиги ABC учбурчакнинг AB томонига ўтказилган баландлигига тенг.

Бундан, ***учбурчакнинг юзи унинг томони билан шу томонга туширилган баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенг*** деган хулоса чиқади.

Масала (26). ABC учбурчакнинг юзи учун чиқарилган $S = \frac{1}{2} AB \times \times AC \cdot \sin A$ формуланинг тўғрилигини исботланг.



199-расм.

Ечилиши. ABC учбурчакнинг BD баландлигини ўтказамиз (199-расм). $S = \frac{1}{2} AC \cdot BD$ га эгамиз. ABD тўғри бурчакли учбурчакдан, агар α ўткир бурчак бўлса (199-*а* расм), $BD = AB \cdot \sin\alpha$, агар α бурчак ўтмас бурчак бўлса (199-*б* расм), $BD = AB \sin(180° - \alpha)$. $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$ бўлгани учун ҳар қандай ҳолда $BD = AB \sin\alpha$. Демак, учбурчакнинг юзи $S = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin A$ дан иборат.

Масала (33). Учбурчакнинг юзи учун Герон* формуласини чиқаринг:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

бунда a, b, c — учбурчак томонларининг узунликлари, p эса ярим периметр.

Ечилиши. Ушбуга эгамиз:

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma,$$

бунда γ — учбурчакнинг c томони қаршисидаги бурчак. Косинуслар теоремасига кўра:

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma.$$

Бундан

$$\cos \gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab},$$

$$\sin^2 \gamma = 1 - \cos^2 \gamma = (1 - \cos \gamma)(1 + \cos \gamma) =$$

$$= \left(1 - \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right)\left(1 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) =$$

$$= \frac{2ab - a^2 - b^2 + c^2}{2ab} \cdot \frac{2ab + a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = \frac{c^2 - (a-b)^2}{2ab} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{2ab} =$$

* Герон Александрийский — янги эранинг I асрида яшаган қадимги грек олими.

$$= \frac{1}{4\, a^2 b^2}\,(c-a+b)\,(c+a-b)\,(a+b-c)\,(a+b+c).$$

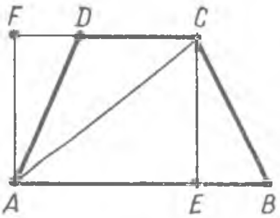
$(a+b+c)=2p,\ a+b-c=2p-2c,\ a+c-b=2p-2b,$ $c-a+b=2p-2a$ эканини билган ҳолда қуйидагига эга бўламиз:

$$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}.$$

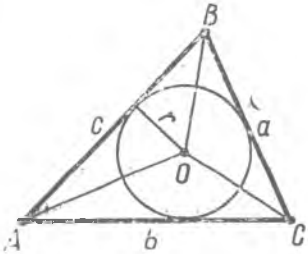
Шундай қилиб,

$$S=\frac{1}{2}\,ab\,\sin\gamma=\sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(b-c)}.$$

Трапеция юзини топамиз. $ABCD$ — берилган трапеция бўлсин (200-расм). Трапециянинг AC диагонали уни иккита учбурчакка ажратади: ABC ва CDA. Демак, трапециянинг юзи шу учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг. ABC учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}\,AB\cdot CE$ га, ACD учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}\,DC\cdot AF$ га тенг. Бу учбурчак-



200- расм.



201- расм.

ларнинг CE ва AF баландликлари AB ва CD параллел тўғри чизиқлар орасидаги масофага тенг. Бу масофа трапеция *баландлиги* дейилади.

Шундай қилиб, ***трапециянинг юзи унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлиги кўпайтмасига тенг.***

Масала (36). Учбурчакка ташқи чизилган ва ички чизилган айланаларнинг R ва r радиуслари учун қуйидаги формулаларни чиқаринг:

$$R=\frac{abc}{4S},\qquad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

бунда a, b, c — учбурчакнинг томонлари, S эса унинг юзи.

Ечилиши. R учун формула чиқарамиз. Биз биламизки, $R=\frac{a}{2\sin\alpha}$, бунда α — учбурчакнинг a томони қаршисидаги бурчак (11-§ нинг 11- масаласи).

Ўғ қисмнинг сурат ва махражини bc га кўпайтириб ҳамда $\frac{1}{2}\ bc\ \sin\alpha = S$ эканини ҳисобга олиб, $R = \frac{abc}{4S}$ эканини топамиз.

r учун формула чиқарамиз (201-расм). ABC учбурчакнинг юзи OAB, OBC ва OCA учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг:

$$S = \frac{1}{2}\ cr + \frac{1}{2}\ ar + \frac{1}{2}\ br.$$

Бундан:

$$r = \frac{2S}{a + b = c}.$$

ЎХШАШ ФИГУРАЛАРНИНГ ЮЗЛАРИ

F_1 ва F_2 — иккита ўхшаш ва содда фигуралар бўлсин. Бу фигураларнинг юзлари қандай нисбатда бўлишини аниқлаймиз. Фигураларнинг ўхшашлиги учун F_1 фигурани F_2 фигурага ўтказадиган ўхшашлик алмаштириши мавжуд.

F_1 фигурани $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$, ... учбурчакларга бўлиб чиқамиз. F_1 фигурани F_2 фигурага ўтказувчи ўхшашлик алмаштириши бу учбурчакларни F_2 фигура бўлинишидан ҳосил қилинган $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, $\triangle_3''$, ... учбурчакларга ўтказади.] F_1 фигуранинг юзи $\triangle_1'$, $\triangle_2'$, $\triangle_3'$, ... учбурчаклар юзлари йиғиндисига, F_2 фигуранинг юзи эса $\triangle_1''$, $\triangle_2''$, $\triangle_3''$, ... учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг.

Ўхшашлик коэффициенти k га тенг бўлса, $\triangle_n''$ учбурчакнинг ўлчамлари $\triangle_n'$ учбурчакнинг тегишли ўлчамларидан k марта катта бўлади. Жумладан $\triangle_n''$ учбурчакнинг томонлари ва баландликлари $\triangle_n'$ учбурчакнинг тегишли томонлари ва баландликларидан k марта катта. Бундан:

$$S\ (\triangle_n'') = k^2\ S\ (\triangle_n').$$

Бу тенгликларни ҳадлаб қўшиб топамиз:

$$S\ (F_2) = k^2\, S\ (F_1).$$

Ўхшашликнинг k коэффициенти F_2, F_1 фигураларнинг мос чизиқли ўлчамлари нисбатига тенг. Шунинг учун ***ўхшаш фигуралар юзларининг нисбати уларнинг мос чизиқли ўлчамлари квадратларининг нисбатига тенг.***

ДОИРАНИНГ ЮЗИ

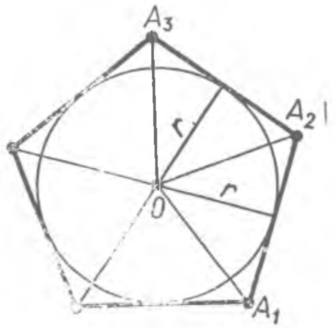
Доира деб текисликнинг берилган нуқтасидан берилган масофадан катта бўлмаган масофадаги барча нуқталаридан иборат фигурага айтилади. Бу нуқта *доиранинг маркази* дейилади, берилган масофа эса *доиранинг радиуси* дейилади. Доиранинг чегараси айланадан иборат бўлиб, бу айлананинг маркази ва радиуси доиранинг маркази ва радиусидир. Доиранинг юзи учун формулани топамиз.

Энг олдин *доирага ташқи чизилган қавариқ кўпбурчакнинг юзи*

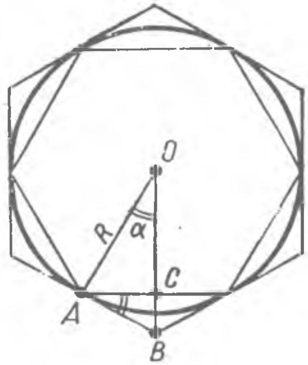
$$S = \frac{pr}{2}$$

формула бўйича ҳисобланишини исботлаймиз, бунда p — периметр, яъни кўпбурчак томонлари узунликларининг йиғиндиси, r эса доиранинг радиуси.

Доира марказини кўпбурчак учлари билан туташтирувчи кесмалар ўтказамиз (202-расм). Бу кесмалар берилган кўпбурчакни



202- расм.



203- расм.

A_1OA_2, A_2OA_3, ... учбурчакларга ажратади. Кўпбурчакнинг юзи учбурчак юзларининг йиғиндисига тенг. Учбурчакларнинг юзлари қуйидагиларга тенг:

$$S\ (A_1OA_2) = \frac{1}{2}\ A_1A_2 \cdot r,\ S\ (A_2OA_3) = \frac{1}{2}\ A_2A_3 \cdot r,\ \ldots .$$

Учбурчакларнинг юзларини қўшиб, кўпбурчакнинг юзини топамиз:

$$S = \frac{1}{2}\ A_1A_2 \cdot r + \frac{1}{2}\ A_2A_3 \cdot r + \ldots = \frac{1}{2}\ (A_1A_2 + A_2A_3 + \ldots)r.$$

Қавслар ичидаги сон кўпбурчакнинг периметридир. Формула исботланди.

Энди R радиусли доиранинг S юзини топамиз. Доира ташқарисига мунтазам n бурчак P_1 ни чизамиз ва доира ичига мунтазам n бурчак P_2 ни чизамиз (203-расм). P_1 кўпбурчак доирани ўз ичига олади, демак, унинг юзи доира юзидан катта. P_2 кўпбурчак доира ичида ётади, шу сабабли унинг юзи доира юзидан кичик. P_1 ва P_2 кўпбурчакларнинг юзлари қуйидагига тенг:

$$S_1 = \frac{1}{2}\ p_1R,\ S_2 = \frac{1}{2}\ p_2r,$$

бунда r сон P_2 кўпбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси, p_1 ва p_2 — P_1 ва P_2 кўпбурчакларнинг периметрлари.

b ва a кесмалар P_1 ва P_2 кўпбурчакларнинг томонлари бўлсин. ABC учбурчакдан (203-расм):

$$AB = \frac{AC}{\cos\alpha} \text{ ёки } \frac{b}{2} = \frac{\frac{a}{2}}{\cos\alpha}, \text{ бунда } \alpha = \angle BAC = \frac{180^\circ}{n}.$$

Бундан $nb = \frac{n \cdot a}{\cos\alpha}$, яъни $p_1 = \frac{p_2}{\cos\alpha}$. OAC учбурчакдан: $r = OC = R\cos\alpha$. Энди:

$$S_1 = \frac{1}{2} p_2 \frac{R}{\cos\alpha}, \quad S_2 = \frac{1}{2} p_2 R\cos\alpha.$$

Етарлича катта n учун p_2 периметр доира айланаси узунлигидан хоҳлаганча кам фарқ қилади, $\cos\alpha$ эса 1 дан хоҳлаганча кам фарқ қилади, чунки α бурчак ҳам жуда кичик. Демак, S_1 $\frac{lR}{2}$ дан жуда кам фарқ қилади, бунда l — доира айланасининг узунлиги. Шу мулоҳазаларга биноан S_2 ҳам $\frac{lR}{2}$ дан жуда кам фарқ қилади. Доиранинг S юзи S_1 ва S_2 лар орасида ётади, шу сабабли у ҳам $\frac{lR}{2}$ дан жуда кам фарқ қилади. Бу эса фақат $S = \frac{lR}{2}$ тенглик ўринли бўлган ҳолда юз бериши мумкин.

Шундай қилиб, ***доиранинг юзи***

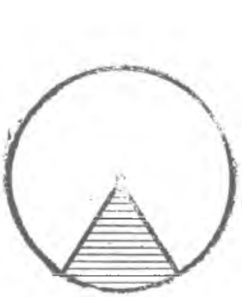
$$S = \frac{lR}{2} = \pi R^2$$

формула бўйича ҳисобланади.

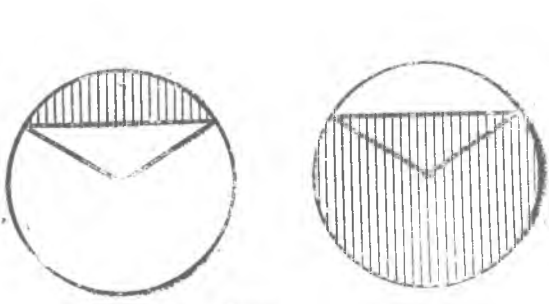
Доиравий сектор деб доиранинг мос марказий бурчаги ичидаги қисмига айтилади (204-расм).

Доиравий секторнинг юзи

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha$$



204-расм.



205-расм.

формула бўйича ҳисобланади, бунда R — доира радиуси, α эса мос марказий бурчакнинг градус ўлчови.

Доира билан ярим текисликнинг умумий қисми *доиравий сегмент* дейилади (205-расм). ***Ярим доирага тенг бўлмаган сегментнинг юзи***

$$S = \frac{\pi R^2}{360}\alpha \pm S_\Delta$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда α — шу доиравий сегмент ёйини ўз ичига олган марказий бурчакнинг градус ўлчови, S_Δ эса учлари доира маркази билан тегишли секторни чегараловчи радиуслар охирларидан иборат учбурчакнинг юзи. « — » ишорани $\alpha < 180°$ бўлганда, « + » ишорани $\alpha > 180°$ бўлганда олиш керак.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Фигура юзининг хоссаларини ифодаланг.
2. Томонлари a, b га тенг тўғри тўртбурчакнинг юзи ab га тенг эканини исботланг.
3. Параллелограммнинг юзи унинг томонини шу томонга туширилган баландлиги билан кўпайтмасига тенглигини исботланг.
4. Учбурчакнинг юзи унинг томони билан шу томонга туширилган баландлиги кўпайтмасининг ярмига тенглигини исботланг.
5. Трапециянинг юзи унинг асослари йиғиндисининг ярми билан баландлиги кўпайтмасига тенг эканини исботланг.
6. Ташқи чизилган қавариқ кўпбурчакнинг юзи унинг ярим периметри билан доира радиуси кўпайтмасига тенглигини исботланг.
7. Ўхшаш фигураларнинг юзлари нисбати нимага тенг?
8. Доира юзининг формуласини чиқаринг.
9. Доиравий секторнинг ва доиравий сегментнинг юзлари қандай формулалар бўйича ҳисобланади?

МАШҚЛАР

1. Тўғри бурчакли учбурчак катетларига ясалган квадратлар юзлари йиғиндиси гипотенузасига ясалган квадрат юзига тенг эканини исботланг.
2. Квадрат шаклидаги иккита ер участкасининг томонлари 100 м ва 150 м. Уларга тенгдош квадратнинг томонини топинг.
3. Квадратнинг берилган a диагоналига кўра унинг S юзини топинг.
4. Айлана ташқарисига чизилган квадратнинг юзи шу айлана ичига чизилган квадрат юзидан неча марта катта?
5. Квадратнинг ҳар қайси томони 3 марта катталаштирилса, унинг юзи қандай ўзгаради?
6. Квадратнинг юзи 25 марта камайиши учун унинг томонини неча марта кичрайтириш керак?

7. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари 4:9 га тенг нисбатда бўлиб, унинг юзи 144 $м^2$ бўлса, томонлари нимага тенг?
8. Тўғри тўртбурчакнинг периметри 74 дм, юзи эса 3 $м^2$ бўлса, унинг томонлари нимага тенг?
9. Параллелограмм ва тўғри тўртбурчакнинг томонлари бир хил. Параллелограммнинг юзи тўғри тўртбурчак юзининг ярмига тенг бўлса, параллелограммнинг ўткир бурчагини топинг.
10. Квадрат ва ромбнинг периметрлари бир хил. Бу фигуралардан қайсинисининг юзи катта? Жавобингизни тушунтиринг.
11. Баландлиги 10 см, ўткир бурчаги эса 30° га тенг бўлган ромбнинг юзини топинг.
12. Баландлиги 12 см, кичик диагонали эса 13 см бўлган ромбнинг юзини топинг.
13. Ромбнинг юзи унинг диагоналлари кўпайтмасининг ярмига тенглигини исботланг.
14. Ромб диагоналларининг нисбати 1:2 га тенг, унинг юзи эса 12 $см^2$. Ромбнинг томонини топинг.
15. Қавариқ тўртбурчакнинг диагоналлари перпендикуляр бўлса, унинг юзи диагоналлар кўпайтмасининг ярмига тенглигини исботланг.
16. Берилган учбурчакни унинг битта учидан ўтувчи тўғри чизиқлар ёрдамида учта тенгдош қисмга бўлинг.
17. Олдинги масалани учбурчак ўрнига параллелограмм олиб ечинг.
18. Агар тенг ёнли учбурчакнинг асоси 120 м га, ён томони 100 м га тенг бўлса, унинг юзи нимага тенг?
19. Гипотенузаси a га тенг бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг юзини топинг.
20. Томонлари 8 см ва 4 см бўлган учбурчакнинг шу томонларига баландликлар ўтказилган. 8 см ли томонга ўтказилган баландлик 3 см га тенг. 4 см ли томонига ўтказилган баландлик нимага тенг?
21. Учбурчакнинг томонлари унинг баландликларига тескари пропорционал, яъни

$$a:b:c=\frac{1}{h_a}:\frac{1}{h_b}:\frac{1}{h_c}$$

эканини исботланг.
22. Томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакнинг юзини топинг.
23. Радиуси R га тенг доирага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг юзини топинг.
24. Тўғри бурчакли учбурчакнинг баландлиги гипотенузасини 32 см ва 18 см ли кесмаларга бўлса, унинг юзи нимага тенг?
25. Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси 73 см га, юзи эса 1320 $см^2$ га тенг бўлса, унинг катетлари нимага тенг?
26. ABC учбурчакнинг юзи учун

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot AC\sin A$$

формула ўринли эканини исботланг:

27. ABC учбурчакда $AC=a$, $BC=b$. C бурчак қандай бўлганда учбурчакнинг юзи энг катта бўлади?

28. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонлари 1 м дан, улар орасидаги бурчак эса 70° га тенг. Шу тенг ёнли учбурчак юзини топинг.

29. Агар параллелограммнинг томонлари 2 м ва 3 м, бурчакларидан бири эса 70° га тенг бўлса, унинг юзини топинг.

30. Учбурчакнинг a томони ва унга ёпишган α ва β бурчаклари бўйича унинг юзини топинг.

31. Параллелограммнинг юзи диагоналларни улар орасидаги бурчак синусига кўпайтмасининг ярмига тенглигини исботланг.

32. Диагоналлари берилган барча параллелограммлар орасида ромб энг катта юзга эга эканини исботланг.

33. Учбурчакнинг юзи учун

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Герон формуласини чиқаринг, бунда a, b, c — учбурчак томонлари узунликлари, p эса ярим периметр.

34. Учта томонига кўра учбурчак юзини топинг: 1) 13, 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80; 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83.

35. Томонлари: 1) 13; 14, 15; 2) 5, 5, 6; 3) 17, 65, 80 га тенг учбурчакнинг энг кичик баландлигини топинг ва томонлари: 4) $\frac{25}{6}$, $\frac{29}{6}$, 6; 5) 13, $37\frac{12}{13}$, $47\frac{1}{13}$; 6) $2\frac{1}{12}$, $3\frac{44}{75}$, 1,83 га тенг учбурчакнинг энг катта баландлигини топинг.

36. Учбурчакка ташқи чизилган ва ички чизилган айланаларнинг R ва r радиуслари учун қуйидаги формулаларни чиқаринг:

$$R=\frac{abc}{4S},\quad r=\frac{2S}{a+b+c},$$

бунда a, b, c — учбурчакнинг томонлари, S эса унинг юзи.

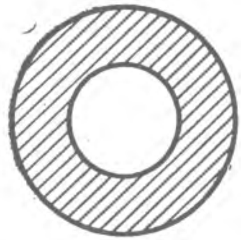
37. Томонлари: 1) 13, 14, 15; 2) 15, 13, 4; 3) 35, 29, 8; 4) 4, 5, 7 бўлган учбурчакларга ташқи ва ички чизилган айланаларнинг R ва r радиусларини топинг.

38. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони 6 см, баландлиги 4 см. Ташқи чизилган айлана радиусини топинг.

39. Тўғри бурчакли учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси катетлар йиғиндиси билан гипотенуза айирмасининг ярмига тенг эканини исботланг.

40. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 40 см ва 42 см. Ташқи ва ички чизилган айланалар радиусларини топинг.

41. Параллел томонлари 60 см ва 20 см, нопараллел томонлари 13 см ва 37 см бўлган трапециянинг юзини топинг.
42. Тенг ёнли трапециянинг катта асоси 44 м, ён томони 17 м ва диагонали 39 м. Шу трапеция юзини топинг.
43. Айлана узунлиги l га тенг бўлса, доира юзини топинг.
44. Марказлари умумий ва радиуслари: 1) 4 см ва 6 см; 2) 5,5 м ва 6,5 м; 3) a ва b $(a > b)$ га тенг иккита айлана орасидаги доиравий ҳалқа юзини топинг (206- расм).



206- расм.

45. Агар доира диаметри: 1) 2 марта; 2) 5 марта; 3) m марта катталаштирилса, унинг юзи неча марта ортади?
46. Доира юзининг унга ички чизилган: 1) квадрат; 2) мунтазам учбурчак; 3) мунтазам олтибурчак юзига нисбатини топинг.
47. Мунтазам учбурчакка ички чизилган доира юзининг шу учбурчакка ташқи чизилган доира юзига нисбатини топинг.
48. Квадратга ташқи чизилган доира юзининг шу квадратга ички чизилган доира юзига нисбатини топинг.
49. Агар R радиусли доиранинг секторига мос келувчи марказий бурчак: 1) 40°; 2) 90°; 3) 150°; 4) 240°; 5) 300°; 6) 330° га тенг бўлса, шу сектор юзини топинг.
50. R радиусли айлана берилган. Узунлиги: 1) R; 2) l бўлган ёйга мос келувчи сектор юзини топинг.
51. Асоси $a\sqrt{3}$ ва баландлиги $\frac{a}{2}$ бўлган доиравий сегмент юзини топинг.
52. Доиранинг шу доирага ички чизилган: 1) квадратдан; 2) мунтазам учбурчакдан; 3) мунтазам олтибурчакдан ташқаридаги қисмининг юзини топинг. Доира радиуси R га тенг.

9-синф

Стереометрия

14- §. СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРИ

Стереометрия — геометриянинг бир бўлими бўлиб, унда фазодаги фигуралар ўрганилади. Стереометрияда, планиметриядаги сингари, геометрик фигураларнинг хоссалари тегишли теоремаларни исботлаш йўли билан аниқланади. Бунда аксиомалар билан ифодаланувчи асосий геометрик фигураларнинг хоссалари асос бўлиб хизмат қилади. Фазода асосий фигуралар нуқта, тўғри чизиқ ва текисликдир. Янги геометрик образ — текисликнинг киритилиши аксиомалар системасини кенгайтиришга мажбур этади. Шу сабабдан биз аксиомаларнинг C группасини киритамиз, улар текисликларнинг фазодаги асосий хоссаларини ифодалайди. Бу группа қуйидаги учта аксиомадан иборат:

C_1. ***Текислик қандай бўлмасин, шу текисликка тегишли нуқталар ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.***

C_2. ***Агар иккита турли текислик умумий нуқтага эга бўлса, улар тўғри чизиқ бўйича кесишади.***

Бу аксиома иккита турли α ва β текислик умумий нуқтага эга бўлса, бу текисликлардан ҳар бирига тегишли c тўғри чизиқнинг мавжудлигини тасдиқлайди. Бунда, агар, бирор C нуқта иккала текисликка тегишли бўлса, у c тўғри чизиққа ҳам тегишли бўлади.

C_3. ***Агар иккита турли тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлса, улар орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.***

Бу эса иккита турли a, b тўғри чизиқлар умумий C нуқтага эга бўлса, бу тўғри чизиқларни ўз ичига олган γ текислик мавжуд, демакдир. Бундай хоссага эга текислик ягонадир.

Шундай қилиб, стереометриянинг аксиомалари системаси планиметрия аксиомаларидан ва аксиомаларнинг C группасидан иборат. Тушунтиришни осонлаштириш учун планиметриядаги биринчи группа аксиомаларни эслатиб ўтамиз:

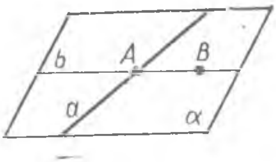
I_1. *Тўғри чизиқ қандай бўлмасин, бу тўғри чизиққа тегишли нуқталар ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.*

I_2. *Истаган икки нуқтадан тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.*

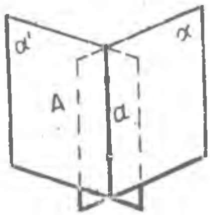
СТЕРЕОМЕТРИЯ АКСИОМАЛАРИНИНГ БАЪЗИ НАТИЖАЛАРИ

14.1-теорема. ***Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.***

Исбот. a — берилган тўғри чизиқ, B эса унда ётмаган нуқта бўлсин (207-расм). a тўғри чизиқда бирорта A нуқтани белгилаймиз. I_1 аксиомага кўра бундай нуқта мавжуд. A, B нуқталардан b тўғри чизиқ ўтказамиз (I_2 аксиома). a ва b тўғри чизиқлар тур-



207-расм.



208-расм.

лича, чунки b тўғри чизиқнинг B нуқтаси a тўғри чизиқда ётмайди. a ва b тўғри чизиқлар умумий A нуқтага эга. a, b тўғри чизиқлар орқали α текислик ўтказамиз (C_3 аксиома). Бу текислик a тўғри чизиқдан ва B нуқтадан ўтади.

Энди a тўғри чизиқдан ва B нуқтадан ўтувчи α текисликнинг ягона эканини исботлаймиз. Фараз қилайлик, α текисликдан фарқли, a тўғри чизиқ ва B нуқта орқали ўтувчи бошқа α' текислик мавжуд бўлсин. C_2 аксиомага кўра турли α ва α' текисликлар a тўғри чизиқ бўйича кесишади. Демак, α ва α' текисликларнинг истаган учта умумий нуқтаси a тўғри чизиқда ётади. Аммо α, α' текисликларнинг умумий B нуқтаси a тўғри чизиқда ётмайдиган қилиб олинган эди. Биз зидликка дуч келдик. Теорема тўла исботланди.

Масала (5). Тўртта нуқта битта текисликда ётмайди. Бу нуқталардан қандайдир учтаси бир тўғри чизиқда ётиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

Ечилиши. Фараз қилайлик, қандайдир уч нуқта бир тўғри чизиқда ётсин. Бу тўғри чизиқ ва тўртинчи нуқта орқали текислик ўтказамиз (14.1-теорема). Бу текисликда тўртала нуқта ҳам ётади. Бу эса масаланинг шартига зид. Демак, ҳеч қандай учта нуқта бир тўғри чизиқда ёта олмас экан.

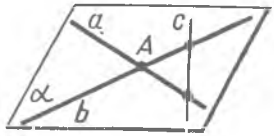
14.2-теорема. ***Тўғри чизиқнинг иккита нуқтаси текисликка тегишли бўлса, у ҳолда тўғри чизиқнинг ўзи ҳам текисликка тегишли бўлади.***

Исбот. a — берилган тўғри чизиқ ва α — берилган текислик бўлсин (208-расм). I_1 аксиомага кўра a тўғри чизиқда ётмайдиган A нуқта мавжуд. a тўғри чизиқ билан A нуқта орқали α' текисликни ўтказамиз. Агар α' текислик α текислик билан устма-уст тушса, у ҳолда α текислик a тўғри чизиқни ўз ичига олади, буни теорема тасдиқлайди. Лекин α' текислик α текисликдан фарқ қилса, бу текисликлар a тўғри чизиқнинг иккита нуқтасини ўз ичига олган a' тўғри чизиқ бўйича кесишади. I_2 аксиомага кўра a' тўғри чизиқ a тўғри чизиқ билан устма-уст тушади ва демак, a тўғри чизиқ α текисликда ётади. Теорема исботланди.

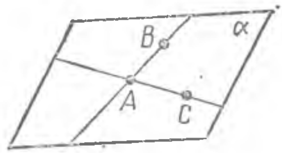
14.2-теоремадан шундай хулоса чиқади: ***текислик ва унда ётмайдиган тўғри чизиқ ё кесишмайди, ёки битта нуқтада кесишади.***

Масала (7). A нуқтада кесишувчи иккита турли чизиқ берилган. Берилган икки тўғри чизиқни кесиб ўтадиган ва A нуқтадан ўтмайдиган ҳамма тўғри чизиқларнинг битта текисликда ётишини исботланг.

Ечилиши. Берилган a, b тўғри чизиқлар орқали α текислик ўтказамиз (209-расм). Буни C_3 аксиомага асосан бажариш мумкин. Берилган тўғри чизиқларни кесувчи c тўғри чизиқ α текислик билан иккита M ва N умумий нуқтага эга (берилган тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталари, улар расмда кўрсатилмаган). 14.2-теоремага кўра бу тўғри чизиқ α текисликда ётиши керак.



209-расм.



210-расм.

14.3-теорема. ***Битта тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.***

Исбот. A, B, C — бир тўғри чизиқда ётмаган берилган учта нуқта бўлсин (210-расм). AB ва AC тўғри чизиқларни ўтказамиз; улар турли, чунки A, B, C нуқталар битта тўғри чизиқда ётмайди. C_3 аксиомага кўра AB ва AC тўғри чизиқлар орқали α текислик ўтказиш мумкин. Бу текислик A, B, C нуқталарни ўз ичига олади.

A, B, C нуқталардан ўтувчи α текисликнинг ягоналигини исботлаймиз. Ҳақиқатан, 14.2-теоремага кўра A, B, C нуқталардан ўтувчи текислик AB ва AC тўғри чизиқларни ўз ичига олади. C_3 аксиомага кўра эса бундай текислик ягонадир.

Масала (11). Агар учта нуқта бир тўғри чизиқда ётса, бу нуқталар орқали текислик ўтказиш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.

Ечилиши. A, B, C — a тўғри чизиқда ётган учта нуқта бўлсин. a тўғри чизиқда ётмайдиган D нуқтани оламиз (аксиома I_1). A, B, D нуқталар орқали текислик ўтказиш мумкин (14. 3-теорема). Бу текислик a тўғри чизиқнинг иккита A, B нуқтасини ўз ичига олади, демак, шу тўғри чизиқнинг C нуқтасини ҳам ўз ичига олади (14. 2-теорема). Демак, бир тўғри чизиқда ётган учта нуқта орқали ҳар доим текислик ўтказиш мумкин экан.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Стереометрия нима?
2. **С** группа аксиомаларини ифодаланг.
3. Тўғри чизиқ ва унда ётмайдиган нуқта орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.
4. Агар тўғри чизиқнинг икки нуқтаси текисликка тегишли бўлса, тўғри чизиқнинг ўзи ҳам текисликка бутунлай тегишли эканини исботланг.
5. Бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта нуқтадан битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.

МАШҚЛАР

1. A, B, C ва D нуқталар битта текисликда ётмайди. AB ва CD тўғри чизиқларнинг кесишмаслигини исботланг.
2. Берилган икки тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасидан бу тўғри чизиқлар билан бир текисликда ётмайдиган тўғри чизиқ ўтказиш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
3. A, B, C нуқталар иккита турли текисликнинг ҳар бирида ётади. Бу нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.
4. Жуфт-жуфти билан кесишувчи учта турли текислик берилган. Агар бу текисликларнинг кесишмасидаги иккита тўғри чизиқ кесишса, у ҳолда учинчи тўғри чизиқ уларнинг кесишиш нуқтасидан ўтишини исботланг.
5. Тўртта нуқта бир текисликда ётмайди. Улардан қандайдир учтаси бир тўғри чизиқда ётиши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
6. Кесишмайдиган иккита текислик берилган. Бу текисликлардан бирини кесувчи тўғри чизиқ иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.
7. A нуқтада кесишувчи иккита турли тўғри чизиқ берилган. Берилган икки тўғри чизиқни кесиб ўтадиган ва A нуқтадан ўтмайдиган ҳамма тўғри чизиқларнинг битта текисликда ётишини исботланг.
8. Берилган тўғри чизиқни кесиб ўтадиган ва тўғри чизиқдан ташқаридаги нуқтадан ўтадиган ҳамма тўғри чизиқларнинг битта текисликда ётишини исботланг.
9. Агар AB ва CD тўғри чизиқлар бир текисликда ётмаса, AC ва BD тўғри чизиқлар ҳам бир текисликда ётмайди. Шуни исботланг.
10. Бир текисликда ётмайдиган тўртта нуқта берилган. Бу нуқталарнинг учтасидан ўтувчи нечта турли текислик ўтказиш мумкин? Жавобингизни тушунтиринг.

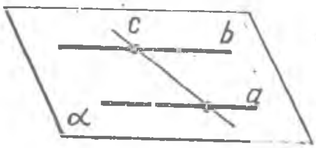
11. Бир тўғри чизиқда ётган учта нуқтадан текислик ўтказиш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
12. Бир тўғри чизиқда ётган учта нуқтадан иккита турли текислик ўтказиш мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
13. Тўртта нуқта берилган. Бу нуқталарнинг исталган иккитасидан ўтувчи тўғри чизиқнинг қолган иккита нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ билан кесишмаслиги маълум. Берилган тўртта нуқтанинг бир текисликда ётмаслигини исботланг.

15- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ПАРАЛЛЕЛЛИГИ

ФАЗОДА ПАРАЛЛЕЛ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР

Фазодаги икки тўғри чизиқ бир текисликда ётса ва кесишмаса, улар *параллел тўғри чизиқлар* дейилади. Кесишмайдиган ва бир текисликда ётмайдиган тўғри чизиқлар *айқаш тўғри чизиқлар* дейилади.

Масала (1). Берилган икки параллел тўғри чизиқни кесиб ўтадиган ҳамма тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётишини исботланг.



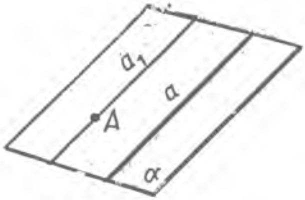
211-расм.

Ечилиши. Берилган a, b тўғри чизиқлар параллел бўлгани учун улар орқали текислик ўтказиш мумкин (211-расм). Уни α билан белгилаймиз. Берилган параллел тўғри чизиқларни кесиб ўтувчи c тўғри чизиқ α текислик билан иккита умумий нуқтага эга, улар — берилган тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталари. 14. 2-теоремага кўра бу тўғри чизиқ α текисликда ётади. Шундай қилиб, берилган иккита параллел тўғри чизиқни кесиб ўтувчи ҳамма тўғри чизиқлар битта текисликда — α текисликда ётади.

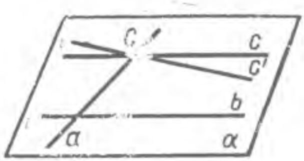
15.1-теорема. ***Тўғри чизиқдан ташқаридаги нуқтадан шу тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказиш мумкин ва фақат битта.***

Исбот. a — берилган тўғри чизиқ ва A — бу тўғри чизиқда ётмаган нуқта бўлсин (212-расм). a тўғри чизиқ ва A нуқта орқали α текисликни ўтказамиз. α текисликда A нуқтадан a тўғри чизиққа параллел a_1 тўғри чизиқни ўтказамиз. a га параллел бўлган a_1 тўғри чизиқнинг ягона эканини исботлаймиз.

Фараз қилайлик, A нуқтадан ўтадиган ва a тўғри чизиққа параллел бошқа a_2 тўғри чизиқ мавжуд бўлсин. a, a_2 тўғри чизиқлар орқали α_2 текислик ўтказиш мумкин. α_2 текислик a тўғри чизиқ ва A нуқта орқали ўтади; демак, 14.1-теоремага кўра у α текислик билан устма-уст тушади. Энди параллел тўғри чизиқлар аксиомаси бўйича a_1, a_2 тўғри чизиқлар устма-уст тушади. Теорема исботланди.



212- расм.



213- расм.

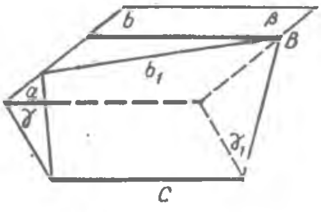
Масала (2). a, b тўғри чизиқлар кесишади. b тўғри чизиққа параллел ва a тўғри чизиқни кесиб ўтадиган ҳамма тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётишини исботланг.

Ечилиши. c тўғри чизиқ b тўғри чизиққа параллел ва a тўғри чизиқни кесиб ўтувчи бўлсин (213- расм). a ва b тўғри чизиқлардан α текислик ўтказамиз. a ва c тўғри чизиқларнинг α текислигида кесишган C нуқтаси орқали b га параллел c' тўғри чизиқни ўтказамиз. 15.1- теоремага кўра C нуқта орқали b тўғри чизиққа параллел қилиб фақат битта тўғри чизиқни ўтказиш мумкин. Бундан c тўғри чизиқ c' тўғри чизиқ билан устма-уст тушади ва демак, α текисликда ётади деган натижа чиқади. Шундай қилиб, b га параллел ва a тўғри чизиқни кесиб ўтадиган истаган c тўғри чизиқ α текисликда ётади. Шуни исбот қилиш талаб қилинган эди.

15.2- теорема. ***Учинчи тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқ параллелдир.***

Исбот. b, c тўғри чизиқлар a тўғри чизиққа параллел бўлсин. b, c тўғри чизиқларнинг параллел эканини исботлаймиз.

a, b, c тўғри чизиқлар бир текисликда ётган ҳол планиметрия курсида қараб ўтилган эди. Гунинг учун берилган тўғри чизиқлар бир текисликда ётмайди деб фараз қиламиз. β — a, b тўғри чизиқлар ётган текислик, γ эса a, c тўғри чизиқлар ётган текислик бўлсин. β ва γ текисликлар турли, яъни устма-уст тушмайди (214- расм). b тўғри чизиқда бирор B нуқтани белгилаб, c тўғри чизиқ билан B нуқта орқали γ_1 текисликни ўтказамиз. У β текисликни b_1 тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади.

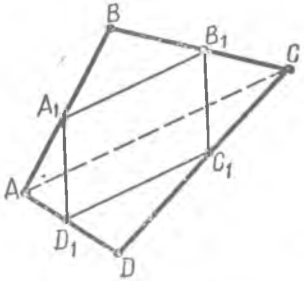


214- расм.

b_1 тўғри чизиқ γ текисликни кесиб ўтмайди. Ҳақиқатан, агар кесиб ўтганда эди, кесишиш нуқтаси a тўғри чизиққа тегишли бўлиши керак эди, чунки b_1 тўғри чизиқ β текисликда ётади. Иккинчи томондан, у c тўғри чизиқда ҳам ётиши керак эди, чунки b_1 тўғри чизиқ γ_1 текисликда ётади. Аммо a, c тўғри чизиқлар параллел бўлгани учун кесишмайди.

b_1 тўғри чизиқ β текисликда ётгани учун ва a тўғри чизиқни кесиб ўтмагани учун у a га параллел, демак, параллел тўғри чизиқлар аксиомасига кўра b билан устма-уст тушади. Шундай қилиб, b тўғри чизиқ b_1 тўғри чизиқ билан устма-уст туша туриб, c тўғри чизиқ билан бир текисликда ётади (γ_1 текисликда) ва уни кесиб ўтмайди. Демак, b, c тўғри чизиқлар параллел. Теорема исботланди.

Масала (10). Фазовий тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари эканлигини исботланг.



215- расм.

Ечилиши. $ABCD$ — берилган фазовий тўртбурчак бўлсин (тўртбурчакнинг учлари бир текисликда ётмайди) (215-расм). Айтайлик, A_1, B_1, C_1, D_1 — тўртбурчак томонларининг ўрталари бўлсин. У ҳолда A_1B_1 — ABC учбурчакнинг AC томонига параллел ўрта чизиғи, C_1D_1 — ACD учбурчакнинг AC томонига параллел ўрта чизиғи бўлади. 15.2-теоремага кўра A_1B_1 ва C_1D_1 тўғри чизиқлар параллел ва демак, бир текисликда ётади. A_1D_1, B_1C_1 тўғри чизиқларнинг параллеллиги ҳам худди шундай исботланади. Шундай қилиб, $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчак бир текисликда ётади ва унинг қарама-қарши томонлари параллел. Демак, у — параллелограмм.

ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН ТЕКИСЛИКНИНГ ПАРАЛЛЕЛЛИГИ

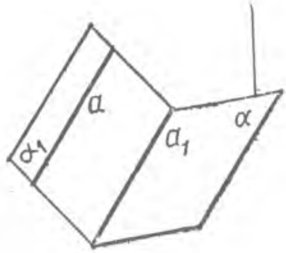
Агар тўғри чизиқ билан текислик кесишмаса, улар *параллел* дейилади.

15.3-теорема. ***Агар текисликда ётмаган тўғри чизиқ шу текисликдаги бирор тўғри чизиққа параллел бўлса, у ҳолда у текисликнинг ўзига ҳам параллел бўлади.***

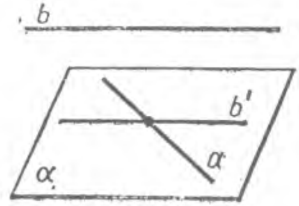
Исбот. α — текислик, a — унда ётмаган тўғри чизиқ ва a_1 эса α текисликда ётган ва a га параллел тўғри чизиқ бўлсин. a ва a_1 тўғри чизиқлар орқали α_1 текисликни ўтказамиз (216-расм). У α дан фарқли, чунки a тўғри чизиқ α текисликда ётмайди. α ва α_1 текисликлар a_1 тўғри чизиқ бўйича кесишади. Агар a тўғри чизиқ α текисликни кесиб ўтганида эди, у ҳолда кесишиш нуқтаси a_1 тўғри чизиққа тегишли бўлар эди. Аммо бу ҳол юз бериши мумкин эмас, чунки a, a_1 тўғри чизиқлар параллел. Шундай қилиб, a тўғри чизиқ α текисликни кесиб ўтмайди, демак, α текисликка параллел. Теорема исботланди.

Масала (16). Иккита айқаш тўғри чизиқнинг исталган биридан иккинчисига параллел текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.

Ечилиши. a, b — иккита айқаш тўғри чизиқ бўлсин (217-расм). a тўғри чизиқда истаган бир нуқта оламиз ва ундан b тўғри чизиққа параллел қилиб b' тўғри чизиқни ўтказамиз. a, b' тўғри чизиқлар орқали α текислик ўтказамиз. 15.3-теоремага кўра бу текислик b тўғри чизиққа параллел бўлади.



216- расм,



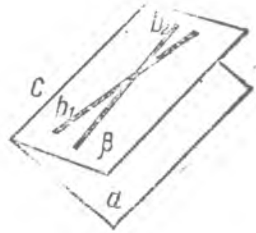
217 -расм,

ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ПАРАЛЛЕЛЛИГИ

Агар икки текислик кесишмаса, улар *параллел* дейилади.

15.4-теорема. ***Икки текисликдан бири иккинчи текисликда ётган кесишувчи иккита тўғри чизиққа параллел бўлса, бу икки текислик параллел бўлади.***

Исботи. α, β — берилган текисликлар ва b_1, b_2 эса β текисликда ётиб, α текисликка параллел бўлган иккита кесишувчи тўғри чизиқ бўлсин (218-расм). α ва β текисликлар турлича. Бу текисликлар бирор c тўғри чизиқ бўйича кесишади деб фараз қилайлик. b_1, b_2 тўғри чизиқлар α текисликни кесиб ўтмайди; демак, бу текисликдаги c тўғри чизиқни ҳам кесиб ўтмайди. Аммо параллел тўғри чизиқлар аксиомасига кўра бу аҳвол юз бериши мумкин эмас, чунки β текисликда ётган b_1, b_2 тўғри чизиқлар битта c тўғри чизиққа параллел. Биз зидликка дуч келдик. Теорема исботланди.



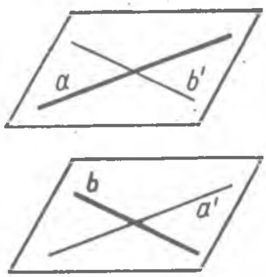
218-расм.

Масала (19). Иккита айқаш тўғри чизиқ берилган. Улар орқали қандай қилиб иккита параллел текислик ўтказиш мумкин?

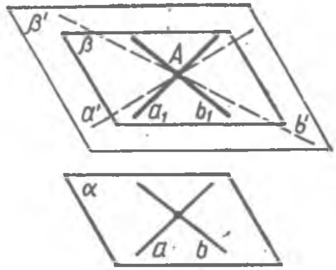
Ечилиши. a, b — берилган айқаш тўғри чизиқлар бўлсин (219-расм). a тўғри чизиқдаги ихтиёрий бир нуқтадан b тўғри чизиққа параллел b' тўғри чизиқни ўтқазамиз, b тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқтадан эса a тўғри чизиққа параллел a' тўғри чизиқни ўтказамиз. Шундан кейин иккита текислик ўтказамиз— биттасини a, b' тўғри чизиқлар орқали, иккинчисини b, a' тўғри чизиқлар орқали ўтказамиз. 15.4-теоремага кўра бу текисликлар параллел. Бу текисликлардан биринчисида a тўғри чизиқ ётади, иккинчисида b тўғри чизиқ ётади.

15.5-теорема. ***Текисликдан ташқаридаги нуқта орқали берилган текисликка параллел қилиб битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.***

Исботи. Берилган α текисликда кесишадиган қандайдир иккита a, b тўғри чизиқни ўтказамиз (220-расм). Берилган A нуқтадан уларга параллел a_1, b_1 тўғри чизиқлар ўтказамиз. a_1, b_1 тўғри чи-



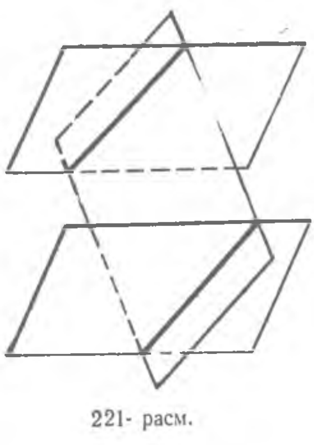
219- расм.



220- расм.

зиқлар орқали ўтадиған β текислик 15.4-теоремага кўра α текисликка параллел.

