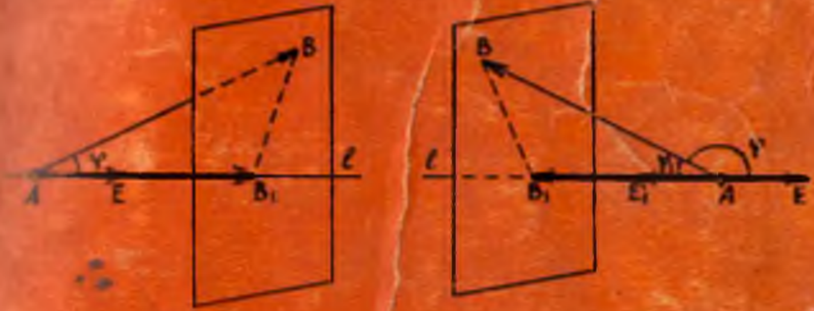
Н.Д. ДОДАЖОНОВ, М.Ш. ЖЎРАЕВА

ГЕОМЕТРИЯ

1-қисм



Н. Д. ДОДАЖОНОВ, М. Ш. ЖЎРАЕВА

ГЕОМЕТРИЯ

I ҚИСМ

Ўзбекистон Республикаси Халқ таълими вазирлиги педагогика институтлари ва университетлари математика ва физика-математика факультетлари талабалари учун ўқув қўлланма сифатида тасдиқлаган

ҚАЙТА ИШЛАНГАН ИККИНЧИ НАШРИ

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 1996

Тақризчилар: физика-математика фанлари номзоди,
доцент **Т. А. Абдуллаев**
физика-математика фанлари номзоди,
доцент **Х. Х. Назаров**

Махсус муҳаррир — профессор М. А. Собиров

Мазкур қўлланма геометрия курсининг векторлар алгебраси элементлари, координаталар методи, алмаштиришлар назарияси, *n* ўлчовли аффин ва Евклид фазолари, квадратик формалар ва квадрикалар, кўпёқлар назарияси каби бўлимларини ўз ичига олади. Назарий материални баён этиш мисоллар ва масалаларни таҳлил этиш билан қўшиб олиб борилган.

Қўлланма педагогика институтлари ва университетлари талабалари учун мўлжалланган. Ундан яна кечки ва сиртқи бўлим талабалари, шунингдек, лицей мактабларининг ўқувчилари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Д $\frac{1602050000-171}{353\ (04)-96}$ 154—96

ISBN 5—645—02603—9

СЎЗ БОШИ

Маълум, педагогика институтларида математика фани ўрта мактаб синфи 1970 йилдан бошлаб жорий этилган дастур асосида ўқитиб келинмоқда. Бу дастурга мувофиқ, илгари мустақил фанлар сифида ўрганилиб келинган «Аналитик геометрия», «Проектив геометрия», «Дифференциал геометрия», «Геометрия асослари», «Элементар геометрия» каби фанлар умумий мазмунини сақлаган ҳолда бирлаштирилиб ва уларга қўшимча «Квадратик формалар назарияси», «Топология элементлари» киритилиб, «Геометрия» номи билан атала бошланди. Бундан мақсад бу фанлар материалига ягона нуқтаи назардан қараб, уни ҳозирги замон математикаси тилида баён этишдир.

Ўқувчига ҳавола қилинаётган бу қўлланма педагогика институтларининг «Математика ва информатика», «Математика ва физика» мутахассисликларига мўлжалланган геометрия курсининг биринчи ва иккинчи семестрларда ўрганиладиган материалларини ўз ичига олган.

Қўлланмага муаллифларнинг Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика институтининг математика факультетида кўп йиллар давомида ўқиган маърузалари асос қилиб олинди.