A нуқтадан α текисликка параллел бошқа β′ текислик ўтади деб фараз қилайлик. a, a_1 параллел тўғри чизиқлар текислиги β′ текисликни a' тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади. a' тўғри чизиқ a тўғри чизиқни кесиб ўтмайди, чунки у a тўғри чизиқни ўз ичига олган α текисликни кесиб ўтмайди. Шунинг учун a' тўғри чизиқ a тўғри чизиққа параллел ва демак, параллел тўғри чизиқлар аксиомасига кўра a_1 тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. b ва b_1 параллел тўғри чизиқлар текислиги β′ текисликни b' тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади. b' тўғри чизиқ b тўғри чизиқни кесиб ўтмайди. Шунинг учун b' тўғри чизиқ b тўғри чизиққа параллел, демак, b_1 тўғри чизиқ билан устма-уст тушади. C_3 аксиомага кўра a_1, b_1 тўғри чизиқлар орқали фақат битта текислик ўтказиш мумкин бўлгани учун β′ текислик β текислик билан устма-уст тушади. Биз зидликка дуч келдик. Теорема исботланди.



221- расм.

Масала (23). α, β текисликлар γ текисликка параллел. α ва β текисликларнинг кесишиши мумкинми?

Ечилиши. α, β текисликларнинг кесишиши мумкин эмас. Агар α ва β текисликлар умумий нуқтага эга бўлганда эди, у ҳолда бу нуқта орқали γ текисликка параллел иккита (α ва β) текислик ўтган бўлар эди. Бу эса 15.5-теоремага зид.

15.6-теорема. ***Агар иккита параллел текислик учинчи текислик билан кесишса, у ҳолда кесишиш тўғри чизиқлари параллел бўлади*** (221-расм).

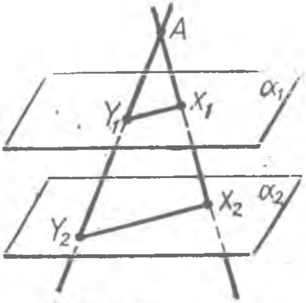
Исботи. Таърифга кўра параллел тўғри чизиқлар — бу битта текисликда ётувчи ва кесишмайдиган тўғри чизиқлардир. Айтилган тўғри чизиқлар битта текисликда — кесувчи текисликда ётади. Улар кесишмайди, чунки уларни ўз ичига олган параллел текисликлар кесишмайди. Демак, тўғри чизиқлар параллел. Теорема исботланди.

Масала (33). Иккита параллел текислик α_1 ва α_2 ҳамда бу текисликларнинг бирортасида ҳам ётмайдиган A нуқта берилган. A нуқта орқали ихтиёрий тўғри чизиқ ўтказилган. X_1 ва X_2 — тўғри чизиқнинг α_1, α_2 текисликлар билан кесишган нуқтаси бўлсин. Кесмалар узунликларининг $AX_1 : AX_2$ нисбати олинган тўғри чизиққа боғлиқ эмаслигини исботланг.

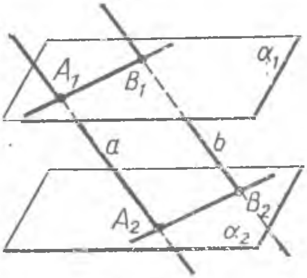
Ечилиши. A нуқта орқали бошқа тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг α_1 ҳамда α_2 текисликлар билан кесишган нуқталарини Y_1, Y_2 билан белгилаймиз (222-расм). AX_1 ва AY_1 тўғри чизиқлар орқали текислик ўтказамиз. Бу текислик α_1, α_2 текисликларни X_1Y_1 ҳамда X_2Y_2 параллел тўғри чизиқлар бўйича кесади (15.6-теорема). Бундан AX_1Y_1 ва AX_2Y_2 учбурчаклар ўхшаш деган хулоса чиқади. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан эса

$$\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{AY_1}{AY_2}$$

пропорция келиб чиқади, яъни $AX_1 : AX_2$ ва $AY_1 : AY_2$ нисбатлар иккала тўғри чизиқ учун бир хил.



222-расм.



223-расм.

15.7-теорема. ***Иккита параллел текислик орасига жойлашган параллел тўғри чизиқларнинг кесмалари тенг.***

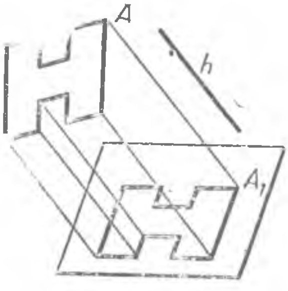
Исботи. α_1 ва α_2 — параллел текисликлар, a ва b — уларни кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар, A_1, A_2 ва B_1, B_2 — тўғри чизиқларнинг текисликлар билан кесишиш нуқталари бўлсин (223-расм). a ва b тўғри чизиқлар орқали текислик ўтказамиз. Бу текислик α_1 ва α_2 текисликларни A_1B_1 ва A_2B_2 параллел тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. $A_1B_1B_2A_2$ тўртбурчак — параллелограмм, чунки унинг қарама-қарши ётган томонлари параллел. Параллелограммнинг қарама-қарши ётган томонлари эса тенг. Демак, $A_1A_2 = B_1B_2$. Теорема исботланди.

ФАЗОВИЙ ФИГУРАЛАРНИНГ ТЕКИСЛИКДА ТАСВИРЛАНИШИ

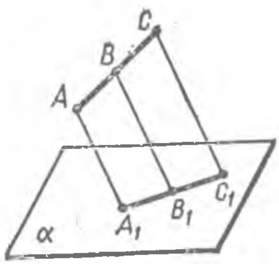
Фазовий фигураларни текисликда тасвирлаш учун одатда параллел проекциялашдан фойдаланилади. Фигурани тасвирлашнинг бу усули қуйидагичадир. Чизма текислиги α ни кесиб ўтувчи ихтиёрий h тўғри чизиқни оламиз ва фигуранинг ихтиёрий A нуқтасидан h га параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқнинг чизма текислиги билан кесишган A_1 нуқтаси A нуқтанинг тасвири бўлади (224-расм). Фигуранинг ҳар бир нуқтасининг тасвирини шу тарзда ясаб, шу фигуранинг тасвирини ҳосил қиламиз. Фазовий фигурани текисликда тасвирлашнинг бундай усули фигурага узоқдан қараганда намоён бўлган тасвирга мос келади.

Фигурани ясашнинг юқорида келтирилган баёнидан уни текисликда тасвирлашнинг баъзи хоссаларини айтиб ўтамиз.

Фигуранинг тўғри чизиқли кесмалари чизма текислигида яна кесма билан тасвирланади (225-расм). Ҳақиқатан, AC кесма нуқталарини проекцияловчи ҳамма тўғри чизиқлар чизма текислиги α ни A_1C_1 тўғри чизиқ бўйича кесувчи битта



224- расм.

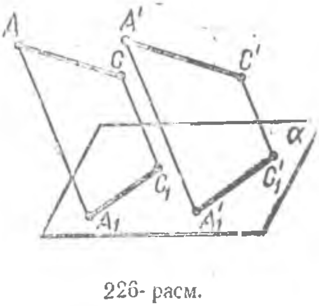


225- расм.

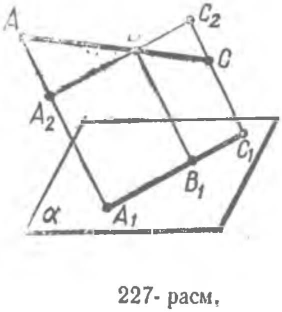
текисликда ётади. AC кесманинг ихтиёрий B нуқтаси A_1C_1 кесманинг B_1 нуқтаси билан тасвирланади.

Эслатма. Ҳозиргина исботланган хоссада ва бундан кейин ҳам проекцияловчи кесмалар проекциялаш йўналишига параллел эмаслиги кўзда тутилади.

Фигуранинг параллел кесмалари чизма текислигида параллел кесмалар билан тасвирланади (226-расм). Ҳақиқатан, AC ва $A'C'$ — фигуранинг параллел кесмалари бўлсин. A_1C_1 ва $A_1'C_1'$ тўғри чизиқлар параллел, чунки улар параллел текисликларнинг α текислик билан кесишишидан ҳосил қилинади. Бу текисликлардан биринчиси AC ва AA_1 тўғри чизиқлар орқали, иккинчиси эса $A'C'$ ва $A'A_1'$ тўғри чизиқлар орқали ўтади.



226- расм.



227- расм.

Битта тўғри чизиқ ёки параллел тўғри чизиқлар кесмаларининг нисбати параллел проекциялашда сақланади.

Масалан,

$$\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1} \qquad (*)$$

эканини кўрсатамиз (227-расм).

B нуқта орқали A_1C_1 га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. BAA_2 ва BCC_2 учбурчаклар ўхшаш. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан (*) пропорция ҳосил бўлади.

Масала (39). Учбурчакнинг параллел проекцияси берилган. Бу учбурчак медианаларининг проекцияларини қандай ясаш керак?

Ечилиши. Параллел проекциялашда тўғри чизиқ кесмаларининг нисбати сақланади. Шунинг учун учбурчак томонининг ўртаси бу томон проекциясининг ўртасига проекцияланади. Демак, учбурчак медианаларининг проекциялари унинг проекциясининг медианалари бўлади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Фазода қандай тўғри чизиқлар параллел дейилади?
2. Қандай тўғри чизиқлар айқаш дейилади?
3. Берилган тўғри чизиқдан ташқаридаги нуқтадан шу тўғри чизиққа параллел қилиб битта ва фақат битта тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.
4. Учинчи тўғри чизиққа параллел икки тўғри чизиқнинг параллел эканини исботланг.
5. Тўғри чизиқ билан текислик параллел дейиш нимани англатади?
6. Агар текисликда ундан ташқарида ётган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ топилса, текислик билан берилган тўғри чизиқ параллел бўлади. Шуни исботланг.
7. Қандай текисликлар параллел дейилади?
8. Агар икки текисликдан бири иккинчисида ётган кесишувчи иккита тўғри чизиққа параллел бўлса, бу икки текисликнинг параллел бўлишини исботланг.
9. Берилган текисликдан ташқаридаги нуқтадан берилган текисликка параллел қилиб битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.
10. Агар иккита параллел текислик учинчиси билан кесишса, кесишиш тўғри чизиқлари параллел бўлишини исботланг.
11. Иккита параллел текислик орасига жойлашган параллел тўғри чизиқлар кесмаларининг тенглигини исботланг.
12. Параллел проекциялаш хоссаларини санаб ўтинг.

МАШҚЛАР

1. Берилган икки параллел тўғри чизиқни кесиб ўтувчи ҳамма тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётишини исботланг.

2. a, b тўғри чизиқлар кесишади. b тўғри чизиққа параллел ва a тўғри чизиқни кесиб ўтувчи ҳамма тўғри чизиқларнинг бир текисликда ётишини исботланг.
3. Агар текислик иккита параллел тўғри чизиқдан бирини кесиб ўтса, иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.
4. AB кесманинг учларидан ва унинг M ўртасидан бирор текисликни A_1, B_1, M_1 нуқталарда кесувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Агар AB кесма текисликни кесиб ўтмаса ва: 1) $AA_1 = 5$ м, $BB_1 = 7$ м; 2) $AA_1 = 3{,}6$ дм, $BB_1 = 4{,}8$ дм; 3) $AA_1 = 8{,}3$ см, $BB_1 = 4{,}1$ см; 4) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$ бўлса, MM_1 кесманинг узунлигини топинг.
5. Бундан олдинги масалани AB кесма текисликни кесиб ўтган ҳол учун ечинг.
6. AB кесманинг A учидан текислик ўтказилган. Шу кесманинг B учидан ва C нуқтасидан текисликни B_1 ва C_1 нуқталарда кесувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. BB_1 кесманинг узунлигини топинг, бунда: 1) $CC_1 = 15$ см, $AC : BC = 2 : 3$; 2) $CC_1 = 8{,}1$ см, $AB : AC = 11 : 9$; 3) $AB = 6$ см, $AC : CC_1 = 2 : 5$; 4) $AC = a$, $BC = b, CC_1, = c$.
7. $ABCD$ параллелограмм ва уни кесмайдиган текислик берилган. Параллелограммнинг учларидан берилган текисликни A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталарда кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. DD_1 кесманинг узунлигини топинг, бунда: 1) $AA_1 = 2$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 8$ м; 2) $AA_1 = 4$ м, $BB_1 = 3$ м, $CC_1 = 1$ м; 3) $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $CC_1 = c$.
8. a ва b тўғри чизиқлар битта текисликда ётмайди. a ва b тўғри чизиқларга параллел c тўғри чизиқни ўтказиш мумкинми?
9. A, B, C, D нуқталар битта текисликда ётмайди. AB ва BC кесмаларнинг ўрталаридан ўтувчи тўғри чизиқ AD ва CD кесмалар ўрталаридан ўтувчи тўғри чизиққа параллел эканини исботланг.
10. Фазовий тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари бўлишини исботланг.
11. Битта текисликда ётмаган тўртта A, B, C, D нуқта берилган. AB ва CD, AC ва BD, AD ва BC кесмаларнинг ўрталарини туташтирувчи тўғри чизиқларнинг битта нуқтада кесишишини исботланг.
12. ABC учбурчак берилган. AB тўғри чизиққа параллел текислик бу учбурчакнинг AC томонини A_1 нуқтада, BC томонини B_1 нуқтада кесиб ўтади. $A_1\ B_1$ кесманинг узунлигини топинг, бунда: 1) $AB = 15$ см, $AA_1 : AC = 2 : 3$; 2) $AB = 8$ см, $AA_1 : A_1C = 5 : 3$; 3) $B_1C = 10$ см, $AB : BC = 4 : 5$; 4) $AA_1 = a$, $AB = b$, $A_1C = c$.
13. Берилган нуқтадан берилган иккита кесишувчи текисликнинг ҳар бирига параллел тўғри чизиқ ўтказинг.
14. AB ва CD тўғри чизиқлар айқаш бўлса, у ҳолда AC ва BD тўғри чизиқларнинг ҳам айқаш бўлишини исботланг.
15. AB ва CD тўғри чизиқлар кесишади. AC ва BD тўғри чизиқлар айқаш бўлиши мумкинми?

16. Иккита айқаш тўғри чизиқнинг истаган биридан иккинчисига параллел текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.
17. Агар a тўғри чизиқ бўйича кесишадиган икки текислик α текисликни параллел тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтса, у ҳолда a тўғри чизиқнинг α текисликка параллел бўлишини исботланг.
18. Агар тўғри чизиқ иккита параллел текисликдан бирини кесиб ўтса, иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.
19. Иккита айқаш тўғри чизиқ берилган. Улар орқали қандай қилиб иккита параллел текислик ўтказиш мумкин?
20. Фазода берилган нуқтадан иккита айқаш тўғри чизиқнинг ҳар бирини кесиб ўтадиган тўғри чизиқ ўтказинг. Буни ҳамма вақт ҳам бажариш мумкинми?
21. Учлари иккита айқаш тўғри чизиқда ётган кесмалар ўрталарининг геометрик ўрни текислик бўлишини исботланг.
22. Битта текисликда ётмайдиган тўртта нуқта A, B, C, D берилган. AB ва CD тўғри чизиқларга параллел бўлган ҳар қандай текислик AC, AD, BD, BC тўғри чизиқларни параллелограмм учларида кесиб ўтади. Шуни исботланг.
23. α, β текисликлар γ текисликка параллел. α, β текисликлар кесишиши мумкинми?
24. α, β текисликлар кесишади. Истаган γ текислик α, β текисликлардан камида биттасини кесиб ўтишини исботланг.
25. Берилган нуқтадан ўтиб, берилган текисликка параллел бўлган ҳамма тўғри чизиқларнинг битта текисликда ётишини исботланг.
26. Берилган нуқтадан иккита кесишувчи тўғри чизиқнинг ҳар бирига параллел бўлган текислик ўтказинг. Буни ҳар доим бажариш мумкинми?
27. $ABCD$ ва ABC_1D_1 параллелограммлар турли текисликларда ётади. CDD_1C_1 тўртбурчак ҳам параллелограмм эканини исботланг.
28. Иккита параллел текисликнинг бирида ётувчи $ABCD$ параллелограммнинг учларидан иккинчи текисликни A_1, B_1, C_1, D_1 нуқталарда кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. $A_1B_1C_1D_1$ тўртбурчак ҳам параллелограмм эканини исботланг.
29. Иккита параллел текисликнинг бирида ётувчи ABC учбурчакнинг учларидан иккинчи текисликни A_1, B_1, C_1 нуқталарда кесиб ўтувчи тўғри чизиқлар ўтказилган. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг тенглигини исботланг.
30. Бир нуқта орқали ўтувчи учта тўғри чизиқ берилган текисликни A, B, C нуқталарда кесиб ўтади, унга параллел текисликни эса A_1, B_1, C_1 нуқталарда кесиб ўтади. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг ўхшашлигини исботланг.
31. Агар A нуқтадан ўтувчи тўртта тўғри чизиқ α текисликни параллелограммнинг учларида кесиб ўтса, у ҳолда улар A нуқтадан ўтмайдиган ва α га параллел бўлган ҳолда исталган текисликни ҳам параллелограммнинг учларида кесиб ўтишини исботланг.

32. Иккита параллел текислик берилган. Бу текисликларнинг биридаги A ва B нуқталардан иккинчи текисликни A_1 ва B_1 нуқталарда кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқлар ўтказилган. Агар $AB = a$ бўлса, A_1B_1 кесма нимага тенг?
33. Иккита параллел текислик α_1 ва α_2 ҳамда бу текисликларнинг бирортасида ҳам ётмайдиган A нуқта берилган. A нуқта орқали ихтиёрий тўғри чизиқ ўтказилган. X_1 ва X_2 — тўғри чизиқнинг α_1, α_2 текисликлар билан кесишган нуқтаси бўлсин. AX_1 ва AX_2 кесмалар узунликларининг $AX_1 : AX_2$ нисбати олинган тўғри чизиққа боғлиқ эмаслигини исботланг.
34. A нуқта α текисликдан ташқарида ётади, X нуқта α текисликдаги ихтиёрий нуқта, X' нуқта AX кесмани $m : n$ га тенг нисбатда бўлувчи нуқта. X' нуқталарнинг геометрик ўрни α текисликка параллел текислик эканини исботланг.
35. Учта параллел текислик берилган: α_1, α_2, α_3. X_1, X_2, X_3 — — бу текисликларнинг ихтиёрий тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари, X_1X_2 ва X_2X_3 кесмалар узунликларининг $X_1X_2 : X_2X_3$ нисбати тўғри чизиққа боғлиқ эмаслигини, яъни исталган иккита тўғри чизиқ учун бир хил эканини исботланг.
36. Тўртта параллел тўғри чизиқ берилган. Агар бирорта текислик бу тўғри чизиқларни параллелограммнинг учларида кесиб ўтса, у ҳолда берилган тўғри чизиқларга параллел бўлмаган исталган текислик уларни бирор параллелограммнинг учларида кесишини исботланг.
37. Иккита параллел текислик, уларни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ ва текисликларнинг бирида айлана берилган. Айлананинг ҳар бир X нуқтасидан берилган тўғри чизиққа параллел ва иккинчи текисликни бирорта X' нуқтада кесувчи тўғри чизиқ ўтказилади. X' нуқталарнинг геометрик ўрни нимадан иборат? Жавобингизни тушунтиринг.
38. Иккита параллел текислик, бу текисликлардан ташқарида нуқта ва текисликларнинг биттасида айлана берилган. Айлананинг ҳар бир X нуқтасидан ва берилган нуқтадан иккинчи текисликни бирорта X' нуқтада кесувчи тўғри чизиқ ўтказилади. X' нуқталарнинг геометрик ўрни нимадан иборат? Жавобингизни тушунтиринг.
39. Учбурчакнинг параллел проекцияси берилган. Бу учбурчак медианаларининг проекциясини қандай ясаш керак?
40. Учбурчакнинг параллел проекцияси берилган. Учбурчак ўрта чизиғининг проекцияси нима билан тасвирланади?
41. Параллелограммни параллел проекциялашда трапеция ҳосил қилиниши мумкинми? Жавобингизни тушунтиринг.
42. Параллел проекциялашда параллелограммнинг проекцияси квадрат бўлиши мумкинми?
43. Марказий симметрик фигуранинг параллел проекцияси яна марказий симметрик фигура бўлишини исботланг.
44. Айлана ва унинг диаметрининг параллел проекцияси берилган. Перпендикуляр диаметрнинг проекцияси қандай ясалади?

16- §. ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛИГИ

ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАРНИНГ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛИГИ

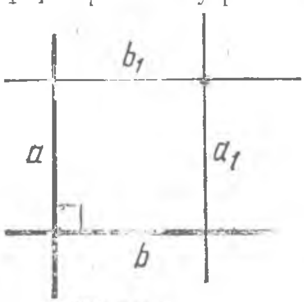
Текисликдагидек, тўғри бурчак остида кесишган икки тўғри чизиқ *перпендикуляр тўғри чизиқлар* дейилади.

16.1-теорема. ***Перпендикуляр тўғри чизиқларга мос равишда параллел бўлган кесишувчи тўғри чизиқларнинг ўзлари ҳам перпендикулярдир.***

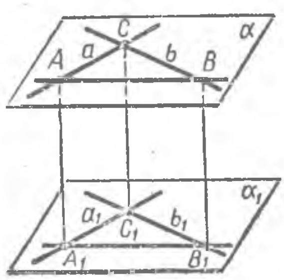
Исботи. a ва b — перпендикуляр тўғри чизиқлар, a_1 ва b_1— уларга параллел бўлган кесишувчи тўғри чизиқлар бўлсин. a_1 ва b_1 тўғри чизиқларнинг перпендикуляр эканини исботлаймиз. Агар a, b, a_1, b_1 тўғри чизиқлар бир текисликда ётса, улар теоремада кўрсатилган хоссага эга бўладилар (228-расм). Ҳақиқатан, b, b_1 тўғри чизиқлар параллел бўлгани учун a тўғри чизиқ b га перпендикуляр эканлигидан b_1 тўғри чизиққа ҳам перпендикулярдир. a, a_1 тўғри чизиқлар параллел бўлгани учун b_1 тўғри чизиқ a га перпендикуляр эканлигидан a_1 га ҳам перпендикуляр бўлади.

Фараз қилайлик, берилган тўғри чизиқлар битта текисликда ётмасин. У ҳолда a ва b тўғри чизиқлар бирор α текисликда, a_1 ва b_1 тўғри чизиқлар эса бирор α_1 текисликда ётади (229-расм). 15.3-теоремага кўра a, b тўғри чизиқлар α_1 текисликка параллел. 15.4-теоремага кўра α, α_1 текисликлар параллел. C нуқта a, b тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси, C_1 нуқта эса a_1, b_1 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтаси бўлсин. a ва a_1 параллел тўғри чизиқлар текислигида CC_1 тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. У a ва a_1 тўғри чизиқларни A, A_1 нуқталарда кесиб ўтади. b, b_1 тўғри чизиқлар текислигида CC_1 тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз ва унинг b, b_1 тўғри чизиқлар билан кесишиш нуқталарини B ва B_1 билан белгилаймиз.

CAA_1C_1 ва CBB_1C_1 тўртбурчаклар параллелограммлардир, чунки уларнинг қарама-қарши томонлари параллел. ABB_1A_1 тўртбурчак ҳам параллелограмм. Унинг AA_1, BB_1 томонлари параллел, чунки уларнинг ҳар бири CC_1 тўғри чизиққа параллел. Шундай қилиб, бу тўртбурчак AA_1 ва BB_1 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текисликда ётади. Текислик эса α ва α_1 параллел текисликларни AB ва A_1B_1 параллел тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади.



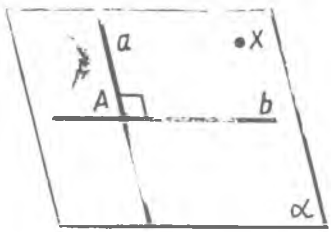
228-расм.



229-расм.

Параллелограммнинг қарама-қарши томонлари тенг бўлгани учун $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$. Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар тенг. Демак, ACB бурчакка тенг бўлган $A_1C_1B_1$ бурчак тўғри бурчакдир, яъни a_1, b_1 тўғри чизиқлар перпендикуляр. Теорема исботланди.

Масала (1). Фазодаги тўғри чизиқнинг исталган нуқтасидан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.



230- расм.

Исботи. a—берилган тўғри чизиқ ва A — бу тўғри чизиқдаги нуқта бўлсин (230- расм). a тўғри чизиқдан ташқарида истаган X нуқтани оламиз ҳамда бу нуқта билан a тўғри чизиқ орқали α текислик ўтказамиз (14.1- теорема). α текисликда A нуқта орқали a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган b тўғри чизиқни ўтказиш мумкин. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлиги

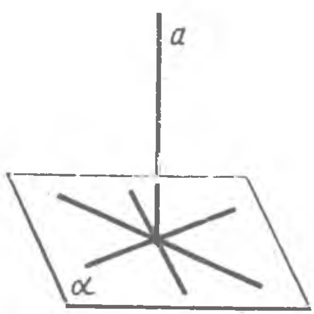
Агар текисликни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ текисликдаги шу кесишиш нуқтасидан ўтувчи исталган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, тўғри чизиқ шу текисликка *перпендикуляр* дейилади.

231- расмда a тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр.

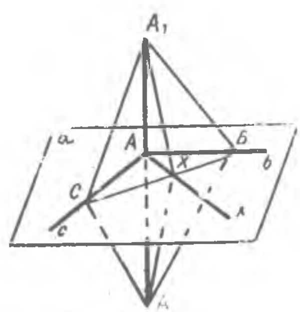
16.2- теорема. ***Агар текисликни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ текисликдаги шу кесишиш нуқтасидан ўтувчи иккита тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, бу тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлади.***

Исботи. a тўғри чизиқ α текисликни A нуқтада кесиб ўтсин ҳамда A нуқта орқали ўтувчи ва шу текисликдаги b ва c тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлсин (232- расм). a тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр эканини исботлаймиз.

α текисликда A нуқта орқали ихтиёрий x тўғри чизиқни ўтказамиз ва унинг a тўғри чизиққа перпендикуляр эканини кўрсата-



231- расм.



232- расм.

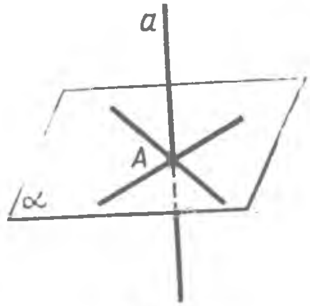
миз. α текисликда A нуқтадан ўтмайдиган ҳамда b, c ва x тўғри чизиқларни кесиб ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқ ўтказамиз. Кесишиш нуқталари B, C ва X бўлсин.

a тўғри чизиқда A нуқтадан турли томонда AA_1 ва AA_2 тенг кесмалар ажратамиз. A_1CA_2 учбурчак тенг ёнли, чунки AC кесма теореманинг шартига кўра баландлик бўлади ва ясашга кўра ($AA_1 = AA_2$) медиана бўлади. Шунга ўхшаш A_1BA_2 учбурчак ҳам тенг ёнли. Демак, A_1BC ва A_2BC учбурчаклар учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра тенг.

A_1BC ва B_2BC учбурчакларнинг тенглигидан A_1BX, A_2BX бурчакларнинг тенглиги ва, демак, учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра A_1BX ва A_2BX учбурчакларнинг тенглиги келиб чиқади. Бу учбурчакларнинг A_1X ва A_2X томонларининг тенглигидан A_1XA_2 учбурчак тенг ёнли экан деган хулоса чиқарамиз. Шунинг учун унинг XA медианаси бир вақтда баландлик ҳам бўлади. Бу эса x тўғри чизиқ a га перпендикуляр демакдир. Теорема исботланди.

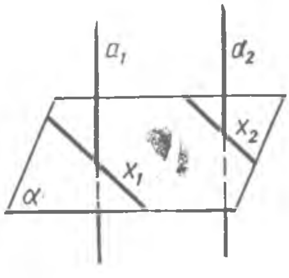
Масала (4). Берилган тўғри чизиқдаги истаган нуқтадан унга перпендикуляр текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.

Ечилиши. a — берилган тўғри чизиқ, A — ундаги нуқта бўлсин (233-расм). A нуқтадан тўғри чизиққа перпендикуляр иккита турли чизиқ ўтказамиз (1-масалага қаранг). Бу тўғри чизиқлар орқали эса α текисликни ўтказамиз (аксиома C_3). α текислик A нуқтадан ўтади ва a тўғри чизиққа перпендикуляр (16.2-теорема).

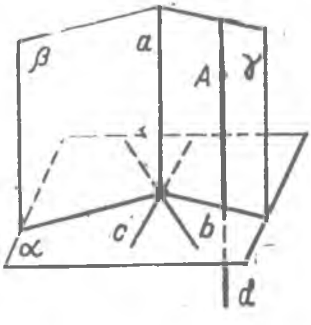


233- расм.

16.3-теорема. ***Агар текислик иккита параллел тўғри чизиқдан бирига перпендикуляр бўлса, у ҳолда иккинчисига ҳам перпендикулярдир.***



234- расм.



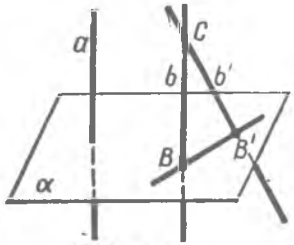
235- расм.

Исботи. a_1 ва a_2 — иккита параллел тўғри чизиқ, α эса a_1 тўғри чизиққа перпендикуляр текислик бўлсин (234-расм). Бу текисликнинг a_2 тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр эканини исботлаймиз. a_2 тўғри чизиқ билан α текислик кесишган нуқтадан α текисликда ихтиёрий x_2 тўғри чизиқни ўтказамиз. a_1 тўғри чизиқ билан α текислик кесишган нуқта орқали x_2 тўғри чизиққа параллел x_1 тўғри чизиқни ўтказамиз. У α текисликда ётади. a_1 тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр бўлгани учун a_1 ва x_1 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлади. 16.1-теоремага кўра уларга параллел бўлган кесишувчи a_2 ва x_2 тўғри чизиқлар ҳам перпендикуляр. Шундай қилиб, a_2 тўғри чизиқ α текисликдаги истаган x_2 тўғри чизиққа перпендикуляр. Бу эса a_2 тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр демакдир. Теорема исботланди.

Масала (6). Исталган A нуқта орқали берилган α текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

Ечилиши. α текисликда иккита кесишувчи b, c тўғри чизиқни ўтказамиз (235-расм). Уларнинг кесишиш нуқтасидан мос равишда b, c тўғри чизиқларга перпендикуляр бўлган β ва γ текисликларни ўтказамиз. Бу текисликлар бирор a тўғри чизиқ бўйича кесишади. a тўғри чизиқ b, c тўғри чизиқларга перпендикуляр, ва демак, α текисликка ҳам перпендикуляр. Энди A нуқта орқали a га параллел c тўғри чизиқни ўтказамиз. 16.3-теоремага кўра у α текисликка перпендикуляр.

16.4-теорема. ***Битта текисликка перпендикуляр икки тўғри чизиқ ўзаро параллелдир.***



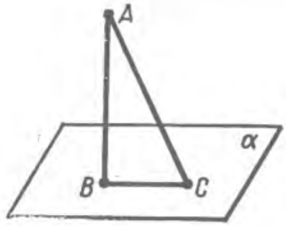
236- расм.

Исботи. a ва b тўғри чизиқлар α текисликка перпендикуляр бўлсин (236-расм). Фараз қилайлик, a ва b тўғри чизиқлар параллел эмас. b тўғри чизиқнинг бирор C нуқтаси орқали a тўғри чизиққа параллел қилиб b' тўғри чизиқни ўтказамиз. b' тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр (16.3-теорема). B ва B' нуқталар b ва b' тўғри чизиқларнинг α текислик билан кесишиш нуқталари бўлсин. У ҳолда BB' тўғри чизиқ кесишувчи b, b' тўғри чизиқларга перпендикуляр. Бундай бўлиши мумкин эмас. Биз қарама-қаршиликка дуч келдик. Теорема исботланди.

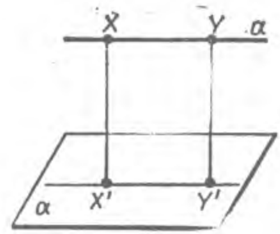
ПЕРПЕНДИКУЛЯР ВА ОҒМА

Берилган нуқтадан берилган текисликка туширилган *перпендикуляр* деб берилган нуқтани текисликнинг нуқтаси билан туташтирувчи ва текисликка перпендикуляр тўғри чизиқда ётувчи кесмага айтилади. Бу кесманинг текисликда ётган учи *перпендикулярнинг асоси* дейилади. Нуқтадан текисликкача *масофа* деб шу нуқтадан текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлигига айтилади.

Берилган нуқтадан берилган текисликка ўтказилган *оғма* деб бир учи шу нуқтада, иккинчи учи текисликда ётган ва текисликка перпендикуляр бўлмаган исталган кесмага айтилади. Кесманинг текисликда ётган учи *оғманинг асоси* дейилади. Битта нуқтадан



237- расм.



238- расм.

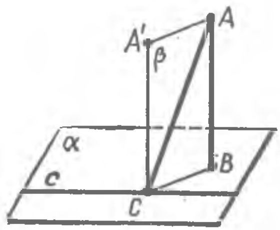
ўтказилган перпендикуляр ва оғманинг асосларини туташтирувчи кесма *оғманинг проекцияси* дейилади.

237-расмда A нуқтадан α текисликка AB перпендикуляр ва AC оғма ўтказилган. B нуқта перпендикулярнинг асоси, C нуқта оғманинг асоси, BC эса AC оғманинг α текисликдаги проекцияси.

Масала (9). Тўғри чизиқ текисликка параллел бўлса, унинг ҳамма нуқталари текисликдан бир хил масофада туришини исботланг.

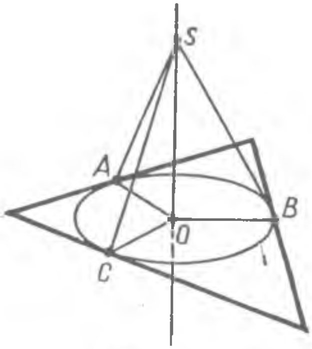
Ечилиши. a — берилган тўғри чизиқ ва α — берилган текислик бўлсин (238-расм). a тўғри чизиқда ихтиёрий иккита X, Y нуқта оламиз. Улардан α текисликкача масофалар шу текисликка туширилган XX' ва YY' перпендикулярларнинг узунликларидир. 16. 4-теоремага кўра XX' ва YY' тўғри чизиқлар параллел; демак, улар битта текисликда ётади. Бу текислик α текисликни $X'Y'$ тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади. a тўғри чизиқ $X'Y'$ тўғри чизиққа параллел, чунки $X'Y'$ тўғри чизиқни ўз ичига олган текисликни кесиб ўтмайди. Шундай қилиб, $XX'Y'Y$ тўртбурчакнинг қарама-қарши ётган томонлари параллел. Демак, у параллелограмм, бундан $XX' = YY'$. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

16.5-теорема (уч перпендикуляр ҳақидаги теорема). ***Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр.*** Аксинча, ***текисликдаги тўғри чизиқ оғмага перпендикуляр бўлса, у оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади.***



239- расм.

Исботи. AB — α текисликка туширилган перпендикуляр, AC — оғма ва c эса оғманинг C асосидан α текисликка ўтказилган тўғри чизиқ бўлсин (239-расм). α текисликка перпендикуляр CA' тўғри чизиқни ўтказамиз. У AB тўғри чизиққа параллел (16.4-теорема). AB ва $A'C$ тўғри чизиқлар орқали β текисликни ўтказамиз. c тўғри чизиқ CA' тўғри чизиққа перпендикуляр. Агар у CB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда у β текисликка ҳам перпендикуляр бўлади, демак, AC тўғри чизиққа ҳам перпендикулярдир.



240- расм.

Худди шунга ўхшаш, агар c тўғри чизиқ CA оғмага перпендикуляр бўлса, у CA' тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр эканлигидан β текисликка перпендикуляр бўлади, демак, EC оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади. Теорема исботланди.

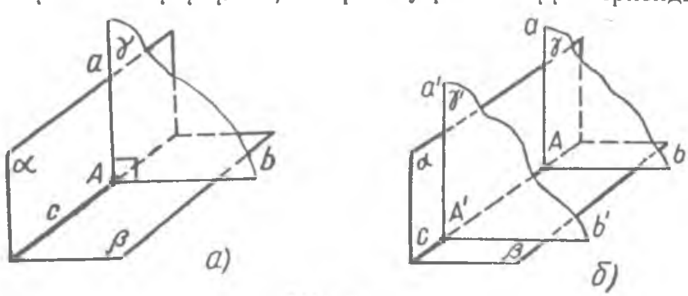
Масала (32). Учбурчакка ички чизилган айлананинг марказидан учбурчак текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси учбурчак томонларидан баравар узоқликда туришини исботланг.

Ечилиши. A, B, C — учбурчак томонларининг айланага уриниш нуқталари, O — айлананинг маркази ва S — перпендикулярдаги нуқта бўлсин (240-расм). OA радиус учбурчакнинг томонига перпендикуляр бўлгани учун 16.5- теоремага кўра SA кесма шу томонга туширилган перпендикулярдир, унинг узунлиги эса S нуқтадан учбурчакнинг томонигача масофадир. Пифагор теоремасига кўра $SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2}$, бунда r — ички чизилган айлананинг радиуси. Шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз: $SB = \sqrt{r^2 + OS^2}$, $SC = \sqrt{r^2 + OS^2}$, яъни S нуқтадан учбурчак томонларигача ҳамма масофалар тенг.

ТЕКИСЛИКЛАРНИНГ ПЕРПЕНДИКУЛЯРЛИГИ

Кесишувчи иккита текисликнинг кесишган тўғри чизиғига перпендикуляр бўлган учинчи текислик уларни перпендикуляр тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтса, бу икки текислик *перпендикуляр текисликлар* дейилади.

241-*а* расмда биз c тўғри чизиқ бўйича кесишган иккита α, β перпендикуляр текисликларни кўряпмиз. c тўғри чизиққа перпендикуляр γ текислик α, β текисликларни a ва b перпендикуляр тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. Текисликлар перпендикулярлигини бу тариқада таърифлаш γ текисликнинг танлаб олинишига боғлиқ эмас. Ҳақиқатан, агар c тўғри чизиққа перпендикуляр



241- расм.

бошқа γ' текислик олинса, бу текислик α текисликни c тўғри чизиққа перпендикуляр, демак, a тўғри чизиққа параллел a' тўғри чизиқ бўйича, β текисликни эса c тўғри чизиққа перпендикуляр, демак, b тўғри чизиққа параллел b' тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади (241-*б* расм). 16.1-теоремага асосан a, b тўғри чизиқларнинг перпендикулярлигидан a', b' тўғри чизиқлар перпендикуляр деган хулосага келамиз.

16.6-теорема. ***Агар текислик бошқа бир текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ орқали ўтса, бу текисликлар перпендикулярдир.***

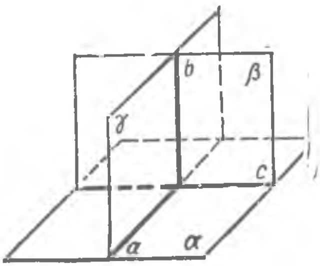
Исботи. α — текислик, b — унга перпендикуляр тўғри чизиқ ва β эса b тўғри чизиқ орқали ўтувчи текислик, c тўғри чизиқ α ва β текисликлар кесишадиган тўғри чизиқ бўлсин (242-расм). α ва β текисликларнинг перпендикулярлигини исботлаймиз. α текисликда b тўғри чизиқнинг α текислик билан кесишган нуқтаси орқали c тўғри чизиққа перпендикуляр a тўғри чизиқни ўтказамиз. a, b тўғри чизиқлар орқали γ текисликни ўтказамиз. У c тўғри чизиққа перпендикуляр, чунки c тўғри чизиқ a, b тўғри чизиқларга перпендикуляр. a, b тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлгани учун α ва β текисликлар ҳам перпендикуляр. Теорема исботланди.

Масала (52). a тўғри чизиқ ва α текислик берилган. a тўғри чизиқ орқали α текисликка перпендикуляр текислик ўтказинг.

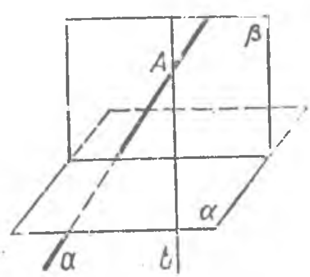
Ечилиши. a тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидан (243-расм) α текисликка перпендикуляр қилиб b тўғри чизиқни ўтказамиз (6-масала). a, b тўғри чизиқлар орқали β текисликни ўтказамиз. 16.6-теоремага кўра β текислик α текисликка перпендикуляр.

16.7-теорема. ***Иккита перпендикуляр текисликнинг бирида ётувчи тўғри чизиқ шу текисликлар кесишган тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, иккинчи текисликка ҳам перпендикуляр бўлади.***

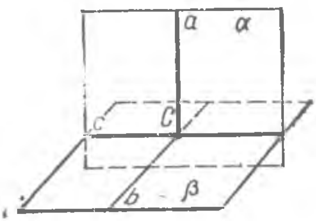
Исботи. α, β текисликлар c тўғри чизиқ бўйича кесишувчи берилган перпендикуляр текисликлар ва a тўғри чизиқ α текис-



242- расм.



243- расм.



244- расм.

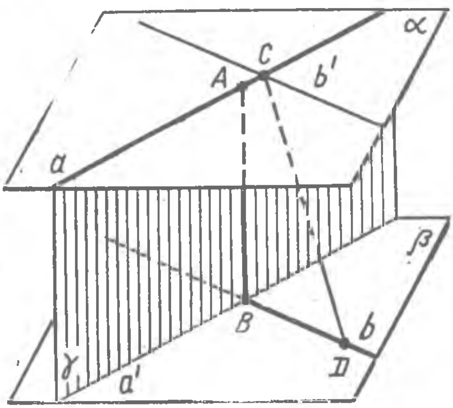
ликдаги c тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ бўлсин (244- расм). a тўғри чизиқнинг β текисликка перпендикуляр эканини исботлаймиз. a ва c тўғри чизиқлар кесишган C нуқта орқали c тўғри чизиққа перпендикуляр қилиб β текисликда b тўғри чизиқни ўтказамиз. a ва b тўғри чизиқлар орқали ўтувчи γ текислик c тўғри чизиққа перпендикуляр, чунки унда ётган a, b тўғри чизиқлар c тўғри чизиққа перпендикуляр. α, β текисликлар перпендикуляр бўлгани учун a, b тўғри чизиқлар ҳам перпендикуляр. Ундан ташқари, a, c тўғри чизиқлар перпендикуляр (шартга кўра), шунинг учун a тўғри чизиқ β текисликка перпендикуляр. Теорема исботланди.

АЙҚАШ ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ОРАСИДАГИ МАСОФА

Икки айқаш тўғри чизиқнинг *умумий перпендикуляри* деб учлари шу тўғри чизиқларда бўлиб, уларнинг ҳар бирига перпендикуляр бўлган кесмага айтилади.

Икки айқаш тўғри чизиқ битта ва фақат битта умумий перпендикулярга эга. Бу перпендикуляр шу тўғри чизиқлар орқали ўтувчи параллел текисликларнинг умумий перпендикуляридир. Шуни исботлаймиз.

Исботи. a, b — берилган айқаш тўғри чизиқлар бўлсин (245- расм). Улар орқали α, β параллел текисликлар ўтказамиз (15- § даги 16- масала). a тўғри чизиқни кесиб ўтувчи ва α текисликка перпендикуляр бўлган тўғри чизиқлар битта γ текисликда ётади. Бу текислик β текисликни a га параллел бўлган a' тўғри чизиқ бўйича кесиб ўтади. B нуқта a', b тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси бўлсин. У ҳолда α текисликка перпендикуляр бўлган AB тўғри чизиқ β текисликка ҳам перпендикуляр бўлади, чунки β текислик α га параллел. AB кесма α ва β текисликларнинг умумий перпендикуляри ва демак, a ва b тўғри чизиқларнинг ҳам умумий перпендикуляридир.



245- расм.

Фараз қилайлик, a, b тўғри чизиқларнинг бошқа CD умумий перпендикуляри бор дейлик. C нуқта орқали b га параллел қилиб b' тўғри чизиқни ўтказамиз. CD тўғри чизиқ b тўғри чизиққа перпендикуляр, демак, b' га ҳам перпендикуляр. У a тўғри чизиққа перпендикуляр бўлгани учун бу тўғри чизиқ α текисликка перпендикуляр, демак, AB тўғри чизиққа параллел. Демак, AB, CD тўғри чизиқларнинг параллеллиги сабабли улар орқали текислик ўтказиш мумкин. Бу текисликда эса AC, BD айқаш тўғри чизиқлар ётади, бундай бўлиши мумкин эмас. Теорема исботланди.

Айқаш тўғри чизиқларнинг умумий перпендикулярининг узунлиги улар орасидаги *масофа* дейилади. *Бу масофа шу тўғри чизиқлар орқали ўтувчи параллел текисликлар орасидаги масофага тенг.*

Такрорлаш учун машқлар

1. Фазодаги қандай тўғри чизиқлар перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади?
2. Перпендикуляр тўғри чизиқларга параллел бўлган кесишувчи тўғри чизиқларнинг перпендикуляр эканини исботланг.
3. Тўғри чизиқ билан текисликнинг перпендикулярлигига таъриф беринг.
4. Агар текисликни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ бу текисликдаги иккита тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, унинг текисликка ҳам перпендикулярлигини исботланг.
5. Агар текислик иккита параллел тўғри чизиқдан бирига перпендикуляр бўлса, унинг иккинчи тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр эканини исботланг.
6. Битта текисликка перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқнинг ўзаро параллел бўлишини исботланг.
7. Берилган нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр нима?
8. Нуқтадан текисликкача масофа нима?
9. Берилган нуқтадан текисликка ўтказилган оғма нима? Оғманинг проекцияси нима?
10. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремани исботланг.
11. Қандай текисликлар перпендикуляр текисликлар дейилади?
12. Агар текислик берилган текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ орқали ўтса, бу текисликнинг берилган текисликка перпендикуляр бўлишини исботланг.
13. Агар тўғри чизиқ иккита перпендикуляр текисликнинг бирида ётиб, бу текисликларнинг кесишган тўғри чизиғига перпендикуляр бўлса, унинг иккинчи текисликка перпендикуляр бўлишини исботланг.
14. Айқаш тўғри чизиқларнинг умумий перпендикуляри нима?
15. Айқаш тўғри чизиқлар битта ва фақат битта умумий перпендикулярга эга эканини ва бу умумий перпендикулярнинг шу тўғри чизиқлар орқали ўтувчи параллел текисликлар учун умумий перпендикуляр эканини исботланг.
16. Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги масофа нима?