Мазкур китоб икки бўлимдан иборат бўлиб, биринчи бўлимнинг, I, II, IV бобларида ва иккинчи булимнинг I—II бобларида анъанавий аналитик геометрия курси материали баён этилган. Биринчи бўлимнинг III боби текисликдаги алмаштиришларга, иккинчи бўлимнинг IV боби n ўлчовли аффин ва евклид фазолари назариясига, боби квадратик формалар ва квадрикаларга, ниҳоят, VI боби пёқлар назариясига бағишлангандир. Вектор фазо ва кўп ўлчовли аффин ва евклид фазолари аксиоматик асосда киритилди

Қўлланмани ёзишда ўрта мактабни эски ва янги дастур бўйича ўқиб тугатган ўқувчилар назарда тутилди, шунинг учун бу китобдан кечки ва сиртқи бўлим талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

Бу китобнинг яратилишида фаол қатнашган Низомий номидаги Тошкент Давлат педагогика институти геометр кафедраси аъзоларига чуқур миннатдорчилик изҳор қилам.

аллифлар

АСОСИЙ БЕЛГИЛАШЛАР

$\{x, y, z, \dots\}$ — элементлари $x, y, z, \dots$ дан иборат тўплам.

$\in$ — тегишлилик белгиси: $x \in X$, X тўпламнинг элементи x.

$\notin$ — тегишли эмас.

$\equiv$ — конгруэнт: $AB \equiv CD$ — AB кесма CD кесма конгруэнт.

$\not\equiv$ — конгруэнт эмас.

$\subset$ — қисм (қисм тўплам): $X \subset Y$, X тўплам Y тўпламнинг қисми (X тўплам Y тўпламнинг қисм тўплами).

$\not\subset$ — қисми эмас.

$\cup$ — бирлашма: $X \cup Y$, X ва Y тўпламларнинг бирлашмаси.

$\forall$ — ҳар қандай: $\forall x \in X$ — X тўпламнинг ҳар қандай (ихтиёрий) x элементи.

$\cap$ — кесишма: $X \cap Y$ — X ва Y тўпламларнинг кесишмаси.

$\varnothing$ — бўш тўплам.

$\{x \mid f(x) = y\}$ — шундай x элементлар тўплами, улар учун $f(x) = y$

$\alpha \Rightarrow \beta$ — α дан β келиб чиқади.

$\alpha \Leftrightarrow \beta$ — α дан β, β дан α келиб чиқади.

$\parallel$ — параллеллик белгиси: $a \parallel b$ — a тўғри чизиқ b тўғри чизиққа параллел.

$\exists$ — мавжудки, $\exists x \in X$ — X тўпламга тегишли шундай x элемент мавжудки, . . .

$X \setminus Y$ — X тўпламдан Y тўплам чиқарилган.

CX — X тўпламнинг тўлдирувчиси.

▲ — исботнинг тугалланганлигини билдирувчи белги.

I БЎЛИМ

ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ ТЕКИСЛИКДАГИ ГЕОМЕТРИЯ

I БОБ. ВЕКТОРЛАР АЛГЕБРАСИ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

1-§. Таърифлар, белгилашлар

Мактабда ўрганиладиган геометрия курсидан нуқталарнинг ҳар қандай тўплами *фигура* (шакл) деб аталиши, умумматематик тушунчалар бўлмиш сон, тўплам, тегишлилик билан бир қаторда таърифсиз қабул қилинадиган «нуқта», «тўғри чизиқ», «текислик», «масофа» тушунчалари *асосий тушунчалар* деб аталиши маълум.

Асосий тушунчалардан фойдаланиб «орасида», «кесма», «нур», «синиқ чизиқ», «ярим текислик», «бурчак» тушунчаларига таъриф берамиз.

Аввало ушбу белгилашларни киритайлик. Нуқталарни лотин алфавитининг бош ҳарфлари A, B, C, . . . билан, тўғри чизиқларни шу алфавитнинг кичик ҳарфлари a, b, c, . . . ёки иккита катта ҳарф AB, CD, . . . билан, текисликларни эса грек алфавитининг бош ҳарфлари Π, Σ, Ω ёки учта катта ҳарф ABC, EFG, . . . билан белгилаймиз. Икки A, B нуқта орасидаги масофани $\rho(A, B)$ ёки $|AB|$ билан белгилаймиз.

Тўғри чизиқдаги турли учта A, B, C нуқта учун

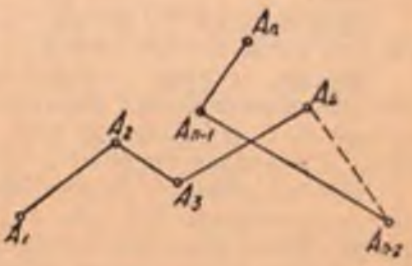
$$\rho(A, C) = \rho(A, B) + \rho(B, C)$$

муносабат бажарилса, *B нуқта A ва C нуқталар орасида ётади* дейилади.

A, B нуқталардан ва улар орасида ётган барча нуқталардан иборат тўплам *кесма* деб аталиб, AB билан белгиланади. A ва B нуқталар AB кесманинг *учлари*, улар орасидаги масофа AB кесманинг *узунлиги* дейилади.

Тўғри чизиқнинг берилган нуқтасидан бир томонда ётган барча нуқталари тўплами *нур* деб аталади. Берилган нуқта *нурнинг бошланғич нуқтаси* дейилади.

AB нурда A унинг бошланғич нуқтаси, B эса шу нурдаги бирорта нуқта.



1- чизма

Битта тўғри чизиқнинг умумий бошланғич нуқтага эга бўлган AB, AC нурлари *карама-қарши нурлар* деб аталади.

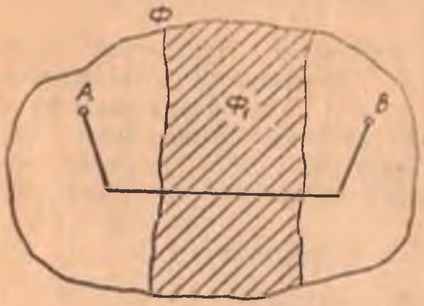
Маълум тартибда олинган чекли сондаги A_1, A_2, . . . , A_n нуқталар берилган бўлсин (1-чизма) ва бу нуқталарнинг кетма-кет келган ҳар учтаси бир тўғри чизиқда ётмасин, у ҳолда A_1A_2, A_2A_3, . . . , A_{n-1} A_n кесмаларнинг бирлашмаси A_1, A_n нуқталарни туташтирувчи *синиқ чизиқ* деб аталиб, A_1, A_n нуқталар унинг *учлари* дейилади. Синиқ чизиқни ташкил этувчи ҳар бир кесма унинг *бўғини* дейилади.

Барча бўғинлари билан текисликка тегишли бўлган синиқ чизиқ *ясси синиқ чизиқ* дейилади.

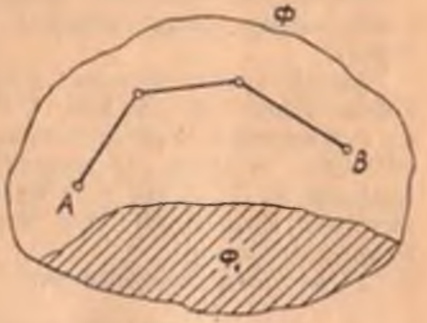
Ф фигурани олайлик. Бу фигуранинг ихтиёрий икки нуқтасини туташтирган ва ўзи шу фигурага тегишли бўлган синиқ чизиқ мавжуд дейлик, $Ф_1 \subset Ф$ бўлсин. $Ф_2 = Ф \setminus Ф_1$ фигурани қараймиз.

Бунда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

1) шундай A, $B \in Ф_2$ нуқталар мавжудки, уларни $Ф_1$ фигура билан кесишмайдиган синиқ чизиқ орқали туташтириб бўлмайди 2- чизма);



2- чизма



3- чизма

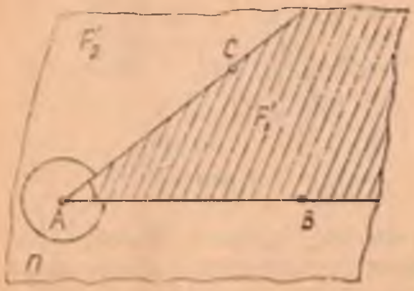
2) ҳар қандай A, $B \in Ф_2$ нуқталарни Ф га тегишли бўлиб, $Ф_1$ фигура билан кесишмайдиган синиқ чизиқ билан туташтириш мумкин (3- чизма).

Биринчи ҳолда $Ф_1$ фигура $Ф_2$ фигурани икки қисмга *ажратади*, иккинчи ҳолда эса *ажратмайди* деймиз.