МАШҚЛАР

1. Фазодаги тўғри чизиқнинг истаган нуқтасидан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.

2. Фазодаги исталган тўғри чизиқ орқали унга перпендикуляр иккита турли тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.
3. AB, AC, AD тўғри чизиқлар жуфт-жуфт перпендикуляр. CD кесмани топинг, бунда: 1) $AB = 3$ см, $BC = 7$ см, $AD = 1{,}5$ см; 2) $BD = 9$ см, $BC = 16$ см, $AD = 5$ см; 3) $AB = b$, $BC = a$, $AD = d$; 4) $BD = c$, $BC = a$, $AD = d$.
4. Берилган тўғри чизиқдаги истаган нуқтадан унга перпендикуляр текислик ўтказиш мумкинлигини исботланг.
5. Текисликнинг исталган нуқтасидан унга перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.
6. Исталган A нуқта орқали берилган α текисликка перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиш мумкинлигини исботланг.
7. Берилган текисликда ётмаган нуқтадан текисликка перпендикуляр бўлган биттадан ортиқ тўғри чизиқ ўтказиб бўлмаслигини исботланг.
8. A нуқта томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчакнинг учларидан a масофада ётади. A нуқтадан учбурчак текислигигача масофани топинг.
9. Агар тўғри чизиқ текисликка параллел бўлса, унинг ҳамма нуқталари текисликдан бир хил масофада бўлишини исботланг.
10. Текисликнинг ҳамма нуқталаридан унга параллел текисликкача бўлган масофаларнинг бир хил эканини исботланг.
11. Берилган нуқтадан текисликка туширилиб, берилган узунликдаги оғмалар асосларининг геометрик ўрнини топинг.
12. Берилган нуқтадан текисликка узунликлари 10 см ва 17 см га тенг иккита оғма ўтказилган. Бу оғмалар проекцияларининг айирмаси 9 см га тенг. Оғмаларнинг проекцияларини топинг.
13. Нуқтадан текисликка иккита оғма ўтказилган бўлиб, улардан бири иккинчисидан 26 см узун. Оғмаларнинг проекциялари 12 см ва 40 см га тенг. Оғмаларни топинг.
14. Нуқтадан текисликка иккита оғма ўтказилган. Агар оғмалар $1:2$ га тенг нисбатда бўлиб, уларнинг проекциялари 1 см ва 7 см га тенг бўлса, оғмаларнинг узунлигини топинг.
15. Нуқтадан текисликка 23 см ва 33 см га тенг иккита оғма ўтказилган. Агар оғмаларнинг проекциялари $2:3$ га тенг нисбатда бўлса, шу нуқтадан текисликкача масофани топинг.
16. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг марказидан учбурчак текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси учбурчакнинг учларидан баравар узоқликда ётишини исботланг.
17. α текисликнинг ташқарисидаги S нуқтадан унга учта тенг SA, SB, SC оғмалар ва SO перпендикуляр ўтказилган. Перпендикулярнинг O асоси ABC учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази бўлишини исботланг.
18. Иккита параллел текислик орасидаги масоф a га тенг. b узунликдаги кесманинг учлари бу текисликларга тиралиб туради. Кесманинг текисликлардан ҳар биридаги проекциясини аниқланг.
19. a ва b узунликдаги икк та кесма учлари иккита параллел

текисликка тиралиб туради. Биринчи a узунликдаги кесманинг текисликдаги проекцияси c га тенг. Иккинчи кесманинг проекциясини топинг.

20. Текисликни кесиб ўтмайдиган берилган кесманинг учлари текисликдан 0,3 м ва 0,5 м масофада ётади. Берилган кесмани 3 : 7 га тенг нисбатда бўлувчи нуқта текисликдан қандай масофада ётади?

21. Кесманинг ўртасидан текислик ўтказилган. Кесманинг учлари бу текисликдан баравар масофада ётишини исботланг.

22. Параллелограммнинг диагонали орқали текислик ўтказилган. Иккинчи диагоналнинг учлари бу текисликдан баравар масофада ётишини исботланг.

23. Агар A, B нуқталардан текисликкача масофа: 1) 3,2 см ва 5,3 см; 2) 7,4 см ва 6,1 см; 3) a ва b бўлса, AB кесманинг ўртасидан бу кесмани кесиб ўтмайдиган текисликкача бўлган масофани топинг.

24. Аввалги масалани AB кесма текисликни кесиб ўтадиган шартда ечинг.

25. 1 м узунликдаги кесма текисликни кесиб ўтади, унинг учлари текисликдан 0,5 м ва 0,3 м масофада ётади. Кесманинг текисликдаги проекциясининг узунлигини топинг.

26. Узунлиги 15 м бўлган телефон сими ердан баландлиги 8 м бўлган телефон симёғочидан уйга қараб 20 м баландликка тортилган. Сим осилиб турмаган деб фараз қилиб, симёғочдан уйгача масофани топинг.

27. Трапециянинг битта асоси орқали иккинчи асосидан a масофада ётувчи текислик ўтказилган. Агар трапециянинг асослари $m : n$ га тенг нисбатда бўлса, трапециянинг диагоналлари кесишган нуқтадан шу текисликкача масофани топинг.

28. Параллелограммнинг томони орқали қарама-қарши томонидан a масофада текислик ўтказилган. Параллелограмм диагоналларининг кесишган нуқтасидан шу текисликкача масофани топинг.

29. A, B нуқталардан α текисликка перпендикулярлар туширилган. Агар перпендикулярлар 3 м ва 2 м, уларнинг асослари орасидаги масофа эса 2,4 м га тенг бўлса, ҳамда AB кесма текисликда кесиб ўтмаса, A, B нуқталар орасидаги масофани топинг.

30. Ораларидаги масофа 3,4 м бўлган вертикал турган икки устуннинг учларини ёғоч туташтиради. Бир устуннинг баландлиги 5,8 м, иккинчисиники 3,9 м. Устунларни туташтирувчи ёғочнинг узунлигини топинг.

31. A нуқтадан квадратнинг учларигача масофа a га тенг. Квадратнинг томони b га тенг бўлса, A нуқтадан квадрат текислигигача масофани топинг.

32. Учбурчакка ички чизилган айлананинг марказидан учбурчак текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси учбурчакнинг томонларидан баравар узоқликда туришини исботланг.

33. Учбурчакка радиуси 0,7 м бўлган ички чизилган айлананинг

марказидан учбурчак текислигига узунлиги 2,4 м га тенг перпендикуляр чиқарилган. Бу перпендикулярнинг учидан учбурчакнинг томонларигача массофани топинг.

34. Берилган нуқтадан учбурчак текислигигача масофа 1,1 м га, учбурчакнинг ҳар бир томонигача масофа эса 6,1 м га тенг. Бу учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусини топинг.

35. Тенг томонли ABC учбурчакнинг учидан учбурчак текислигига AD перпендикуляр туширилган. Агар $AD = 13$ см, $BC = 6$ см бўлса, D нуқтадан BC томонгача масофани топинг.

36. b узунликдаги AB кесманинг A учи орқали кесмага перпендикуляр текислик ўтказилган ва бу текисликда тўғри чизиқ ўтказилган. A нуқтадан тўғри чизиққача масофа a га тенг бўлса, B нуқтадан тўғри чизиққача масофани топинг.

37. A нуқтадан квадратнинг ҳамма томонларигача масофа a га тенг. Квадратнинг диагонали d га тенг бўлса, A нуқтадан квадрат текислигигача масофани топинг.

38. Квадратнинг учидан унинг текислигигача перпендикуляр чиқарилган. Бу перпендикулярнинг охиридан квадратнинг бошқа учларигача масофалар a, b га тенг ($a < b$). Перпендикулярнинг узунлигини ва квадратнинг томонини топинг.

39. Тўғри тўртбурчакнинг учидан унинг текислигига перпендикуляр чиқарилган. Бу перпендикуляр охиридан тўғри тўртбурчакнинг бошқа учларигача масофалар a, b, c га тенг ($a < c$, $b < c$). Перпендикулярнинг узунлигини ва тўғри тўртбурчакнинг томонини топинг.

40. Берилган тўғри бурчак текислигидан ташқарида ётган M нуқта бурчакнинг учидан a масофада, унинг томонларидан эса b масофада ётади. M нуқтадан бурчак текислигигача масофани топинг.

41. $ABCD$ тўғри тўртбурчакнинг A учидан унинг текислигига $AҚ$ перпендикуляр чиқарилган, бу перпендикулярнинг $Қ$ охиридан тўғри тўртбурчакнинг бошқа учларигача масофалар 6 м, 7 м ва 9 м га тенг. $AҚ$ перпендикулярнинг узунлигини топинг.

42. Берилган нуқтадан текисликка узунлиги 2 м дан иккита тенг оғма туширилган. Агар оғмалар орасидаги бурчак 60^0, уларнинг проекциялари эса перпендикуляр бўлса, нуқтадан текисликкача масофани топинг.

43. Текисликдан 1 м масофада ётган нуқтадан иккита тенг оғма ўтказилган. Агар оғмалар ўзаро перпендикуляр ва текисликка ўтказилган перпендикуляр билан 60^0 га тенг бурчаклар ташкил этиши маълум бўлса, оғмаларнинг асослари орасидаги масофани топинг.

44. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг C тўғри бурчаги учидан гипотенузага параллел ва ундан 1 м масофада текислик ўтказилган. Катетларнинг бу текисликдаги проекцияси 3 м ва 5 м га тенг. Гипотенузани топинг.

45. Ромбнинг бир томони орқали қарши томонидан 4 м масофада текислик ўтказилган. Диагоналларнинг бу текисликдаги проекциялари 8 м ва 2 м га тенг. Томонлар проекцияларини топинг.

46. Тенг томонли учбурчакнинг томонлари 3 м га тенг. Учбурчакнинг ҳар бир учидан 2 м масофада жойлашган нуқтадан учбурчак текислигигача бўлган масофани топинг.

47. Асоси 6 м ва ён томони 5 м бўлган тенг ёнли учбурчак берилган. Ички чизилган доиранинг марказидан учбурчак текислигига узунлиги 2 м га тенг перпендикуляр чиқарилган. Бу перпендикулярнинг охиридан учбурчакнинг томонларигача масофани топинг.

48. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси ва баландлиги 4 м га тенг. Берилган нуқта учбурчак текислигидан 6 м масофада ва унинг учларидан баравар узоқликда ётади. Шу масофани топинг.

49. Текисликка параллел бўлган AB кесманинг учларидан AC перпендикуляр ва AB кесмага перпендикуляр BD оғма ўтказилган. Агар $AB = a$, $AC = b$, $BD = c$ бўлса, CD масофа нимага тенг?

50. Тўғри бурчаги C бўлган ABC тўғри бурчакли учбурчакнинг ўткир бурчаги учидан учбурчак текислигига AD перпендикуляр чиқарилган. Агар $AC=a$, $BC=b$, $AD=c$ бўлса, D нуқтадан B, C учларгача масофани топинг.

51. ABC учбурчакнинг C тўғри бурчаги учидан учбурчак текислигига CD перпендикуляр чиқарилган. Агар $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ бўлса, D нуқтадан учбурчакнинг гипотенузасигача масофани топинг.

52. a тўғри чизиқ ва α текислик берилган. a тўғри чизиқ орқали α текисликка перпендикуляр текислик ўтказинг.

53. a тўғри чизиқ ва α текислик берилган. α текисликка перпендикуляр ва a тўғри чизиқни кесиб ўтувчи ҳамма тўғри чизиқлар α текисликка перпендикуляр бўлган битта текисликда ётишини исботланг.

54. Икки перпендикуляр текисликда ётувчи A, B нуқталардан текисликлар кесишган тўғри чизиққа AC, BD перпендикулярлар туширилган. AB кесманинг узунлигини топинг, бунда: 1) $AC = 6$ м, $BD = 7$ м, $CD = 6$ м; 2) $AC = 3$ м, $BD = 4$ м, $CD = 12$ м; 3) $AD = 4$ м, $BC = 7$ м, $CD = 1$ м; 4) $AD = BC = 5$ м, $CD = 1$ м; 5) $AC = a$, $BD = b$, $CD=c$, 6) $AD=a$, $BC = b$, $CD = c$.

55. Нуқта икки перпендикуляр текисликдан a, b масофаларда ётади. Бу нуқтадан текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғигача масофани топинг.

56. Тенг томонли ABC учбурчакнинг A, B учларидан учбурчак текислигига AA_1, BB_1 перпендикулярлар чиқарилган. Агар $AB = 2$ м, $CA_1 = 3$ м, $CB_1 = 7$ м бўлса ва A_1B_1 кесма учбурчак текислигини кесиб ўтмаса, C учдан A_1B_1 кесманинг ўртасигача бўлган масофани топинг.

57. Тўғри бурчакли ABC учбурчакнинг A, B ўткир бурчаклари учларидан учбурчак текислигига AA_1, BB_1 перпендикулярлар чиқарилган. Агар $A_1C = 4$ м, $A_1A = 3$ м, $B_1C = 6$ м, $B_1B = 2$ м бўлса ва A_1B_1 кесма учбурчак текислигини кесиб ўтмаса, C учдан A_1B_1 кесманинг ўртасигача масофани топинг.

58. α, β текисликлар перпендикуляр. α текисликда A_1 нуқта олинган, бу нуқтадан c тўғри чизиққача (текисликларнинг кесишган чизиғигача) масофа 0,5 м га тенг. β текисликда c тўғри чизиққа параллел ва ундан 1,2 м масофада b тўғри чизиқ ўтказилган. A нуқтадан b тўғри чизиққача масофани топинг.

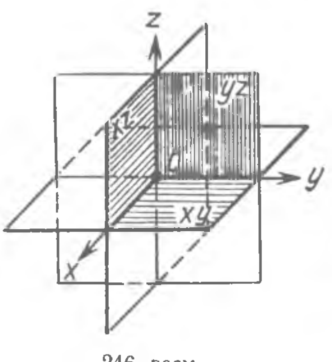
59. Ўзаро перпендикуляр бўлган α, β текисликлар c тўғри чизиқ бўйича кесишади. α текисликда $a \parallel c$ тўғри чизиқ, β текисликда $b \parallel c$ тўғри чизиқ ўтказилган. Агар a, c тўғри чизиқлар орасидаги масофа 1,5 м га, b, c тўғри чизиқлар орасидаги масофа 0,8 м га тенг бўлса, a, b тўғри чизиқлар орасидаги масофани топинг.

60. a тўғри чизиқдаги A нуқта орқали унга перпендикуляр β текислик ва b тўғри чизиқ ўтказилган. b тўғри чизиқнинг β текисликда ётишини исботланг.

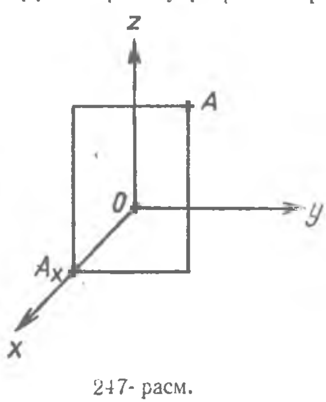
17- §. ФАЗОДА ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИ ВА ВЕКТОРЛАР

ФАЗОДА ДЕКАРТ КООРДИНАТАЛАРИНИ КИРИТИШ

Битта O нуқтада кесишувчи ўзаро перпендикуляр учта x, y, z тўғри чизиқни оламиз (246-расм). Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бир жуфти орқали текислик ўтказамиз. x ва y тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текислик xy текислик дейилади. Бошқа икки текислик мос равишда xz ва yz текисликлар дейилади. x, y, z тўғри чизиқлар *координата ўқлари* дейилади, уларнинг кесишган O нуқтаси—*координаталар боши*, xy, yz ва xz текисликлар эса *координата текисликлари* дейилади. O нуқта координата ўқларининг ҳар бирини иккита ярим тўғри чизиққа — ярим ўқларга ажратади.



246- расм.



247- расм.

Улардан бирини мусбат, иккинчисини манфий деб айтишга шартлашиб оламиз.

Энди ихтиёрий A нуқтани оламиз ва ундан yz текисликка параллел текислик ўтказамиз (247-расм). Бу текислик x ўқни бирор A_x нуқтада кесиб ўтади. A нуқтанинг *x координатаси* деб модули OA_x кесманинг узунлигига тенг сонни айтамиз; бу сон, агар

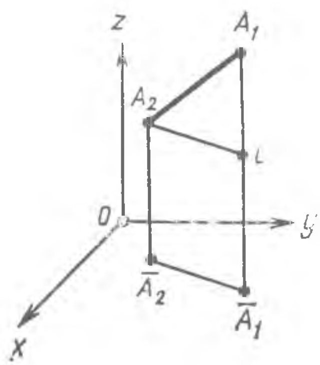
A_x нуқта x нинг мусбат ярим ўқида ётса — мусбат ва манфий ярим ўқда ётса — манфий. Агар A_x нуқта O нуқта билан устма-уст тушса, $x = 0$ деб оламиз. A нуқтанинг y, z координаталари шунинг сингари таърифланади. Нуқтанинг координаталарини нуқтанинг ҳарфий белгиланиши ёнига қавс ичида ёзамиз: $A\ (x,\ y,\ z)$. Баъзан оддийгина қилиб унинг координаталари билан белгилаймиз: $(x,\ y,\ z)$.

Масала (1). $A(1,\ 2, 3)$, $B(0, 1, 2)$, $C\ (0,\ 0,\ 3)$, $D\ (1,\ 2,\ 0)$ нуқталар берилган. Бу нуқталардан қайсилари: 1) xy текисликда; 2) z ўқда; 3) yz текисликда ётади?

Ечилиши. xy текисликдаги нуқталарда z координата нолга тенг. Шунинг учун фақат D нуқта xy текисликда ётади. yz текисликдаги нуқталарда x координата нолга тенг. Демак, B ва C нуқталар yz текисликда ётар экан. z ўқдаги нуқталарнинг иккита координатаси (x ва y) нолга тенг. Шунинг учун C нуқта z ўқда ётади.

Иккита $A_1\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $A_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқталар орасидаги масофани бу нуқталарнинг координаталари орқали ифодалаймиз.

Аввал A_1A_2 тўғри чизиқ z ўқига параллел бўлмаган ҳолни қараймиз (248-расм). A_1 ва A_2 нуқталар орқали z ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Улар xy текисликни $\bar{A}_1$ ва $\bar{A}_2$ нуқталарда кесиб ўтади. Бу нуқталар ҳам A_1, A_2 нуқталар сингари x, y координаталарга эга, лекин уларнинг z координатаси нолга тенг. Энди A_2 нуқта орқали xy текисликка параллел текислик ўтказамиз. У $A_1\bar{A}_1$ тўғри чизиқни бирор C нуқтада кесиб ўтади. Пифагор теоремасига кўра



248-расм.

$$A_1A_2^2 = A_1C^2 + CA_2^2.$$

CA_2 ва $\bar{A}_1\bar{A}_2$ кесмалар тенг ва

$$\bar{A}_1\bar{A}_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

A_1C кесманинг узунлиги $|z_1 - z_2|$ га тенг. Шунинг учун

$$A_1A_2^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2.$$

Агар A_1A_2 кесма z ўқига параллел бўлса: $A_1A_2 = |z_1 - z_2|$. Ҳосил қилинган формула ҳам шу натижани беради, чунки бу ҳолда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Шундай қилиб, A_1 ва A_2 нуқталар орасидаги масофа учун ушбу формула ҳосил бўлади:

$$A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Масала (4). xy текисликда берилган учта $A(0, 1, -1)$, $B(-1, 0, 1)$, $C(0, -1, 0)$ нуқтадан баравар узоқлашган $D(x, y, 0)$ нуқтани топинг.

Ечилиши. Ушбуга эгамиз:

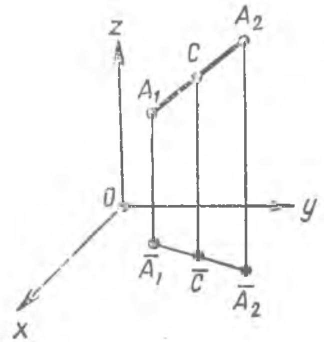
$$AD^2 = (x-0)^2 + (y-1)^2 + (0+1)^2;$$
$$BD^2 = (x+1)^2 + (y-0)^2 + (0-1)^2;$$
$$CD^2 = (x-0)^2 + (y+1)^2 + (0-0)^2.$$

Олдинги иккита масофани учинчисига тенглаб, x, y ни аниқлаш учун иккита тенглама ҳосил қиламиз:

$$-4y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Бундан $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Изланаётган нуқта $D\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, 0\right)$.

$A_1(x_1, y_1, z_1)$ ва $A_2(x_2, y_2, z_2)$ — иккита ихтиёрий нуқта бўлсин. *A_1A_2 кесманинг ўртаси C нуқтанинг x, y, z координаталарини унинг A_1 ва A_2 учлари координаталари орқали ифодалаймиз* (249-расм). Бунинг учун A_1, A_2 ва C нуқталар орқали z ўқига параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Улар xy текисликни $\bar{A}_1(x_1, y_1, 0)$, $\bar{A}_2(x_2, y_2, 0)$ ва $\bar{C}(x, y, 0)$ нуқталарда кесиб ўтади. Фалес теоремасига кўра $\bar{C}$ нуқта $\bar{A}_1\bar{A}_2$ кесманинг ўртаси бўлади. Биз эса xy текисликда кесма ўртасининг координаталари унинг учларининг координаталари орқали



249- расм.

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

формула билан ифодаланишини биламиз. z учун ифода топишда xy текислик ўрнига xz ёки yz текисликни олиш кифоя. Бунда z учун ўхшаш формула ҳосил қилинади:

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Масала (8). Учлари $A(1, 3, 2)$, $B(0, 2, 4)$, $C(1, 1, 4)$, $D(2, 2, 2)$ нуқталардаги $ABCD$ тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.

Ечилиши. Биз диагоналлари кесишиб, кесишиш нуқтасида диагоналлари тенг иккига бўлинадиган тўртбурчакнинг параллелограммлигини биламиз. Бундан масалани ечишда фойдаланамиз. AC кесма ўртасининг координаталари:

$$x = \frac{1+1}{2} = 1, \qquad y = \frac{3+1}{2} = 2, \qquad z = \frac{2+4}{2} = 3.$$

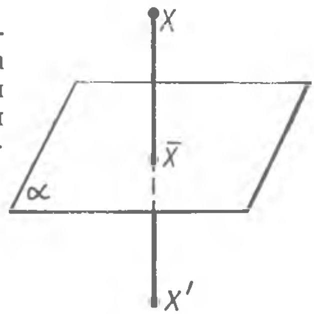
BD кесма ўртасининг координаталари:

$$x = \frac{0+2}{2} = 1, \qquad y = \frac{2+2}{2} = 2, \qquad z = \frac{4+2}{2} = 3.$$

AC ва BD кесмалар ўрталарининг координаталари бир хил эканини кўрамиз. Демак, кесмалар кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади. Демак, $ABCD$ тўртбурчак — параллелограмм.

ФАЗОДА ФИГУРАЛАРНИ АЛМАШТИРИШ

Фазода фигуралар учун алмаштириш тушунчаси худди текисликдаги сингари (9-§) таърифланади. Худди текисликдаги каби нуқта ва тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришлар ҳамда гомотетия таърифланади.



250-расм.

Фазода нуқта ва тўғри чизиққа нисбатан симметриядан ташқари текисликка нисбатан симметрик алмаштириш ҳам қаралади. Бу алмаштириш қуйидагидан иборат (250-расм). α — ихтиёрий тайинланган текислик бўлсин. Фигуранинг X нуқтасидан α текисликка $X\bar{X}$ перпендикуляр туширамиз ва унинг $\bar{X}$ нуқтаси давомида $X\bar{X}$ кесмага тенг $\bar{X}X'$ кесмани қўямиз. X нуқтани унга *симметрик* X' нуқтага ўтказувчи алмаштириш α текисликка нисбатан симметрик алмаштириш дейилади. Агар α текисликка нисбатан симметрик алмаштириш фигурани ўзига алмаштирса, у ҳолда фигура α текисликка *нисбатан симметрик* дейилади, α текислик эса *симметрия текислиги* дейилади.

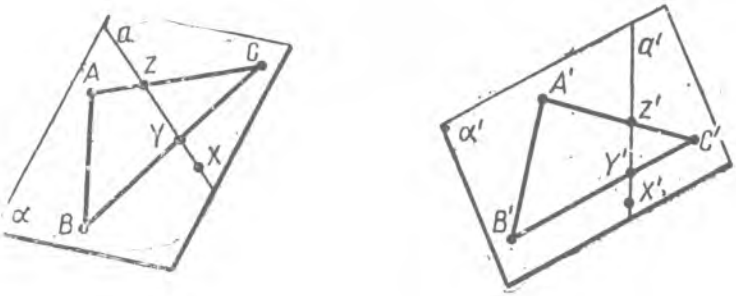
Масала (15). (1, 2, 3), (0, —1, 2), (1, 0, —3) нуқталар берилган. Берилган нуқталарга координата текисликларига нисбатан симметрик нуқталарни топинг.

Ечилиши. (1, 2, 3) нуқтага xy текисликка нисбатан симметрик нуқта xy текисликка перпендикуляр тўғри чизиқда ётади. Шунинг учун ўша x ва y координаталарга эга: $x = 1$, $y = 2$. Симметрик нуқта xy текисликдан бошқа томонда ўша масофада ётади. Шунинг учун унинг z координатаси фақат ишораси билан фарқ қилади, яъни $z = -3$. Шундай қилиб, (1,2,3) нуқтага xy текисликка нисбатан симметрик нуқта (1, 2, —3) бўлади. Бошқа нуқталар ва бошқа координата текисликлари учун ечим шунга ўхшаш бўлади.

Фазода ҳаракат тушунчаси худди текисликдаги каби таърифланади, яъни нуқталар орасидаги масофа сақланадиган алмаштириш *ҳаракат* деб аталади. *Фазода нуқта, тўғри чизиқ ва текисликка нисбатан симметрик алмаштиришлар ҳаракатдир.*

Шунингдек, текисликдаги ҳаракат сингари фазодаги ҳаракатда тўғри чизиқлар тўғри чизиқларга ўтиши, ярим тўғри чизиқлар — ярим тўғри чизиқларга, кесмалар — кесмаларга ўтиши ва ярим тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар сақланиши исбот қилинади.

Фазодаги ҳаракатнинг янги хоссаси шундаки, унда *ҳаракат текисликларни текисликларга ўтказади.* Шу хоссани исботлаймиз.



251- расм.

α — ихтиёрий текислик бўлсин (251-расм). Унда бир тўғри чизиқда ётмаган истаган учта A, B, C нуқталарни белгилаймиз. Бу нуқталар ҳаракат натижасида бир тўғри чизиқда ётмайдиган учта A', B', C' нуқталарга ўтади. Бу нуқталар орқали α' текисликни ўтказамиз. Қаралаётган ҳаракатда α текислик α' текисликка ўтишини исбот қиламиз. X нуқта α текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Бу нуқта орқали α текисликда ABC учбурчакни иккита Y ва Z нуқтада кесиб ўтувчи бирор a тўғри чизиқни ўтказамиз. a тўғри чизиқ ҳаракат натижасида бирор a' тўғри чизиққа ўтади. a тўғри чизиқдаги Y ва Z нуқталар $A'B'C'$ учбурчакка тегишли, демак, α' текисликка тегишли Y', Z' нуқталарга ўтади. Шундай қилиб, a' тўғри чизиқ α' текисликда ётади. X нуқта ҳаракат туфайли a' тўғри чизиқдаги, демак, α' текисликдаги X' нуқтага ўтади. Даъво исботланди.

Фазода *параллел кўчириш* деб шундай алмаштиришга айтиладики, унда фигуранинг ихтиёрий (x, y, z) нуқтаси $(x + a, y + b, z + c)$ нуқтага ўтади, бунда a, b, c — ўзгармаслар. Фазода параллел кўчириш

$$x' = x + a, \qquad y' = y + b, \qquad z' = z + c$$

формулалар билан берилади; бу формулалар параллел кўчиришда (x, y, z) нуқта ўтадиган нуқтанинг x', y', z' координаталарини ифодалайди. Худди текисликдаги сингари параллел кўчиришнинг қуйидаги хоссалари ҳам исботланади:

1. Параллел кўчириш ҳаракатдир.
2. Параллел кўчиришда нуқталар параллел (ёки устма-уст тушувчи) тўғри чизиқлар бўйича бир хил масофага кўчади.
3. Параллел кўчиришда ҳар бир тўғри чизиқ унга параллел тўғри чизиққа (ёки ўзига) ўтади.
4. A ва A' нуқталар қандай бўлмасин, A нуқтани A' нуқтага ўтказадиган ягона параллел кўчириш мавжуд.
5. Кетма-кет бажарилган иккита параллел кўчириш параллел кўчиришни беради.
6. Параллел кўчиришга тескари алмаштириш параллел кўчиришдир.

Масала (17). Агар $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$ формулалар билан берилган параллел кўчиришда A (1, 0, 2) нуқта A' (2, 1, 0) нуқтага ўтса, параллел кўчириш формулаларидаги a, b, c нинг қийматларини топинг.

Ечилиши. Параллел кўчириш формулаларига A, A' нуқталарнинг координаталарини, яъни $x = 1$, $y = 0$, $z = 2$, $x' = 2$, $y' = 1$, $z' = 0$ ларни қўйиб,

$$2 = 1 + a, \ 1 = 0 + b, \ 0 = 2 + c$$

тенгламаларни ҳосил қиламиз, бу тенгламалардан a, b, c лар топилади.

Бундан $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$.

Фазода параллел кўчириш учун қуйидаги хосса янги ҳисобланади:

7. Фазода параллел кўчиришда ҳар бир текислик ё ўзига, ёки ўзига параллел текисликка ўтади.

Исботи. α — ихтиёрий текислик бўлсин. Бу текисликда кесишувчи иккита a, b тўғри чизиқни ўтказамиз. Параллел кўчиришда a, b тўғри чизиқлар ё ўзига, ёки параллел a', b' тўғри чизиқлар орқали ўтувчи бирор α' текисликка ўтади. Агар α' текислик α текислик билан устма-уст тушмаса, у ҳолда 15. 4-теоремага кўра у α текисликка параллел. Даъво исботланди.

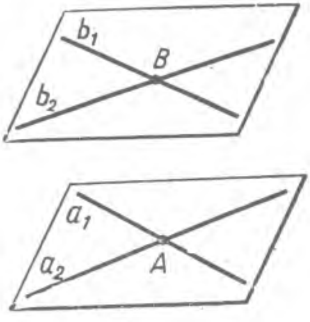
Фазода гомотетия ва ўхшаш алмаштиришлар худди текисликдаги каби таърифланади. Худди текисликдагидек, фазода гомотетиянинг ўхшаш алмаштириш эканлиги исботланади.

ТЎҒРИ ЧИЗИҚЛАР ВА ТЕКИСЛИКЛАР ОРАСИДАГИ БУРЧАКЛАР

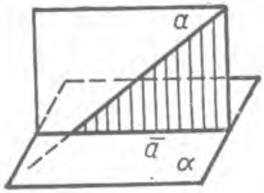
Кесишадиган иккита тўғри чизиқ қўшни ва вертикал бурчаклар ҳосил қилади. Вертикал бурчаклар тенг, қўшни бурчаклар эса бир-бирини 180° гача тўлдиради. Улардан кичигининг бурчак ўлчови *тўғри чизиқлар орасидаги бурчак* дейилади. Перпендикуляр *тўғри чизиқлар орасидаги бурчак* таърифга кўра 90° га тенг. Параллел тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни нолга тенг деб ҳисоблаймиз.

Айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак деб уларга параллел кесишувчи тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка айтилади. Бу бурчак кесишувчи тўғри чизиқларнинг танлаб олинишига боғлиқ эмас. Буни исботлаймиз.

a_1 ва a_2 — берилган айқаш тўғри чизиқларга параллел бўлиб, A нуқтада кесишувчи тўғри чизиқлар бўлсин (252-расм). b_1 ва b_2 — берилган тўғри чизиқларга параллел, B нуқтада кесишувчи бошқа тўғри чизиқлар бўлсин. 15.2-теоремага кўра a_1, b_1 тўғри чизиқлар параллел (ёки устма-уст тушади) ва a_2, b_2 тўғри чизиқлар ҳам параллел (ёки устма-уст тушади). A нуқтани B нуқтага ўтказадиган параллел кўчиришни бажарамиз. Параллел кўчиришда ҳар бир тўғри чизиқ ё ўзига, ёки параллел тўғри чизиққа ўтгани учун кўрсатилган параллел кўчириш a_1 тўғри чизиқни b_1 тўғри чизиққа, a_2 тўғри чизиқни b_2 тўғри чизиққа ўтказади. Парал-



252- расм.



253- расм.

лел кўчириш бурчак катталигини сақлагани учун a_1, a_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак b_1, b_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка тенг. Шуни исботлаш талаб этилган эди.

Аввал берилган таърифга кўра тўғри бурчак остида кесишадиган тўғри чизиқлар перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади. Баъзан орасидаги бурчаги 90^0 га тенг бўлган айқаш тўғри чизиқлар ҳам перпендикуляр тўғри чизиқлар дейилади.

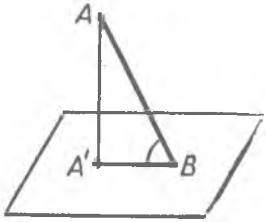
Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак тушунчасига таъриф берамиз. α — текислик ва a — уни кесиб ўтувчи тўғри чизиқ бўлсин (253- расм). a тўғри чизиқнинг нуқталаридан текисликка туширилган перпендикулярларнинг асослари $\bar{a}$ тўғри чизиқда ётади. Бу тўғри чизиқ $\bar{a}$ тўғри чизиқнинг α текисликдаги *проекцияси* дейилади. Тўғри чизиқ билан унинг текисликдаги проекцияси орасидаги бурчак *тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак* дейилади. Тўғри чизиқ билан текислик параллел бўлса, улар орасидаги бурчак нолга тенг деб, ўзаро перпендикуляр тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак эса 90^0 га тенг деб ҳисобланади. a тўғри чизиқ ва унинг α текисликдаги $\bar{a}$ проекцияси ҳамда α текисликнинг a тўғри чизиқ билан кесишган нуқтасидан текисликка ўтказилган перпендикуляр битта текисликда ётгани учун *тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак шу тўғри чизиқ билан текисликка ўтказилган перпендикуляр орасидаги бурчакни 90^0 га тўлдиради.*

Масала (20). A нуқта текисликдан h масофада туради. Шу нуқтадан текисликка: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° бурчак остида ўтказилган оғмаларнинг узунликларини топинг.

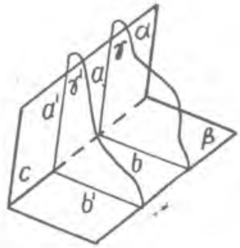
Ечилиши. Текисликка AA' перпендикуляр туширамиз (254- расм). $AA'B$ учбурчак A' учидаги бурчаги тўғри бўлган тўғри бурчакли учбурчакдир. Бу учбурчакнинг AA' катети қаршисида ётган ўткир бурчаги 30° га (мос равишда 45°, 60° га) тенг. Шунинг учун биринчи ҳолда оғма $AB = \frac{AA'}{\sin 30^0} = 2h$. Иккинчи ҳолда $AB = h\sqrt{2}$, учинчи ҳолда $AB = \frac{2h}{\sqrt{3}}$.

Текисликлар орасидаги бурчак тушунчасини таърифлаймиз. Параллел текисликлар орасидаги бурчак нолга тенг деб ҳисобланади.

Берилган текисликлар кесишади деб фараз қилайлик. Уларнинг кесишган тўғри чизиғига перпендикуляр текислик ўтказамиз. Бу текислик берилган текисликларни иккита тўғри чизиқ бўйича кесади.



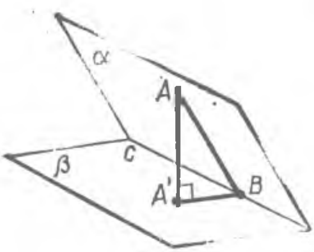
254- расм.



255- расм.

ди. Бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчак *берилган текисликлар орасидаги бурчак* дейилади (255- расм). Текисликлар орасидаги бурчакнинг бу тариқа таърифланганлиги кесувчи текисликнинг танланишига боғлиқ эмас. Шуни исботлаймиз.

α ва β текисликлар c тўғри чизиқ бўйича кесишувчи берилган текисликлар бўлсин. c тўғри чизиққа перпендикуляр γ текисликни ўтказамиз. Бу текислик α, β текисликларни a, b тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. α, β текисликлар орасидаги бурчак a, b тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка тенг. c тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган бошқа кесувчи γ' текисликни оламиз. a', b' — бу текисликнинг α, β текисликлар билан кесишган тўғри чизиқлари бўлсин. γ текисликнинг c тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси γ' текисликнинг c тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасига ўтадиган параллел кўчиришни бажарамиз. Бунда параллел кўчириш хоссасига кўра a тўғри чизиқ a' тўғри чизиққа, b тўғри чизиқ b' тўғри чизиққ ўтади. Бу эса a ва b, a' ва b' тўғри чизиқлар орасидаги бурчаклар тенг демакдир. Даъво исботланди.



256- расм.

М а с а л а (24). Икки текислик 30° бурчак остида кесишади. Бу текисликларнинг бирида ётувчи A нуқта иккинчи текисликдан a масофада ётади. Бу нуқтадан текисликларнинг кесишган тўғри чизиғигача масофани топинг.

Е ч и л и ш и. α, β — берилган текисликлар ва A нуқта α текисликда ётувчи нуқта бўлсин (256- расм). β текисликка AA' перпендикулярни ва текисликлар кесишган c тўғри чизиққа AB перпендикулярни туширамиз. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра $A'B \perp c$. Тўғри бурчакли ABA' учбурчакнинг B учидаги бурчак 30^0 га тенг, бундан:

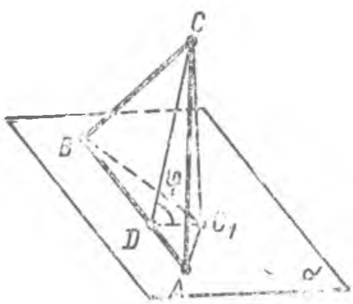
$$AB = \frac{AA'}{\sin 30^0} = a : \frac{1}{2} = 2a.$$

A нуқтадан c тўғри чизиққача масофа $2a$ га тенг.

КЎПБУРЧАК ОРТОГОНАЛ ПРОЕКЦИЯСИНИНГ ЮЗИ

Фигуранинг берилган текисликдаги *ортогонал проекцияси* деб фигуранинг бу текисликка перпендикуляр йўналишдаги параллел проекциясига айтилади.

17.1-теорема. ***Кўпбурчакнинг текисликдаги ортогонал проекциясининг юзи кўпбурчак юзини унинг текислиги билан проекцияси текислиги орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига тенг.***



257- расм.

Исботи. Аввал учбурчак ва унинг бирор томонидан ўтувчи текисликдаги проекциясини қараб чиқамиз (257-расм). ABC учбурчакнинг проекцияси α текисликдаги ABC_1 учбурчакдан иборат. Учбурчакнинг CD баландлигини ўтказамиз. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра C_1D кесма ABC_1 учбурчакнинг баландлигидир. CDC_1 бурчак ABC учбурчак текислиги билан проекция текислиги α орасидаги бурчакка тенг. Қуйидагиларга эгамиз: $C_1D = CD \cdot \cos \varphi$,

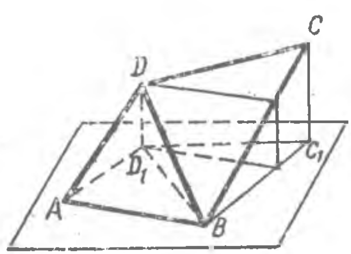
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CD, \quad S_{\triangle ABC_1} = \frac{1}{2} AB \cdot C_1D.$$

Бундан

$$S_{\triangle ABC_1} = S_{\triangle ABC} \cdot \cos\varphi.$$

Шундай қилиб, қаралаётган ҳолда теорема ўринли. α текислик ўрнига унга параллел истаган текислик олинганда ҳам теорема ўз кучини сақлайди. Ҳақиқатан, фигурани параллел текисликларга проекциялаганда унинг проекциялари проекциялаш йўналишида параллел кўчириш натижасида устма-уст келтирилиши мумкин. Параллел кўчиришда устма-уст тушадиган фигуралар эса бир-бирига тенг.

Энди умумий ҳолни қараб чиқамиз. Берилган кўпбурчакни учбурчакларга ажратамиз. Проекция текислигига параллел томони бўлмаган ҳар бир учбурчакни, 258-расмда $ABCD$ тўртбурчак учун қилинганидек, умумий томони проекция текислигига параллел бўлган иккита учбурчакка ажратамиз.



258- расм.

Энди бўлиниш натижасида ажратилган $\triangle$ учбурчакнинг ҳар бири учун ва унинг $\overline{\triangle}$ проекцияси учун $S_{\overline{\triangle}} = S_{\triangle}\cos\varphi$ тенгликни ёзамиз. Бу тенгликларнинг ҳаммасини ҳадма-ҳад қўшамиз. Бунда чап томонда кўпбурчак проекциясининг юзини, ўнг томонда эса кўпбурчак юзини $\cos\varphi$ га кўпайтирилганини ҳосил ҳиламиз. Теорема исботланди.

ФАЗОДА ВЕКТОРЛАР

Фазода текисликдаги сингари *вектор* деб йўналтирилган кесмамага айтилади. Фазода векторлар учун асосий тушунчалар: векторнинг абсолют катталиги (модули), векторнинг йўналиши, векторларнинг тенглиги текисликдаги сингари таърифланади.

Боши A_1 (x_1, y_1, z_1) нуқтада ва охири A_2 (x_2, y_2, z_2) нуқтада бўлган векторнинг *координаталари* деб $x_2 - x_1$, $y_2 - y_1$, $z_2 - z_1$ сонларга айтилади. Худди текисликдаги сингари тенг векторларнинг мос координаталари тенг экани ва аксинча, мос координаталари тенг векторларнинг тенглиги исботланади. Бу эса векторни унинг координаталари билан ифодалашга асос бўлади: $\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ ёки соддароқ $\overline{(a_1, a_2, a_3)}$.

Масала (32). Тўртта нуқта берилган: A (2, 7, —3), B (1, 0, 3), C (—3,—4, 5), D (—2, 3, —1). $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ векторлар орасидан тенг векторларни кўрсатинг.

Ечилиши. Кўрсатилган $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, . . . векторларнинг координаталарини топиш ва мос координаталарни таққослаш керак. Тенг векторларнинг мос координаталари тенг. Масалан, $\overline{AB}$ векторнинг координаталари: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)=6$, $\overline{DC}$ векторнинг координаталари ҳам худди шундай: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Шундай қилиб, $\overline{AB}$, $\overline{DC}$ векторлар тенг. Тенг векторларнинг яна бир жуфти $\overline{BC}$, $\overline{AD}$ дан иборат.

Векторлар устида амаллар: қўшиш, сонга кўпайтириш ва скаляр кўпайтириш амаллари худди текисликдагидек таърифланади. $\overline{a}$ (a_1, a_2, a_3) ва $\overline{b}$ (b_1, b_2, b_3) векторларнинг йиғиндиси деб $\overline{c}$ $(a_1+b_1, a_2+b_2, a_3+b_3)$ векторга айтилади.

$\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ вектор тенглик худди текисликдагидек исботланади.

$\overline{a}(a_1, a_2, a_3)$ векторнинг λ сонга кўпайтмаси деб $\lambda\overline{a} = \overline{(\lambda a_1, \lambda a_2 \lambda a_3)}$ векторга айтилади. Текисликда исбот қилинган сингари, бу ерда ҳам $\lambda\overline{a}$ векторнинг модули $|\lambda|\,|\overline{a}|$ га тенглиги, йўналиши эса $\lambda>0$ учун $\overline{a}$ векторнинг йўналиши билан бир хил ва $\lambda<0$ учун эса $\overline{a}$ векторнинг йўналишига тескари бўлиши исботланади.

Масала (35). $\overline{a}(1, 2, 3)$ вектор берилган. Боши A (1, 1, 1) нуқтада ва охири xy текисликдаги B нуқтада бўлган унга коллинеар векторни топинг.

Ечилиши. B нуқтанинг z координатаси нолга тенг. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари: $x-1$, $y-1$, $0-1=-1$. $\overline{a}$ ва $\overline{AB}$ векторларнинг коллинеарлигидан

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{-1}{3}$$

пропорцияни ҳосил қиламиз. Бундан B нуқтанинг x, y координаталарини топамиз:

$$x=\frac{2}{3}, \qquad y=\frac{1}{3}.$$

$(\overline{a_1, a_2, a_3})$ ва $(\overline{b_1, b_2, b_3})$ векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$ га тенг сонга айтилади. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг модулларини векторлар орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига тенг экани худди текисликдагидек исботланади.

Масала (40). Тўртта нуқта берилган: A (0, 1, —1), B (1, —1, 2), C (3, 1, 0), D (2, —3, 1). $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар орасидаги φ бурчакнинг косинусини топинг.