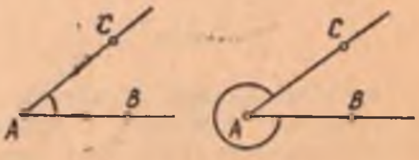
Масалан, a тўғри чизиқда олинган ҳар бир A нуқта $a \setminus \{A\}$ фигурани иккита қисмга ажратади, чунки $a \setminus \{A\}$ фигурага тегишли шундай B, C нуқталар ҳар вақт топиладики, уларни туташтирувчи кесма A нуқтадан ўтади ва a тўғри чизиққа тегишли бўлади.

Ҳар бир қисмнинг A нуқта билан бирлашмаси боши A нуқтада бўлган нур бўлади. Шу каби $a \subset П$ тўғри чизиқнинг $П \setminus a$ фигурани иккита қисмга ажратиши кўрсатилади. Бунда ҳар бир қисм *очиқ ярим текислик*, очиқ ярим текисликнинг a тўғри чизиқ билан бирлашмаси *ёпиқ ярим текислик* дейилади.

П текисликда бошланғич нуқтаси умумий бўлган ҳар хил (қарама-қарши бўлмаган) AB ва AC нурларни олайлик (4-чизма). F орқали бу икки нурнинг бирлашмасини белгилаймиз. У ҳолда F фигура $F' = \Pi \setminus F$ фигурани F_1' ва F_2' қисмларга ажратади. Бу қисмлардан ҳар бирининг F фигура билан бирлашмаси *бурчак* деб аталади. AB ва AC нурлар бурчакнинг *томонлари*, A бурчакнинг *учи*, F_i' фигура F_i $(i = 1, 2)$ бурчакнинг *ички соҳаси* дейилади.



4-чизма



5-чизма

Бошланғич нуқтаси умумий бўлган икки нур томонлари умумий бўлган икки бурчакни аниқлайди. Икки бурчакдан қайси бирини қараётган бўлсак, шу бурчак, одатда, 5-чизмада кўрсатилганидек, ёй билан белгилаб қўйилади.

Томонлари AB, AC нурлардан иборат бурчак $\angle BAC$ билан белгиланади. AB нурни A нуқта атрофида AC нур устига тушгунча буришдан ҳосил қилинган бурчакни ўлчайдиган сон $\angle BAC$ нинг катталиги (миқдори) дейилади.

$\angle BAC$ нинг катталиги BA нурни AC нур устига тушгунча буриш соат милининг ҳаракати йўналишига тескари бўлган ҳолда мусбат, соат мили ҳаракати йўналиши бўйича бўлган ҳолда эса манфий деб ҳисобланади.

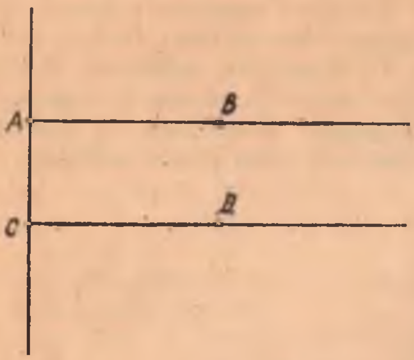
Бир текисликка тегишли AB, CD тўғри чизиқлар кесишмаса ёки устма-уст тушса, улар *параллел тўғри чизиқлар* дейилади.

Агар AB, CD тўғри чизиқлар параллел бўлса, бу тўғри чизиқларда ётган AB, CD кесмалар (ёки AB, CD нурлар) *параллел* дейилади. Хусусан, битта тўғри чизиқда ётган иккита кесма (ёки иккита нур) параллел бўлади.

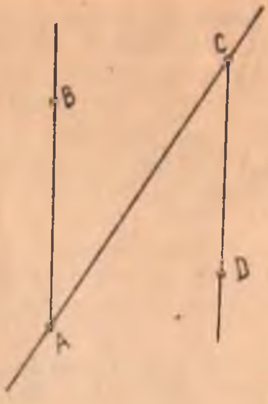
Π, Σ текисликлар кесишмаса ёки устма-уст тушса, улар *параллел* деб аталади.

a тўғри чизиқ П текислик билан умумий нуқтага эга бўлмаса ёки шу текисликка тегишли бўлса, a тўғри чизиқ П текисликка *параллел* деб аталади.

Икки нур бир тўғри чизиқда ётиб, улардан бири иккинчисига тегишли бўлса, улар *бир хил йўналишли*, акс ҳолда *қарама-қарши йўналишли* дейилади.



6- чизма



7- чизма

Бир тўғри чизиқда ётмайдиган икки нур параллел бўлиб, улар бу нурларнинг бошланғич нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқ билан ажратилган битта ярим текисликда ётса (6- чизма), улар *бир хил йўналишли*, турли ярим текисликларда ётса (7- чизма), *қарама-қарши йўналишли* дейилади. Бир хил йўналишни $\uparrow\uparrow$ билан, қарама-қарши йўналишни $\uparrow\downarrow$ билан белгилаймиз.

Нурларнинг бир хил йўналганлиги қуйидаги хоссаларга эга:

1) $AB \uparrow\uparrow AB$ (рефлексивлик хоссаси);

2) $AB \uparrow\uparrow CD \Rightarrow CD \uparrow\uparrow AB$ (симметриклик хоссаси);

3) $AB \uparrow\uparrow CD$ ва $CD \uparrow\uparrow EF \Rightarrow AB \uparrow\uparrow EF$ (транзитивлик хоссаси).

Бу хоссаларнинг ўринлилиги юқоридаги таърифлардан бевосита келиб чиқади.

2- §. Йўналган кесмалар ҳақида тушунча

1-таъриф. Берилган кесманинг учларидан қайси бири биринчи ва қайсиниси иккинчилиги аниқланган бўлса, бундай кесма *йўналган кесма* дейилади. Йўналган кесманинг биринчи учи унинг *боши*, иккинчи учи эса *охири* дейилади.

Боши A ва охири B нуқтада бўлган йўналган кесмани $\overline{AB}$ билан белгилаймиз.

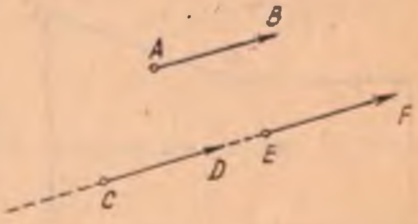
Шуни таъкидлаймизки, оддий AB кесманинг учлари тенг ҳуқуқли бўлиб, улар тартибининг аҳамияти йўқдир. Шунинг учун $AB = BA$ деб ёзиш мумкин. Йўналган кесмаларда эса бош ва охирининг ўринлари алмаштирилиши билан уларнинг йўналиши ўзгаради. Йўналган $\overline{AB}$ кесманинг *узунлиги* деб, AB кесманинг узунлигига айтилади ва у $|\overline{AB}|$ ёки AB билан белгиланади.

2-таъриф. Агар AB ва CD нурлар бир хил (қарама-қарши) йўналишли бўлса, $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ йўналган кесмалар *бир хил (қарама-қарши) йўналишли* дейилади.

3- §. Вектор

1-таъриф. Узунликлари тенг ва бир хил йўналишли барча кесмалар тўплами *озод вектор* ёки қисқача *вектор* деб аталади.

Векторларни устига «$\rightarrow$» белги қўйилган кичик лотин ҳарфлари $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, ... $\vec{x}$, $\vec{y}$ билан белгилаймиз. Фазодаги барча векторлар тўпламини V билан белгилаймиз. Юқоридаги таърифдан векторнинг узунликлари тенг ва бир хил йўналишли кесмалар синфидан иборат эканлиги равшан. Бу синфга тегишли ҳар бир йўналган кесма синфни тўлиқ аниқлайди. Шунинг учун, агар $\overline{AB} \in \vec{a}$ бўлса, $\vec{a}$ векторни $\vec{a} = \vec{AB}$ кўринишда белгилаш мумкин. Табиийки, биргина векторнинг ўзини чексиз кўп усул билан белгилаш мумкин: $\vec{a} = \vec{AB} = \vec{CD} = \vec{EF}$ (8-чизма).



8- чизма

$\vec{AB}$ векторда A унинг *боши*, B эса *охири* дейилади. Йўналган $\overline{AB}$ кесманинг узунлиги $\vec{AB}$ векторнинг *узунлиги* (ёки *модули*) дейилади ва $|\vec{AB}|$ кўринишда белгиланади. Бундан

$$|\vec{AB}| = \rho(A,\ B).$$

2-таъриф. Узунлиги бирга тенг бўлган вектор *бирлик вектор* ёки *орт* дейилади.