Ечилиши. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари қуйидагилар бўлади:

$$1-0=1,\ -1-1=-2,\ 2-(-1)=3;$$
$$|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}.$$

$\overline{CD}$ векторнинг координаталари: $2-3=-1$, $-3-1=-4$, $1-0=1$;

$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

Демак,

$$\cos\varphi=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|}=\frac{1\cdot(-1)+(-2)(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=\frac{5}{\sqrt{63}}.$$

Худди текисликдаги векторлар учун бўлганидек фазода ҳам қуйидаги ёйилма ўринли:

$$\overline{a}\ (a_1,\ a_2,\ a_3)=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3},$$

бунда $\overline{e_1}$, $\overline{e_2}$, $\overline{e_3}$ — координата ўқлари йўналишидаги бирлик векторлар. Ҳақиқатан,

$$(\overline{a_1, a_2\ a_3})=(\overline{a_1,\ 0,\ 0})+(\overline{0,\ a_2,\ 0})+(\overline{0,\ 0,\ a_3})=a_1(\overline{1,\ 0,\ 0})+$$
$$+a_2\ (\overline{0,\ 1,\ 0})+a_3\ (\overline{0,\ 0,\ 1})=a_1\overline{e_1}+a_2\overline{e_2}+a_3\overline{e_3}.$$

ТЕКИСЛИК ТЕНГЛАМАСИ

Текислик тенгламасини тузамиз. A_0 $(x_0,\ y_0\ z_0)$ — текисликнинг бирор нуқтаси, $\overline{n}$ $(a,\ b,\ c)$ — текисликка перпендикуляр вектор бўлсин (259-расм). A $(x,\ y,\ z)$ — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overline{A_0A}$ ва $\overline{n}$ векторлар перпендикуляр. Шунинг учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг. $\overline{A_0A}$ векторнинг координаталари $x-x_0$, $y-y_0$, $z-z_0$ га тенг. $\overline{A_0A}\cdot\overline{n}=0$, демак,

$$a\ (x-x_0)+b\ (y-y_0)+c\ (z-z_0)=0. \qquad (*)$$

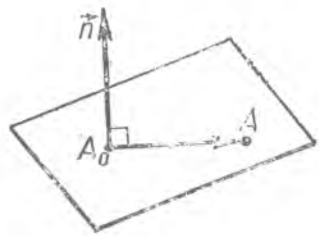
Аксинча, агар $A(x, y, z)$ нуқта бу тенгламани қаноатлантирса, $\overline{A_0A} \cdot \vec{n} = 0$. Демак, A нуқта текисликда ётади.

Шундай қилиб, (*) *тенглама текислик тенгламасидир.*

Шуни айтиб ўтиш керакки,

$$ax + by + cz + d = 0$$

текислик тенгламасидаги a, b, c коэффициентлар текисликка перпендикуляр векторнинг координаталаридир.



259- расм.

Масала (49). A (1, 2, 3) ва B (0, 1, —1) нуқталар берилган. A нуқтадан ўтиб, AB тўғри чизиққа перпендикуляр текисликнинг тенгламасини ёзинг.

Ечилиши. $\overline{AB}$ вектор текисликка перпендикуляр. Унинг координаталари: —1, —1, —4. Шунинг учун текислик тенгламасини бундай ёзиш мумкин: $(-1)\ x + (-1)\ y + (-4)\ z + d = 0$. A нуқта текисликда ётгани учун унинг координаталари шу тенгламани қаноатлантириши керак:

$$(-1) \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + (-4) \cdot 3 + d = 0.$$

Бундан $d = 15$. Изланаётган текисликнинг тенгламаси:

$$-x - y - 4z + 15 = 0.$$

Агар бирор тўғри чизиқ орқали ўтувчи иккита текислик берилган бўлса, уларнинг бу тўғри чизиқни тўла аниқлаб беришини биз биламиз. Бундан эса фазодаги исталган тўғри чизиқ иккита чизиқли тенглама — шу тўғри чизиқ орқали ўтадиган текисликлар тенгламалари билан берилади деган хулоса чиқади:

$$a_1x + a_2y + a_3z + a_4 = 0,$$
$$b_1x + b_2y + b_3z + b_4 = 0.$$

Бу икки тенгламани қаноатлантирувчи (x, y, z) нуқта текисликлардан ҳар бирига тегишли ва, демак, тўғри чизиққа ҳам тегишли. Аксинча, тўғри чизиқдаги ҳар бир нуқтанинг координаталари иккала тенгламани қаноатлантиради, чунки нуқта текисликлардан ҳар бирида ётади.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Фазонинг x, y координаталари нолга тенг нуқталари қаерда ётади?
2. Икки нуқта орасидаги масофани уларнинг координаталари орқали ифодаланг.
3. Кесма ўртасининг координаталарини кесма учларининг координаталари орқали ифодаловчи формулаларни чиқаринг.
4. Нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш нима? Марказий симметрик фигура деб қандай фигурага айтилади?
5. Текисликка нисбатан симметрик алмаштириш нима эканини тушунтиринг. Фигуранинг симметрия текислиги нима?

6. Фигурани қандай алмаштириш ҳаракат дейилади?
7. Нуқтага нисбатан симметрик алмаштиришнинг ҳаракат эканини исботланг.
8. xy координата текислигига нисбатан симметрик алмаштиришнинг $x' = x$, $y' = y$, $z' = -z$ формулалар билан берилишини исботланг. Текисликка нисбатан симметрик алмаштиришнинг ҳаракат эканини исботланг.
9. Фазодаги ҳаракат текисликни текисликка ўтказишини исботланг.
10. Параллел кўчиришга таъриф беринг.
11. Фазода параллел кўчиришда ҳар бир текисликнинг ё ўзига, ёки параллел текисликка ўтишини исботланг.
12. Тўғри чизиқлар орасидаги бурчакка таъриф беринг.
13. $\overline{a}$, $\overline{b}$ векторларни ўз ичига олган тўғри чизиқлар орасидаги φ бурчакнинг

$$|\overline{a} \cdot \overline{b}| = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cos\varphi$$

тенгламадан аниқланишини исботланг.
14. Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакка таъриф беринг.
15. Текисликлар орасидаги бурчакка таъриф беринг.
16. Фигуранинг текисликка ортогонал проекцияси нима?
17. Кўпбурчакнинг текисликдаги ортогонал проекциясининг юзи кўпбурчак юзини унинг текислиги билан проекцияси текислиги орасидаги бурчак косинусига кўпайтмасига тенг эканини исботланг.
18. Боши A_1 (x_1, y_1, z_1) ва охири A_2 (x_2, y_2, z_2) нуқтада бўлган вектор координаталарига таъриф беринг.
19. Векторнинг модули нима? Қандай векторлар бир хил йўналган векторлар дейилади?
20. Векторлар устида бажариладиган амалларга: қўшиш, сонга кўпайтириш, скаляр кўпайтиришга таъриф беринг.
21. Ҳар қандай $\overline{a}$ (a_1, a_2, a_3) векторни $\overline{a} = a_1\overline{e}_1 + a_2\overline{e}_2 + a_3\overline{e}_3$ кўринишида тасвирлаш мумкинлигини исботланг, бунда, $\overline{e}_1$, $\overline{e}_2$, $\overline{e}_3$ — координата ўқлари йўналишидаги бирлик векторлар.
22. Текисликнинг тенгламасини келтириб чиқаринг.
23. Текисликнинг $ax + by + cz + d = 0$ тенгламасидаги a, b, c коэффициентларнинг қандай геометрик маъноси бор?
24. Фазода тўғри чизиқ қандай тенгламалар билан берилади?

МАШҚЛАР

1. A (1, 2, 3), B (0, 1, 2), C (0, 0, 3), D (1, 2, 0) нуқталар берилган. Бу нуқталардан қайсилари: 1) xy текисликда; 2) z ўқда; 3) yz текисликда ётади?
2. A (1, 2, 3) нуқта берилган. Бу нуқтадан координата ўқларига ва координата текисликларига туширилган перпендикулярлар асосларини топинг.
3. (1, 2, —3) нуқтадан: 1) координата текисликларигача; 2) координата ўқларигача; 3) координаталар бошигача бўлган масофаларни топинг.

4. xy текисликда A (0, 1, —1), B (—1, 0, 1), C (0, —1, 0) нуқтадан баравар узоқлашган D (x, y, 0) нуқтани топинг.
5. (0, 0, 1) (0, 1, 0), (1, 0, 0) нуқталардан бир хил масофада ётувчи ва yz текисликдан 2 бирлик масофадаги нуқталарни топинг.
6. x ўқида A (1, 2, 3), B (—2, 1, 3) нуқталардан баравар узоқликдаги C (x, 0, 0) нуқтани топинг.
7. A (1, 2, 3) нуқтадан ва координаталар бошидан баравар узоқлашган фазо нуқталарининг геометрик ўрни тенгламасини тузинг.
8. Учлари A (1, 3, 2), B (0, 2, 4), C (1, 1, 4), D (2, 2, 2) нуқталарда бўлган $ABCD$ тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.
9. Учлари: 1) A (0, 2, —3), B (—1, 1, 1), C (2, —2, —1), D (3, —1, —5); 2) A (2, 1, 3), B (1, 0, 7), C (—2, 1, 5), D (—1, 2, 1) нуқталардаги $ABCD$ тўртбурчакнинг параллелограмм эканини исботланг.
10. Учлари: 1) A (6, 7, 8), B (8, 2, 6), C (4, 3, 2), D (2, 8, 4), 2)A (0, 2, 0), B (1, 0, 0), C (2, 0, 2), D (1, 2, 2) нуқталардаги $ABCD$ тўртбурчакнинг ромб эканини исботланг.
11. Кесманинг бир учи A (2, 3, —1) ва унинг ўртаси C (1, 1, 1) берилган. Кесманинг иккинчи учи B (x, y, z) ни топинг.
12. $ABCD$ параллелограммнинг учта учининг координаталари берилган; тўртинчи D учининг координаталарини топинг:
1) A (2, 3, 2), B (0, 2, 4), C (4, 1, 0); 2) A (1, —1, 0), B (0, 1, —1), C (—1, 0, 1); 3) A (4, 2, —1), B (1, —3, 2), C (—4, 2, 1).
13. Учлари A (a, c, —b) ва B (—a, d, b) нуқталарда бўлган кесма ўртасининг y ўқида ётишини исботланг.
14. Учлари C (a, b, c) ва D (p, q, —c) нуқталарда бўлган кесма ўртасининг xy текисликда ётишини исботланг.
15. (1, 2, 3), (0, —1, 2), (1, 0, —3) нуқталар берилган. Берилган нуқталарга координата текисликларига нисбатан симметрик нуқталарни топинг.
16. (1, 2, 3), (0, —1, 2), (1, 0, —3) нуқталар берилган. Бу нуқталарга координаталар бошига нисбатан симметрик нуқталарни топинг.
17. Агар $x' = x + a$, $y' = y + b$, $z' = z + c$ параллел кўчиришда A (1, 0, 2) нуқта A' (2, 1, 0) нуқтага ўтса, параллел кўчириш формулаларидаги a, b, c нинг қийматларини топинг.
18. Параллел кўчиришда A (2, 1, — 1) нуқта A' (1, — 1, 0) нуқтага ўтади. Координаталар боши қандай нуқтага ўтади?
19. A нуқта B нуқтага, C нуқта D нуқтага ўтадиган параллел кўчириш мавжудми, бунда:
1) A (2, 1, 0), B (1, 0, 1), C (3, — 2, 1), D (2, — 3, 0);
2) A (— 2, 3, 5), B (1, 2, 4), C (4, — 3, 6) D (7, — 2, 5);
3) A (0, 1, 2), B (— 1, 0, 1), C (3, — 2, 2), D (2, — 3, 1);
4) A (1, 1, 0), B (0, 0, 0), C (— 2, 2, 1), D (1, 1, 1)?
20. A нуқта текисликдан h масофада ётади. Бу нуқтадан текис-

ликка: 1) 30°; 2) 45°; 3) 60° ли бурчак остида ўтказилган оғмаларнинг узунликларини топинг.

21. Оғма a га тенг. Агар оғма текислик билан: 1) 45°; 2) 60°; 3) 30° га тенг бурчак ташкил этса, бу оғманинг текисликдаги проекцияси нимага тенг?

22. Узунлиги 10 м га тенг кесма текисликни кесиб ўтади; унинг учлари текисликдан 2 м ва 3 м масофада туради. Берилган кесма билан текислик орасидаги бурчакни топинг.

23. Тенг ёнли иккита учбурчакнинг асослари умумий, уларнинг текисликлари 60° га тенг бурчакни ташкил этади. Умумий асос 16 м га тенг; бир учбурчакнинг ён томони 17 м га тенг, иккинчи учбурчакнинг ён томонлари перпендикуляр. Учбурчакларнинг учлари орасидаги масофани топинг.

24. Иккита текислик 30° га тенг бурчак остида кесишади. Бу текисликларнинг бирида ётган A нуқта иккинчи текисликдан a масофада ётади. Бу нуқтадан текисликларнинг кесишган тўғри чизиғигача масофани топинг.

25. Умумий асоси AB бўлган тенг ёнли ABC ва ABD учбурчаклар турли текисликларда ётади, улар орасидаги бурчак α га тенг. Агар: 1) $AB = 24$ м, $AC = 13$ м, $AD = 37$ м, $CD = 35$ м; 2) $AB = 32$ м, $AC = 65$ м, $AD = 20$ м, $CD = 63$ м бўлса, $\cos\alpha$ ни топинг.

26. Агар кесишадиган иккита текисликнинг бирида олинган нуқта текисликларнинг кесишган тўғри чизиғидан иккинчи текисликка қараганда икки марта узоқроқда жойлашган бўлса, бу икки текислик орасидаги бурчакни топинг.

27. Текисликдан a масофада ётган нуқтадан текислик билан 45° ва 30° ли бурчаклар, ўзаро эса тўғри бурчак ташкил этадиган иккита оғма ўтказилган. Оғмаларнинг учлари орасидаги масофани топинг.

28. Текисликдан a масофада ётган нуқтадан текислик билан 45° ли ва ўзаро 60° ли бурчак ташкил этган иккита оғма ўтказилган. Оғмаларнинг учлари орасидаги масофани топинг.

29. Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катети орқали иккинчи катетига 45° бурчак остида текислик ўтказилган. Гипотенуза билан текислик орасидаги бурчакни топинг.

30. Текисликдан a масофада ётувчи нуқтадан текисликка 30° бурчак остида иккита оғма ўтказилган бўлиб, уларнинг проекциялари 120° ли бурчак ташкил этади. Оғмаларнинг учлари орасидаги масофани топинг.

31. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари 7 м ва 24 м га тенг. Тўғри бурчакнинг учидан гипотенуза орқали ўтувчи ва учбурчак текислиги билан 30° ли бурчак ташкил этувчи текисликкача масофани топинг.

32. Тўртта нуқта берилган: A (2, 7, —3), B (1, 0, 3), C (—3, —4, 5), D (—2, 3, —1), $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ векторлар орасидан тенг векторларни кўрсатинг.

33. Учта нуқта берилган: A (1, 0, 1), B (—1, 1, 2), C (0, 2, —1). Агар: 1) $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар тенг; 2) $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторларнинг йиғиндиси нолга тенг экани маълум бўлса, $D\ (x, y, z)$ нуқтани топинг.

34. m ва n нинг қандай қийматларида берилган векторлар коллинеар бўлади: 1) $\bar{a}\ (2,\ n,\ 3)$, $\bar{b}\ (3,\ 2,\ m)$; 2) $\bar{a}\ (m,\ 2,\ 5)$, $\bar{b}\ (1,\ -1,\ n)$; 3) $\bar{a}\ (m,\ n,\ 2)$, $\bar{b}\ (6,\ 9,\ 3)$?

35. $\bar{a}\ (1,\ 2,\ 3)$ вектор берилган. Боши $A\ (1,\ 1,\ 1)$ нуқтада ва охири xy текисликдаги B нуқтада бўлган ва шу векторга коллинеар векторни топинг.

36. n нинг қандай қийматларида берилган векторлар перпендикуляр бўлади:

1) $\bar{a}\ (2,\ -1,\ 3)$, $\bar{b}\ (1,\ 3,\ n)$; 2) $\bar{a}\ (n,\ -2,\ 1)$, $\bar{b}\ (n,\ -n,\ 1)$; 3) $\bar{a}\ (n,\ -2,\ 1)$, $\bar{b}\ (n,\ 2n,\ 4)$; 4) $\bar{a}\ (4,\ 2n,\ -1)$, $\bar{b}(-1,\ 1,\ n)$?

37. Учта нуқта берилган: $A\ (1,\ 0,\ 1)$, $B\ (-1,\ 1,\ 2)$, $C\ (0,\ 2,\ -1)$. z ўқида шундай $D\ (0,\ 0,\ c)$ нуқтани топингки, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ векторлар перпендикуляр бўлсин.

38. $\bar{a}$, $\bar{b}$ векторлар 60^0 ли бурчак ташкил этади, $\bar{c}$ вектор эса уларга перпендикуляр. $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$ векторнинг модулини топинг.

39. Бирлик узунликдаги $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлар жуфт-жуфти билан 60^0 ли бурчак ташкил этади. 1) $\bar{a}$ ва $\bar{b}+\bar{c}$; 2) $\bar{a}$ ва $\bar{b}-\bar{c}$ векторлар орасидаги φ бурчакни топинг.

40. Тўртта нуқта берилган: $A\ (0,\ 1,\ -1)$, $B\ (1,\ -1,\ 2)$, $C\ (3,\ 1,\ 0)$, $D\ (2,\ -3,\ 1)$. $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар орасидаги φ бурчакнинг косинусини топинг.

41. Учта нуқта берилган: $A\ (0,\ 1,\ -1)$, $B\ (1,\ -1,\ 2)$, $C\ (3,\ 1,\ 0)$. ABC учбурчак C бурчагининг косинусини топинг.

42. ABC учбурчакнинг A учидан учбурчак текислигига AD перпендикуляр чиқарилган. Агар ABD бурчак α га, ABC бурчак эса β га тенг бўлса, $\overline{BC}$ ва $\overline{BD}$ векторлар орасидаги φ бурчакнинг косинусини топинг.

43. Оғма текислик билан 45^0 ли бурчак ташкил этади. Оғма асосидан текисликда оғманинг проекциясига 45^0 ли бурчак остида тўғри чизиқ ўтказилган. Шу тўғри чизиқ билан оғма орасидаги φ бурчакни топинг.

44. Текислик-ташқарисидаги нуқтадан перпендикуляр ва у билан α бурчак ташкил этувчи иккита тенг оғма ўтказилган. Оғмалар орасидаги бурчак β га тенг; оғмаларнинг проекциялари орасидаги φ бурчакни топинг.

45. $\bar{a}\ (2,\ 1,\ -2)$ векторга коллинеар бирлик векторни топинг.

46. Иккита нуқта берилган: $A\ (1,\ 0,\ 2)$ ва $B\ (-1,\ 1,\ 1)$. $\overline{AB}$ векторга коллинеар ва у билан бир хил йўналган $\bar{e}\ (a,\ b,\ c)$ бирлик векторнинг координаталарини топинг.

47. Қандай шарт бажарилганда $\bar{a}\ (a_1,\ a_2\ a_3)$ вектор z ўққа параллел бўлади?

48. Қандай шарт бажарилганда $ax+by+cz+d=0$ тенглама билан берилган текислик xy текисликка параллел бўлади?

49. A (1, 2, 3) ва B (0, 1, —1) нуқталар берилган. A нуқтадан ўтиб, AB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текисликнинг тенгламасини топинг.

50. A нуқтадан ўтиб, AB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текисликнинг тенгламасини тузинг, бунда: 1) A (—1, 1, 2), B (2, 0, 1); 2) A (1, 0, —1), B (4, 3, —3); 3) A (3, —4, 5), B (2, 1, 2).

51. $ax+by+cz+d=0$ текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмаларни топинг; бунда a, b, c, d нолга тенг эмас.

52. $a_1x+b_1y=d_1$, $a_2x+b_2y=d_2$ тенгламалар билан берилган текисликларнинг кесишиш тўғри чизиғи z ўқига параллел эканини исботланг.

53. $ax+by+cz+d=0$, $ax+by+cz+d_1=0$ тенгламалар билан берилган текисликлар $d\neq d_1$ шарт бажарилганда умумий нуқтага эга бўлмаслигини исботланг.

54. $ax+by+cz+d=0$ текисликка параллел ҳар қандай текисликнинг $ax+by+cz+d'=0$ кўринишдаги тенглама билан ифодаланишини исботланг (бунда $d\neq d'$).

55. Текислик $ax+by+cz+d=0$ тенглама билан берилган. P (k, l, m) нуқтадан ва координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқ текисликка перпендикуляр бўлиши учун P (k, l, m) нуқтанинг координаталари қандай шартни қаноатлантириши керак?

56. P (k, l, m) нуқта берилган. Координаталар боши O орқали ўтиб, OP тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган текислик тенгламасини топинг.

57. Қуйидаги тенгламалар билан берилган учта текисликнинг кесишган нуқтасини топинг.
1) $x+y+z=1$, $x-2y=0$, $2x+y+3z+1=0$;
2) $x-y=3$, $y+z=2$, $x-z=4$;
3) $x+2=0$, $2x-y=3$, $3x+2y-z=8$;
4) $x+2y+3z=1$, $3x+y+2z=2$, $2x+3y+z=3$.

58. $x+y+z=1$, $2x+y+3z+1=0$, $x+2z+1=0$ тенгламалар билан берилган текислик битта ҳам умумий нуқтага эга эмаслигини исботланг.

59. Қандай шарт бажарилганда $ax+by+cz+d=0$ тенглама билан берилган текислик: 1) z ўқига параллел; 2) z ўқи орқали ўтади?

60. Қандай шарт бажарилганда $ax+by+cz+d=0$ тенглама билан берилган текислик xy текисликка перпендикуляр?

61. Текислик $2x+3y+z=1$ тенглама билан берилган. Текисликка параллел бўлган бирорта векторни кўрсатинг.

62. Тўғри чизиқ $2x+3y+z=1$, $x+y+z=1$ текисликларнинг кесишмасидан иборат. Шу тўғри чизиққа параллел бирор векторни кўрсатинг.

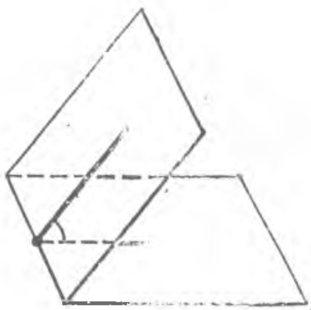
10-синф

18-§. КЎПЁҚЛАР

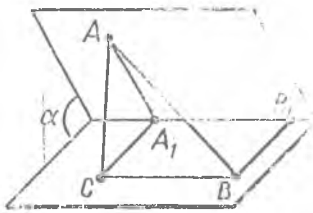
КЎП ЁҚЛИ БУРЧАКЛАР

Иккита ярим текисликлан ва уларни чегаралаб турган умумий тўғри чизиқдан ташкил топган фигура *икки ёқли бурчак* дейилади (260-расм). Ярим текисликлар икки ёқли бурчакнинг *ёқлари*, уларни чегараловчи тўғри чизиқ эса икки ёқли бурчакнинг *қирраси* дейилади.

Икки ёқли бурчакнинг қиррасига перпендикуляр текислик унинг ёқларини иккита ярим тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтади. Бу ярим тўғри чизиқлар ташкил этган бурчак икки ёқли бурчакнинг *чизиқли бурчоги* дейилади. Икки ёқли бурчакнинг ўлчови учун



260-расм.



261-расм.

унга мос чизиқли бурчакнинг ўлчови қабул қилинади. Икки ёқли бурчакнинг ҳамма чизиқли бурчаклари параллел кўчириш натижасида устма-уст тушади, демак, улар тенг. Шунинг учун *икки ёқли бурчакнинг ўлчови чизиқли бурчакнинг танланиб олинишига боғлиқ эмас.*

Масала (1). Икки ёқли бурчакнинг ёқларида ётган A, B нуқталардан бурчакнинг қиррасига AA_1, BB_1 перпендикулярлар туширилган. Агар $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ ва икки ёқли бурчак α га тенг бўлса, AB кесманинг узунлигини топинг (261-расм).

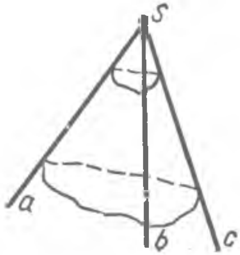
Ечилиши. $A_1C \parallel BB_1$ ва $BC \parallel A_1B_1$ тўғри чизиқларни ўтказамиз. A_1B_1 тўғри чизиқ AA_1C учбурчак текислигига перпендикуляр, чунки у шу текисликдаги иккита AA_1, CA_1 тўғри чизиққа перпендикуляр. Демак, унга параллел BC тўғри чизиқ ҳам шу текисликка перпендикуляр. Шундай қилиб, $ABC - C$ учидаги бурчаги тўғри бурчак бўлган тўғри бурчакли учбурчакдир. Косинуслар теоремаси бўйича

$$AC^2 = AA_1^2 + A_1C^2 - 2AA_1 \cdot A_1C\cos\alpha = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha.$$

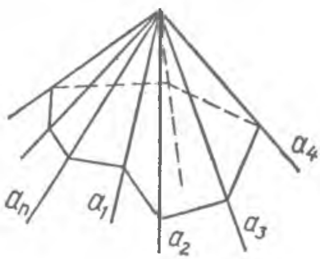
Пифагор теоремасига кўра:

$$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\,\cos\alpha + c^2}.$$

Учта ясси (ab), (bc) ва (ac) бурчакдан ташкил топган фигура *уч ёқли бурчак* (abc) дейилади (262-расм). Бу ясси бурчаклар уч ёқли бурчакнинг *ёқлари*, уларнинг томонлари эса уч ёқли бурчакнинг *қирралари* дейилади. Ясси бурчакларнинг умумий учи уч ёқли бур-



262- расм.

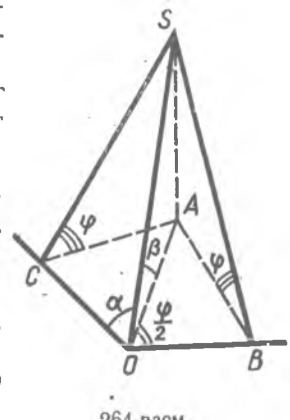


263- расм.

чакнинг *учи* дейилади. Уч ёқли бурчакнинг ёқларидан ташкил топган икки ёқли бурчаклар *уч ёқли бурчакнинг икки ёқли бурчаклари* дейилади.

Шунга ўхшаш $(a_1a_2a_3 \ldots a_n)$ *кўп ёқли бурчак* ҳақидаги тушунча ҳам (a_1a_2), $(a_2\,a_3)$, (a_3a_4), ..., $(a_n\,a_1)$ ясси бурчаклардан тузилган фигура сифатида таърифланади. Кўп ёқли бурчак учун ёқлар, қирралар ва икки ёқли бурчаклар тушунчаси худди уч ёқли бурчакдагидек таърифланади (263-расм).

Масала (3). Уч ёқли бурчакнинг ясси бурчакларидан бири γ га тенг $(\gamma < \pi)$, унга ёпишган икки ёқли бурчаклар эса φ га тенг $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Ясси бурчак α ни ва γ бурчак текислигининг унинг қаршисидаги қирра билан ташкил этган ясси бурчаги β ни топинг.



264-расм.

Ечилиши. γ бурчак қаршисида ётган қирранинг исталган S нуқтасидан γ бурчак текислигига SA перпендикуляр ва унинг томонларига SB, SC перпендикулярлар туширамиз (264- расм). Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра AB, AC кесмалар γ бурчакнинг томонларига перпендикуляр. Тўғри бурчакли SCA, SBA учбурчаклар катетлари ва қаршисида ётган бурчагига кўра тенг. Шунинг учун $AB = AC$. Тўғри бурчакли AOB, AOC учбурчаклар катетига ва гипотенузасига кўра тенг. Шунинг учун

$\angle AOC = \angle AOB = \frac{\gamma}{2}$. Қуйидагиларга эгамиз:

$$SC = \frac{AS}{\sin\varphi}, \quad AC = \frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi}, \quad OA = \frac{AS}{\sin\frac{\gamma}{2}} = \frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi \sin\frac{\gamma}{2}},$$

$$OC = \frac{AC}{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}} = \frac{AS}{\operatorname{tg}\varphi \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}.$$

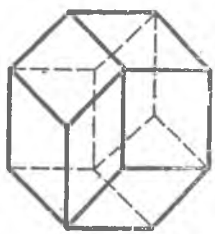
Бундан:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{SC}{OC} = \frac{\operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\sin\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\varphi \cdot \sin\frac{\gamma}{2}.$$

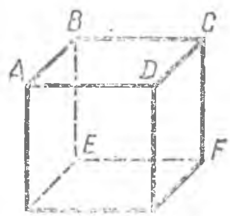
КЎПЁҚ

Чекли миқдордаги текисликлар билан чегараланган жисм *кўпёқ* дейилади. Кўпёқнинг чегараси унинг *сирти* дейилади (265- расм).

Агар кўпёқнинг ўзи уни чегараловчи текисликларнинг ҳар биридан бир томонда ётса, бундай кўпёқ *қавариқ кўпёқ* дейилади. Қавариқ кўпёқнинг сирти билан уни чегаралаб турган текисликнинг



265- расм.



266- расм.

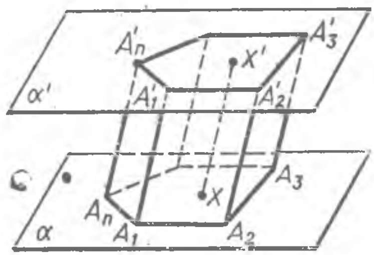
умумий қисми *ёқ* дейилади. Кўпёқ ёқларининг томонлари унинг *қирралари*, учлари эса кўпёқнинг *учлари* дейилади.

Бу таърифни бизга таниш куб мисолида тушунтирамиз (266- расм). Куб қавариқ кўпёқдир. Унинг сирти олтита квадратдан ташкил топган: $ABCD$, $BEFC$, ... Бу квадратлар кубнинг ёқларидир. Бу квадратларнинг AB, BC, BE, . . . томонлари кубнинг қирралари бўлади. Квадратларнинг A, B, C, D, E, . . . учлари кубнинг учлари бўлади. Кубда олтита ёқ, ўн иккита қирра ва саккизта уч бор.

ПРИЗМА

Призма деб иккита параллел текислик орасига жойлашган барча параллел тўғри чизиқлар кесмаларидан тузилган кўпёққа айтиладики, бу кесмалар шу текисликлардан бирида ётган ясси кўпбурчакни кесиб ўтади. Призманинг параллел текисликларда ётган ёқлари *призманинг асослари* дейилади. Бошқа ёқлари призманинг *ён ёқлари* дейилади. Унинг ҳамма ён ёқлари — параллелограммлардир. Призма асосларининг учларини туташтирадиган қирралар унинг *ён қирралари* дейилади. Призманинг ҳамма ён қирралари ўзаро параллел.

267-расмда призма тасвирланган. Бу призма α текисликдаги ясси P кўпбурчакни, яъни $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$ кўпбурчакни кесиб ўтувчи параллел тўғри чизиқларнинг XX' кесмаларидан ташкил топган.



267- расм.

Призманинг асослари P кўпбурчак ва α' текисликдаги унга тенг P' кўпбурчакдан иборат. $A_1A_2A_2'A_1'$, $A_2A_3A_3'A_2'$, . . . параллелограммлар призманинг ён ёқлари бўлади. A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3', . . . кесмалар призманинг ён қирралари.

Призма асосларининг текисликлари орасидаги масофа *призманинг баландлиги* дейилади. Призманинг битта ёғига тегишли бўлмаган икки учини туташтирувчи кесма *призманинг диагонали* дейилади. Призманинг битта ёққа тегишли бўлмаган икки ён қирраси орқали ўтувчи текислик билан кесими *призманинг диагонал кесими* дейилади. Призманинг ён қирралари асосларига перпендикуляр бўлса, у *тўғри призма* дейилади. Акс ҳолда, *оғма призма* дейилади. Тўғри призманинг асослари мунтазам кўпбурчак бўлса, у *мунтазам призма* дейилади.

Масала (8). Призманинг асоси томони a га тенг мунтазам олтибурчакдан, ён ёқлари эса квадратлардан иборат. Призманинг диагоналларини ва диагонал кесимларининг юзларини топинг.

Ечилиши. Призманинг диагонал кесимлари тўғри тўртбурчаклардан иборат бўлиб (268-расм), уларнинг асослари призма асосларининг диагоналлари, баландлиги эса призманинг баландлиги бўлади. Асосининг диагоналларидан каттаси $2a$ га, кичиги $a\sqrt{3}$ га тенг. Призманинг баландлиги асосининг томонига (a га) тенг эканлиги учун диагонал кесимларнинг юзлари $2a^2$ ва $a^2\sqrt{3}$ га тенг. Призманинг диагоналлари диагонал кесимларининг диагоналларидир. Пифагор теоремасига кўра призманинг диагоналлари қуйидагиларга тенг:

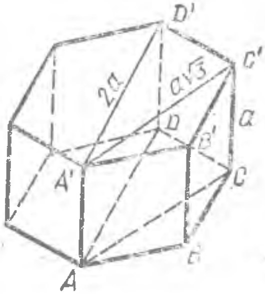
$$\sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}, \quad \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

Призманинг ён ёқлари юзларининг йиғиндиси *призманинг ён сирти* (аниқроғи, ён сиртининг юзи) дейилади. Призманинг *тўлиқ сирти* унинг ён сирти билан асослари юзларининг йиғиндисига тенг.

18.1-теорема. ***Тўғри призманинг ён сирти асосининг периметри билан баландлигининг, яъни ён қирраси узунлигининг кўпайтмасига тенг.***

Исбот. Тўғри призманинг ён ёқлари—тўғри тўртбурчаклар. Бу тўғри тўртбурчакларнинг асослари призманинг асосида ётган кўпбурчакнинг томонлари бўлади, баландликлари эса ён қирраларининг узунлигига тенг. Бундан призманинг ён сирти

$$S = a_1 l + a_2 l + \ldots + a_n l = pl$$



268- расм.


269- расм.

га тенг деган натижа чиқади, бу ерда p — призма асосининг периметри, l — ён қирраларининг узунлиги. Теорема исботланди.

Масала (17). Оғма призмада унинг ён қирраларига перпендикуляр ва ҳамма ён қирраларини кесиб ўтадиган кесим ўтказилган. Кесимнинг периметри p га, ён қирралари эса l га тенг бўлса, призманинг ён сиртини топинг.

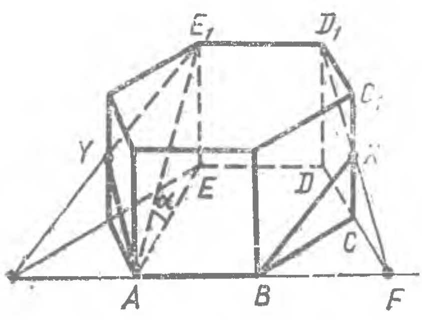
Ечилиши. Ўтказилган кесим текислиги призмани икки қисмга ажратади (269-расм). Улардан бирини призма асосларини устма-уст тушадиган қилиб параллел кўчирамиз. Натижада асоси берилган призманинг кесими, ён қирралари эса l га тенг тўғри призмани ҳосил қиламиз. Бу призманинг ён сирти берилган призманинг ён сиртига тенг бўлади. Шундай қилиб, берилган призманинг ён сирти pl га тенг.

ЯССИ КЕСИМЛАРНИ ЯСАШ

Стереометрияда кўпинча жисмларнинг, жумладан, кўпёқларнинг турли текисликлар билан кесимини қараб чиқишга тўғри келади. Биз 8 ва 17-масалаларни ечиб, энг оддий ҳолларда шундай кесимлар билан иш кўрган эдик. Одатда, масала жисмнинг параллел проекциясини билган ҳолда унинг кесимини ясашдан иборат. Кўпёқларнинг кесимларини ясашда фойдаланиладиган баъзи мулоҳазаларни келтирамиз.

Даставвал шуни эслатамизки, қавариқ кўпёқнинг кесими қавариқ ва ясси кўпбурчак бўлиб, унинг учлари умумий ҳолда кесувчи текисликнинг кўпёқ қирралари билан кесишган нуқталари, томонлари эса унинг ёқлари билан кесишган кесмаларидан иборат.

Текисликларнинг кесишган тўғри чизиғини ясаш учун, одатда, унинг иккита нуқтаси топилади ва улар орқали тўғри чизиқ ўтказилади. Тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишган нуқтасини ясаш учун шу текисликда берил-



270-расм.

ган тўғри чизиқни кесиб ўтадиган тўғри чизиқ топилади. У ҳолда изланаётган нуқта топилган тўғри чизиқ билан берилган тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасида бўлади.

Бу умумий мулоҳазалар қўлланиладиган мисол келтирамиз.

Масала (9). Ён ёқлари квадратлардан иборат олти бурчакли мунтазам призманинг остки асосининг томони ва юқори асосининг унга қарши ётган томони орқали текислик ўтказинг. Асосининг томони a га тенг. Ясалган кесимнинг юзини топинг.

Ечилиши. Кесим AB ва E_1D_1 параллел тўғри чизиқлар орқали ўтади (270- расм). AB ва E_1D_1 қирралар кесимда кўпбурчакнинг томонлари ҳисобланади. Бу кўпбурчакнинг CC_1D_1D ёқда ётган D_1X томонини топамиз. D_1X тўғри чизиқда биз битта D_1 нуқтани биламиз. Иккинчи нуқта AB ва CD тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси F бўлади. Бу нуқта CC_1D_1D ёқ текислигида ва кесим текислигида ётади, демак, уларнинг кесишган тўғри чизиги D_1X да ётади. D_1, F нуқталарни тўғри чизиқ билан туташтириб, X нуқтани ҳосил қиламиз. D_1X кесма кесимнинг CC_1D_1D ёқдаги томонидир. Шунга ўхшаш Y нуқтани топамиз. Кесимда изланаётган кўпбурчак $ABXD_1E_1Y$ дир.

Энди кесимнинг юзини топамиз. Призма асосидаги олтибурчак кесимдаги олтибурчакнинг ортогонал проекциясидир. Шунинг учун кесимнинг юзи $S = \frac{S_0}{\cos\alpha}$, бунда S_0 — призма асосининг юзи, α эса кесувчи текисликнинг асос текислиги билан ҳосил қилган бурчаги.

$EA \perp AB$ бўлгани учун $E_1A \perp AB$ (уч перпендикуляр ҳақидаги теорема). Шунинг учун $\alpha = \angle\ EAE_1$. $EF_1 = a$, $AE = a\sqrt{3}$ (a радиусли айланага ички чизилган мунтазам учбурчакнинг томони) бўлгани учун $AE_1 = \sqrt{a^2 + (a\sqrt{3})^2} = 2a$. Шунинг учун $\cos\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Призма асосининг юзи $S_0 = 6 \cdot \frac{1}{2} a^2 \sin 60^0 = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ га тенг. Шундай қилиб, кесим юзи:

$$S = \frac{S_0}{\cos\alpha} = 3a^2.$$

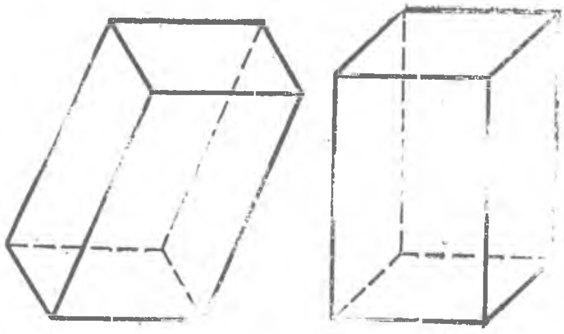
ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

Призманинг асоси параллелограмм бўлса, бундай призма *параллелепипед* дейилади. Параллелепипеднинг ҳамма ёқлари параллелограммлардир. 271-*а* расмда оғма параллелепипед, 271-*б* расмда тўғри параллелепипед тасвирланган.

Параллелепипеднинг умумий учларга эга бўлмаган ёқлари *қарама-қарши ёқлар* дейилади.

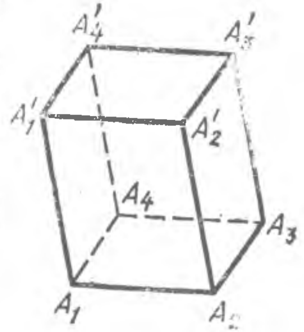
18.2-теорема. ***Параллелепипеднинг қарама-қарши ёқлари параллел ва тенг.***

Исботи. Параллелепипеднинг қарама-қарши ётган иккита ёқни, масалан, $A_1A_2A_2'A_1'$ ва $A_3A_4A_4'A_3'$ ёқларини кўздан кечирайлик (272-расм). Параллелепипеднинг ҳамма ёқлари параллелограммлар бўл-



а) б)

271- расм.



272- расм.

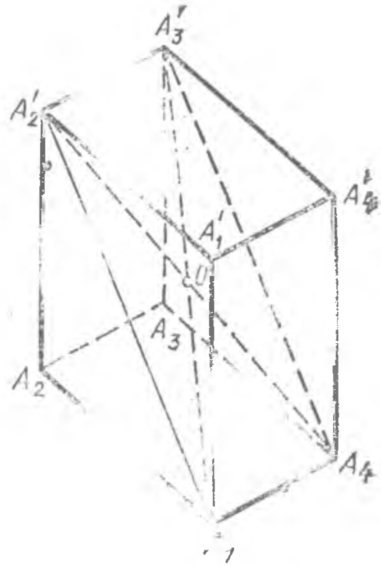
гани учун A_1A_2 тўғри чизиқ A_3A_4 тўғри чизиққа параллел, $A_1A'_1$ тўғри чизиқ эса $A_4A'_4$ тўғри чизиққа параллел. Бундан, қаралаётган ёқларнинг текисликлари параллел деган хулоса чиқади. Параллелепипеднинг ёқлари параллелограмм эканлиги учун A_1A_4, $A'_1A'_4$, $A'_2A'_3$ ва A_2A_3 кесмалар параллел ва тенг. Бундан, $A_1A_2A'_2A'_1$ ёқни A_1A_4 қирра бўйлаб паралле[л] кўчириш натижасида у $A_3A_4A'_4A'_3$ ёқ билан устма-уст тушади деб хулоса чиқарамиз. Демак, бу ёқлар тенг. Параллелепипеднинг исталган бошқа иккита ёғининг параллел ва тенглиги шунга ўхшаш исботланади. Теорема исботланди.

Масала (21). Параллелепипед учта ёғининг юзлари 1 м², 2м² ва 3 м² га тенг. Параллелепипеднинг тўлиқ сирти нимага тенг?

Ечилиши. Параллелепипеднинг қарама-қарши ётган ёқлари тенг ва, демак, юзлари тенг бўлгани учун берилган параллелепипедда юзи 1 м² дан бўлган иккита ёқ, юзи 2 м² дан бўлган иккита ёқ, 3 м² дан иккита ёқ бор. Параллелепипедда олтита ёқ борлиги учун унинг тўлиқ сирти $2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3=12$ м²га тенг.

18. 3-теорема. ***Параллелепипеднинг диагоналлари бир нуқтада кесишади ва кесишган нуқтасида тенг иккига бўлинади.***

Исботи. Параллелепипеднинг (ихтиёрий) иккита диагоналини, масалан, A_1A_3 ва A_4A_2 диагоналларини кўздан кечирайлик (273-расм). Умумий томони A_2A_3 дан иборат $A_1A_2A_3A_4$ ва $A_2A'_2A_3A_3$ тўртбурчаклар параллелограммлар бўл-



273- расм.

гани учун уларнинг A_1A_4 ва $A_2'A_3'$ томонлари ўзаро параллел, демак, улар битта текисликда ётади. Бу текислик қарама-қарши ёқлар текисликларини параллел бўлган A_1A_2', A_4A_3' тўғри чизиқлар бўйлаб кесиб ўтади. Демак, $A_4A_1A_2'A_3'$ тўртбурчак параллелограммдир. Параллелепипеднинг A_1A_3' ва A_4A_2' диагоналлари шу параллелограммнинг ҳам диагоналлари бўлади. Шунинг учун улар кесишади ва кесишиш нуқтаси O да тенг иккига бўлинади. Шунга ўхшаш A_1A_3 ва A_2A_4' диагоналларнинг, шунингдек, A_1A_3 ва A_3A_1' диагоналларнинг ҳам кесишганлиги ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлиниши исботланади. Бундан параллелепипеднинг тўртала диагонали битта нуқтада кесишади ва кесишган нуқтасида тенг иккига бўлинади деган хулоса чиқарамиз. Теорема исботланди.

18.3-теоремадан *параллелепипед диагоналларининг кесишган нуқтаси унинг симметрия маркази экани келиб чиқади.*

Масала (24). Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 3 см ва 5 см, асосининг диагоналларидан бири 4 см. Параллелепипеднинг кичик диагонали асос текислиги билан 60° ли бурчак ташкил этишини билган ҳолда(274-расм) катта диагоналини топинг.

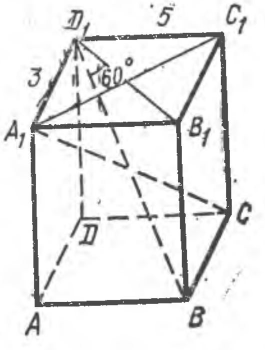
Ечилиши. Асосининг иккинчи диагоналини топамиз. Асос параллелограммдан иборат; параллелограмм диагоналлари квадратларининг йиғиндиси эса унинг томонлари квадратларининг йиғиндисига тенг бўлгани учун асоснинг иккинчи диагонали $\sqrt{2\cdot 3^2+2\cdot 5^2-4^2}=\sqrt{52}>4$ га тенг. Ён қирра $4\operatorname{tg}60°=4\sqrt{3}$ га тенг. Параллелепипеднинг катта диагонали $\sqrt{(\sqrt{52})^2+(4\sqrt{3})^2}=$ $=10$ (см) га тенг.

Асоси тўғри тўртбурчакдан иборат тўғри параллелепипед *тўғри бурчакли параллелепипед* дейилади. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳамма ёқлари тўғри тўртбурчаклардан иборат.

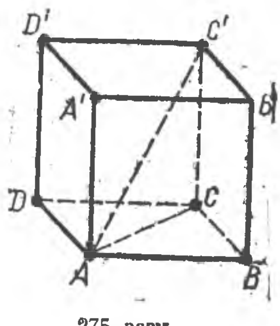
Ҳамма қирралари тенг бўлган тўғри параллелепипед *куб* дейилади.

Тўғри бурчакли параллелепипеднинг параллел бўлмаган қирраларининг узунликлари унинг *чизиқли ўлчовлари* дейилади. Тўғри бурчакли параллелепипедда учта чизиқли ўлчови бор.

18.4-теорема. ***Тўғри бурчакли параллелепипеднинг***

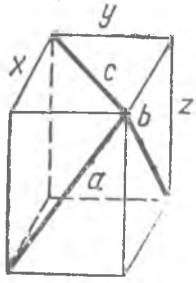


274-расм.



275-расм.

исталган диагоналининг квадрати унинг учта чизиқли ўлчови квадратларининг йиғиндисига тенг.



276- расм.

Исботи. Тўғри бурчакли $ABCDA'B'C'D'$ параллелепипедни қараб чиқамиз (275- расм). Тўғри бурчакли $AC'C$ учбурчакдан Пифагор теоремасига кўра:

$$AC'^2 = AC^2 + CC'^2.$$

Тўғри бурчакли ACB учбурчакдан Пифагор теоремасига кўра: $AC^2 = AB^2 + BC^2$. Бундан

$$AC'^2 = CC'^2 + AB^2 + BC^2.$$

AB, BC, CC' қирралар параллел эмас, демак, уларнинг узунликлари параллелепипеднинг чизиқли ўлчовлари бўлади. Теорема исботланди.

Масала (33). Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учида учрашган учта ёғининг диагоналлари a, b, c га тенг. Параллелепипеднинг чизиқли ўлчовларини топинг.

Ечилиши. Параллелепипеднинг чизиқли ўлчовларини x, y, z билан белгилаймиз (276- расм). Уларда: $x^2 + y^2 = c^2$, $y^2 + z^2 = a^2$, $z^2 + x^2 = b^2$. Дастлабки икки тенгламани ҳадма-ҳад қўшиб ва учинчисини айириб, $2y^2 = c^2 + a^2 - b^2$ ни ҳосил қиламиз. Бундан: $y = \sqrt{\frac{1}{2}(c^2 + a^2 - b^2)}$. Шунга ўхшаш

$x = \sqrt{\frac{1}{2}(b^2 + c^2 - a^2)}$, $z = \sqrt{\frac{1}{2}(a^2 + b^2 - c^2)}$ ни топамиз.

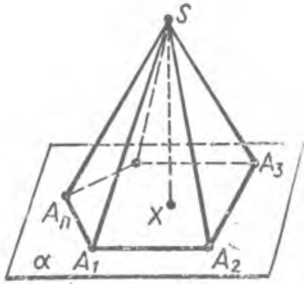
ПИРАМИДА

Пирамида деб берилган нуқтани ясси кўпбурчакнинг нуқталари билан туташтирадиган барча кесмалардан ташкил топган кўпёққа айтилади. Шу берилган нуқта *пирамида учи*, кўпбурчак эса *пирамида асоси* дейилади. Пирамиданинг сирти унинг асосидан ва ён ёқларидан иборат. Ҳар бир ён ёқ — учбурчак. Унинг учларидан бири пирамиданинг учидан ва унга қарши ётган томони эса пирамида асосининг томонидан иборат. Пирамида учини асосининг учлари билан туташтирадиган қирралар пирамиданинг *ён қирралари* дейилади. Пирамиданинг учидан асос текислигига туширилган перпендикуляр *пирамиданинг баландлиги* дейилади.

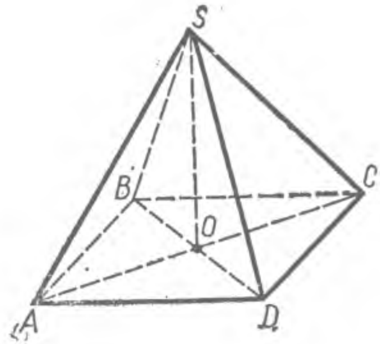
277- расмда пирамида тасвирланган. Унинг асоси $A_1A_2 \ldots A_n$ кўпбурчак, учи — S, ён қирралари — SA_1, SA_2, ... SA_n, баландлиги — SX. Пирамиданинг асоси n бурчак бўлса, у *n бурчакли* пирамида дейилади. Учбурчакли пирамида *тетраэдр* ҳам дейилади.

Масала (35). Пирамиданинг асоси томонлари 6 см ва 8 см га тенг тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг ҳар бир ён қирраси 13 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини ҳисобланг.

Ечилиши. Ҳамма ён қирралар тенг бўлгани учун асоснинг учлари пирамида баландлигининг асосидан бир хил масофада ётади (278- расм), яъни $AO = BO = CO = DO$. Демак, пирамида баландлигининг асоси асосга ташқи чизилган айлананинг маркази, яъни тўғри тўртбурчак диагоналларининг кесишган нуқ-



277- расм.

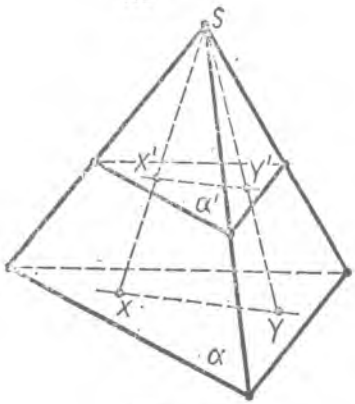


278- расм.

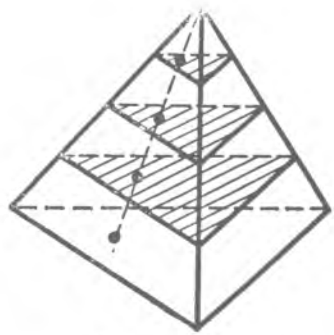
таси бўлади. Шунинг учун пирамиданинг баландлиги тўғри бурчакли учбурчакнинг бир катетига тенг бўлиб, бу учбурчакнинг иккинчи катети асос диагоналининг ярмига, гипотенузаси эса ён қиррага тенг. Асосининг диагонали $AC = \sqrt{6^2+8^2} = 10$ см. Шунинг учун пирамиданинг баландлиги $SO = \sqrt{13^2-5^2} = 12$ см га тенг.

18.5-теорема. ***Пирамиданинг асосига параллел ва уни кесиб ўтадиган текислик шу пирамидага ўхшаш пирамида ажратади.***

Исботи. S нуқта пирамиданинг учи, α унинг асос текислиги ва α' кесувчи текислик бўлсин (279-расм). Пирамиданинг асосида иккита ихтиёрий X ва Y нуқтани оламиз. α' текислик XS ва YS кесмаларни X' ва Y' нуқталарда кесиб ўтади. XY ва $X'Y'$ тўғри чизиқлар параллел, чунки улар битта текисликда — XYS учбурчак текислигида ётади ва кесишмайди. SXY ва $SX'Y'$ учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{X'S}{XS}$, $\frac{Y'S}{YS}$ нисбатлар тенг деган натижа чиқади, яъни $\frac{X'S}{XS} = k$ нисбат олинган X нуқтага боғлиқ эмас. Бун-



279- расм.



280- расм.

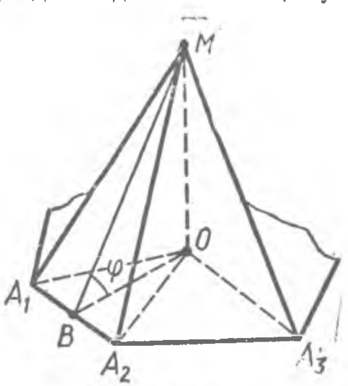
дан α' текисликнинг ажратган пирамидаси берилган пирамидани S нуқтага нисбатан k коэффициентли гомотетик алмаштириш натижасида ҳосил бўлади деган хулоса чиқади. Гомотетик фигуралар эса ўхшашдир. Теорема исботланди.

Масала (36). Пирамиданинг баландлиги тўртта тенг қисмга бўлинган ва бўлиниш нуқталаридан асосига параллел текисликлар ўтказилган. Пирамида асосининг юзи 400 см² га тенг. Кесимларнинг юзларини топинг (280-расм).

Ечилиши. Кесимдаги учбурчаклар пирамида асосига ўхшаш бўлиб, ўхшашлик коэффициентлари $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ ва $\frac{3}{4}$ га тенг. Ўхшаш фигураларнинг юзлари чизиқли ўлчовларининг квадратлари нисбатига тенг. Шунинг учун кесимлар юзларининг пирамида асосининг юзига нисбатлари $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, $\left(\frac{2}{4}\right)^2$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2$ га тенг. Демак, кесимларнинг юзлари қуйидагига тенг:

$$400\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2 = 25 \text{ см}^2,\quad 400\cdot\left(\frac{2}{4}\right)^2 = 100 \text{ см}^2,\quad 400\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2 = 225 \text{ см}^2.$$

Пирамиданинг асоси мунтазам кўпбурчак ва баландлигининг асоси шу кўпбурчакнинг маркази билан устма-уст тушса, бундай пирамида *мунтазам пирамида* дейилади. Мунтазам пирамиданинг баландлиги ётган тўғри чизиқ унинг *ўқи* дейилади. Равшанки, мунтазам пирамиданинг ён қирралари тенг; демак, унинг ён ёқлари тенг ёнли учбурчаклар экан. Мунтазам пирамида ён ёғининг учидан ўтказилган баландлиги *апофема* дейилади. Пирамида ён ёқлари юзларининг йиғиндиси унинг *ён сирти* дейилади.



281- расм.

18.6-теорема. ***Мунтазам пирамиданинг ён сирти асоси периметрининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенг.***

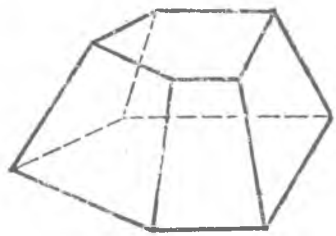
Исботи. Агар пирамида асосининг томони a, томонлари сони эса n та бўлса, пирамиданинг ён сирти: $\frac{la}{2}\ n = \frac{anl}{2} = \frac{pl}{2}$ бўлади, бунда l — апофема, p эса асосининг периметри. Теорема исботланди.

Масала (51). Асосининг юзи Q, асосидаги икки ёқли бурчаклари φ га тенг бўлган пирамиданинг ён сиртини топинг.

Ечилиши. $A_1A_2 \ldots A_n$ — пирамида асосидаги кўпбурчак бўлсин (281-расм). Пирамиданинг MO баландлигини ўтказамиз, 17.1-теоремага кўра $S_{\triangle A_1A_2M} = \frac{S_{\triangle A_1A_2O}}{\cos\varphi}$.

Шунга ўхшаш $S_{\triangle A_2A_3M} = \frac{S_{\triangle A_2A_3O}}{\cos\varphi}$, $S_{\triangle A_3A_4M} = \frac{S_{\triangle A_3A_4O}}{\cos\varphi}$ ни ҳосил қиламиз. Бу тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб, тенгликнинг чап қисмида пирамиданинг ён сиртини, ўнг қисмида эса асоснинг Q юзини $\cos\varphi$ га бўлинганини ҳосил қиламиз. Шундай қилиб, пирамида ён сиртининг юзи $\frac{Q}{\cos\varphi}$ га тенг.

18.5-теоремага кўра пирамида асосининг α текислигига параллел бўлган ва пирамидани кесиб ўтувчи α' текислик пирамидадан унга ўхшаш пирамида ажратади. Ажратилган бўлакнинг иккинчи қисми ҳам кўпёқ бўлиб, *кесик пирамида* деб аталади (282-расм). Кесик пирамиданинг параллел бўлган α, α' текисликларда ётган ёқлари *пирамиданинг асослари* дейилади; қолган ёқлари эса *ён ёқлари* дейилади. Кесик пирамиданинг асослари ўхшаш (ҳатто гомотетик) кўпбурчаклардан, ён ёқлари эса трапециялардан иборат. Мунтазам пирамидадан ҳосил қилинган кесик пирамида мунтазам кесик пирамида дейилади. Мунтазам кесик пирамиданинг ён ёқлари тенг ёнли трапециялардир; уларнинг баландликлари *апофемалар* дейилади.



282- расм.

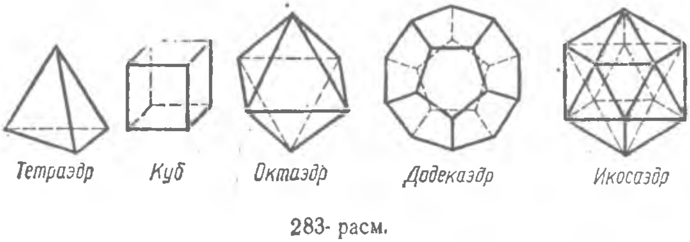
М а с а л а (58). Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти унинг асослари периметрлари йиғиндисининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенглигини исботланг.

Е ч и л и ш и. Пирамиданинг ён ёқлари юқори асоси a, пастки асоси b ва баландлиги (апофемаси) l бўлган трапециялардан иборат. Шунинг учун битта ёқнинг юзи $\frac{1}{2}(a + b)\,l$ га тенг. Ҳамма ёқнинг юзи, яъни ён сирти $\frac{1}{2}(an + bn)\,l$ га тенг, бунда an ва bn — асосларнинг периметрлари.

МУНТАЗАМ КЎПЁҚЛАР

Агар қавариқ кўпёқ ёқларининг томонлари сони бир хил бўлган мунтазам кўпбурчакдан иборат бўлса ва шу билан бирга кўпёқнинг ҳар бир учида бир хил миқдордаги қирралар учрашса, бундай қавариқ кўпёқ *мунтазам кўпёқ* дейилади.

Мунтазам қавариқ кўпёқларнинг бешта тури бор (283-расм): *мунтазам тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.*



283- расм.

Мунтазам тетраэдрнинг ёқлари мунтазам учбурчаклардан иборат; ҳар бир учида учтадан қирра бирлашади. Тетраэдр ҳамма қирралари тенг бўлган учбурчакли пирамидадан иборат.

Кубнинг ҳамма ёқлари квадратлардан иборат; ҳар бир учида учта қирра бирлашади. Куб қирралари тенг бўлган тўғри бурчакли параллелепипеддир.

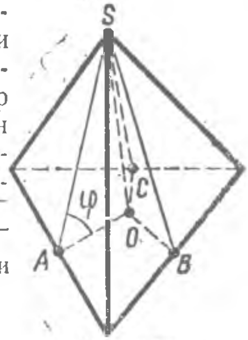
Октаэдрнинг ёқлари мунтазам учбурчаклар бўлиб, тетраэдрдан фарқи шундаки, унинг ҳар бир учида тўрттадан қирра учраш ди.

Додекаэдрнинг ёқлари мунтазам бешбурчаклардан иборат. Унинг ҳар бир учида учтадан қирра учрашади.

Икосаэдрнинг ёқлари мунтазам учбурчаклардан иборат бўлиб, тетраэдр ва октаэдрдан фарқи шундаки, унинг ҳар бир учида бештадан қирра учрашади.

Масала (70). Мунтазам тетраэдрнинг икки ёқли бурчакларини топинг.

Ечилиши. Тетраэдрнинг S учидан шу нуқтада учрашувчи ёқларнинг SA, SB, SC баландликларини ва тетраэдрнинг SO баландлигини ўтказамиз (284-расм). Агар тетраэдрнинг қиррасини a билан белгиласак, ёқларининг баландликлари $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ га тенг бўлади. SA, SB, SC баландликларнинг тенглигидан OA, OB, OC кесмаларнинг тенглиги келиб чиқади. Бу кесмалар тетраэдр асосидаги учбурчакнинг томонларига перпендикуляр (уч перпендикуляр ҳақидаги теорема). Бундан O нуқта тетраэдр асосига ички чизилган айлананинг маркази бўлади деган хулоса чиқади. Демак, OA, OB ва OC кесмалар $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ га тенг. A нуқта ўтган қиррадаги икки ёқли бурчакни φ билан белгилаймиз. У ҳолда



284- расм.

$$\cos\varphi = \frac{OA}{AS} = \frac{a\sqrt{3}}{6} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{3}, \ \varphi \approx 70^0 32'.$$

Тетраэдрнинг бошқа қирраларидаги икки ёқли бурчакларининг ҳам шундай катталикда экани равшан.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Икки ёқли бурчак (бурчак ёғи, бурчакнинг қирраси) нима?
2. Икки ёқли бурчакнинг чизиқли бурчаги нима?
3. Нима учун икки ёқли бурчакнинг ўлчови чизиқли бурчакнинг танланишига боғлиқ эмас?
4. Уч ёқли бурчак (уч ёқли бурчакнинг ёқлари ва қирралари) нима эканини тушунтиринг.
5. Уч ёқли бурчакнинг ясси бурчаклари ва икки ёқли бурчаклари нима эканини тушунтиринг.
6. Кўп ёқли бурчак нима?
7. Кўпёқ нима (кўпёқнинг сирти нима)?
8. Қандай кўпёқ қавариқ дейилади?

9. Қавариқ кўпёқнинг ёғи, қирраси, учи нима?
10. Призма (призманинг асоси, ён ёқлари, қирралари) нима?
11. Призманинг баландлиги нима?
12. Призманинг диагонали нима? Диагонал кесим нима?
13. Қандай призма тўғри (оғма) призма дейилади?
14. Қандай призма мунтазам призма дейилади?
15. Призманинг ён сирти (призманинг тўлиқ сирти) нима?
16. Тўғри призманинг ён сирти асосининг периметри билан призма баландлигининг кўпайтмасига тенг эканини исботланг.
17. Кўпёқларнинг ясси кесимларини ясашда қандай мулоҳазаларга асосланилади?
18. Параллелепипед нима?
19. Параллелепипеднинг қарама-қарши ётган ёқлари параллел ва тенг бўлишини исботланг.
20. Параллелепипеднинг диагоналлари битта нуқтада кесишганлигини ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинишини исботланг.
21. Параллелепипед диагоналларининг кесишган нуқтаси унинг симметрия маркази эканини исботланг.
22. Қандай параллелепипед тўғри бурчакли параллелепипед дейилади? Тўғри бурчакли параллелепипеднинг чизиқли ўлчовлари нима?
23. Куб нима?
24. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг исталган диагоналининг квадрати унинг учта чизиқли ўлчови квадратларининг йиғиндисига тенг эканини исботланг.
25. Пирамида (пирамиданинг асоси, ён ёқлари, қирралари, баландлиги) нима?
26. Пирамиданинг асосига параллел текислик ундан шу пирамидага ўхшаш пирамидани ажратишини исботланг.
27. Қандай пирамида мунтазам пирамида дейилади? Мунтазам пирамиданинг ўқи нима?
28. Мунтазам пирамиданинг апофемаси нима? Мунтазам пирамиданинг ён сирти асоси периметрининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенг бўлишини исботланг.
29. Кесик пирамида нима эканини тушунтиринг. Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти асослари периметрлари йиғиндисининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенглигини исботланг.
30. Қандай кўпёқ мунтазам дейилади?
31. Мунтазам кўпёқларнинг беш турини айтинг ва уларнинг қандай тузилганини сўзлаб беринг.

МАШҚЛАР

1. Икки ёқли бурчакнинг ёқларида ётган A, B нуқталардан бурчакнинг қиррасига AA_1, BB_1 перпендикулярлар туширилган. Агар $AA_1 = a$, $BB_1 = b$, $A_1B_1 = c$ ва икки ёқли бурчак α га тенг бўлса, AB кесманинг узунлигини топинг.
2. 1-масалада $AA_1 = 3$, $BB_1 = 4$, $A_1B_1 = 6$, $AB = 7$ бўлганда α икки ёқли бурчакни топинг.
3. Уч ёқли бурчакнинг ясси бурчакларидан бири γ га тенг $(\gamma < \pi)$, унга ёпишган икки ёқли бурчаклар эса φ га тенг $\left(\varphi < \frac{\pi}{2}\right)$. Ясси

бурчак α ни ва γ бурчак текислигининг қаршисидаги қирра билан ташкил этган ясси бурчак β ни топинг.

4 Уч ёқли бурчакнинг иккита ясси бурчаклари ўткир ва α га тенг, учинчи бурчаги эса γ га тенг. Ясси α бурчаклар қаршисида ётган икки ёқли φ бурчакларни ва γ текислик билан қаршисидаги қирра орасидаги β бурчакни топинг.

5. Учбурчакли тўғри призмада асоснинг томонлари 10 см, 17 см ва 21 см га тенг, призманинг баландлиги эса 18 см га тенг. Ён қирра ва асоснинг кичик баландлиги орқали ўтказилган кесимнинг юзини топинг.

6. Оғма призманинг ён қирраси 15 см га тенг ва асос текислигига 30° бурчак остида оғган. Призманинг баландлигини топинг.

7. Учбурчакли оғма призмада ён қирралар орасидаги масофалар 37 см, 13 см ва 40 см га тенг. Катта ён ёғи билан унинг қаршисидаги ён қирра орасидаги масофани топинг.

8. Призманинг асоси томони a га тенг мунтазам олтибурчакдан, ён ёқлари эса квадратлардан иборат. Призманинг диагоналларини ва диагонал кесимларининг юзларини топинг.

9. Ён ёқлари квадратлардан иборат олти бурчакли мунтазам призманинг ичида остки асосининг томони ва юқори асосининг унга қарши ётган томони орқали текислик ўтказинг. Асосининг томони a. Ясалган кесимнинг юзини топинг.

10. Учбурчакли мунтазам призма остки асосининг томони орқали ён ёқлари билан α бурчак ташкил этувчи тўғри чизиқлар бўйича кесиб ўтувчи текислик ўтказилган. Бу текисликнинг призма асосига оғиш бурчагини топинг.

11. Тўртбурчакли мунтазам призмада асосининг иккита қўшни томонларининг ўрталари орқали учта ён қиррани кесиб ўтадиган ва асос текислигига α бурчак остида оғишган текислик ўтказилган. Асосининг томони a га тенг. Ҳосил бўлган кесимнинг юзини топинг.

12. Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг юзи 144 $см^2$, баландлиги 14 см. Призма диагоналини топинг.

13. Тўртбурчакли мунтазам призма ён ёғининг юзи Q га тенг. Диагонал кесимнинг юзини топинг.

14. Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг томони 15 га, баландлиги 20 га тенг. Асосининг томонидан уни кесиб ўтмайдиган призма диагоналигача энг қисқа масофани топинг.

15. Учбурчакли тўғри призманинг ҳамма қирралари тенг. Ён сирти 12 $м^2$ га тенг. Баландлигини топинг.

16. Тўртбурчакли мунтазам призманинг ён сирти 32 $м^2$ га, тўлиқ сирти эса 40 $м^2$ га тенг. Баландлигини топинг.

17. Оғма призмада унинг ён қирраларига перпендикуляр ва ҳамма ён қирраларини кесиб ўтадиган кесим ўтказилган. Кесимнинг периметри p га, ён қирралари эса l га тенг бўлса, призманинг ён сиртини топинг.

18. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари орасидаги масофа 2 см, 3 см ва 4 см, ён қирралари эса 5 см. Призманинг ён сиртини топинг.

19. Асосининг a томони ва l ён қиррасига кўра: 1) уч бурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) олтибурчакли мунтазам призманинг тўлиқ сиртини топинг.
20. Учбурчакли мунтазам призма асосининг томони ва бу томон қаршисидаги қирранинг ўртасидан ўтадиган текислик асос билан 45^0 ли бурчак ташкил этади. Асосининг томони l га тенг. Призманинг ён сиртини топинг.
21. Параллелепипед учта ёғининг юзи 1 $м^2$, 2 $м^2$ ва 3 $м^2$ га тенг. Параллелепипеднинг тўлиқ сирти нимага тенг?
22. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 6 м ва 8 м бўлиб, 30^0 бурчак ташкил этади, ён қирраси 5 м га тенг. Шу параллелепипеднинг тўлиқ сиртини топинг.
23. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 3 см ва 8 см; улар орасидаги бурчак 60^0. Ён сирти 220 $см^2$ га тенг. Тўлиқ сиртини топинг.
24. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 3 см ва 5 см, асосининг диагоналларидан бири 4 см. Параллелепипеднинг кичик диагонали асос текислиги билан 60^0 ли бурчак ташкил этишини билган ҳолда катта диагоналини топинг.
25. Ҳар бир қирраси a га тенг, асосининг бурчаги 60^0 га тенг бўлган тўғри параллелепипеднинг диагоналларини топинг.
26. Тўғри параллелепипеднинг ён қирраси 5 м га, асосининг томонлари 6 м ва 8 м га, асосининг диагоналларидан бири 12 м га тенг. Параллелепипеднинг диагоналларини топинг.
27. Тўғри параллелепипеднинг ён қирраси 1 м га, асосининг томонлари 23 дм ва 11 дм га тенг, асосининг диагоналлари эса 2 : 3 каби нисбатда. Диагонал кесимларининг юзларини топинг.
28. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг диагоналларини унинг учта ўлчовига кўра топинг: 1) 1, 2, 2; 2) 2, 3, 6; 3) 6, 6, 7.
29. Кубнинг қирраси a га тенг. Кубнинг бир учидан қолган икки учини туташтирувчи диагоналигача бўлган масофани топинг.
30. Тўғри бурчакли параллелепипед асосининг томонлари 7 дм ва 24 дм, параллелепипеднинг баландлиги эса 8 дм. Диагонал кесимнинг юзини топинг.
31. Тўғри параллелепипеднинг учта ўлчови бўйича сиртини топинг: 10 см, 22 см, 16 см.
32. Агар тўғри параллелепипеднинг баландлиги h, асосининг юзи Q, диагонал кесимининг юзи эса M бўлса, унинг ён сиртини топинг.
33. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг бир учида учрашган уч ёғининг диагоналлари a, b, c га тенг. Параллелепипеднинг чизиқли ўлчовларини топинг.
34. Пирамиданинг асоси — тенг ёнли учбурчак бўлиб, бу учбурчакнинг асоси 12 см, ён томони эса 10 см. Ён ёқлар асос билан ҳар бири 45^0 дан бўлган икки ёқли бурчакларни ташкил қилади. Пирамиданинг баландлигини топинг.
35. Пирамиданинг асоси томонлари 6 см ва 8 см га тенг тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг ҳар бир ён қирраси 13 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини ҳисобланг.
36. Пирамиданинг баландлиги тўртта тенг қисмга бўлинган ва бўлиниш нуқталаридан асосига параллел текисликлар ўтка-

зилган. Пирамида асосининг юзи 400 $см^2$ га тенг. Кесимларнинг юзларини топинг.

37. Пирамиданинг баландлиги 16 м га тенг. Асосининг юзи 512 $м^2$ га тенг. Агар асосга параллел ҳолда ўтказилган кесимнинг юзи 50 $м^2$ бўлса, бу кесим асосдан қандай масофада бўлади?
38. Пирамиданинг асоси мунтазам учбурчакдан иборат; ён ёқларидан бири асосга перпендикуляр, қолган иккитаси асосга α бурчак остида оғишган. Ён қирралар асос текислигига қандай оғишган?
39. Пирамиданинг асоси гипотенузаси a га тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Ҳар бир ён қирраси асос текислиги билан β бурчак ташкил қилади. Пирамиданинг баландлигини топинг.
40. Пирамиданинг асоси катетлари 6 см ва 8 см бўлган тўғри бурчакли учбурчак. Ҳамма ён ёқлари асос текислиги билан 60 бурчак ҳосил қилади. Пирамиданинг баландлигини топинг.
41. Учбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони орқали унга қарши ётган ён қиррага перпендикуляр текислик ўтказилган. Агар асосининг томони a, пирамиданинг баландлиги h бўлса, кесим юзини топинг.
42. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги 7 см га, асосининг томони эса 8 см га тенг. Ён қиррасини топинг.
43. Пирамиданинг асоси параллелограмм бўлиб, унинг томонлари 3 см ва 7 см, диагоналларидан бири 6 см; пирамиданинг баландлиги диагоналлар кесишган нуқтадан ўтиб, 4 см га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.
44. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг учидаги ясси бурчаги α га тенг. Пирамида асосидаги икки ёқли x бурчакни топинг.
45. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) олтибурчакли мунтазам пирамида асосининг a томони ва b ён қиррасига кўра баландлигини топинг.
46. 1) Учбурчакли; 2) тўрт бурчакли; 3) олти бурчакли мунтазам пирамида асосининг a томони ва b баландлигига кўра апофемасини топинг.
47. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) олтибурчакли мунтазам пирамида асосининг a томони ва b баландлигига кўра тўлиқ сиртини топинг.
48. Олтибурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси a, асосига ички чизилган айлананинг радиуси r бўлса, тўлиқ сиртини топинг.
49. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён сирти 14,76 $м^2$ га, тўлиқ сирти 18 $м^2$ га тенг. Пирамида асосининг томонини ва баландлигини топинг.
50. Асосининг a томони бўйича ва диагонал кесими асосига тенгдош эканини билган ҳолда тўрт бурчакли мунтазам пирамиданинг ён сиртини топинг.
51. Асосининг юзи Q, асосидаги икки ёқли бурчаклари φ га тенг бўлган пирамиданинг ён сиртини топинг.
52. Асосининг юзи Q га, ён сирти S га тенг бўлган мунтазам пирамида асосидаги икки ёқли бурчакларини топинг.
53. Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси 10 см га,

ён сирти эса $144\ см^2$ га тенг бўлса, асосининг томонини ва апофемасини топинг.

54 Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси 5 см га, тўлиқ сирти $16 см^2$ га тенг бўлса, шу пирамида асосининг томонини топинг.

55. Пирамиданинг асоси диагоналлари 6 м ва 8 м га тенг ромб; пирамиданинг баландлиги ромб диагоналларининг кесишган нуқтасидан ўтади ва 1 м га тенг. Пирамиданинг ён сиртини топинг.

56. Пирамиданинг асоси — томонлари 40 см, 25 см ва 25 см бўлган тенг ёнли учбурчак. Пирамиданинг баландлиги 40 см ли томон қаршисида ётган бурчакнинг учидан ўтади ва 8 см га тенг. Пирамиданинг ён сиртини топинг.

57. Пирамиданинг асоси квадрат, баландлиги асосининг учларидан бири орқали ўтади. Агар пирамида асосининг томони 20 дм га, баландлиги эса 21 дм га тенг бўлса, унинг ён сиртини топинг.

58. Мунтазам кесик пирамиданинг ён сирти унинг асослари периметрлари йиғиндисининг ярми билан апофемасининг кўпайтмасига тенглигини исботланг.

59. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг баландлиги 7 см га тенг. Асосларининг томонлари 10 см ва 2 см га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.

60. Учбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари 4 дм ва 1 дм. Ён қирраси 2 дм. Пирамиданинг баландлигини топинг.

61. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг баландлиги 2 см га, асосларининг томонлари 3 см ва 5 см га тенг. Пирамиданинг диагоналини топинг.

62. Учбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари 2 см ва 6 см. Ён ёғи катта асоси билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Баландлигини топинг.

63. Учбурчакли мунтазам кесик пирамида катта асосининг томони a, кичик асосининг томони b. Ён қирраси асоси текислиги билан 45° ли бурчак ташкил этади. Пирамиданинг ён қиррасидан ва ўқидан* ўтувчи кесимнинг юзини топинг.

64. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамиданинг баландлиги 4 га тенг. Асосларининг томонлари 2 ва 8 га тенг. Диагонал кесимларининг юзларини топинг.

65. Учбурчакли мунтазам кесик пирамида асосларининг томонлари 8 м ва 5 м, баландлиги 3 м. Остки асосининг томони ва устки асосининг унга қарши ётган учи орқали кесим ўтказинг. Кесимнинг юзини ва кесим билан остки асос томони орасидаги икки ёқли бурчакни топинг.

66. Тўртбурчакли мунтазам кесик пирамида асосининг томонлари 8 м ва 2 м. Баландлиги 4 м га тенг. Тўлиқ сиртини топинг.

67. Баландлиги h, асосларининг томонлари a ва b бўлган: 1) учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) олтибурчакли мунтазам кесик пирамиданинг тўлиқ сиртини топинг.

68. Куб ёқларининг марказлари октаэдрнинг учлари бўлишини,

---

*Мунтазам кесик пирамиданинг ўқи мос тўла пирамиданинг ўқи билан устма-уст тушади.

октаэдр ёқларининг марказлари эса кубнинг учлари бўлишини исботланг.

69. Кубнинг қарама-қарши ёқларидаги ўзаро параллел бўлмаган иккита диагоналининг учлари тетраэдрнинг учлари эканини исботланг.

70. Мунтазам тетраэдрнинг икки ёқли бурчакларини топинг.

71. Октаэдрнинг икки ёқли бурчакларини топинг.

19- §. АЙЛАНМА ЖИСМЛАР

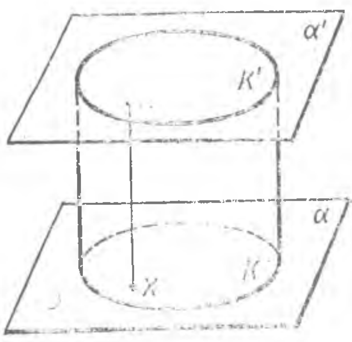
ЦИЛИНДР

Иккита параллел текислик орасига жойлашган ва бу текисликлардан биридаги доирани кесиб ўтадиган ҳамма параллел тўғри чизиқлар кесмаларидан ташкил топган жисм *цилиндр* (аниқроғи доиравий цилиндр) дейилади. Учлари бу доиранинг айланасида ётган кесмалар *цилиндрнинг ясовчилари* дейилади.

Цилиндрнинг сирти *цилиндр асосларидан* — параллел текисликларда ётган иккита тенг доирадан ва *ён сиртидан* иборат.

Цилиндрнинг ясовчилари асос текисликларига перпендикуляр бўлса, бундай цилиндр *тўғри цилиндр* дейилади. Келгуси баёнимизда биз фақат тўғри цилиндрни кўзда тутамиз ва уни қисқалик учун цилиндр деб атаймиз.

285- расмда тўғри цилиндр тасвирланган. У α ва α' параллел текисликлар орасига олинган параллел тўғри чизиқларнинг XX'



285- расм.

286- расм.

кесмаларидан ташкил топган. α, α' текисликлардаги K, K' доиралар цилиндрнинг асослари ҳисобланади.

Тўғри цилиндрни тўғри тўртбурчакни айлантириш ўқи вазифасини бажарган бирор томони атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган жисм деб қараш мумкин (286- расм).

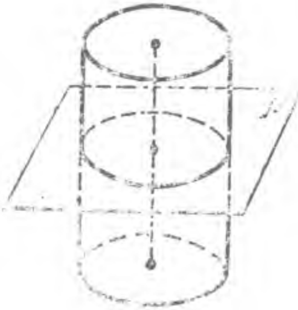
Цилиндр асосининг радиуси цилиндрнинг *радиуси* дейилади. Цилиндр асосларининг текисликлари орасидаги масофа цилиндрнинг *баландлиги* дейилади. Асосларининг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқ *цилиндрнинг ўқи* дейилади. Бу ўқ ясовчиларга параллел бўлади. Цилиндрнинг ўқи орқали ўтувчи кесим *ўқ кесим* дейилади. Цилиндрнинг ясовчиси орқали ўтиб, бу ясовчи орқали ўтадиган ўқ кесимга перпендикуляр текислик цилиндрнинг *уринма текислиги* дейилади.

Масала (2). Цилиндрнинг ўқ кесими — юзи Q га тенг квадрат. Цилиндр асосининг юзини топинг.

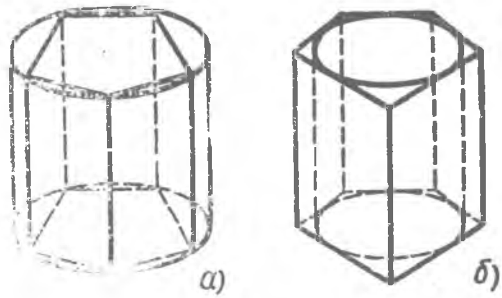
Ечилиши. Квадратнинг томони $\sqrt{Q}$ га тенг. У асосининг диаметрига тенг. Шунинг учун асосининг юзи $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2=\frac{\pi Q}{4}$ га тенг.

19.1-теорема. ***Цилиндр ўқига перпендикуляр текислик унинг ён сиртини асос айланасига тенг айлана бўйича кесади.***

Исбот. β — цилиндрнинг ўқига перпендикуляр текислик бўлсин (287-расм). Бу текислик цилиндр асосларига параллел. β текисликни цилиндрнинг асос текислиги билан устма-уст туши-

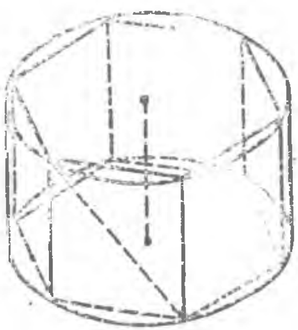


287-расм.



288-расм.

рувчи цилиндр ўқи йўналишидаги параллел кўчириш ён сиртнинг β текислик ҳосил қилган кесимни асос айланаси билан устма-уст туширади. Теорема исботланди.



289-расм.

Цилиндрга *ички чизилган* призма деб шундай призмага айтиладики, унинг асослари цилиндрнинг асосларига ички чизилган тенг кўпбурчаклардан иборат. Унинг ён қирралари цилиндрнинг ясовчилари бўлади (288-*а* расм). Цилиндрга *ташқи чизилган* призма деб шундай призмага айтиладики, унинг асослари цилиндрнинг асосларига ташқи чизилган тенг кўпбурчаклардан иборат. Унинг ён ёқлари текисликлари цилиндрнинг ён сиртига уринади (288-*б* расм).

Масала (7). Цилиндрга олти бурчакли мунтазам призма ички чизилган. Цилиндр асосининг радиуси баландлигига тенг бўлса, призма ён ёғи диагонали билан цилиндр ўқи орасидаги бурчакни топинг.

Ечилиши. Призманинг ён ёқлари — квадратлар, чунки айланага ички чизилган мунтазам олтибурчакнинг томони радиусга тенг (289- расм). Призманинг қирралари цилиндрнинг ўқига параллел, шунинг учун ён ёғи диагонали билан цилиндр ўқи орасидаги бурчак диагональ билан ён қирра орасидаги бурчакка тенг. Бу бурчак эса 45^0 га тенг, чунки ёқлар — квадратлардир.

КОНУС

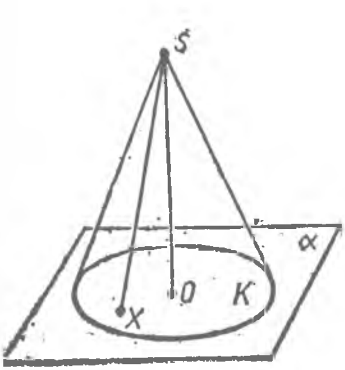
Конус (аниқроғи доиравий конус) деб шундай жисмга айтиладики, у берилган нуқтани бирор доира нуқталари билан туташтирувчи ҳамма кесмалардан ташкил топган бўлиб, берилган нуқта *конус учи*, доира эса *конус асоси* дейилади. Конус учини асос айланаси нуқталари билан туташтирувчи кесмалар *конуснинг ясовчилари* дейилади. Конуснинг сирти асосидан ва *ён сиртидан* иборат.

Конуснинг учи билан асос айланасининг марказини туташтирувчи тўғри чизиқ асос текислигига перпендикуляр бўлса, бундай конус *тўғри конус* дейилади. Бундан кейин биз фақат тўғри конусни қараймиз ва уни қисқалик учун конус деб атаймиз.

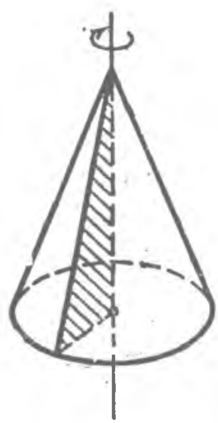
290- расмда тўғри конус тасвирланган. Унинг учи S нуқта, асоси эса α текисликдаги K доира бўлади. Конус S учни асосининг X нуқталари билан туташтирувчи ҳамма SX кесмалардан ҳосил қилинган.

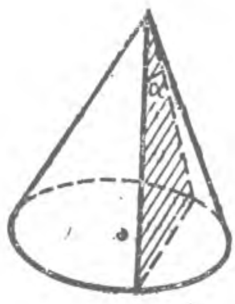
Тўғри конусни тўғри бурчакли учбурчакни айлантириш ўқи вазифасини бажарган катети атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган жисм деб қараш мумкин (291- расм).

Конуснинг учидан унинг асосига туширилган перпендикуляр конуснинг *баландлиги* дейилади. Тўғри конус баландлигининг асоси асос маркази билан устма-уст тушади. Тўғри конуснинг баландлигидан ўтувчи тўғри чизиқ унинг *ўқи* дейилади. Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесими *ўқ кесим* дейилади. Конуснинг ясовчиси орқали ўтувчи ва бу ясовчи орқали ўтказилган ўқ кесимга перпендикуляр текислик конуснинг *уринма текислиги* дейилади.



290- расм.


291- расм.



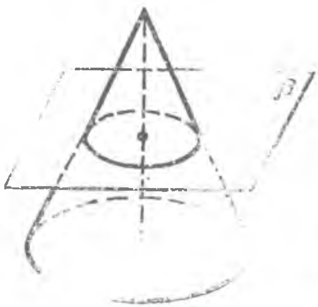
292- расм.

Масала (12). Тенг томонли конус (ўқ кесими — мунтазам учбурчак) асосининг радиуси R га тенг. Ораларидаги бурчаги α га тенг бўлган икки ясовчи орқали ўтказилган кесимнинг юзини топинг.

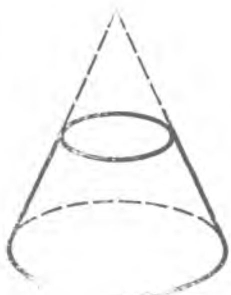
Ечилиши. Кесим тенг ёнли учбурчакдан иборат бўлиб, унинг ён томонлари асоснинг диаметрига ($2\ R$ га) тенг ва бу томонлар орасидаги бурчак α га тенг (292- расм). Бу учбурчакнинг юзи $\frac{1}{2}(2R)\ (2R)\ \sin\alpha = 2R^2\ \sin\alpha$ га тенг.

19.2- теорема. ***Конуснинг ўқига перпендикуляр текислик конусни доира бўйича кесади, ён сиртини эса маркази конуснинг ўқида жойлашган айлана бўйича кесиб ўтади.***

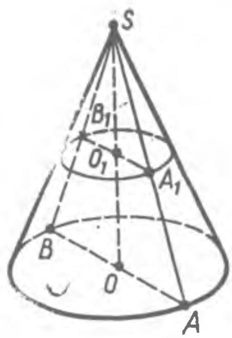
Исботи. β — конуснинг ўқига перпендикуляр ва конус билан кесишадиган текислик бўлсин (293- расм). β текисликни асос текислиги билан устма-уст туширувчи конус учига



293- расм.



294- расм.



295- расм.

нисбатан гомотетик алмаштириш конуснинг β текислик билан кесимини конуснинг асоси билан устма-уст туширади. Демак, конуснинг текислик билан кесими доирадир, ён сиртининг кесими эса маркази конус ўқида жойлашган айланадир.

Конуснинг ўқига перпендикуляр текислик ундан кичик конус ажратади. Қолган қисми *кесик конус* дейилади (294- расм).

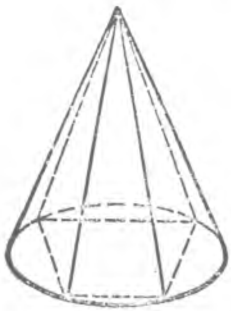
Масала (15). Конус учидан d масофада турган ва асосга параллел бўлган текислик конусни кесиб ўтади. Конус асосининг радиуси R, баландлиги эса H бўлса, кесимнинг юзини топинг.

Ечилиши. Конуснинг ўқ кесимини ўтказамиз (295- расм). SAB ва SA_1B_1 учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SO_1}{SO}$ ни ҳосил қиламиз. $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$ (r — кесимдаги доиранинг радиуси), $OS = H$, $O_1S = d$, булардан:

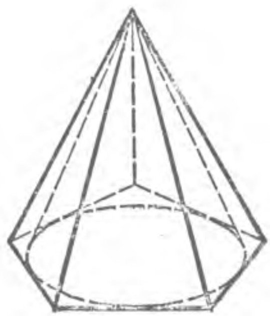
$$\frac{2r}{2R} = \frac{d}{H}, \quad r = \frac{Rd}{H}.$$

Кесим юзи $\pi r^2 = \pi\left(\frac{Rd}{H}\right)^2$.

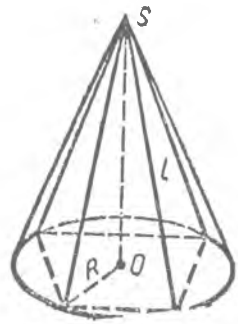
Асоси конус асосидаги айланага ички чизилган кўпбурчак бўлиб, учи эса конуснинг учида бўлган пирамида *конусга ички чизилган* пирамида дейилади (296- расм). Конусга ички чизилган пирамиданинг ён қирраси конуснинг ясовчилари бўлади. Асоси



296- расм.



297- расм.



298- расм.

конуснинг асосига ташқи чизилган кўпбурчак бўлиб, учи эса конуснинг учи билан устма-уст тушган пирамида *конусга ташқи чизилган* пирамида дейилади (297- расм). Ташқи чизилган пирамида ён ёқларининг текисликлари конуснинг уринма текисликлари бўлади.

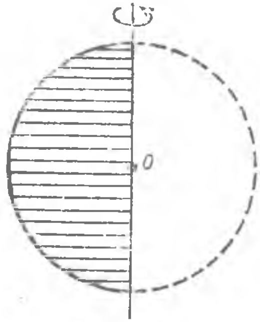
Масала (27). Пирамиданинг ҳамма ён қирралари тенг. Бу пирамиданинг бирор конусга ички чизилган эканини исботланг.

Ечилиши. Пирамиданинг учидан асос текислигига SO перпендикуляр туширамиз (298- расм) ва пирамиданинг ён қирралари узунлигини l билан белгилаймиз. Асосининг учлари O нуқтадан бир хил $R=\sqrt{l^2-OS^2}$ масофада узоқлашган. Бундан пирамида конусга ички чизилганлиги тўғрисида хулоса чиқади; бу конуснинг учи пирамиданинг учи, асоси эса маркази O ва радиус R дан иборат доирадир.

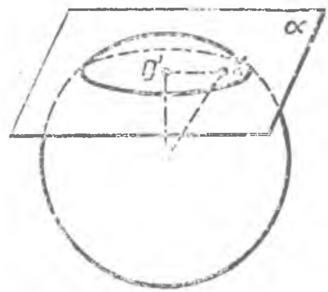
ШАР

Фазонинг берилган нуқтадан берилган масофадан катта бўлмаган узоқликда ётган ҳамма нуқталаридан иборат жисм *шар* дейилади. Берилган нуқта *шарнинг маркази*, берилган масофа эса *шарнинг радиуси* дейилади. Шарнинг чегараси *шар сирти* ёки *сфера* деб аталади. Шундай қилиб, шарнинг марказидан радиусга тенг масофа қадар узоқлашган ҳамма нуқталари сферанинг нуқталаридир. Шар марказини шар сиртининг нуқтаси билан туташтирувчи исталган кесма ҳам радиус дейилади. Шар сиртининг икки нуқтасини туташтирувчи ва шарнинг марказидан ўтувчи кесма *диаметр* дейилади. Истаган диаметрнинг учлари (охирлари) *шарнинг диаметрал қарама-қарши нуқталари* дейилади.

Цилиндр ва конус каби шар ҳам айланма жисмдир. У ярим доирани унинг диаметри атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинади (299- расм).



299- расм.



300- расм.

19.3- теорема. ***Шарнинг ҳар қандай текислик билан кесими доирадир. Бу доиранинг маркази шарнинг марказидан кесувчи текисликка туширилган перпендикулярнинг асосидир.***

Исботи. α—кесувчи текислик ва O—шарнинг маркази бўлсин (300- расм). Шарнинг марказидан α текисликка перпендикуляр туширамиз ва бу перпендикулярнинг асосини O' билан белгилаймиз. X—шарнинг β текисликка тегишли ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Пифагор теоремасига кўра $OX^2 = OO'^2 + O'X^2$. Аммо OX кесма шарнинг R радиусидан катта бўлмагани учун $O'X \leqslant \sqrt{R^2 - OO'^2}$, яъни шар билан α текислик кесимининг исталган нуқтаси O' нуқтадан $\sqrt{R^2 - OO'^2}$ дан катта бўлмаган масофада, демак, бу нуқта маркази O' нуқтада ва радиуси $\sqrt{R^2 - OO'^2}$ га тенг доирага тегишли. Аксинча, бу доиранинг исталган X нуқтаси шарга тегишли. Бу эса шарнинг α текислик билан кесими маркази O' нуқтада бўлган доира демакдир. Теорема исботланди.

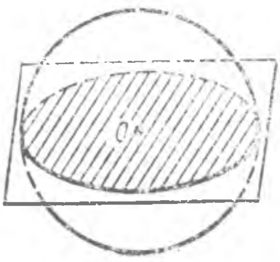
Теореманинг исботидан шарнинг текислик билан кесимида ҳосил қилинган доиранинг радиусини

$$R' = \sqrt{R^2 - OO'^2}$$

формула бўйича ҳисоблаш мумкин деган хулоса чиқади. Бундан, *шар марказидан бир хил масофага узоқлашган текисликлар шарни тенг доиралар бўйича кесиб ўтиши* кўриниб турибди. α текислик шарнинг марказига қанча яқин бўлса, яъни OO' масофа қанча кичик бўлса, α текислик кесимидаги доира шунча катта бўлади. Шарнинг марказидан ўтган текислик кесимида энг катта доира ҳосил бўлади. Бу доиранинг радиуси шар радиусига тенг.

Шарнинг марказидан ўтадиган текислик *диаметрал текислик* дейилади. Шарнинг диаметрал текислик билан кесими *катта доира* дейилади (301- расм), сферанинг кесими эса *катта айлана* дейилади.

Масала (29). Шар радиусининг ўртасидан унга перпендикуляр текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесим юзининг катта доира юзига нисбатини топинг.



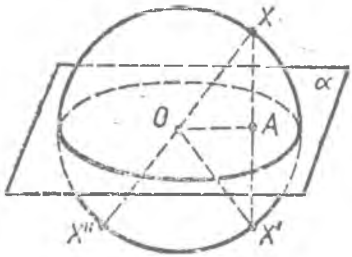
301- расм.

302- расм.

Ечилиши. Шарнинг радиуси R бўлса (302- расм), кесимдаги доиранинг радиуси $\sqrt{R^2-\left(\frac{R}{2}\right)^2}=R\sqrt{\frac{3}{4}}$ га тенг. Бу доира юзининг катта доира юзига нисбати $\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{3}{4}$ га тенг.

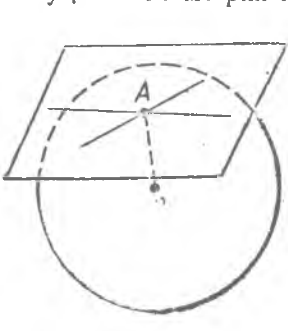
19. 4-теорема. ***Шарнинг исталган диаметрал текислиги унинг симметрия текислиги бўлади. Шарнинг маркази унинг симметрия марказидир.***

Исботи. α — диаметрал текислик ва X — шарнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (303- расм). α текисликка нисбатан X нуқтага симметрик X' нуқтани ясаймиз. XX' кесма α текисликка перпендикуляр ва уни бу текислик тенг иккига бўлади (A нуқтада). Тўғри бурчакли OAX ва OAX' учбурчакларнинг тенглигидан: $OX'=OX$. $OX\leqslant R$, бундан $OX'\leqslant R'$, яъни X нуқтага симметрик нуқта шарга тегишлидир. Теореманинг биринчи даъвоси исботланди.

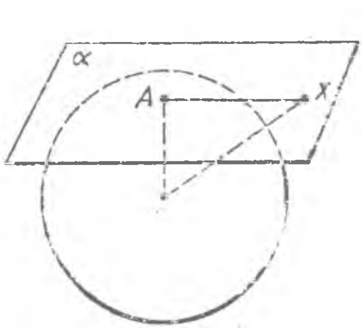


303- расм.

Энди X'' — шар марказига нисбатан X нуқтага симметрик нуқта бўл-



304- расм.



305- расм.

син. У ҳолда $OX'' = OX \leqslant R$, яъни X'' нуқта шарга тегишли. Теорема тўла исботланди.

Шар сиртидаги A нуқтадан ўтиб, шу нуқтага ўтказилган радиусга перпендикуляр текислик *уринма текислик* дейилади. A нуқта *уриниш нуқтаси* дейилади (304- расм).

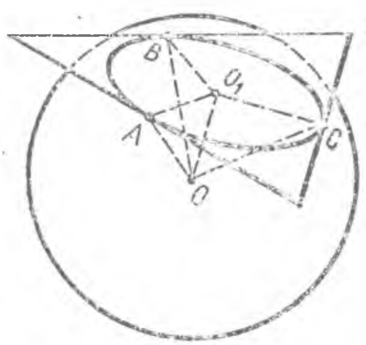
19.5- теорема. ***Уринма текислик шар билан фақат битта умумий нуқтага — уриниш нуқтасига эга.***

Исботи. α— шарга уринма текислик ва A— уриниш нуқтаси бўлсин (305- расм). α текисликда A нуқтадан фарқли ихтиёрий X нуқтани оламиз. OA— перпендикуляр, OX — оғма бўлгани учун $OX > OA = R$. Демак, X нуқта шарга тегишли эмас. Теорема исботланди.

Шар сиртидаги A нуқтадан ўтувчи ва шу нуқтага ўтказилган радиусга перпендикуляр тўғри чизиқ *уринма* дейилади.

19.6- теорема. ***Шар сиртидаги исталган нуқтадан чексиз кўп уринма ўтади, уларнинг ҳаммаси шарнинг уринма текислигида ётади.***

Исботи. Ҳақиқатан, α— шарнинг A нуқтасидаги уринма текислик бўлсин (305- расмга қаранг). У ҳолда α текисликдаги A нуқтадан ўтувчи ҳар қандай тўғри чизиқ OA радиусга перпендикуляр ва, демак, уринма бўлади. A нуқтадан ўтувчи исталган уринма OA радиусга перпендикуляр, демак, α текисликда ётади.



306- расм.

Масала (38). Радиуси R га тенг шар томони a га тенг мунтазам учбурчакнинг ҳамма томонларига уринади. Шар марказидан учбурчак текислигигача масофани топинг.

Ечилиши. A, B, C— шарнинг учбурчак томонларига уриниш нуқталари бўлсин (306- расм). Шарнинг O марказидан учбурчак текислигига OO_1 перпендикулярни туширамиз. OA, OB, OC кесмалар учбурчак томонларига перпендикуляр. Уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага кўра O_1A, O_1B, O_1C кесмалар ҳам учбурчакнинг мос томонларига перпендикуляр. Тўғри бурчакли OO_1A, OO_1B, OO_1C учбурчакларнинг тенглиги учун (уларда OO_1 катет умумий, гипотенузалари эса радиусга тенг) томонлар тенг: $O_1A = O_1B = O_1C$. Демак, O_1 — учбурчакка ички чизилган айлананинг маркази. Бу айлананинг радиуси, биз биламизки, $\frac{a\sqrt{3}}{6}$ га тенг. Пифагор теоремасига кўра изланаётган масофани топамиз. Бу масофа қуйидагига тенг:

$$\sqrt{OA^2 - O_1A^2} = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{12}}.$$

СФЕРА ТЕНГЛАМАСИ

Сфера тенгламасини x, y, z декарт координаталарида тузамиз. Сферанинг маркази A (a, b, c) нуқтада, радиуси эса R бўлсин. Сферанинг нуқталари фазонинг шундай нуқталари ва фақат шундай нуқталаридан иборатки, бу нуқталардан A нуқтагача масофа R га тенг. (x, y, z) нуқтадан A нуқтагача масофанинг квадрати

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$$

га тенг. Шунинг учун сферанинг тенгламаси

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$$

кўринишга эга. Сферанинг маркази кординаталар боши бўлса, сферанинг тенгламаси ушбу кўринишни қабул қилади:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

Масала (43). (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) нуқталардан ўтувчи сфера тенгламасини топинг.

Ечилиши. Сферанинг тенгламаси $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ кўринишга эга эканини биламиз. Берилган нуқталарнинг координаталари бу тенгламани қаноатлантириши керак. Уларни тенгламага қўйиб, a, b, c ва R номаълумларга нисбатан тенгламалар системасини ҳосил қиламиз:

$$\begin{gathered} a^2+b^2+c^2=R^2, \\ a^2+b^2+(1-c)^2=R^2, \\ a^2+(1-b)^2+c^2=R^2, \\ (1-a)^2+b^2+c^2=R^2. \end{gathered}$$

Биринчи тенгламани бошқаларидан ҳадма-ҳад айириб, $2c-1=0$, $2b-1=0$, $2a-1=0$ ни ҳосил қиламиз. Бундан:

$$a=\frac{1}{2},\quad b=\frac{1}{2},\quad c=\frac{1}{2},\quad R=\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{\frac{3}{4}}.$$

Сферанинг изланаётган тенгламаси:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}.$$

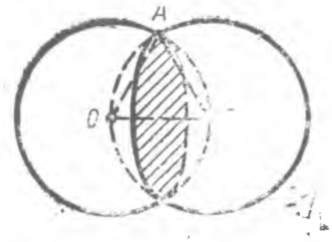
19.7- теорема. ***Иккита сферанинг кесишган чизиғи айланадир.***

Исботи. Сфераларнинг марказларини туташтирувчи тўғри чизиқни x ўқи деб қабул қиламиз. $(a, 0, 0)$ нуқта биринчи сферанинг маркази, R_1 унинг радиуси бўлсин, $(b, 0, 0)$ нуқта иккинчи сферанинг маркази, R_2 эса унинг радиуси бўлсин. Сфераларнинг тенгламалари қуйидагича:

$$(x-a)^2+y^2+z^2=R_1^2, \tag{1}$$

$$(x-b)^2+y^2+z^2=R_2^2. \tag{2}$$

(1) ва (2) тенгламаларни қаноатлантирадиган фазо нуқталари сфераларнинг кесишган нуқталаридир. Шунинг учун улар (1) ва (2) тенгламаларни ҳадма-ҳад айириш натижасида ҳосил қилинадиган тенгламани, яъни



307- расм.

$$2(b-a)x = R_1^2 - R_2^2 - a^2 + b^2 \quad (3)$$

тенгламани қаноатлантиради. Бу тенглама yz текисликка параллел текисликнинг тенгламасидир. Шундай қилиб, сфераларнинг кесишмаси (3) тенглама билан берилган текисликнинг берилган сфералардан истагани билан кесишмасидан фарқ қилмайди. Бу кесишманинг айлана эканини биз биламиз. Теорема исботланди.

Масала (45). Радиуси R бўлган иккита тенг шар шундай жойлашганки, бирининг маркази иккинчисининг сиртида ётади. Бу шарлар сиртларининг кесишган чизиғи узунлигини топинг.

Ечилиши. Шарларнинг марказларидан кесим ўтказамиз (307- расм). Масалада сўз бораётган чизиқ айланадир (19.7- теорема). Унинг радиуси томонлари R га тенг бўлган тенг томонли OAO_1 учбурчакнинг баландлигига тенг. Баландлиги $\frac{R\sqrt{3}}{2}$ га тенг. Демак, изланаётган чизиқнинг узунлиги $\pi R\sqrt{3}$ га тенг.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Доиравий цилиндр (цилиндрнинг ясовчиси, цилиндрнинг асослари ва ён сирти) нима эканини тушунтиринг.
2. Қандай цилиндр тўғри цилиндр дейилади?
3. Цилиндрнинг радиуси, цилиндрнинг баландлиги, цилиндрнинг ўқи, цилиндрнинг ўқ кесими, цилиндрнинг уринма текислиги нима?
4. Цилиндрнинг ўқига перпендикуляр текислик унинг ён сиртини асосининг айланасига тенг айлана бўйича кесишини исботланг
5. Цилиндрга ички чизилган (цилиндрга ташқи чизилган) призма нима?
6. Доиравий конус, конуснинг учи, конуснинг ясовчиси, конуснинг асоси, конуснинг ён сирти нима?
7. Қандай конус тўғри конус дейилади?
8. Конуснинг баландлиги, конуснинг ўқи, конуснинг ўқ кесими, конуснинг уринма текислиги нима?
9. Конуснинг ўқига перпендикуляр текислик унинг ён сиртини маркази конуснинг ўқида жойлашган айлана бўйича кесишини исботланг.
10. Кесик конус нима?
11. Конусга ички чизилган (конусга ташқи чизилган) пирамида деб қандай пирамидага айтилади?
12. Шар нима, шар сирти ёки сфера нима?
13. Шарнинг радиуси, шарнинг диаметри нима? Шарнинг қандай нуқталари диаметрал қарама-қарши нуқталар дейилади?
14. Шарнинг текислик билан кесишмаси доира эканини исботланг.
15. Қандай текислик шарнинг диаметрал текислиги дейилади? Катта доира нима?

16. Шарнинг исталган диаметрал текислиги унинг симметрия текислиги бўлади. Шарнинг маркази унинг симметрия маркази бўлади. Шуларни исботланг.
17. Қандай текислик шарга уринма текислик дейилади?
18. Уринма текислик шар билан фақат битта умумий нуқтага— уриниш нуқтасига эгалигини исботланг.
19. Қандай тўғри чизиқ шарга уринма дейилади? Шар сиртидаги истаган нуқтадан чексиз кўп уринма тўғри чизиқлар ўтишини, улар шарнинг уринма текислигида ётишини исботланг.
20. Сфера тенгламасини чиқаринг.
21. Иккита сферанинг кесишиш чизиғи айлана эканини исботланг.

МАШҚЛАР

1. Цилиндр асосининг радиуси 2 м, баландлиги 3 м. Ўқ кесимининг диагоналини топинг.
2. Цилиндрнинг ўқ кесими — юзи Q га тенг квадрат. Цилиндр асосининг юзини топинг.
3. Цилиндрнинг баландлиги 6 см, асосининг радиуси 5 см. Цилиндрнинг ўқига параллел равишда ундан 4 см масофада жойланган кесимнинг юзини топинг.
4. Цилиндрнинг баландлиги 8 дм, асосининг радиуси 5 дм. Цилиндр текислик билан шундай кесилганки, кесимда квадрат ҳосил қилинган. Бу кесимдан ўққача масофани топинг.
5 Цилиндрнинг баландлиги 6 дм, асосининг радиуси 5 дм. 10 дм узунликдаги берилган кесманинг учлари иккала асос айланаларида ётади. Бу кесмадан ўққача бўлган энг қисқа масофани топинг.
6. Тенг томонли (диаметри баландлигига тенг) цилиндрнинг юқори асос айланасидаги нуқта остки асос айланасидаги нуқта билан туташтирилган. Бу нуқталарга ўтказилган радиуслар орасидаги бурчак 60° га тенг. Ўтказилган тўғри чизиқ билан цилиндр ўқи орасидаги x бурчакни топинг.
7. Цилиндрга олти бурчакли мунтазам призма ички чизилган. Цилиндр асосининг радиуси баландлигига тенг бўлса, призма ён ёғи диагонали билан цилиндр ўқи орасидаги бурчакни топинг.
8. Цилиндрнинг баландлиги 2 м, асосининг радиуси 7 м. Бу цилиндрга квадрат оғма қилиб шундай ички чизилганки, квадратнинг учлари цилиндр асосларининг айланаларида ётади. Квадратнинг томонини топинг.
9. Конус асосининг радиуси 3 м, баландлиги 4 м. Ясовчисини топинг.
10. Конуснинг l ясовчиси асос текислигига 30° бурчак остида оғишган. Баландлигини топинг.
11. Конус асосининг радиуси R. Ўқ кесим тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Ўқ кесимнинг юзини топинг.
12. Тенг томонли конус (ўқ кесими—мунтазам учбурчак) асосининг радиуси R га тенг. Ораларидаги бурчаги α га тенг бўлган икки ясовчи орқали ўтказилган кесимнинг юзини топинг.
13. Конуснинг баландлиги 20, асосининг радиуси 25. Конуснинг

учидан ўтиб, асосининг марказигача масофаси 12 га тенг бўлган кесимнинг юзини топинг.

14. Конус асосининг радиуси R, ясовчиси эса асос текислигига α бурчак остида оғишган. Конуснинг учидан унинг баландлигига φ бурчак остида текислик ўтказилган. Ҳосил бўлган кесимнинг юзини топинг.

15. Конус учидан d масофада турган ва асосга параллел бўлган текислик конусни кесиб ўтади. Конус асосининг радиуси R, баландлиги эса H бўлса, кесимнинг юзини топинг.

16. Конуснинг баландлиги H. Кесимнинг юзи конус асоси юзининг ярмига тенг бўлиши учун асосга параллел текисликни конус учидан қандай масофада ўтказиш керак?

17. Конус баландлигининг ўртасидан унинг l ясовчисига параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Конус ичидаги тўғри чизиқ кесмасининг узунлигини топинг.

18. Конуснинг ясовчиси 13 см, баландлиги 12 см. Конус асосига параллел тўғри чизиқ билан кесилган; ундан асосгача масофа 6 см га, баландликкача масофа эса 2 см га тенг. Бу тўғри чизиқ кесмасининг конус ичига олинган узунлигини топинг.

19. Конус асосининг радиуси R ва баландлиги H берилган. Унга ички чизилган кубнинг қиррасини топинг.

20. Конуснинг радиуси R ва баландлиги H берилган. Унга ён ёқлари квадратлардан иборат бўлган уч бурчакли мунтазам призма ички чизилган. Призманинг қиррасини топинг.

21. Кесик конус асосларининг радиуслари 3 м ва 6 м, баландлиги 4 м. Ясовчисини топинг.

22. Кесик конус асосларининг радиуслари R ва r; ясовчиси асосга 45° бурчак остида оғишган. Баландлигини топинг.

23. Кесик конуснинг ясовчиси $2\,a$ га тенг ва асосга 60° бурчак остида оғишган. Бир асосининг радиуси иккинчисиникидан икки марта катта. Радиусларнинг ҳар бирини топинг.

24. Кесик конус асосларининг радиуслари 3 дм ва 7 дм, ясовчиси 5 дм. Ўқ кесимининг юзини топинг.

25. Кесик конус асосларининг юзлари 4 дм^2 ва 16 дм^2. Баландлигининг ўртасидан асосларига параллел текислик ўтказилган. Кесимнинг юзини топинг.

26. Кесик конус асосларининг юзлари M ва m. Асосларига параллел ўрта кесимнинг юзини топинг.

27. Пирамиданинг ҳамма ён қирралари тенг. Бу пирамиданинг бирор конусга ички чизилган эканини исботланг.

28. Радиуси 41 дм бўлган шар марказидан 9 дм масофадаги текислик билан кесилган. Кесимнинг юзини топинг.

29. Шар радиусининг ўртасидан унга перпендикуляр текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесим юзининг катта доира юзига нисбатини топинг.

30. Шарнинг радиуси R. Радиуснинг учидан унга 60° ли бурчак остида текислик ўтказилган. Кесимнинг юзини топинг.

31. Радиуси R бўлган шар берилган. Унинг сиртидаги бир нуқтадан иккита текислик ўтказилган: бири — шарга уринма те-

кислик, иккинчиси — биринчисига 30° бурчак остида ўтказилган. Кесимнинг юзини топинг.

32. Ер шарининг радиуси R. Агар параллелнинг кенглиги 60° бўлса, унинг узунлиги қандай?

33. N шаҳри шимолий кенгликнинг 60° ида жойлашган. Ернинг ўз ўқи атрофида айланиши натижасида бу шаҳар 1 соатда қандай масофани ўтади? Ернинг радиусини 6000 км га тенг деб олинг.

34. Шар сиртида учта нуқта берилган. Улар ораларидаги тўғри чизиқли масофалар 6 см, 8 см, 10 см. Шарнинг радиуси 13 см. Марказдан шу нуқталар орқали ўтувчи текисликкача масофани топинг.

35. Шарнинг диаметри 25 см. Унинг сиртида A нуқта ва ҳамма нуқталари тўғри чизиқ бўйича ҳисоблангандa A нуқтадан 15 см масофада ётган айлана берилган. Шу айлананинг радиусини топинг.

36. Ярим шар ва унга ички чизилган конус умумий асосга ва умумий баландликка эга. Баландликнинг ўртасидан асосига параллел текислик ўтказилган. Конуснинг ён сирти билан ярим шар сирти орасига олинган кесимнинг юзи асос юзининг ярмига тенг бўлишини исботланг.

37. Жисмни иккита концентрик шар сиртлари чегаралаб турибди (ичи бўш шар). Жисмнинг бу шарлар марказидан ўтадиган текислик билан кесими ички шар сиртига уринувчи кесимга тенгдош эканини исботланг.

38. Радиуси R га тенг шар томони a га тенг мунтазам учбурчакнинг ҳамма томонларига уринади. Шар марказидан учбурчак текислигигача масофани топинг.

39. Учбурчакнинг томонлари 13 см, 14 см, 15 см. Учбурчак текислигидан учбурчакнинг ҳамма томонларига уринадиган шарнинг марказигача масофани топинг. Шарнинг радиуси 5 см.

40. Ромбнинг диагоналлари 15 см ва 20 см. Шар сирти унинг ҳамма томонларига уринади. Шарнинг радиуси 10 см. Шарнинг марказидан ромб текислигигача масофани топинг.

41. Шар сиртида ётган нуқтадан ўзаро перпендикуляр иккита текислик ўтказилган бўлиб, улар шарни радиуси r_1 ва r_2 бўлган айланалар бўйича кесади. Шарнинг R радиусини топинг.

42. Шарнинг радиуси 7 см. Унинг сиртида узунлиги 2 см га тенг умумий ватарга эга бўлган иккита айлана берилган. Айланаларнинг текисликлари перпендикуляр эканини билган ҳолда уларнинг радиусларини топинг.

43. (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) нуқталардан ўтувчи сфера тенгламасини топинг.

44. (0, 0, 0), (4, 0, 0), (0, 4, 0) нуқталардан ўтувчи ва радиуси 3 га тенг сфера тенгламасини топинг.

45. Радиуси R бўлган иккита тенг шар шундай жойлашганки, бирининг маркази иккинчисининг сиртида ётади. Бу шарлар сиртларининг кесишган чизиги узунлигини топинг.

46. Шарларнинг радиуслари 25 дм ва 29 дм га, уларнинг марказ-

лари орасидаги масофа эса 36 дм га тенг. Шарларнинг сиртлари кесишадиган чизиқнинг узунлигини топинг.

47. Томони a бўлган кубга ташқи чизилган шарнинг радиусини топинг.

48. Қирраси a га тенг бўлган мунтазам тетраэдрга ташқи чизилган шарни топинг.

49. R радиусли шар кесик конусга ички чизилган. Конус ясовчисининг остки асос текислигига оғиш бурчаги α га тенг. Кесик конус асосларининг радиусларини ва ясовчисини топинг.

50. n бурчакли мунтазам призма R радиусли шарга ички чизилган. Призма асосининг қирраси α га тенг. 1) $n=3$; 2) $n=4$; 3) $n=6$ бўлганда призманинг баландлигини топинг.

51. n бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га тенг, асосидаги икки ёқли бурчаги φ га тенг. Пирамидага ички чизилган шарнинг радиусини топинг.

52. n бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га тенг ва ён қирраси асос текислигига α бурчак остида оғишган бўлса, пирамидага ташқи чизилган шарнинг радиусини топинг.

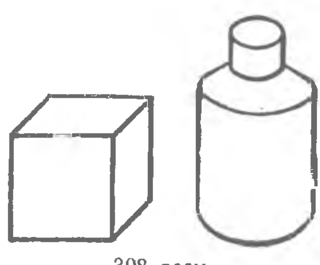
53. Тўрт бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a га, учидаги текис бурчаги эса α га тенг. Ички чизилган ва ташқи чизилган шарларнинг радиусларини топинг.

54. R радиусли шарга учидаги ясси бурчаги α га тенг бўлган уч бурчакли мунтазам пирамида ички чизилган. Пирамиданинг баландлигини топинг.

20- §. ЖИСМЛАРНИНГ ҲАЖМЛАРИ

ҲАЖМ ТУШУНЧАСИ

Бири куб шаклида, иккинчиси истаган шаклда бўлган иккита идишни кўз олдимизга келтирайлик (308-расм). Иккала идиш суюқлик билан тўлдирилган бўлсин. Фараз қилайлик, биринчи идишни тўлдириш учун m кг суюқлик, иккинчи идишни тўлдириш учун n кг суюқлик керак бўлсин. Иккинчи идиш биринчисидан $\frac{m}{n}$ марта катта дейиш табиийдир. Иккинчи идиш биринчисидан неча марта катта эканини кўрсатувчи сонни иккинчи идишнинг *ҳажми* деймиз. Бу ерда биринчи идиш ўлчов бирлиги ҳисобланади. Ҳажм тушунчасининг бу таърифидан унинг қуйидаги хоссалари вужудга келади. Биринчидан, ҳар бир идишни тўлдириш учун маълум миқдорда суюқлик кераклиги учун ҳар бир идиш маълум (мусбат) ҳажмга эга. Иккинчидан, тенг идишларни тўлдириш учун тенг миқдорда суюқлик керак. Шунинг учун тенг идишларнинг ҳажмлари ҳам тенг. Учинчидан, агар бир идишни икки қисмга бўлинса, бутун идишни тўлдириш учун керак бўладиган суюқлик миқдори унинг қисмларини тўлди-



308- расм.

риш учун керак бўладиган суюқлик миқдоридан иборат бўлади. Шунинг учун бутун идишнинг ҳажми унинг қисмлари ҳажмларининг йиғиндисига тенг.

Биз берган таърифга кўра идишнинг ҳажмини билиш учун уни суюқлик билан тўлдириш керак. Ҳаётда бунинг тескарисини қилишга тўғри келади. Идишни суюқлик билан тўлдирмасдан туриб, уни тўлдириш учун зарур бўладиган суюқлик миқдорини билиш талаб қилинади. Агар биз идишнинг ҳажмини билганимизда эди, идишнинг ҳажмини бирлик ҳажмни тўлдириш учун зарур бўлган суюқлик миқдорига кўпайтириб, суюқлик миқдорини топган бўлар эдик. Идишнинг ҳажмини қандай билиш мумкин?

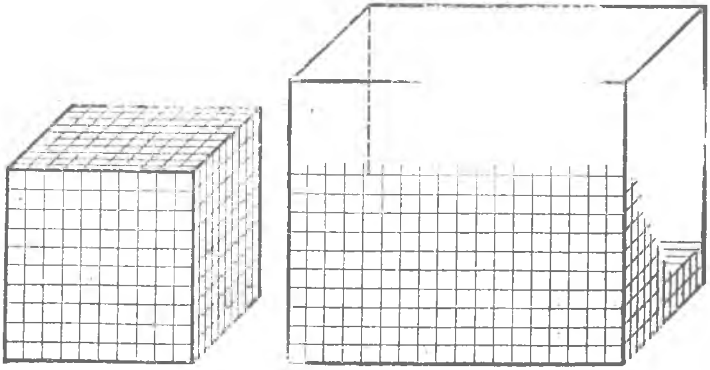
Агар жисмни сони чекли бўлган тетраэдрларга, яъни уч бурчакли пирамидаларга ажратиш мумкин бўлса, у ҳолда бундай жисмни *оддий жисм* деб атаймиз. Жумладан, призма, пирамида, умуман, қавариқ кўпёқ оддий жисм ҳисобланади. Ҳозир биз оддий жисмларнинг ҳажмларини ҳисоблаш учун формулалар топамиз ва шу билан ҳажмнинг юқорида санаб ўтилган учта хоссаси уни тўла аниқлашини исботлаймиз.

ТЎҒРИ БУРЧАКЛИ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНИНГ ҲАЖМИ

Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажмини топамиз. 309-расмда ҳажм ўлчови бирлиги бўлган куб ва ҳажми ўлчаниши лозим бўлган тўғри бурчакли параллелепипед тасвирланган. Кубнинг қирраси узунлик бирлиги бўлиб хизмат қилади.

Аввал параллелепипеднинг a, b, c қирраларининг узунликлари чекли ўнли касрлар билан ифодаланган ҳамда вергулдан кейинги хоналар сони n дан ошмаган ҳолини қараб чиқамиз.

Кубнинг битта учидан чиққан қирраларини 10^n та тенг бўлакка ажратамиз ва бўлиниш нуқталаридан бу қирраларга перпендикуляр текисликлар ўтказамиз. Бунда куб қирралари $\frac{1}{10^n}$ га тенг бўлган $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ та кичик кубга ажралади.



309- расм.

Кичик кубнинг ҳажмини топамиз. Ҳажмнинг хоссасига кўра катта кубнинг ҳажми кичик кублар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Катта кубнинг ҳажми бирга тенглиги, кичик кублар сони эса 10^{3n} га тенглиги учун кичик кубнинг ҳажми $\frac{1}{10^{3n}}$ га тенг.

$\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a10^n$, $\frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b10^n$, $\frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c\,10^n$ сонлар бутун сонлар бўлгани учун параллелепипеднинг қирраларини $\frac{1}{10^n}$ га тенг бўлган бутун сондаги қисмларга ажратиш мумкин. a қиррада улар $a\ 10^n$ та, b қиррада $b10^n$ та, c қиррада $c10^n$ та бўлади. Қирраларнинг бўлиниш нуқталаридан қирраларга перпендикуляр текисликлар ўтказамиз. Бунда биз параллелепипеднинг томони $\frac{1}{10^n}$ бўлган кичик кубларга ажралишини кўрамиз. Уларнинг сони $a\,10^n \cdot b10^n \cdot c10^n = abc10^{3n}$ га тенг. Параллелепипеднинг ҳажми ундаги кичик кублар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Кичик кубнинг ҳажми $\frac{1}{10^{3n}}$ га, уларнинг сони эса $abc \cdot 10^{3n}$ га тенглиги учун параллелепипеднинг ҳажми $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$ га тенг.

Энди a, b, c қирралардан камида биттаси чексиз ўнли каср билан ифодаланадиган ҳолни қараб чиқамиз. a сонининг n та ўнли рақамигача ками билан ва ортиғи билан олинган тақрибий қийматларини a_1 ва a_2 билан белгилаймиз, b ва c сонларнинг ўшандай аниқликдаги тақрибий қийматларини b_1 ва b_2, c_1 ва c_2 билан белгилаймиз. Қирралари a_1, b_1, c_1 бўлган параллелепипеднинг ҳажми берилган параллелепипедникидан кичик, чунки уни берилган параллелепипеднинг ичига жойлаштириш мумкин. Қирралари a_2, b_2, c_2 бўлган параллелепипеднинг ҳажми берилган параллелепипедникидан катта, чунки берилган параллелепипедни унинг ичига жойлаштириш мумкин. Исботланганга кўра қирралари a_1, b_1, c_1 бўлган параллелепипеднинг ҳажми $a_1b_1c_1$ га тенг, қирралари a_2, b_2, c_2 бўлган параллелепипеднинг ҳажми эса $a_2b_2c_2$ га тенг. Шундай қилиб, берилган параллелепипеднинг ҳажми $a_1b_1c_1$ ва $a_2b_2c_2$ орасида ётади. $a_1b_1c_1$ ва $a_2b_2c_2$ миқдорлар abc сонининг олдиндан берилган аниқликдаги тақрибий қийматини бергани учун, n етарлича катта бўлганда $V = abc$ бўлади. Шундай қилиб, ***тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми***

$$V = abc$$

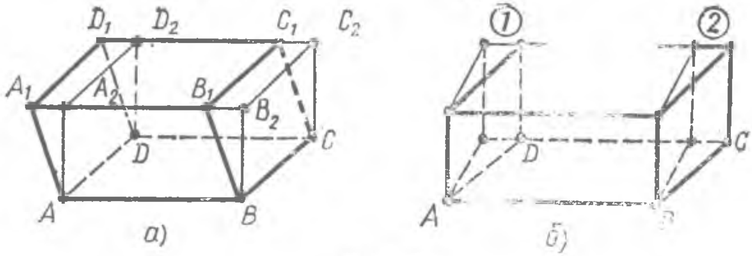
формула бўйича ҳисобланади.

Масала (3). Агар кубнинг ҳар бир қирраси 2 см орттирилса, унинг ҳажми 98 см^3 ортади. Кубнинг қирраси қанчага тенг?

Ечилиши. Кубнинг қиррасини x билан белгилаймиз, у ҳолда $(x + 2)^3 - x^3 = 98$, яъни $x^2 + 2x - 15 = 0$. Тенгламанинг иккита илдизи бор: $x = 3$, $x = -5$. Фақат мусбат илдиз геометрик маънога эга. Шундай қилиб, кубнинг қирраси 3 см га тенг.

ОҒМА ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДНИНГ ҲАЖМИ

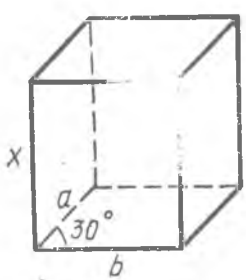
Оғма параллелепипеднинг ҳажмини топамиз (310-*а* расм). BC қирра орқали $ABCD$ нинг асосига перпендикуляр текислик ўтказамиз ва параллелепипедни $BB_1B_2CC_1C_2$ уч бурчакли призма билан тўлдирамиз. Энди ҳосил қилинган жисмдан AD қиррадан ўтувчи ва $ABCD$ асосга перпендикуляр равишда ўтказилган текислик ёрдамида ҳо-



310- расм.

сил қилинган уч бурчакли призмани ажратиб ташлаймиз. Натижада яна параллелепипед ҳосил қиламиз. Бу параллелепипеднинг ҳажми дастлабки параллелепипеднинг ҳажмига тенг. Ҳақиқатан, тўлдирилган призма ва ажратиб ташланган призма AB кесма қадар параллел кўчиришда устма-уст тушади, демак, бир хил ҳажмга эга. Параллелепипедни юқорида кўрсатилган алмаштириш натижасида унинг асоси, юзи ва баландлиги сақланади. Шунингдек, иккита ён ёғининг текисликлари сақланади, қолган иккитаси эса асосига перпендикуляр бўлади. Бундай алмаштиришни оғма ёқларга яна бир марта қўлланиб, ҳамма ён ёқлари асосига перпендикуляр бўлган параллелепипедни, яъни тўғри параллелепипедни ҳосил қиламиз. Ҳосил қилинган тўғри параллелепипедда шунга ўхшаш алмаштиришлар бажариб, яъни аввал 1 призма билан тўлдириб, сўнгра 2 призмани ажратиб ташлаб, тўғри бурчакли параллелепипед ҳосил қиламиз (310-*б* расм). Бундай алмаштириш параллелепипеднинг ҳажмини, асосининг юзини ва баландлигини сақлайди.

Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми унинг чизиқли ўлчовлари кўпайтмасига тенг. Иккита чизиқли ўлчовининг кўпайтмаси параллелепипед асосининг юзи, учинчи ўлчови — унинг баландлигидир. Шундай қилиб, тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг экан. Берилган параллелепипедни тўғри бурчакли параллелепипедга юқорида тавсифлангандек алмаштиришда ҳар гал ҳажм, асосининг юзи ва баландлиги сақлангани учун дастлабки параллелепипеднинг ҳажми ҳам асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг бўлади.



311- расм.

Шундай қилиб, ***исталган параллелепипеднинг ҳажми асос юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.***

Масала (9). Тўғри параллелепипед асосининг a ва b томонлари 30^0 ли бурчак ташкил қилади. Ён сирти S га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Баландликни x билан белгилаймиз (311-расм). У ҳолда: $(2a+2b)x = S$. Бундан $x = \frac{S}{2(a+b)}$. Параллелепипед асосининг юзи $ab\sin 30^0 = \frac{ab}{2}$ га тенг. Ҳажми $\frac{abS}{4(a+b)}$ га тенг.

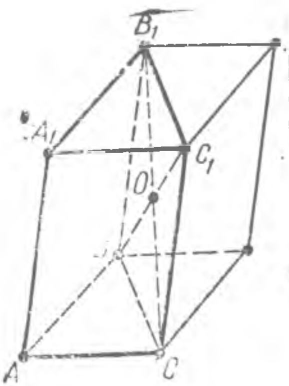
ПРИЗМАНИНГ ҲАЖМИ

Призманинг ҳажмини топамиз. Аввал учбурчакли призмани қараймиз (312-расм). Уни расмда кўрсатилгандек параллелепипедга тўлдирамиз. O нуқта параллелепипеднинг симметрия маркази бўлади. Шунинг учун тўлдирилган призма берилган призмага O нуқтага нисбатан симметрик, демак, ҳажми берилган призманинг ҳажмига тенг. Шундай қилиб, ясалган параллелепипеднинг ҳажми берилган призма ҳажмининг иккиланганига тенг.

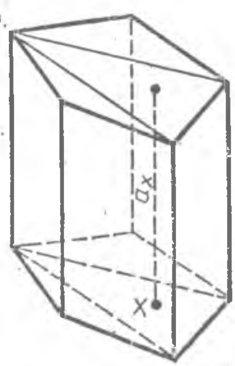
Параллелепипеднинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг. Асосининг юзи эса ABC учбурчак юзининг иккиланганига тенг, баландлиги эса дастлабки призма баландлигига тенг. Демак, дастлабки призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.

Энди ихтиёрий призмани қараймиз (313-расм). Унинг асосини учбурчакларга ажратамиз. $\triangle$ — шу учбурчаклардан бири бўлсин. $\triangle$ учбурчакнинг ихтиёрий X нуқтасидан ён қирраларига паралле.. тўғри чизиқ ўтказамиз. a_x — шу тўғри чизиқнинг призмага тегишли кесмаси бўлсин. X нуқта $\triangle$ учбурчакни айланиб чиққанда a_x кесмалар учбурчакли призмани тўлғазади. Ҳар бир учбурчак учун шундай призма ясаб, берилган призмани уч бурчакли призмаларга ажратамиз. Бу призмалар ҳаммасининг баландлиги дастлабки призма баландлигига тенг.

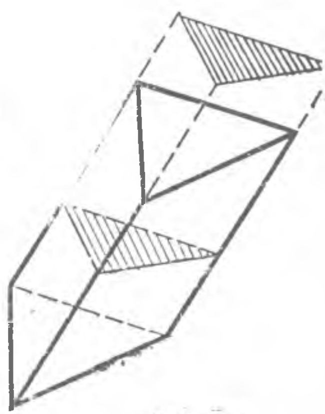
Дастлабки призманинг ҳажми уни ташкил этувчи учбурчакли призмалар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Исботланганга кўра



312-расм.



313-расм.


314-расм.

учбурчакли призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг. Бунда берилган призманинг ҳажми топилади:

$$V = S_1H + S_2H + \ldots + S_n H = (S_1 + S_2 + \ldots + S_n)\ H,$$

бу ерда $S_1, S_2, \ldots, S_n$ — призма асосида бўлиниш натижасида ҳосил қилинган $\triangle$ учбурчакларнинг юзлари, H эса призманинг баландлиги. $\triangle$ учбурчаклар юзларининг йиғиндиси берилган призма асосининг S юзига тенг. Шунинг учун

$$V = SH.$$

Шундай қилиб, ***исталган призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.***

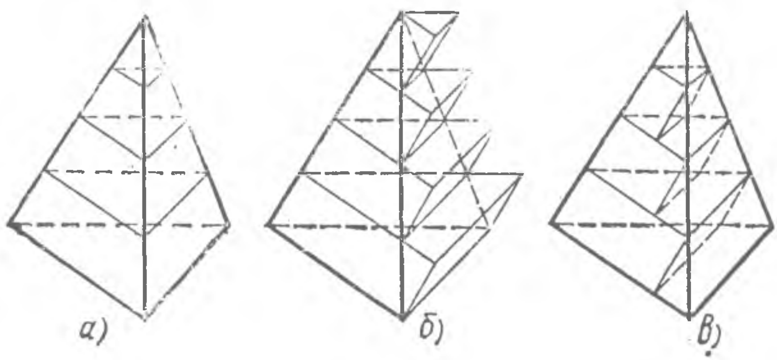
Масала (21). Оғма призмада ён қирраларига перпендикуляр ва ҳамма ён қирраларини кесиб ўтадиган текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесим юзи Q, ён қирралари эса l га тенг бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Ўтказилган кесимнинг текислиги призмани икки қисмга ажратади (314-расм). Улардан бирини призма асослари устма-уст тушадиган қилиб параллел кўчирамиз. Бунда тўғри призма ҳосил қиламиз, унинг асоси дастлабки призманинг кесими, баландлиги эса l га тенг. Бу призманинг ҳажми ҳам дастлабки призма ҳажмига тенг. Шундай қилиб, берилган призманинг ҳажми Ql га тенг.

ПИРАМИДАНИНГ ҲАЖМИ

Учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топиш учун уни тенг пирамидалар билан параллелепипедга тўлғазишга ва шу билан параллелепипеднинг ҳажмини билишимиздан фойдаланиб, пирамиданинг ҳажмини топишга ҳаракат қилмоқ табиий. Афсуски, бу йўл умумий ҳолда иш бермайди. Шунинг учун биз бошқа усулдан фойдаланамиз.

Пирамиданинг баландлигини n та тенг бўлакка ажратамиз ва бўлиниш нуқталари орқали пирамида асосига параллел текисликлар ўтказамиз (315-a расм). Бунда пирамида қатламларга ажралади. Ҳар бир бундай қатлам учун иккита призма ясаймиз: 315-расмда



315-расм.

кўрсатилгандек, қатламни ўз ичига олган призма (315- *б* расм) ва қатламда ётган призма (315- *в* расм).

Пирамиданинг учидан ҳисоблаганда m-қатламининг ҳажмини V_m билан белгилаймиз. Пирамида қатламини ўз ичига олган призманинг асоси пирамиданинг асосига ўхшаш ва шунинг учун унинг юзи $S\left(\frac{m}{n}\right)^2$ га тенг, бунда S — пирамида асосининг юзи. Призманинг баландлиги $\frac{H}{n}$, шунинг учун призманинг ҳажми $\frac{SHm^2}{n^3}$ га тенг. Призма пирамида қатламини ўз ичига олгани учун унинг ҳажми катта. Бундан:

$$V_m < \frac{SHm^2}{n^3} < \frac{SH}{3n^3}\left[(m+1)^3 - m^3\right],$$

чунки $m \geqslant 0$ бўлганда $\frac{(m+1)^3 - m^3}{3} = \frac{3m^2 + 3m + 1}{3} > m^2$.

Пирамиданинг ҳажми қуйидагига тенг:

$$V = V_1 + V_2 + \ldots + V_n < \frac{SH}{3n^3}\left[(n+1)^2 - 1\right] =$$

$$= \frac{SH}{3}\left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3 - \frac{1}{n^3}\right] < \frac{SH}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3.$$

Қатламдаги призманинг ҳажми қатлам ҳажмидан кичик бўлгани учун $m > 1$ бўлганда

$$V_m > \frac{SH(m-1)^2}{n^3} > \frac{SH}{3n^3}\left[(m-1)^3 - (m-2)^3\right],$$

чунки $m > 1$ да

$$\frac{(m-1)^3 - (m-2)^3}{3} = \frac{(m-1)^3 - [(m-1)-1]^3}{3} =$$

$$= (m-1)^2 - (m-1) + \frac{1}{3} < (m-1)^2.$$

Бундан:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots + V_n > \frac{SH}{3n^3}(n-1)^3 = \frac{SH}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3.$$

Шундай қилиб, $\frac{SH}{3}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^3 < V < \frac{SH}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3.$

n етарлича катта бўлганда тенгсизликнинг ўнг ва чап қисмлари $\frac{SH}{3}$ дан жуда кам фарқ қилади, демак, улар орасидаги V катталик ҳам $\frac{SH}{3}$ дан жуда кам фарқ қилади. Бу эса $V = \frac{SH}{3}$ бўлган ҳолдагина юз бериши мумкин.

Шундай қилиб, ***исталган учбурчакли пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг:***

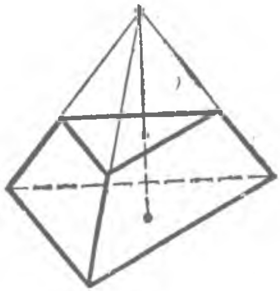
$$V = \frac{1}{3}SH.$$

Энди учбурчакли бўлмаган исталган пирамидани олайлик. Унинг асосини $\triangle_1$, $\triangle_2$, ... , $\triangle_n$ учбурчакларга ажратамиз. Асослари шу учбурчаклардан иборат, учлари эса берилган пирамиданинг учи бўлган пирамидалар берилган пирамидани ташкил этади. Берилган пирамиданинг ҳажми уни ташкил этувчи пирамидалар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Бу пирамидаларнинг баландликлари берилган пирамиданинг H баландлигига тенг бўлгани учун берилган пирамиданинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3} H(S_1 + S_2 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} SH$$

га тенг.

Шундай қилиб, ***исталган пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.***



316- расм.

Масала (42). Асосларининг юзлари Q_1 ва Q_2 $(Q_1 > Q_2)$ ва баландлиги h бўлган кесик пирамиданинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Берилган кесик пирамидани бутун пирамидага тўлдирамиз (316-расм). x — унинг баландлиги бўлсин. Кесик пирамиданинг ҳажми иккита бутун пирамида ҳажмларининг айирмасига тенг: улардан бири — асосининг юзи Q_1 ва баландлиги x, иккинчиси — асосининг юзи Q_2 ва баландлиги $x - h$ бўлган пирамидалар. Бу пирамидаларнинг ўхшашлигидан x ни топамиз: $\frac{Q_1}{Q_2} = \left(\frac{x}{x-h}\right)^2$. Бундан $x = \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}}$. Кесик пирамиданинг ҳажми:

$$V = \frac{1}{3}\left[Q_1 \frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - Q_2\left(\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3} h \frac{Q_1\sqrt{Q_1} - Q_2\sqrt{Q_2}}{\sqrt{Q_1} - \sqrt{Q_2}} = \frac{1}{3} h(Q_1 + \sqrt{Q_1 Q_2} + Q_2).$$

ЎХШАШ ЖИСМЛАРНИНГ ҲАЖМЛАРИ

T ва T' — иккита ўхшаш жисм бўлсин. Бу T жисм T' жисмга ўтадиган ўхшашлик алмаштириши мавжудлигини англатади. Ўхшашлик коэффициентини k билан белгилаймиз.

T жисмни $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ учбурчакли пирамидаларга ажратамиз. T жисмни T' жисмга ўтказадиган ўхшашлик алмаштириши $P_1, P_2, \ldots, P_n$ пирамидаларни $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ пирамидаларга ўтказади. Бу пирамидалар эса T' жисмни ташкил этади ва шунинг учун ҳам T' жисмнинг ҳажми $P'_1, P'_2, \ldots, P'_n$ пирамидалар ҳажмларининг йиғиндисига тенг.

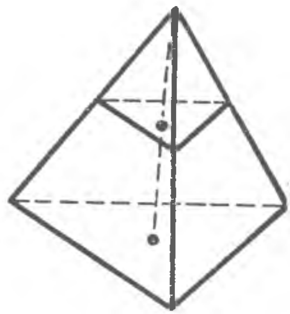
P'_i ва P_i пирамидалар ўхшаш ҳамда ўхшашлик коэффициенти k бўлгани учун улар баландликларининг нисбати k га тенг, улар асослари юзларининг нисбати эса k^2 га тенг. Хуллас, пирамидалар ҳажмларининг нисбати k^3 га тенг экан. T жисм P_i пирамидалардан, T' жисм эса P'_i пирамидалардан тузилгани учун T' ва T жисмлар ҳажмларининг нисбати k^3 га тенг.

k сони ўхшашлик коэффициенти бўла туриб, ўхшашлик алмаштиришида нуқталарнинг исталган мос жуфтлари ораларидаги масофалар нисбатига тенг. Демак, бу сон T' ва T жисмларнинг исталган иккита мос чизиқли ўлчовлари нисбатига тенг. Шундай қилиб, биз қуйидаги хулосага келамиз:

Ўхшаш бўлган иккита жисм ҳажмларининг нисбати уларнинг мос чизиқли ўлчовлари кубларининг нисбатига тенг.

Масала (48). Пирамида баландлигининг ўртасидан асосига параллел текислик ўтказилган. Бу текислик пирамида ҳажмини қандай нисбатда бўлади?

Ечилиши. Биламизки, ўтказилган текислик ўзига ўхшаш пирамида ажратади (317- расм). Ўхшашлик коэффициенти баландликлар нисбатига, яъни $\frac{1}{2}$ га тенг. Шунинг учун пирамидаларнинг ҳажмлари нисбати $\left(\frac{1}{2}\right)^3 : 1$ га тенг. Демак, текислик пирамидани ҳажмларининг нисбати $\frac{1}{8} : \left(1 - \frac{1}{8}\right) = 1 : 7$ га тенг бўлган қисмларга ажратади.



317- расм.

ЦИЛИНДР ВА КОНУСНИНГ ҲАЖМЛАРИ

Асосининг радиуси R ва баландлиги H бўлган цилиндрнинг V ҳажмини топамиз.

Доиранинг юзи формуласини чиқаришда (13- §) иккита кўпбурчак ясалган эди: бири — доирани ўз ичига олган ва иккинчиси — доира ичига жойлашган бўлиб, уларнинг юзлари доиранинг юзидан жуда ҳам кам фарқ қилади. Цилиндр асосидаги доира учун шундай кўпбурчаклар ясаймиз. P — доирани ўз ичига олган кўпбурчак, P' — доира ичига жойлашган кўпбурчак бўлсин. Бу кўпбурчакларнинг юзлари доиранинг юзидан ε дан ҳам кичик миқдорга фарқ қилсин.

Асослари P ва P' ҳамда H баландлиги цилиндрнинг баландлигига тенг бўлган иккита тўғри призма ясаймиз. Биринчи призма цилиндрни ўз ичига олади, демак, ҳажми цилиндрнинг ҳажмидан катта. Иккинчи призма цилиндрда ётади, демак, ҳажми цилиндрнинг ҳажмидан кичик.

Биринчи призма асосининг юзи $\pi R^2 + \varepsilon$ дан кичик, шунинг учун унинг ҳажми $(\pi R^2 + \varepsilon) H$ дан катта эмас. Иккинчи призма асосининг юзи $\pi R^2 - \varepsilon$ дан катта, ҳажми эса $(\pi R^2 - \varepsilon)H$ дан кичик эмас. Цилиндрнинг ҳажми призмаларнинг ҳажмлари орасида бўлади:

$$H(\pi R^2 - \varepsilon) < V < (\pi R^2 + \varepsilon)H.$$

Бундан
$$-H\varepsilon < V - \pi R^2 H < H\varepsilon,$$
яъни $|V - \pi R^2 H|$ миқдор исталганча кичик. Бу миқдор тайин қийматга эга бўлгани учун: $V - \pi R^2 H = 0$. Шундай қилиб, ***асосининг радиуси R ва баландлиги H бўлган цилиндрнинг ҳажми***

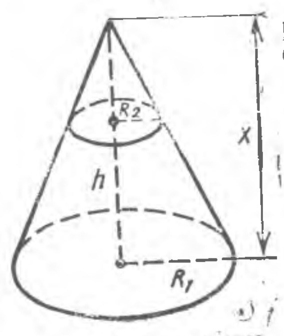
$$V = \pi R^2 H$$

га тенг.

Худди шундай усул билан ***конуснинг ҳажми учун***

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

формула ҳосил қилинади, бунда R — конус асосининг радиуси, H — баландлиги. Бу формулани чиқаришда асослари P ва P' ҳамда учи конуснинг учида бўлган иккита пирамида ясалади.



318- расм.

Масала (56). Асосларининг радиуслари R_1 ва R_2 ($R_2 < R_1$), баландлиги h га тенг бўлган кесик конуснинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Берилган кесик конусни бутун конусга тўлдирамиз (318- расм). x — унинг баландлиги бўлсин. Кесик конуснинг ҳажми иккита бутун конус ҳажмларининг айирмасига тенг: улардан бирининг асосининг радиуси R_1 ва баландлиги x, иккинчисининг асосининг радиуси R_2 ва баландлиги $x - h$. Конусларнинг ўхшашлигидан x ни топамиз: $\frac{x}{x-h} = \frac{R_1}{R_2}$, $x = \frac{hR_1}{R_1 - R_2}$.

Кесик конуснинг ҳажми:

$$V = \frac{1}{3}\left[\pi R_1^2 \frac{hR_1}{R_1 - R_2} - \pi R_2^2\left(\frac{hR_1}{R_1 - R_2} - h\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\pi h\,\frac{R_1^3 - R_2^3}{R_1 - R_2} = \frac{1}{2}\pi h\,(R_1^2 + R_1 R_2 + R_2^2).$$

АЙЛАНМА ЖИСМЛАР ҲАЖМЛАРИ УЧУН УМУМИЙ ФОРМУЛА

Энг оддий ҳолда *айланма жисм* деб шундай жисмга айтиладики, бу жисм бирор тўғри чизиққа (*айланиш* ўқига) перпендикуляр бўлган текисликлар билан маркази шу тўғри чизиқда ётган доиралар бўйича кесишади. Доиравий цилиндр, конус, шар айланиш жисмига мисол бўлади. Айланма жисм ҳажмини ҳисоблаш учун формула топамиз.

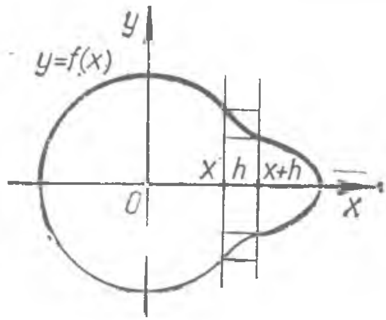
Жисмнинг ўқини x ўқи деб қабул қилиб, x, y, z декарт координаталарини киритамиз. xy текислик жисм сиртини шундай чизиқ бўйлаб кесиб ўтадики, унинг учун x ўқи симметрия ўқи бўлади. $y = f(x)$ — чизиқнинг Ox ўқдан юқорида жойлашган қисмининг тенгламаси бўлсин (319- расм).

Абсциссалар ўқининг x нуқтаси орқали унга перпендикуляр текислик ўтказамиз ва жисмнинг бу текисликдан чапда жойлашган қисмининг ҳажмини $V(x)$ билан белгилаймиз, у ҳолда $V(x)$ x нинг функцияси бўлади. Унинг ҳосиласини топамиз.

Таърифга кўра

$$V'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{V(x+h) - V(x)}{h}.$$

$V(x+h) - V(x)$ айирма абсциссалари x ва $x+h$ бўлган нуқталар орқали ўтувчи, x ўқига перпендикуляр иккита текислик орасига олинган h қалинликдаги жисм қатламининг ҳажмидан иборат. M билан $f(x)$ функциянинг $[x, x+h]$ кесмадаги энг катта қиймати, m билан энг кичик қиймати белгиланган бўлсин. У ҳолда жисмнинг қаралаётган қатлами радиуси m, баландлиги h бўлган цилиндрни ўз ичига олади ва радиуси M, баландлиги ўша h бўлган цилиндр ичида ётади (319-расмга қаранг). Шунинг учун



319- расм.

$$\pi m^2 h \leqslant V(x+h) - V(x) \leqslant \pi M^2 h,$$

$$\pi m^2 \leqslant \frac{V(x+h) - V(x)}{h} \leqslant \pi M^2.$$

Агар $f(x)$ — узлуксиз функция бўлса, у ҳолда $h \to 0$ да охирги тенгсизликнинг чап ва ўнг қисмлари $\pi f^2(x)$ дан иборат битта лимитга интилади. Шу лимитга яна улар орасидаги нисбат ҳам интилади, яъни $V'(x) = \pi f^2(x)$.

Анализ курсидаги маълум формула бўйича

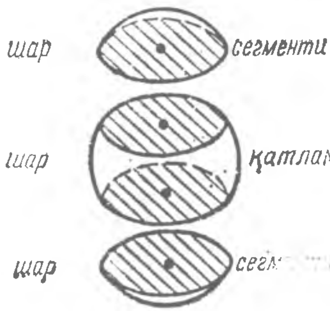
$$V(b) - V(a) = \int_a^b \pi f^2(x)\, dx,\ a < b.$$

Бу формула жисмнинг $x = a$ ва $x = b$ параллел текисликлар орасига олинган қисмининг ҳажмини беради.

ШАР ВА УНИНГ БЎЛАКЛАРИНИНГ ҲАЖМИ

Айланма жисмлар ҳажмлари учун ҳосил қилинган формулани шар ва унинг бўлаклари — шар қатлами ҳамда сегменти ҳажмини ҳисоблаш учун қўлланамиз.

Шарнинг ундан текислик билан ажратилган қисми *шар сегменти* дейилади. Шарни кесиб ўтувчи иккита параллел текислик орасидаги қисми ***шар қатлами*** дейилади (320-расм).



320- расм.

Шар марказини координаталар боши учун қабул қилиб, декарт координаталарини киритамиз. xy текислик R радиусли шарни

$$x^2 + y^2 = R^2$$

тенглама билан бериладиган айлана бўйича кесади. x ўқидан юқорида жойлашган ярим айлана

$$y = f(x) = +\sqrt{R^2 - x^2}$$

тенглама билан ифодаланади, бунда $-R \leqslant x \leqslant R$. Шунинг учун $x = a$ ва $x = b$ текисликлар орасидаги шар қатламининг ҳажми

$$V = V(b) - V(a) = \pi \int_a^b (R^2 - x^2)\, dx =$$

$$= \pi \left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_a^b = \pi R^2(b - a) - \frac{\pi}{3}(b^3 - a^3)$$

формула бўйича аниқланади. Бутун шарнинг ҳажми учун $a = -R$, $b = R$ деб олиш керак. У ҳолда ***шар ҳажмини*** ҳосил қиламиз:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

321- расм.

Баландлиги H бўлган шар сегментининг ҳажмини ҳосил қилиш учун $a = R - H$, $b = R$ деб олиш керак. ***Шар сегментининг ҳажмини*** ҳосил қиламиз:

$$V = \pi H^2 \left(R - \frac{H}{3}\right).$$

Шар сегменти билан конусдан қуйидаги тарзда ҳосил қилинадиган жисм *шар сектори* дейилади. Шар сегменти ярим шардан кичик бўлса, шар сегменти учи шар марказида, асоси сегментнинг асоси бўлган конус билан тўлдирилади. Сегмент ярим шардан катта бўлганда эса айтилган конус ундан олиб ташланади (321-расм). Шар секторининг ҳажми тегишли сегмент ва конус ҳажмларини қўшиш ёки айириш натижасида ҳосил қилинади. ***Шар секторининг ҳажми*** учун

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$$

формула ҳосил қилинади, бунда R — шарнинг радиуси, H — тегишли шар сегментининг баландлиги.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Ҳажмнинг асосий хоссаларини ифодаланг.
2. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми унинг чизиқли ўлчовлари кўпайтмасига тенг эканини исботланг.
3. Ҳар қандай параллелепипеднинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг. Шуни исботланг.
4. Ҳар қандай призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг. Шуни исботланг.
5. Уч бурчакли пирамиданинг ҳажми учун формула келтириб чиқаринг.

6. Ҳар қандай пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг. Шуни исботланг.
7. Ухшаш жисмларнинг ҳажмлари тегишли чизиқли ўлчовлари кубларининг нисбатига тенг. Шуни исботланг.
8. Цилиндр (конус) ҳажми учун формула чиқаринг.
9. Айланма жисмлар ҳажмлари учун умумий формула чиқаринг.
10. Шар сегменти нима, шар қатлами нима, шар сектори нима?
11. Шар ҳажми учун, шунингдек шар сегменти, шар сектори ҳажмлари учун формула чиқаринг.

МАШҚЛАР

1. Жездан қилинган ва қирралари 3 см, 4 см, 5 см бўлган учта кубдан битта куб қуйилган. Бу куб қиррасининг узунлигини топинг.
2. Металлдан ясалган кубнинг ташқи қирраси 10,2 см ва массаси 514,15 г. Деворларининг қалинлиги 0,1 см га тенг. Куб ясалган металлнинг зичлигини топинг.
3. Кубнинг ҳар бир қирраси 2 см орттирилса, унинг ҳажми 98 $см^3$ ортади. Кубнинг қирраси қанчага тенг?
4. Кубнинг ҳар бир қирраси 1 м орттирилса, унинг ҳажми 125 марта ортади. Қиррасини топинг.
5. $25\times12\times6,5$ см ўлчамдаги ғиштнинг массаси 3,51 кг. Унинг зичлигини топинг.
6. Сув солинадиган 10 $м^3$ сиғимли идишни унга туби вазифасини бажарадиган $2,5\times1,75$ м ўлчовли майдончага ўрнатиш талаб қилинади. Идишнинг баландлигини топинг.
7. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчовлари 15 м, 50 м, 36 м. Унга тенгдош кубнинг қиррасини топинг.
8. Тўғри бурчакли брусокнинг ўлчовлари 3 см, 4 см, 5 см. Агар унинг ҳар бир қиррасини x сантиметр орттирсак, сирти 54 $см^2$ ортади. Унинг ҳажми қанча ортади?
9. Тўғри паралеллепипед асосининг a, b томонлари 30° ли бурчак ташкил қилади. Ён сирти S га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
10. Тўғри параллелепипедда асосининг $2\sqrt{2}$ см ли ва 5 см ли томонлари орасидаги бурчак 45° га тенг. Параллелепипеднинг кичик диагонали 7 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.
11. Тўғри параллелепипеднинг асоси юзи 1 $м^2$ бўлган ромбдан иборат. Диагонал кесимларининг юзлари 3 $м^2$ ва 6 $м^2$. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
12. Аввалги масалани умумий ҳолда, яъни ромбнинг юзи Q, диагонал кесимларнинг юзлари M, N деб фараз қилиб ечинг.
13. Оғма параллелепипеднинг асоси квадрат бўлиб, томони 1 м га тенг. Ён қирраларидан бири 2 м га тенг ва асоснинг ўзига ёпишган ҳар бир томони билан 60° ли бурчак ташкил этади. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.
14. Параллелепипеднинг ёқлари томони a ва ўткир бурчаги 60° бўлган тенг ромблардан иборат. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

15. 1) Учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) олтибурчакли мунтазам призма асосининг a томони ва ён қирраси бўйича ҳажмини топинг.

16. Томони 3,2 см ва қалинлиги 0,7 см бўлган мунтазам саккизбурчак шаклидаги ёғоч плитканинг массаси 17,3 г. Ёғочнинг зичлигини топинг.

17. Чўян трубада квадрат шаклидаги кесим бўлиб, унинг ташқи кенглиги 25 см, деворларининг қалинлиги 3 см. 1 метр узунликдаги трубанинг массаси қанча (чўяннинг зичлиги 7,3 г/см^3)?

18. Тўрт бурчакли мунтазам призманинг диагонали 3,5 см га тенг, ён ёғининг диагонали 2,5 см га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

19. Уч бурчакли мунтазам призма асосининг томони a га тенг, ён сирти асослари юзларининг йиғиндисига тенг. Унинг ҳажмини топинг.

20. Олти бурчакли мунтазам призмада энг катта диагонал кесимнинг юзи 4 м^2 га, иккита қарама-қарши ён қирралари орасидаги масофа 2 м га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

21. Оғма призмада ён қирраларига перпендикуляр ва ҳамма ён қирраларини кесиб ўтадиган текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесим юзи Q, ён қирралари l га тенг бўлса, призманинг ҳажмини топинг.

22. Уч бурчакли оғма призманинг ён қирралари 15 м га, улар орасидаги масофа эса 26 м, 25 м ва 17 м га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

23. Кесими — асоси 1,4 м ва баландлиги 1,2 м бўлган тенг ёнли учбурчак шаклидаги сув чиқарувчи трубанинг сув ўтказа олиш қобилиятини (1 соатда куб метрлар билан) ҳисобланг. Сувнинг оқиш тезлиги 2 м/с.

24. Темир йўл кўтармасининг кесими трапеция шаклида бўлиб, унинг пастки асоси 14 м, юқори асоси 8 м ва баландлиги 3,2 м. 1 км кўтармага қанча куб метр тупроқ тўғри келишини ҳисобланг.

25. Уч бурчакли тўғри призма асосининг томонлари 4 см, 5 см, 7 см га, ён қирраси эса асосининг катта баландлигига тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

26. Уч бурчакли тўғри призма асосининг юзи 4 см^2 га, ён ёқларининг юзлари 9 см^2, 10 см^2, 17 см^2 га тенг. Ҳажмини топинг.

27. Призманинг асоси учбурчак бўлиб, унинг бир томони 2 см га тенг, қолган икки томони 3 см дан. Ён қирраси 4 см га тенг ва асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил этади. Унга тенгдош кубнинг қиррасини топинг.

28. Оғма призманинг асоси томони a га тенг бўлган тенг томонли учбурчак; ён ёқларидан бири асосга перпендикуляр ва кичик диагонали c га тенг ромбдан иборат. Призманинг ҳажмини топинг.

29. a диагонали асос текислиги билан α бурчак, ён ёғи билан β бурчак ташкил этган тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми нимага тенг?

30. Параллелепипеднинг ҳар бир қирраси 1 см га тенг. Параллелепипед учларидан биридаги учала ясси бурчак ўткир бўлиб, ҳар бири 2α дан. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

31. Параллелепипеднинг бир учидан чиққан учта қиррасининг узунликлари a, b, c га тенг. a, b қирралар ўзаро перпендикуляр, c қирра эса a, b қирраларнинг ҳар бири билан α бурчак ташкил этади. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

32. Агар тўрт бурчакли тўғри призманинг баландлиги h, диагоналлари асос текислигига α, β бурчаклар остида оғишган ҳамда асосининг диагоналлари орасидаги ўткир бурчак γ га тенг бўлса, бу призманинг ҳажми нимага тенг бўлади?

33. 1) Уч бурчакли; 2) тўрт бурчакли; 3) олти бурчакли мунтазам пирамида асосининг a томони ва b ён қиррасига кўра ҳажмини топинг.

34. Олти бурчакли мунтазам пирамида асосининг томони a, асосидаги икки ёқли бурчаги 45^0 га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

35. Уч бурчакли пирамиданинг ён қирралари ўзаро перпендикуляр бўлиб, ҳар бири b га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

36. Асосининг томони a, ён қирралари эса ўзаро перпендикуляр бўлган уч бурчакли мунтазам пирамиданинг ҳажми нимага тенг?

37. Мунтазам тетраэдрнинг a қирраси бўйича ҳажмини топинг.

38. Октаэдрнинг a қирраси бўйича ҳажмини топинг.

39. Пирамиданинг асоси — томонлари 9 м ва 12 м бўлган тўғри тўртбурчак, ҳамма ён қирралари 21,5 м га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

40. Пирамиданинг асоси — томонлари 6 см, 6 см ва 8 см бўлган тенг ёнли учбурчак. Ҳамма ён қирралари 9 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

41. Уч бурчакли пирамиданинг битта қирраси 4 см га тенг, қолганларининг ҳар бири 3 см дан. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

42. Асосларининг юзлари Q_1, Q_2 $(Q_1 > Q_2)$ ва баландлиги h бўлган кесик пирамиданинг ҳажмини топинг.

43. Асосининг юзи Q_1 га тенг бўлган пирамидада асосига параллел ва ундан h масофада кесим ўтказилган. Кесим юзи Q_2 га тенг. Пирамиданинг баландлигини топинг.

44. Тўрт бурчакли мунтазам кесик пирамидада остки ва устки асосларининг томонлари a ва b га, остки асоси қиррасидаги икки ёқли бурчак α га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

45. Аввалги масалани уч бурчакли мунтазам кесик пирамида бўлган ҳол учун ечинг.

46. Пирамиданинг асоси тўғри тўртбурчакдан иборат. Пирамиданинг ҳар бир ён қирраси l га тенг ва тўғри тўртбурчакнанг қўшни томонлари билан α, β бурчаклар ташкил этади. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

47. Асоси учбурчак бўлиб, бу учбурчакнинг иккита бурчаги α ва β, унга ташқи чизилган доиранинг радиуси R бўлган пирамиданинг ҳажмини топинг. Пирамиданинг ён қирралари унинг асос текислигига γ бурчак остида оғган.

48. Пирамида баландлигининг ўртасидан асосига параллел текислик ўтказилган. Бу текислик пирамида ҳажмини қандай нисбатда бўлади?

49. Пирамиданинг баландлиги h. Асосига параллел ва пирамида-

нинг ҳажмини тенг иккига бўладиган кесим унинг учидан қандай масофада туради?

50. 25 метрли мис симнинг массаси 100,7 г. Симнинг диаметрини топинг (миснинг зичлиги 8,94 г/см^3).

51. Буғ қозонга сув берадиган насоснинг иккита цилиндри бор. Цилиндрларнинг диаметрлари 80 мм, поршеннинг иш йўли 150 мм. Ҳар бир поршень минутига 50 та иш юриши қилса, насоснинг бир соатлик меҳнат унуми қандай?

52. Цилиндрнинг ҳажмини n марта орттириш учун асосини ўзгартирмасдан, баландлигини неча марта орттириш керак? Цилиндрнинг ҳажмини n марта орттириш учун баландлигини ўзгартирмасдан, насосининг радиусини неча марта орттириш керак?

53. Цилиндрга уч бурчакли мунтазам призма ички чизилган, призмага эса цилиндр ички чизилган. Цилиндрлар ҳажмларининг нисбатини топинг.

54. Ҳар бир қирраси a га тенг бўлган олти бурчакли мунтазам призмага ички чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.

55. Деворининг қалинлиги 4 мм бўлган қўрғошин трубанинг (қўрғошиннинг зичлиги 11,4 г/см^3) ички диаметри 13 мм. Шундай 25 м ли трубанинг массаси (оғирлиги)ни топинг.

56. Асосининг радиуслари R_1 ва R_2 $(R_2 < R_1)$, баландлиги h га тенг кесик конуснинг ҳажмини топинг.

57. Узунлиги 15,5 м га тенг қайин хода учларининг диаметрлари 42 см ва 25 см. Ходанинг ҳажмини ҳисоблашда унинг ўрта кўндаланг кесимини узунлигига кўпайтириб, қанча (процент) хатога йўл қўйилади?

58. Кесик конус асосларининг радиуслари R ва r; ясовчиси асос текислигига 45° ли бурчак остида оғишган. Ҳажмини топинг.

59. Кесик конус ўқ кесимининг юзи асос юзларининг айирмасига тенг, асосларининг радиуслари эса R ва r га тенг. Конуснинг ҳажмини топинг.

60. Асосларининг радиуслари 4 см ва 22 см бўлган кесик конусни шундай баландликдаги унга тенгдош цилиндрга айлантириш талаб қилинади. Бу цилиндр асосининг радиуси қанчага тенг?

61. Асосларининг берилган R, r радиуслари бўйича кесик конус билан бутун конус ҳажмларининг нисбатини аниқланг.

62. Бир тўп шағал конус шаклида бўлиб, унинг асосининг радиуси 2 м, ясовчиси эса 3,5 м. Бу тўп шағалнинг ҳажмини топинг.

63. Конуснинг ўқ кесими юзи 9 м^2 га тенг бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Конуснинг ҳажмини топинг.

64. Конус ясовчисининг узунлиги l, асос айланасининг узунлиги c. Конуснинг ҳажмини топинг.

65. Конуснинг l ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Конуснинг ҳажмини топинг.

66. Хашак ғарамининг устки қисми конус шаклини олган цилиндрдан иборат. Ғарам асосининг радиуси 2,5 м, баландлиги 4 м бўлиб, ғарамнинг цилиндрик қисмининг баландлиги 2,2 м. Хашакнинг зичлиги 0,03 г/см^3. Хашак ғарамининг массасини (оғирлигини) аниқланг.

67. Суюқлик баландлиги 0,18 м ва асосининг диаметри 0,24 м бўлган конус шаклидаги идишдан олиниб, асосининг диаметри 0,1 м га тенг цилиндр идишга қуйилди. Бу идишдаги суюқликнинг баландлигини аниқланг.
68. Тенг томонли учбурчак ўзининг a томони атрофида айланади. Ҳосил қилинган айланма жисмнинг ҳажмини топинг.
69. Катетлари a, b бўлган тўғри бурчакли учбурчак гипотенузаси атрофида айланмоқда. Ҳосил қилинган жисмнинг ҳажмини топинг.
70. Регулятордаги чўян шарнинг массаси 10 кг. Шарнинг диаметрини топинг (чўяннинг зичлиги 7,2 г/см^3).
71. Диаметрлари 25 см ва 35 см бўлган иккита чўян шарни эритиб, битта шар қуйиш керак. Янги шарнинг диаметрини топинг.
72. Массаси 1 кг бўлган қўрғошин бўлаги бор. Бу бўлакдан диаметри 1 см бўлган шарчалардан нечта қуйиш мумкин? (Қўрғошиннинг зичлиги 11,4 г/см^3.)
73. Баландлиги асосининг диаметрига тенг бўлган ёғоч цилиндрдан энг катта шар йўнилган. Материалнинг неча проценти йўнилган?
74. Ичи бўш шарнинг ташқи диаметри 18 см. Деворнинг қалинлиги 3 см. Шар тайёрланган материалнинг ҳажмини топинг.
75. R радиусли ярим шар шаклидаги идишга цилиндр қўшиб қуйилган. Идиш ҳажмининг V га тенг бўлишлиги учун цилиндрик қисмининг баландлиги қандай бўлиши керак?
76. Шарнинг диаметрига перпендикуляр текислик диаметрни 3 см ва 9 см ли бўлакларга ажратади. Шарнинг ҳажми қандай қисмларга ажралади?
77. Баландлиги шар диаметрининг 0,1 қисмига тенг бўлган шар сегментининг ҳажми шар ҳажмининг қандай қисмини ташкил этади?
78. Иккита тенг шар шундай жойлашганки, бирининг маркази иккинчисининг сиртида ётади. Шарларнинг умумий қисми ҳажмининг бутун шарнинг ҳажмига нисбати қандай?
79. Шарнинг 30 см га тенг диаметри асосининг радиуси 12 см бўлган цилиндрнинг ўқи ҳисобланади. Шарнинг цилиндр ичидаги қисмининг ҳажмини топинг.
80. Агар шар сектори асоси айланасининг радиуси 60 см га, шарнинг радиуси эса 75 см га тенг бўлса, шар секторининг ҳажмини топинг:
81. Бурчаги 30° ва радиуси R га тенг доиравий сектор ён радиусларининг бири атрофида айланади. Ҳосил қилинган жисмнинг ҳажмини топинг.

21-§. ЖИСМЛАР СИРТЛАРИНИНГ ЮЗЛАРИ

СИРТНИНГ ЮЗИ ТУШУНЧАСИ

Бир амалий масалани қараб чиқамиз. Бинонинг гумбазини ва томони 1 см бўлган квадрат шаклидаги ясси тунука тахтани кўз олдингизга келтиринг. Бинонинг гумбази ва тунука тахта бўялиши керак дейлик. Агар гумбазни бўяш учун V_1 л бўёқ, тунука тахтани бўяшга V_2 л бўёқ кетган бўлса, бино гумбазининг юзи тунука тахта юзидан $\frac{V_1}{V_2}$ марта катта деб ҳисоблаш табиий. $\frac{V_1}{V_2}$ га тенг сон гумбаз сирти юзининг катталигини 1 м² юз бирлигига нисбатан характерлайди. Тунука тахтани бўяш учун керак бўладиган бўёқнинг V_2 миқдори асоси 1×1 м дан иборат квадрат ва баландлиги h (га тенг бўёқ қалинлиги) бўлган параллелепипеднинг ҳажмига тенг. Шунинг учун гумбаз сиртининг юзини баҳолаш учун $\frac{V_1}{h}$ сон ҳосил қилинади.

Энди сирт юзини геометрик усулда аниқлашга ўтамиз. F — берилган сирт бўлсин. Фазонинг барча шундай нуқталаридан иборат F_h жисмни ясаймизки, бу нуқталарнинг ҳар бири учун F сиртнинг h дан ошмаган масофада турган нуқтаси топиладиган бўлсин. Аниқроқ қилиб айтганда, F жисмни сиртнинг иккала томонини бўяганда h қалинликдаги бўёқ қатлами билан тўлдирилган жисм деб тасаввур қилиш мумкин.

F_h жисмнинг ҳажми V_h бўлсин. *F сиртнинг юзи* деб $\frac{V_h}{2h}$ нисбатнинг $h\to0$ даги лимитига айтамиз, яъни

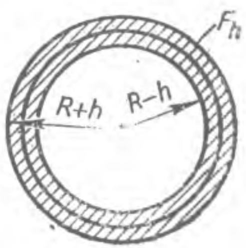
$$S=\lim_{h\to0}\frac{V_h}{2h}.$$

Призма ва пирамиданинг ён сирти сингари оддий қавариқ сиртлар учун бу таъриф сирт юзининг аввалги қийматини — ён ёқлари юзларининг йиғиндисини беришини исботлаш мумкин.

СФЕРАНИНГ ЮЗИ

Сферанинг юзини топамиз. F — радиуси R га тенг сфера бўлсин. Сирт юзи таърифида гап борган F_h жисм радиуслари $R+h$ ва $R-h$ бўлган концентрик иккита сфера орасидаги қатламдан иборат (322-расм). Бу жисмнинг ҳажми $R+h$ ва $R-h$ радиусли шарлар ҳажмларининг айирмасига тенг, яъни

$$V_h=\frac{4}{3}\pi\,[(R+h)^3-(R-h)^3].$$



322-расм.

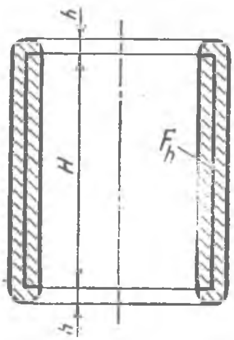
Бундан:

$$\frac{V_h}{2h}=\frac{4\pi}{3\cdot2h}\cdot(6hR^2+2h^3)=4\pi R^2\left(1+\frac{h^2}{3R^2}\right).$$

$h\to0$ да $\frac{V_h}{2h}$ нисбат $4\pi R^2$ лимитга интилади. Шундай қилиб, ***радиуси R га тенг сферанинг юзи $4\pi R^2$ га тенг.***

ЦИЛИНДРНИНГ ЁН СИРТИ

Радиуси R ва баландлиги H бўлган цилиндр ён сиртининг юзини топамиз. Сирт юзи таърифида гап борган F_h жисм мазкур ҳолда радиуслари $R+h$, $R-h$ бўлган цилиндрик сиртлар ва цилиндр



323- расм.

ўқига перпендикуляр бўлиб, ундан $H+2h$ масофада жойлашган иккита текислик орасига жойлашгандир (323- расм). Бу қатламнинг бир-биридан H масофада жойлашган иккита асос текисликлари орасига олинган қисми бутунлигича F_h жисмга тегишли бўлади. Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$V_h < [\pi\ (R+h)^2 - \pi\ (R-2h)^2]\ (H+2h),$$

$$V_h > [\pi\ (R+h)^2 - \pi\ (R-h)^2]\ H.$$

Ёки

$$4\pi RhH < V_h < 4\pi Rh(H+2h).$$

Бундан

$$2\pi RH < \frac{V_h}{2h} < 2\pi RH + 4\pi Rh.$$

$h \to 0$ да тенгсизликнинг ўнг қисми $2\pi RH$ га интилади. Демак,

$$\lim_{h\to 0} \frac{V_h}{2h} = 2\pi RH.$$

Шундай қилиб, ***цилиндр ён сиртининг юзи***

$$S = 2\pi RH$$

формула бўйича аниқланади (топилади), бунда R — ци индрнинг радиуси, H — баландлиги.

Худди шунга ўхшаш конуснинг ва сферик сегментнинг ён сирти юзини топиш мумкин.

Конус ён сиртининг юзи

$$S = \pi R l$$

га тенг, бунда R — конус асосининг юзи, l — ясовчисининг узунлиги.

Сферик сегмент ён сиртининг юзи

$$S = 2\pi RH$$

га тенг, бунда R—сферанинг радиуси, H—сегментнинг баландлиги.

ТАКРОРЛАШ УЧУН САВОЛЛАР

1. Жисм сиртининг юзи нима?
2. Шар сиртининг юзи учун формула чиқаринг.
3. Шар сегменти сиртининг юзи қайси формула бўйича ҳисобланади?
4. Цилиндрнинг ён сирти формуласини келтириб чиқаринг.
5. Конус ён сиртининг юзи қайси формула бўйича топилади?

МАШҚЛАР

1. Икки шар сиртларининг нисбати $m:n$ га тенг. Улар ҳажмларининг нисбатини топинг.

2. Гипотенуза ва катетлар учта шарнинг диаметрларидир. Уларнинг сиртлари орасида қандай боғланиш бор?
3. Диаметри 65 см бўлган цилиндр трубанинг баландлиги 18 м. Агар парчинлашга ҳамма материалнинг 10 % и кетса, бундай трубани тайёрлаш учун қанча тунука керак?
4. Ертўладаги ярим цилиндрик гумбазнинг узунлиги 6 м ва диаметри 5,8 м. Ертўланинг тўлиқ сиртини топинг.
5. Думалоқ металл листдан диаметри 25 см ва баландлиги 50 см бўлган цилиндр стакан штампланган. Штамплашда листнинг юзи ўзгармаган деб фараз қилиб, листнинг диаметрини топинг.
6. Цилиндр асосининг юзи Q, ўқ кесимининг юзи M. Цилиндрнинг тўлиқ сирти нимага тенг?
7. Баландлиги 3,5 м, асосининг диаметри 4 м бўлган конуссимон палатка қалин мато билан ёпилган. Палаткага неча квадрат метр қалин мато кетган?
8. Силос минорасининг томи конус шаклида. Томнинг баландлиги 2 м, миноранинг диаметри 6 м. Томнинг сиртини топинг.
9. Конус асосининг юзи S, ясовчиси асосга α бурчак остида огишган. Конуснинг ён сиртини топинг.
10. Тенг ёнли конуснинг (кесимида — мунтазам учбурчак) ён сирти билан тўлиқ сиртининг бир-бирига нисбатини топинг.
11. Ярим доира буралиб, конус сирти шаклини қабул қилди. Конуснинг ясовчиси билан ўқи орасидаги бурчакни топинг.
12. Доиравий секторнинг радиуси 3 м, бурчаги 120°. Доиравий сектор буралиб, конус сирти шаклини қабул қилди. Конус асосининг радиусини топинг.
13. Гапириладиган карнак бир учининг диаметри 0,43 м, иккинчи учининг диаметри 0,036 м ва ясовчиси 1,42 м бўлса, бу карнакни ясаш учун неча квадрат метр жез лист керак?
14. Агар конус шаклидаги челакларнинг диаметрлари 25 см ва 30 см, ясовчиси 27,5 см ҳамда 1 м^2 га 150 г алиф мойи кетадиган бўлса, 100 та шундай челакнинг ташқи сиртини бўяш учун қанча алиф керак?
15. Тенг томонли конуснинг тўлиқ сирти унинг баландлигини диаметр қилиб ясалган шарнинг сиртига тенгдош. Шуни исботланг.
16. Квадратнинг томони атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган жисмнинг сирти радиуси квадратнинг томонига тенг шарнинг сиртига тенгдош. Шуни исботланг.
17. Шарнинг радиуси 15 см. Шар марказидан 25 см наридаги нуқтадан шу шар сиртининг кўриниб турган қисмининг юзини топинг.
18. Радиуси 10 см бўлган шар ўқи бўйлаб цилиндрсимон қилиб тешилган. Тешикнинг диаметри 12 см. Жисмнинг тўлиқ сиртини топинг.

МАШҚЛАРГА ДОИР ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

1- §.

7. Биттадан ортиқ бўлмаган. **10.** 1), 4), 6) Кесади; 2, 3), 5) кесмайди. **11.** 6 та кесма. **14.** 1) 6 см; 2) 7,7 дм; 3) 13,1 м. **17.** 1), 2) Йўқ, 3) тегишли. **18.** 1), 2) Бўла олмайди. **19.** Йўқ. **20.** Йўқ. **21.** Йўқ. **22.** 0,5 м ёки 5,9 м. **23.** AB кесма. **24.** Йўқ. **25.** 1) $AC = 9$ м, $BC = 6$ м; 2) $AC = 10$ м, $BC = 5$ м; 3) $AC = BC = 7{,}5$ м; 4) $AC = 6$ м, $BC = 9$ м. **27.** 1) 110°; 2) 119°; 3) 179°. **28.** 2), 3) Йўқ. **29.** (ab) бурчак катта. **30.** 1) $\angle(ac) = 45^\circ$, $\angle(bc) = 15^\circ$; 2) $\angle(ac) = 10^\circ$, $\angle(bc) = 20^\circ$; 3) $\angle(ac) = \angle(bc) = 30^\circ$; 4) $\angle(ac) = 24^\circ$, $\angle(bc) = 36^\circ$. **33.** Мавжуд эмас. **34.** Битта. **36.** 1) 1,2 м; 2) 2,4 см. **38.** 11 см. **39.** 100°. **41.** $PQ = 5$ см, $QR = 6$ см, $PR = 7$ см. **42.** $\angle A = 40^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle C = 30^\circ$. **44.** $\triangle ABC$ да: $AB = 5$ см, $BC = 6$ см, $AC = 7$ см. **46.** Мумкин эмас. **47.** Мумкин эмас.

2- §.

1. 150°, 135°, 120°, 90°. **2.** 1), 2) Бўла олмайди; 3) бўла олади. **4.** 1) 105° ва 75°; 2) 110° ва 70°; 3) 45° ва 135°. **4.** 1) 72° ва 108°; 2) 54° ва 126°; 3) 55° ва 125°; 4) 88° ва 92°. **6.** 150°, 150°, 30°. **7.** 130°. **9.** 144° ва 36°. **10.** 65° ва 115°. **11.** Ҳамма бурчаклар тўғри бурчак. **13.** 1) Ўтмайди; 2) Ўтмайди. **14.** 1) 20°; 2) 60°; 3) 90°. **15.** $\angle(a_1\ b) = 120^\circ$, $\angle(a_1\ c) = 150^\circ$, $\angle(bc) = 30^\circ$. **17.** 1) 110°, 2) 175°; 3) 170°. **18.** 1) 15°, 2) 26°, 3) 86°. **19.** 1) 120°, 2) 150°; 3) 178°. **21.** Кўрсатма. 20-масаланинг натижасидан ва 2,3-теоремадан фойдаланинг. **22.** 1) 155°; 2) 135°; 3) 105°. **23.** 2) Кўрсатма. A ва C нуқталарни кесма билан туташтиринг ва 23, 1-масала тасдиғидан фойдаланинг.

3- §.

10. 0,3 м. **11.** 3,5 м. **12.** 1) 3,2 м, 6,2 м, 6,2 м; 2) 7,2 м, 4,2 м, 4,2 м. **21.** Кўрсатма. Тенг ёнли учбурчак медианаси хоссасидан фойдаланинг. **25.** 15 м. **26.** 15 м. **29.** Кўрсатма. 28-масала тасдиғидан фойдаланинг. **38.** Кўрсатма. Медианаларни ўз узунликлари қадар давом эттиринг. **40.** Кўрсатма. Медианаларни ўз узунликлари қадар давом эттиринг.

4- §.

2. AB_1C_1 ва AC_1B_1 бурчаклар ҳамда BB_1C_1 ва CC_1B_1 бурчаклар ички бир томонли бурчаклар, AB_1C_1 ва CC_1B_1 ҳамда BB_1C_1 ва AC_1B_1 бурчаклар ички алмашинувчи бурчаклар. **8.** 105° ва 75°. **9.** 75°. **10.** Ҳар бири 72° дан учта бурчак ва ҳар бири 108° дан тўртта бурчак. **11.** Тенг бўла олмайди. **13.** 90°. **14.** 1) 100°; 2) 65°; 3) 35°; 4) 35°. **15.** 1) 30°; 60°, 90°; 2) 40°, 60°, 80°; 3) 45°, 60°, 75°; 4) 48°, 60°, 72°; 5) 50°, 60°, 70°. **16.** Йўқ. **17.** Йўқ. **18.** 1) 100°, 2) 70°; 3) 36°. **19.** 1) 50°, 2) 30°, 3) 75°. **20.** 40°, 40°. **21.** 70° ва 40° ёки 55° ва 55°. **22.** 1) 80°, 80°, 20°; 2) 70°, 70°, 40°; 3) Иккита бурчак $120^\circ - \frac{3}{2}\alpha$ га тенг, биттаси $\frac{4}{3}\alpha - 60^\circ$ га тенг. **24.** 1) 105°; 2) $180^\circ - \frac{1}{2}(\alpha + \beta)$; 3) 155°; 4) $90^\circ + \frac{\gamma}{2}$. **25.** 110°, 35°, 35°. **26.** 60°, 30° ва 90°. **27.** 110°. **29.** 1) 20°; 2) 65°; 3) α. **30.** $\triangle ABD$ нинг бурчаклари: $\angle A = \alpha$, $\angle D = 90^\circ$, $\angle B = 90^\circ - \alpha$, $\triangle CBD$ нинг бурчаклари: $\angle D = 90^\circ$, $\angle B = \alpha + \beta - 90^\circ$, $\angle C = 180^\circ - \alpha - \beta$. **32.** 60°. **33.** $\angle D = \frac{1}{2}\angle A$, $\angle E = \frac{1}{2}\angle C$, $\angle DBE = \angle B + \frac{1}{2}(\angle A + \angle C)$. **34.** 140°, 10°. **36.** 90°, 45°, 45°. **37.** $\angle D = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $\angle A = 30^\circ$. **38.** 150°. **39.** 90°.

5- §.

1. Кўрсатма. Нурга радиусга тенг кесма қўйинг. 2. 1-масалага қаранг. 5. 60°. 6. 120°. 7. Йўқ. 9. 30°. 10. 60° ва 120°. 11. 70 см, 10 см. 12. Йўқ. 13. 1) Бўла олмайди; 2) мумкин эмас. 25. Кўрсатма. Тенг томонли учбурчакни ясашдан бошланг. 27. Кўрсатма. Изланаётган учбурчакда медианани унинг узунлиги қадар давом эттиринг. 32. Кўрсатма. Баландликни ясашдан бошланг. 36. 4-§ даги 42-масалага қаранг. 37. 36-масалага қаранг. 45. Кўрсатма. Изланаётган айлана маркази бурчак биссектрисасида ётади. 46. 10 см. 47. 5 см. 50. 49-масалага қаранг. 52. α ёки $180° - \alpha$. 53. 150°. 54. Кўрсатма. 1) Уриниш нуқтаси, берилган нуқта ва айлана маркази тўғри бурчакли учбурчак учлари бўлади. 2) Радиуси берилган айланалар радиуслари йиғиндиси ёки айирмасига тенг бўлиб, берилган айланалардан бирига концентрик бўлган ёрдамчи айлана ясаш билан масала ечилишини олдинги масала ечилишига келтиринг. 59. Кўрсатма. Айланага ички чизилган бурчакларнинг хоссаларидан фойдаланинг.

6- §.

3. Учта. 4. 10 м. 5. 3 см. 7. $BC = AD = 4{,}8$ м. 8. 40°, 140°, 140°. 9. 115° ва 65°. 10. Йўқ. 11. 60°, 60°, 120°, 120°. 12. 1) 40°, 40°, 140°, 140°; 2) 50°, 50°, 130°, 130°; 3) 80°, 80°, 100°, 100°. 13. 1) 55°, 55°, 125°, 125°; 2) 35°, 35°, 145°, 145°; 3) 20°, 20°, 160°, 160°. 16. $BE = 9$ см, $CE = 6$ см. Кўрсатма. ABE асоси AE га тенг бўлган тенг ёнли учбурчак эканини исботланг. 17. 0,6 м ва 0,8 м. 18. $AB = BD = 1{,}1$ м; $AD = 0{,}8$ м. 23. 60 см. 24. 10 см ва 18 см. 25. 12 см, 20 см. 26. 12 см 27. 10 см ва 25 см ёки 7,5 см ва 18,75 см. 30° 80° ва 100°. 32. 60° ва 120°. 35. 4 м. 37. 2 м. 38. 2 м. 39. 4 м, 8 м. 40. 1 м. 41. 10 см. 42. 4 см, 5 см, 6 см. 43. 6 см. 44. 6 см, 5 см, 5 см. 48. 5 м, 6 м. 49. $a + b$. 52. 3 м, 4 м. 54. 70° ва 110°. 55. 1,7 м. 56. 24 см, 36 см. 57. 60. ва 120°. 58. 15 м. 59. 3 см. 61. 4 м, 6 м. 62. 2,2 м. 63. 9 см ва 5 см. 64. a. 65. Кўрсатма. Олдин икки томони трапециянинг ён томонларига, учинчи томони эса асослари айирмасига тенг бўлган учбурчак ясанг. 66. Кўрсатма. Олдин икки томони трапеция диагоналларига, учинчи томони эса унинг асослари йиғиндисига тенг бўлган учбурчак ясанг.

7- §.

3. 5 м ёки $\sqrt{7}$ м. 4. 1) 5 см; 2) 17 дм; 3) 6,5 м. 5. 109 см. 6. $\frac{a}{\sqrt{2}}$. 7. Мумкин эмас. 8. $\frac{25}{3}$, $\frac{20}{3}$. 9. 1) 15 см, 20 см, 2) 60 м, 80 м. 11. Кўрсатма. Изланаётган кесма асоси гипотенузани a ва b кесмаларга ажратувчи тўғри бурчакли учбурчакнинг баландлигидир. 12. $\sqrt{116}$ м $\approx 10{,}8$ м. 13. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$. 14. 32 см, 60 см. 15. 15 см. 17. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 18. 24 см. 19. 36 см, 54 см, 20. 25 см ёки 11 см. 22. 1) 24 см; 2) 24 см, 23. 12 см, 11,2 см, $\frac{168}{13}$ см. 24. 13,44 см. 25. 2) Мумкин эмас. 26. 10 см, 6 см. 27. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. 28. $R = \frac{169}{24}$ см, $r = \frac{10}{3}$ см. 29. $90° - \alpha$, $a\cos\alpha$, $a\sin\alpha$. 30. $90° - \alpha$, $\frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\frac{a}{\sin\alpha}$. 33. 1) $\sin 16° = 0{,}2756$, $\cos 16° = 0{,}9613$; 2) $\sin 24°36' = 0{,}4163$,

cos 24°36′ = 0,9092; 3) $\sin 70°32' = 0{,}9428$, $\cos 70°32' = 0{,}3333$; 4) $\sin 88°49' = 0{,}9998$, $\cos 88°49' = 0{,}0206$. **34.** 1) $x = 1°$; 2) $x = 30°6'$; 3) $x = 47°3'$; 4) $x = 80°9'$, **35.** 1) $\operatorname{tg} 10° = 0{,}1763$; 2) $\operatorname{tg} 40°40' = 0{,}8591$; 3) $\operatorname{tg} 50°30' = 1{,}213$; 4) $\operatorname{tg} 70°15' = 2{,}785$. **36.** 1) $x = 17°53'$; 2) $x = 38°7'$; 3) $x = 80°46'$; 4) $x = 83°50'$. **37.** 31° 25′; 31°25′; 117° 10′; 23,8 см. **38.** 34°10′ ва 55°50′. **39.** 51°. **40.** 116°16′ ва 63°44′. **41.** 29°52′ ва 150°8′. **42.** 12 м, 45°14′. **43.** 60°16′. **44.** $\frac{a}{\sqrt{2}}$. **45.** 1) а) 5; 36°52′; 53°8′; б) 41; 12°41′; 77°19′; в) 29; 43°36′; 46°24′; г) 61; 10°23′; 79°37′; 2) а) 12; 22°37′; 67°23′; б) 24; 16°16′; 73°44′; в) 15; 28°4′, 61°56′; г) 13; 81°12′; 8°48′; 3) а) 70°; 0,68; 1,88; б) 39°40′; 3,08; 2,55; в) 19°2′; 7,55; 2,66; г) 13°39′; 15,55; 3,78. 4) а) 59°33′; 5,92; 5,10; б) 49°12′; 7,65; 5,79; в) 29°25′; 8,04; 3,95; г) 22°; 9,71; 3,64. **46.** 1) $\cos^2\alpha$; 2) $\sin^2\alpha$; 3) 2; 4) $\sin^2\alpha$; 5) 1; 6) $\sin^2\alpha$; 7) 1; 8) $\sin^2\alpha$; 9) $1 + \operatorname{tg}^6\alpha$. **47.** 1) $\sin\alpha = \frac{12}{13}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{12}{5}$; 2) $\sin\alpha = \frac{8}{17}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{8}{15}$; 3) $\sin\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. **48.** 1) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = \frac{9}{41}$; $\operatorname{tg}\alpha = \frac{40}{9}$; 3) $\cos\alpha = 0{,}6$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. **50.** $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **51.** $r = \frac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$. **52.** 29 см. **53.** $(\sqrt{3} - 1)$ м $\approx 0{,}732$ м, $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}$ м $\approx 0{,}517$ м. **54.** 60° ва 120°. **55.** 60°, 60°, 120°, 120°. **56.** 1) 6) α; 2), 3), 4), 5) β. **57.** BC. **58.** $\angle A$. **59.** 3 м. **62.** Бўла олмайди. **63.** 2 м. **67.** AB ва CD кесмаларининг кесишиш нуқтаси. **68.** Бўла олмайди. **71.** $R - d$, $R + d$. Кўрсатма. Учбурчак тенгсизлигидан фойдаланинг. **72.** $d + R$, $d - R$. Кўрсатма. Учбурчак тенгсизлигидан фойдаланинг. **73.** Кесиша олмайди. **74.** Кесиша олмайди. **75.** Кўрсатма. Айланалар марказлари орасидаги масофани уларнинг радиуслари билан таққосланг. **76.** Кесишмайди.

8- §

3. 2. **4.** 3. **5.** (2,0). **6.** (0,3). **7.** y ўқига параллел тўғри чизиқ. **8.** Иккита тўғри чизиқ: $x = 3$ ва $x = -3$. **10.** Мусбат ярим ўқни кесиб ўтади. **11.** 4 (3). **12.** 5. **13.** $x = 2$. **14.** $x = -2$. **15.** I ва III чораклар биссектрисаларини ўз ичига олган тўғри чизиқ. **16.** II ва IV чораклар биссектрисаларини ўз ичига олган тўғри чизиқ. **18.** (0, −2). **19.** (1,1). **20.** (3,3). **23.** 1) 2; 2) 4. **25.** $AB = 5$, $AC = 10$, $BC = 5$. **26.** B нуқта. **28.** (3,3) ва (15, 15). **29.** (3,4), (−4,3), (0,5). **30.** (5,12) ва (5, −12); (5, −12) ва (−5, −12). **31.** $x^2 + (y - 3)^2 = 13$. **32.** $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$. **34.** 33-масалага қаранг. **35.** 1), 3), 4) мумкин эмас; 2) мумкин. **36.** (−2,0) ёки (4,0). **37.** (7,0) ва (1,0). **38.** (2,2) ва (−2, −2). **39.** $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$. **40.** $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 25$. **43.** $x + y = 2$. **44.** 1) (−3,0), (0, −1,5); 2) (4,0), (0,3); 3) (−2,0); (0,3); 4) (2,5; 0), (0, −5), **45.** (−1,1); (3, −2). **46.** 1) (1, −2); 2) (2,4); 3) (0,5; −2). **48.** 1) $x + y = 5$, 2) $3x + 10y = 2$; 3) $x + 6y = -13$. **49.** $a = b = \frac{1}{3}$. **50.** −3. **51** $\pm\sqrt{2}$. **52.** Кўрсатма. Икки тўғри чизиқнинг кесишиш нуқтасини топинг ва бу нуқта учинчи тўғри чизиқда ётиш-ётмаслигини текширинг. **54.** $y = 3$. **56.** $\sin 120° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 120° = -\frac{1}{2}$, $\operatorname{tg} 120° = -\sqrt{3}$; $\sin 135° = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 135° =$

$= \frac{1}{\sqrt{2}}$, tg $135° = -1$; sin $150° = \frac{1}{2}$, cos $150° = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, tg$150° = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
57. sin $160° = 0{,}3420$; cos $140° = -0{,}7660$; tg $130° = -1{,}192$. **58.** 1) sin $40° = 0{,}6428$; cos $40° = 0{,}7660$; tg $40° = 0{,}8391$; 2) sin $14°36' = 0{,}2521$; cos $14°36' = 0{,}9677$; tg $14°36' = 0{,}2605$; 3) sin $70°20' = 0{,}9117$; cos $70°20' = 0{,}3365$; tg $70°20' = 2{,}798$; 4) sin $30°16' = 0{,}5040$; cos $30°16' = 0{,}8637$; tg $30°16' = 0{,}5836$; 5) sin $130° = 0{,}7660$; cos $130° = -0{,}6428$; tg $130° = -1{,}192$; 6) sin $150°30' = 0{,}4924$; cos $150°30' = -0{,}8704$; tg $150°30' = -0{,}5658$. **59.** $\alpha_1 \approx 11°32'$ ёки $168°28'$; $\alpha_2 \approx 134°26'$; $\alpha_3 \approx 158°12'$.
60. 1) $\sin\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; $\operatorname{tg}\alpha = 2\sqrt{2}$; 2) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$; $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{3}$; 3) $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$; $\operatorname{tg}\alpha = 1$; 4) $\sin\alpha = \frac{1}{2}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$. **61.** 1) $\cos\alpha = 0{,}8$, $\operatorname{tg}\alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$; 3) $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = -1$ ёки $\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\operatorname{tg}\alpha = 1$. **62.** $\sin\alpha = \frac{5}{13}$, $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$.

9-§.

12. 1) Йўқ, 2) Йўқ. **15.** Мавжуд эмас. **20.** Кесма. **21.** Тўғри чизиқ. **22.** Чексиз кўп. Берилган тўғри чизиқларга параллел ва улардан тенг узоқликдаги тўғри чизиқда. **23.** Учта. **25.** Иккита. **26.** Чексиз кўп. **29.** 1) Кўрсатма. Берилган нуқтага нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг. 2) Кўрсатма. b тўғри чизиққа нисбатан симметриядан фойдаланинг. **35.** Айлана. Кўрсатма. Ватарларнинг умумий учига нисбатан гомотетиядан фойдаланинг. **38.** Кўрсатма. Учбурчакнинг берилган томон қаршисида ётувчи учига нисбатан гомотетиядан фойдаланинг. **39.** 0,8 м; 1 м; 1,2 м. **40.** 10 м, 25 м, 20 м. **42.** 13,6 см. **43.** $AC = 4$ м, $B_1C_1 = 14$ м. **44.** $AC = 24$ см, $A_1C_1 = 18$ см, $B_1C_1 = 15$ см. **46.** 15 см, 20 см, 25 см. **47.** 21 см. **49.** $\frac{ah}{a+h}$. **50.** $A_1C_1 = 1{,}2$ м, $AC = 3$ м. **51.** 1) Ўхшаш эмас; 2) ўхшаш. **52.** 1) Ўхшаш; 2) ўхшаш эмас. **53.** 1) Ўхшаш; 2) ўхшаш эмас. **55.** $\frac{m}{n}$. **56.** 4 см. **57.** $\frac{27}{28}$. **58.** 1) 11 см; 2) 6 дм. **59.** Кўрсатма. Учбурчакнинг бир томонига унинг учидан бошлаб a ва b кесмаларни қўйинг, иккинчи томонига эса c кесмани қўйинг. a кесма охирида b ва c кесмалар охирларидан ўтувчи тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказинг. **60.** Ўхшаш. **61.** 1) Ҳа. 2) Ҳа; 3) Йўқ. **62.** 1 м, 2 м, 2,5 м. **63.** 6,5 м, 5,5 м. **64.** ≈ 42 м. **66.** $\frac{bc}{b+c}$. **67.** $m:n$. **68.** $n:m$. **69.** $AC = 18$ м. Кўрсатма. ACD ва CBA учбурчаклар ўхшаш. **70.** $m:n$. **71.** 15 см, 18 см. **72.** 4,5 см. **73.** $\frac{a(\sqrt{5}-1)}{2}$. **77.** $\approx 225{,}8$ км (қ. 76-масала). **78.** $\approx 82{,}4$ км (қ. 76-масала).

10-§.

1. $(1, -1)$, $(2, -1)$, $(1, 1)$. **2.** 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$. **4.** 1) Мавжуд эмас; 2) мавжуд. **7.** Бир хил йўналган нурлар: AB ва DC, BC ва AD, CD ва BA, DA ва CB. Қарама-қарши йўналган нурлар: AB ва

CD, BC ва DA, DC ва BA, AD ва CB. **8.** $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{BC}$ векторлар **бир хил йўналган**, $\overline{BA}$ вектор билан $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ векторлардан исталгани қарама-қарши йўналган. **11.** қ. 10-масала. **14.** $m = \pm 12$. **15?.** $n = \pm 7$. **17.** 1) $\overline{(3, -5)}$; 2) $\overline{(-1,1)}$; 3) $\overline{(1,0)}$; 4) $\overline{(-3,2)}$; 5) $\overline{(1,5)}$. **18.** 1) $\overline{(0,1)}$; 2) $\overline{(-5,3)}$; 3) $\overline{(1; -1)}$; 4) $\overline{(-1,1)}$; 5) $\overline{(-1; -2)}$. **20.** 1) 5; 2) 10; 3) 13. **21.** 1) 13; 2) 10; 3) 17. **24.** 1) $\overline{b}$ (6,8); 2) $\overline{b}$ (— 6, — 8). **25.** 1) $\overline{(-6, -8)}$; 2) $\overline{(9,7)}$; 3) $\overline{(12,7)}$. **26.** 1) 10; 2) 13; 3) 15. **27.** 1) 15; 2) 39; 3) 30. **28.** 1) $\pm\frac{1}{2}$; 2) ± 1; 3) $\pm\frac{5}{13}$. **30.** $\overline{a}$ ва $\overline{c}$ векторлар бир хил йўналган, $\overline{b}$ ва $\overline{d}$ векторлар қарама-қарши йўналган; $|\overline{a}| = |\overline{d}|$, $|\overline{b}| = |\overline{c}|$. **32.** $n = 2$. **33.** $\overline{a}$, $\overline{c}$, $\overline{d}$ бирлик векторлар; $\overline{a}$ ва $\overline{d}$ векторлар **коллинеар векторлар**. **34.** $\overline{(0,6;\ 0,8)}$. **37.** $\overline{(2, -3)}$. **38.** $\lambda = -5$, $\mu = 4$. **40.** 90°. **41.** $\sqrt{3}$. **42.** 30°. **43.** $\cos A = 0{,}6$; $\cos B = 0$; $\cos C = 0{,}8$. **44.** $\angle A = 30°$, $\angle B = 60°$, $\angle C = 90°$. **46.** $m = -\frac{8}{3}$. **48.** $\lambda = -\frac{1}{2}$. **55.** 1) $\overline{OX} = \frac{\mu\overline{a} + \lambda\overline{b}}{\mu + \lambda}$,

11-§.

2. $\frac{1}{2}\sqrt{c^2 + d^2 \pm 2cd\cos\alpha}$. **3.** $\sqrt{a^2 + b^2 \pm 2ab\cos\alpha}$. **6.** 13 м ёки $\sqrt{1513}$ м $\approx 38{,}9$ м. **7.** $\frac{5}{13}$, $\frac{33}{65}$, $\frac{3}{5}$. **8.** $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2}$, $m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + c^2 - b^2}$, $m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2) - c^2}$. **9.** Кўрсатма, 8-масаладан фойдаланинг. **12.** Йўқ. **13.** Бўла олмайди. **14.** $AB = \frac{AC\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. **15.** $x = \frac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\alpha - \beta)}$. **16.** AD кесма катта. **18.** AB томон энг катта, BC томон энг кичик. **19.** B бурчак энг катта, C бурчак энг кичик. **20.** Ён томони катта. **26.** AB томони катталашади.

27. 1) $\alpha = 105°$, $b \approx 2{,}59$, $c \approx 3{,}66$;
2) $\alpha = 45°$, $b \approx 17{,}93$, $c \approx 14{,}64$;
3) $\alpha = 20°$, $b \approx 65{,}78$, $c \approx 88{,}62$;
4) $\gamma = 119°$, $a \approx 16{,}69$, $c \approx 24{,}83$;
5) $\gamma = 68°$, $a \approx 13{,}57$, $b \approx 11{,}22$.

28. 1) $\alpha \approx 79°6'$, $\beta \approx 40°54'$, $c \approx 10{,}58$;
2) $\alpha \approx 11°2'$, $\beta \approx 38°58'$, $c \approx 28{,}02$;
3) $\beta \approx 26°45'$, $\gamma \approx 58°15'$, $a \approx 19{,}92$;
4) $\beta \approx 20°30'$, $\gamma \approx 14°30'$, $a \approx 22{,}92$;
5) $\alpha \approx 16°20'$, $\gamma \approx 11°40'$, $b \approx 53{,}41$;
6) $\alpha \approx 129°50'$, $\gamma \approx 35°10'$, $b \approx 8{,}09$.

29. 1) $c \approx 8{,}69$, $\beta \approx 21°9'$, $\gamma \approx 38°51'$;
2) $c \approx 19{,}63$, $\beta \approx 12°53'$, $\gamma \approx 29°7'$;
3) $c \approx 22{,}30$, $\beta \approx 5°35'$, $\gamma \approx 10°25'$,
4) Ечимлари мавжуд эмас.
5) $c \approx 11{,}40$, $\beta \approx 41°49'$, $\gamma \approx 108°11'$,
ёки $c \approx 2{,}46$, $\beta \approx 138°11'$, $\gamma \approx 11°49'$.

30. 1) $\alpha \approx 28°57'$; $\beta \approx 46°34'$; $\gamma \approx 104°29'$;
2) $\alpha \approx 53°35'$; $\beta \approx 13°18'$; $\gamma \approx 113°7'$;

3) $\alpha \approx 34°3'$; $\beta \approx 44°25'$; $\gamma \approx 101°32'$;
4) $\alpha \approx 38°38'$; $\beta \approx 92°50'$; $\gamma \approx 48°32'$;
5) $\alpha \approx 14°58'$; $\beta \approx 11°$; $\gamma \approx 154°2'$;
6) $\alpha \approx 135°35'$; $\beta \approx 15°30'$; $\gamma \approx 28°55'$.

12- §.

2. $R_1 + R_2 - d_1$, $R_1 - R_2 - d$. **6.** Йуқ. **8.** $\frac{1}{2}\ n\ (n-1)$. **10.** 36°, 72°, 108°, 144°. **11.** 1) 8 та; 2) 12 та. **12.** 1) 10 та 2) 15 та **13.** Курсатма. Бу n бурчакнинг ҳамма томонлари тенг, ҳамма бурчаклари тенг. **14.** Курсатма. Бу n бурчакнинг ҳамма томонлари тенг, ҳамма бурчаклари тенг. **18.** Курсатма. Иккала радиусни учбурчакнинг томони орқали ифодаланг. **19.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. Курсатма. Олдин айлана радиусини топинг. **20.** $2\sqrt{6}$ дм. **21** $2\sqrt{2}$ см. **22.** $\sqrt{3}$ см. **24.** Курсатма. Косинуслар теоремасидан фойдаланинг. **25.** Курсатма. Олдин 9- § даги 73- масала ёрдамида 10 бурчакнинг томонини топинг, сўнгра косинуслар теоремасидан фойдаланиб 5 бурчакнинг томонини топинг.

$$a_{10} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2},\quad a_5 = R\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}.\qquad \textbf{26.}\ \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}.$$

27. $\sqrt{r^2 + \frac{a^2}{4}}$. **28.** $b = \frac{2aR}{\sqrt{4R^2 - a^2}}$. **29.** $a = \frac{2bR}{\sqrt{4R^2 + b^2}}$. **30.** Курсатма. Олдин ички мунтазам олтибурчакни чизиб олинг. **31.** Курсатма. Олдин ташқи квадрат чизинг. **32.** 1) 62,8 м; 2) 94,2 м. **33.** 6,28 мм. **34.** $\approx 3{,}06$. Курсатма. 23- масала натижасидан фойдаланинг. **35.** $\approx 3{,}11$. 24- масала натижасидан фойдаланинг. **36.** $\approx 6366{,}2$ км. **37.** $\approx 6{,}3$ см. **38.** 1) $\frac{R\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}$; 2) $\frac{R}{1 + \sqrt{2}}$; 3) $\frac{R}{2}$. Курсатма. Доираларнинг марказлари мунтазам n бурчакнинг учларидир. **39.** 1) $R\ (3 + 2\sqrt{3})$; 2) $R\ (1 + \sqrt{2})$; 3) R. Курсатма. Доираларнинг марказлари мунтазам n бурчакнинг учларидир. **40.** $\approx 351{,}9$ м/мин. **41.** 1) 300° ва 60°; 2) 230° ва 130°; 3) 190° ва 170°. **42.** 1) 120°; 2) 90°; 3) 72°, 4) 60°; 5) 240°; 6) 270°. **43.** 31″. **44.** 1) $\approx 0{,}79$ м; 2) $\approx 0{,}52$ м; 3) $\approx 2{,}09$ м; 4) $\approx 0{,}80$ м; 5) $\approx 1{,}06$ м; 6) $\approx 2{,}63$ м. **45.** 1) $\frac{\pi a}{3}$, 2) $\frac{\pi a}{2\sqrt{2}}$; 3) $\frac{2\pi a}{3\sqrt{3}}$. Курсатма. Ватар ва мос марказий бурчак бўйича айлана радиусини топинг. **46.** 1) $\frac{3}{\pi}\ l$; 2) $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\ l$; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2\pi}\ l$. Курсатма. Олдин айлана радиусини топинг. **47.** 1) $\frac{\pi}{6}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\frac{\pi}{3}$.

13- §.

1. Кўрсатма. Пифагор теоремасидан фойдаланинг. **2.** $\approx$ 180 м. **3.** $S = \frac{a^2}{2}$. **4.** Икки марта. **5.** Квадратнинг юзи 9 марта катталашади. **6.** 5 марта. **7.** 8 м, 18 м. **8.** 12 дм, 25 дм. **9.** 30°. **10.** Квадрат. **11.** 200 см². **12.** 202,8 см².

14. $\sqrt{15}$ см. 18. 4800 м². 19. $\frac{a^2}{4}$. 20. 6 см. 22. $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$. 23. $\frac{3R^2\sqrt{3}}{4}$. 24. 600 см². 25. 55 см, 48 см. 27. $\angle C = 90^\circ$, 28. $\approx 0{,}47$ м². 29. 5,64 м². 30. $\frac{a^2 \sin\alpha \sin\beta}{2\sin(\alpha+\beta)}$. 31. К ў р с а т м а. 26- масаланинг тасдиғидан фойдаланинг. 34. 1) 84; 2) 12; 3) 288; 4) 10; 5) $\frac{2520}{13}$; 6) 1,4. 35. 1) 11,2; 2) 4; 3) 7,2; 4) 1,4. 5) $\frac{2520}{169}$; 6) 1,344. 37. 1) $R=\frac{65}{8}$; $r=4$; 2) $R=\frac{65}{8}$, $r=1{,}5$; 3) $R=\frac{145}{6}$, $r=\frac{7}{3}$; 4) $R=\frac{35}{\sqrt{96}}\approx 3{,}6$; $r\approx\frac{\sqrt{6}}{2}\approx 1{,}2$. 38. 4,5 см. 40. $R=29$ см, $r=12$ см. 41. 480 см². 42. 540 м². 43. $\frac{l^2}{4\pi}$. 44. 1) 20π см²; 2) 12π м²; 3) $\pi(a^2-b^2)$. 45. 1) 4 марта; 2) 25 марта; 3) m^2 марта. 46. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{4\pi}{3\sqrt{3}}$; 3) $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 47. $\frac{1}{4}$. 48. 2. 49. 1) $\frac{\pi R^2}{9}$; 2) $\frac{\pi R^2}{4}$; 3) $\frac{5\pi R^2}{12}$; 4) $\frac{2\pi R^2}{3}$; 5) $\frac{5\pi R^2}{6}$; 6) $\frac{11\pi R^2}{12}$. 50. 1) $\frac{R^2}{2}$; 2) $\frac{Rl}{2}$. 51. $a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$. 52. 1) $(\pi-2)R^2$; 2) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{4}\right)R^2$; 3) $\left(\pi-\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)R^2$.

14- §.

2. Мумкин. 6. К ў р с а т м а. Бошқа текисликда нуқта олинг ҳамда шу нуқтадан ва берилган тўғри чизиқдан текислик ўтказинг. Бу текисликка параллеллик аксиомасини қўлланинг. 10. Тўртта текислик. 12. 11- масалага қаранг.

15- §.

4. 1) 6 м; 2) 4,2 дм; 3) 6,2 см; 4) $\frac{a+b}{2}$. 5. 1) 1 м; 2) 0,6 дм; 3) 2,1 см; 4) $\frac{|a-b|}{2}$. 6. 1) 37,5 см; 2) 9,9 см; 3) 15 см; 4) $c\left(1+\frac{b}{a}\right)$. 7. 1) 7 м; 2) 2 м; 3) $a+c-b$. 8. Мумкин эмас. 12. 1) 5 см; 2) 3 см; 3) 8 см; 4) $\frac{bc}{a+c}$. 15. Йўқ. 19. 16- масалага қаранг. 20. Йўқ. 16- масалага қаранг. 26. Агар нуқта тўғри чизиқлар текислигида ётса, ечими йўқ. 32. $A_1B_1 = a$. 35. К ў р с а т м а. Иккита ихтиёрий тўғри чизиқ $X_1X_2X_3$ ва $Y_1Y_2Y_3$ кесмаларининг нисбатини таққосланг. 37. Айлана. 38. Айлана. 40. Ўрта чизиқ билан. 41. Йўқ. 42. Мумкин. 43. К ў р с а т м а. Кесмаларнинг нисбати сақланади. 44. К ў р с а т м а. Перпендикуляр диаметрнинг проекцияси берилган диаметр проекциясига параллел бўлган ватарларнинг ўрталаридан ўтади.

16- §.

2. 1- масалага қаранг. 3. 1) 6,5 см; 2) 15 см; 3) $\sqrt{a^2-b^2+a^2}$; 4) $\sqrt{a^2-c^2+2d^2}$. 8. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 11. Айлана. 12. 6 см, 15 см. 13. 15 см, 41 см.

14. 4 см, 8 см. 15. 9 см. 18. $\sqrt{b^2-a^2}$. 19. $\sqrt{b^2+c^2-a^2}$. 20. 0,36 м ёки 0,44 м. 23. 1) 4,25 см; 2) 6,75 см; 3) $\frac{a+b}{2}$. 24. 1) 1,05 см; 2) 0,65 см; 3) $\frac{|a-b|}{2}$. 25. 0,6 м. 26. 9 м. 27. $\frac{am}{m+n}$ (m текислик ўтказилган асосга мос келади). 28. $\frac{a}{2}$. 29. 2,6 м. 30. $\approx 3{,}9$ м. 31. $\sqrt{a^2-\frac{b^2}{2}}$. 33. 2,5 м. 34. 6 м. 35. 14 см. 36. $\sqrt{a^2+b^2}$. 37. $\sqrt{a^2-\frac{d^2}{8}}$. 38. Перпендикулярнинг узунлиги $\sqrt{2a^2-b^2}$, томоннинг узунлиги $\sqrt{b^2-a^2}$. 39. $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$, $\sqrt{c^2-a^2}$, $\sqrt{c^2-b^2}$. 40. $\sqrt{2b^2-a^2}$. 41. 2 м. 42. $\sqrt{2}$ м. 43. $2\sqrt{2}$ м. 44. 6 м. 45. 5 м, 3 м. 46. 1 м. 47. 2,5 м. 48. 6,5 м. 49. $\sqrt{a^2+c^2-b^2}$. 50. $BD=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $CD=\sqrt{a^2+c^2}$. 51. $\sqrt{b^2+c^2-\frac{b^4}{a^2}}$. 53. Кўрсатма. Текисликка перпендикуляр тўғри чизиқлар ўзаро параллел. 54. 1) 11 м; 2) 13 м; 3) 8 м; 4) 7 м; 5) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$; 6) $\sqrt{a^2+b^2-c^2}$. 55. $\sqrt{a^2+b^2}$. 56. $\sqrt{23}$ м. 57. 4 м. 58. 1,3 м. 59. 1,7 м.

17-§.

2. (1, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 3), (1, 2, 0), (1, 0, 3), (0, 2, 3). 3. xy текисликкача бўлган масофа 3 га, xz текисликкача 2 га, yz текисликкача 1 га тенг; x, y, z ўқларигача бўлган масофалар мос ҳолда $\sqrt{13}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{5}$ га тенг; координаталар бошигача бўлган масофа $\sqrt{14}$ га тенг. 5. (2, 2, 2) ва $(-2, -2, -2)$. 6. C (0, 0, 0). 7. $x+2y+3z=7$. 11. $B\ (0, -1{,}3)$. 12. 1) $D(6,2,-2)$; 2) $D\ (0,-2,2)$; 3) $D\ (-1,7,-2)$. 16. $(-1,-2,-3)$, $(0,1,-2)$, $(-1,0,3,)$. 18. $(-1,-2,1)$. 19. 1), 2, 4) мавжуд эмас; 3) мавжуд. 21. 1) $\frac{a}{\sqrt{2}}$; 2) $\frac{a}{2}$; 3) $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 22. 30°. 23. 13 м. 25. 1) $\cos\alpha=\frac{1}{14}$; 2) $\cos\alpha=\frac{2}{21}$. 26. 30°. 27. $a\sqrt{6}$. 28. $a\sqrt{2}$. 29. 30°. 30. $3a$. 31. 3,36 м. 33. 1) $D\ (-2, 3, 0)$; 2) $D\ (2,1-2)$. 34. 1) $n=\frac{4}{3}$, $m=\frac{9}{2}$; 2) $m=-2$, $n=-2{,}5$; 3) $m=4$, $n=6$. 36. 1) $n=\frac{1}{3}$; 2) $n=-1$; 3) $n=2$; 4) $n=4$. 37. $c=1$. 38. $\sqrt{a^2+b^2+c^2+|a|\cdot|b|}$. 39. 1) $\cos\varphi=\frac{1}{\sqrt{3}}$; 2) $\varphi=90°$. 41. $\cos C=\sqrt{\frac{2}{15}}$. 42. $\cos\varphi=\cos\alpha\cdot\cos\beta$. 43. 60°. 44. $\cos\varphi=\frac{\cos\beta-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}$. 45. $\bar{e}\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)$ ёки $\bar{e}\left(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 46. $\bar{e}\ \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)$. 47. $a_1=a_2=0$, $a_3\neq 0$. 48. $a=b=0$, $c\neq 0$, $d\neq 0$. 50. 1) $3x-y-z+6=0$; 2) $3x+3y-2z-5=0$; 3) $x-5y+3z-38=0$. 51. $\left|\frac{d}{a}\right|$, $\left|\frac{d}{b}\right|$, $\left|\frac{d}{c}\right|$. 55. $k=\lambda a$, $l=\lambda b$, $m=\lambda c$, $\lambda\neq 0$. 56. $kx+ly+mz=0$. 57. 1) $(2,1-2)$; 2) $(4{,}5; 1{,}5; 0{,}5)$; 3) $(-2, -7, -28)$; 4) $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}\right)$. 58. Кўрсатма. Биринчи

ва учинчи тенгламани ҳадма-ҳад қўшинг. 59. 1) $c=0,\ d\neq 0$; 2) $c=d=0$. 60. $c=0$ (59-масалага қаранг). 61. Кўрсатма. (2, 3, 1) векторга перпендикуляр бирор векторни топинг. 62. (2, 3, 1) ва (1, 1, 1) векторларга перпендикуляр векторни топинг.

18-§.

2. 60°. 4. $\cos\varphi=\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tg}\alpha}$, $\cos\beta=\frac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}$. 5. 144 см². 6. 7,5 см. 7. 12 см. 9. $3a^2$. 10. $\cos x=\sqrt{3}\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 11. $\frac{7a^2}{8\cos\alpha}$. 12. 22 см. 13. $Q\sqrt{2}$. 14. 12. 15. 2м. 16. 4 м. 18. 45 см². 19. 1) $3ab+\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$; 2) $4ab+2a^2$; 3) $6ab+3a^2\sqrt{3}$. 20. $3l^2\sqrt{3}$. 22. 188 м². 23. ≈ 232 см². 25. $2a$, $a\sqrt{2}$. 26. 13 м, 9 м. 27. 2 м², 3 м². 28. 1) 3; 2) 7; 3) 11. 29. $a\sqrt{\frac{2}{3}}$. 30. 2 м². 31. 1464 см². 32. $2\sqrt{M^2+2Qh^2}$. 34. 3 см. 37. 11 м. 38. $\operatorname{tg}\alpha_1=\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha_2=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha_3=\frac{\sqrt{3}}{2}\operatorname{tg}\alpha$. 39. $\frac{a\operatorname{tg}\beta}{2}$. 40. $2\sqrt{3}$ см. 41. $\frac{3a^2h}{4\sqrt{a^2+3h^2}}$. 42. 9 см. 43. 5 см, 6 см. 44. $\cos x=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 45. 1) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $\sqrt{b^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $\sqrt{b^2-a^2}$. 46. 1) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{12}}$; 2) $\sqrt{h^2+\frac{a^2}{4}}$; 3) $\sqrt{h^2+\frac{3a^2}{4}}$. 47. 1) $\frac{a\sqrt{3}}{4}(a+\sqrt{a^2+12h^2})$; 2) $a(a+\sqrt{a^2+4h^2})$; 3) $\frac{3a}{2}(a\sqrt{3}+\sqrt{3a^2+4h^2}$. 48. $2r(r\sqrt{3}+\sqrt{3a^2-r^2})$. 49. 1,8 м, 4 м. 50. $3a^2$. 52. $\cos\varphi=\frac{Q}{S}$. 53. 16 см ва 6 см ёки 12 см ва 8 см. 54. $\sqrt{2}$ см. 55. 26 м². 56. 540 см². 57. 10 м². 59. 9 см. 60. 1 дм. 61. 6 см. 62. 2 см. 63. $\frac{a^2-b^2}{4}$. 64. $20\sqrt{2}$. 65. 24 м², 30°. 66. 168 м². 67. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2+(a+b)\sqrt{12h^2+(a-b)^2}$; 2) $a^2+b^2+(a+b)\times\sqrt{4h^2+(a-b)^2}$; 3) $\frac{3}{2}(\sqrt{3}(a^2+b^2)+(a+b)\sqrt{4h^2+3(a-b^2)})$. 71. 109° 28′. Кўрсатма. Аввал октаэдрнинг ҳар бир учида икки жуфт перпендикуляр қирралар бирлашишини исботланг. Сўнгра 4-масаладаги формулани қўлланг.

19-§.

1. 5 м. 3. 36 см². 4. 3 дм. 5. 3 дм. 6. $\operatorname{tg}x=\frac{1}{2}$. 8. 10 м. 9. 5 м. 10. $\frac{l}{2}$. 11. R^2. 13. 500. 14. $\frac{R^2\operatorname{tg}\alpha}{\cos\varphi}\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\varphi}$, бунда $\alpha+\varphi<90°$. 16. $\frac{H}{\sqrt{2}}$. 17. $\frac{3l}{4}$. 18. 3 см. 19. $\frac{HR\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}$. 20. $\frac{HR\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. 21. 5 м. 22. $R-r$. 23. a, $2a$. 24. 30 дм². 25.

9 дм². 26. $\frac{1}{4}$ $(\sqrt{M}+\sqrt{m})^2$. 28. 16π м². 30. $\frac{\pi R^2}{4}$. 31. $\frac{\pi R^2}{4}$. 32. πR. 33. ≈ 785 км. 34. 12 см. 35. 12 см. 39. 3 см. 40. 8 см. 41. $\sqrt{r_1^2+r_2^2}$. 42. 5 см. 44. $(x-2)^2+(y-2)^2+(z\mp 1)^2=9$. 46. 4πм. 47. $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. 48. $\frac{a\sqrt{6}}{4}$. 49. $R\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$; $\frac{R}{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$; $\frac{2R}{\sin\alpha}$. 50. 1) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{3}}$; 2) $2\sqrt{R^2-\frac{a^2}{2}}$; 3) $2\sqrt{R^2-a^2}$. 51.

$\frac{a\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{n}}$. 52. $R=\frac{a}{2\sin 2\alpha\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}}$, 53. $R=\frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\sqrt{\cos\alpha}}$;

$r=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}}$, 54. $2R\left(1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$.

20-§.

1. 6 см. 2. $\approx 8{,}4$ г/см³. 4. 25 см. 5. 1,8 г/см³. 6. $\approx 2{,}29$ м. 7. 30 м. 8. Икки марта. 10. 60 см³. 11. 3 м³. 12. $\sqrt{\frac{MNQ}{2}}$. 13. $\sqrt{2}$ м³. 14. $\frac{a^3}{\sqrt{2}}$. 15. 1) $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2b$; 2) a^2b; 3) $\frac{3\sqrt{3}}{2}a^2b$. 16. 0,5 г/см³. 17. $\approx 192{,}72$ кг. 18. 3 см³. 19. $\frac{a^3}{8}$. 20. 6 м³. 22. 3060 м³. 23. 6048 м³/соат. 24. 35200 м³. 25. 48 см³. 26. 12 см³. 27. 2 см. 28. $\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}$. 29. $a^3\sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}$. 30. $2\sqrt{\sin 3\alpha\cdot\sin^3\alpha}$. 31. $abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$. 32. $\frac{h^3\sin\gamma}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$. 33. 1) $\frac{a^2}{12}\sqrt{3b^2-a^2}$; 2) $\frac{a^2}{6}\sqrt{4b^2-2a^2}$; 3) $\frac{a^2}{2}\sqrt{3(b^2-a^2)}$. 34. $\frac{3}{4}a^3$. Кўрсатма. Пирамиданинг баландлиги асосига ички чизилган айлананинг радиусига тенг. 35. $\frac{1}{6}b^3$. 36. $\frac{a^3}{12\sqrt{2}}$. 37. $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$. 38. $\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$. Кўрсатма. Октаэдрни иккита мунтазам тўртбурчакли пирамидага ажратинг. 39. 360 м³. 40. 48 см³. Кўрсатма. Пирамида баландлигининг асоси пирамида асосига ташқи чизилган айлананинг маркази билан устма-уст тушади. 41. $\sqrt{11}$ см³. 43. $\frac{h\sqrt{Q_1}}{\sqrt{Q_1}-\sqrt{Q_2}}$. 44. $\frac{1}{6}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. Кўрсатма. 42-масала формуласидан фойдаланинг. 45. $\frac{1}{24}(a^3-b^3)\operatorname{tg}\alpha$. 46. $\frac{4}{3}l^3\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha-\cos^2\beta}$. 47. $\frac{2}{3}R^3\sin\alpha\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\gamma$. 49. $\frac{h}{\sqrt[3]{2}}$. 50. $\approx 0{,}75$ мм. 51. ≈ 4500 л. 52. n марта; $\sqrt{n}$ марта. 53. 4:1. 54. $\frac{3}{4}\pi a^3$, 55. ≈ 61 кг, 57. $\approx 2\%$.

58. $\frac{\pi}{3}|R^3 - r^3|$. 59. $\frac{\pi^2}{3}|R^3 - r^3|$. 60. 14 см. 61. $1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3$, бунда $r < R$. 62. $2\pi\sqrt{\frac{11}{3}}$ м$^3 \approx 12$ м^3. 63. 9 πм^3. Кўрсатма. Конуснинг баландлиги асосининг радиусига тенг. 64. $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$. 65. $\frac{1}{3}\pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha$. 66. $\approx 1{,}6$ Т. 67. $\approx 0{,}35$ м. 68. $\frac{\pi a^3}{4}$. 69. $\frac{\pi a^2 b^2}{3\sqrt{a^2 + b^2}}$. 70. ≈ 14 см. 71. ≈ 39 см. 72. 167. 73. $33\frac{1}{3}$ %. Кўрсатма. Шарнинг диаметри цилиндрнинг диаметрига тенг. 74. ≈ 2148 см^3. 75. $\frac{V}{\pi R^2} - \frac{2}{3}R$. 76. 45π см^3, 243π см^3. 77. 0,028. 78. 5 : 16. 79. 3528π см^3. Кўрсатма. Шарнинг кўрсатилган қисмини цилиндр ва икки сегментга ажратинг. 80. $112{,}5\pi$ дм^3 ёки 450π дм^3. 81. $\frac{1}{3}\pi R^3(2 - \sqrt{3})$. Кўрсатма. Жисм — шар секторидир.

21-§.

1. $\sqrt{m^3} : \sqrt{n^3}$. 2. Катта сирт қолган икки сирт йиғиндисига тенгдош. 3. $\approx 40{,}4$ м^2. 4. ≈ 116 м^2. 5. 75 см. 6. $\pi M + 2Q$. Кўрсатма. Асосининг юзига кўра унинг радиусини топинг. 7. $\approx 25{,}3$ м^2. 8. $\approx 33{,}98$ м^2. 9. $\frac{S}{\cos\alpha}$. Кўрсатма. Асосининг юзига кўра унинг радиусини топинг. 10. 2 : 3. 11. 30°. 12. 1 м. Кўрсатма. Асос айланасининг узунлиги сектор ёйининг узунлигига тенг. 13. $\approx 1{,}04$ м^2. 14. $\approx 4{,}3$ кг. 15. Кўрсатма. Шар ва конуснинг ҳажмларини конус ясовчисининг узунлиги орқали ифодаланг. 16. Кўрсатма. Иккала сиртни квадратнинг томони орқали ифодаланг. 17. 180 π см^2. 18. 512 π см^2.

МУНДАРИЖА

6- СИНФ

ПЛАНИМЕТРИЯ

7- СИНФ

Н 57

Погорелов А. В.
Геометрия: Ўрта мактабнинг 6—10-синфлари учун ўқув қўлл.— 4- русча нашрига мувофиқ 5- нашри.— Т.: Ўқитувчи, 1988.—288 б.

Погорелов А. В. Геометрия: Учебное пособие для 6—10 классов средней школы.

22.151. я72

На узбекском языке

АЛЕКСЕЙ ВАСИЛЬЕВИЧ ПОГОРЕЛОВ

ГЕОМЕТРИЯ

Учебное пособие для 6—10 классов
средней школы

Перевод соответствует четвертому изданию изд-ва «Просвещение», М., 1985

Ташкент «Ўқитувчи» 1988

Таржимонлар: *И. Ғ. Аҳмаджонов* (6—8- синфлар)
М. Ш. Саъдуллаев (9—10- синфлар)
Редактор *С. Бекбоева*
Расмлар редактори *С. Соин*
Тех. редакторлар: *С. Аҳтамова, Т. Скиба*
Корректор *М. Тоирова*

ИБ № 4307

Матрицадан босишга рухсат этилди 07.04.87. Формати 60×90/16. Тип. қоғози № 1. Кегли 10, 8 шпонли ва шпонсиз. Гарнитура литературная. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 18,0+0,25 форзац. Шартли кр.-отт. 18,69. Нашр. л. 16,58+0,44. форзац. Тиражи 400000. Зак. № 2089. Баҳоси 30 т.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 700129, Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 09—59—87.

Ўзбекистон ССР нашриётлар, полиграфия ва китоб савдоси ишлари Давлат комитети Тошкент «Матбуот» полиграфия ишлаб чиқариш бирлашмасига қарашли 1-босмахонаси Тошкент, Ҳамза кўчаси, 21. 1987.

Типография № 1 ТНПО «Матбуот» Государственного комитета УзССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, Ташкент, ул. Хамзы, 21.