3-таъриф. Боши билан охири устма-уст тушган вектор *ноль вектор* дейилади. Ноль вектор $\vec{0}$ кўринишда белгиланади ва унинг узунлиги нолга тенг деб ҳисобланади.

Ноль бўлмаган ҳар қандай вектор тайин бир йўналишни аниқлайди. Ноль вектор йўналишга эга эмас.

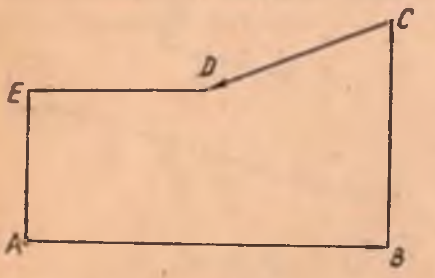
4-таъриф. Агар $\overline{AB} \in \vec{a}$, $\overline{CD} \in \vec{b}$ йўналган кесмалар бир хил (қарама-қарши) йўналишли бўлса, $\vec{a} = \vec{AB}$ ва $\vec{b} = \vec{CD}$ векторлар *бир хил (қарама-қарши) йўналишли* деб аталади.

$\vec{AB}$ ва $\vec{CD}$ векторларнинг бир хил йўналишли эканини $\vec{AB} \uparrow\uparrow \vec{CD}$ кўринишда, қарама-қарши йўналишли эканини $\vec{AB} \uparrow\downarrow \vec{CD}$ кўринишда белгилаймиз.

Икки векторнинг тенглиги, яъни $\vec{a} = \vec{b}$ ёзуви $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг битта вектор эканини, лекин турлича белгиланганини билдиради:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \left(\begin{matrix} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b} \end{matrix}\right).$$

5-таъриф. Агар $\vec{a}$ векторни ҳосил қилувчи йўналган кесмалардан бири d тўғри чизиққа (П текисликка) параллел бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ вектор d тўғри чизиққа (П текисликка) *параллел* деб аталади $\vec{a}$ векторнинг d тўғри чизиққа (П текисликка) параллеллиги $\vec{a} \parallel d$ ($\vec{a} \parallel П$) кўринишда белгиланади.



9- чизма

6-таъриф. Битта тўғри чизиққа параллел бўлган икки вектор *коллинеар векторлар* деб аталади. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг коллинеарлиги $\vec{a} \parallel \vec{b}$ кўринишда белгиланади. Ноль бўлмаган коллинеар векторлар ё бир хил йўналишли, ёки қарама-қарши йўналишли бўлиб, ноль вектор ҳар қандай векторга коллинеар деб ҳисобланади.

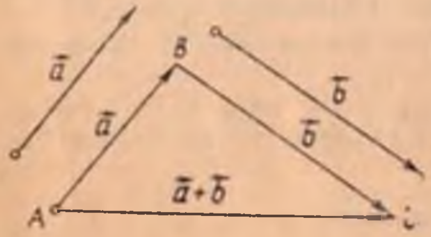
9-чизмада тасвирланган $\vec{AE}$, $\vec{BC}$ векторлар бир хил йўналишли, $\vec{AB}$, $\vec{DE}$ векторлар эса қарама-қарши йўналишлидир.

4-§. Векторлар устида чизиқли амаллар

Векторлар устида бажариладиган қуйидаги амаллар *чизиқли амаллар* деб аталади.

1. Векторларни қўшиш.
2. Векторларни айириш.
3. Векторларни сонга кўпайтириш.

Векторларни қўшиш. Таъриф. Иккита $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторнинг *йиғиндиси* деб исталган A нуқтадан $\vec{a}$ векторни қўйиб, унинг охири B га $\vec{b}$ векторни қўйганда боши $\vec{a}$ векторнинг боши A да, охири $\vec{b}$ векторнинг охири C да бўлган $\vec{AC}$ векторга айтилади (10-чизма). $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг йиғиндиси $\vec{a}+\vec{b}$ билан белгиланади.



10- чизма

Векторларни қўшиш таърифидан исталган A, B ва C уч нуқта учун

$$\vec{AB}+\vec{BC}=\vec{AC} \qquad (*)$$

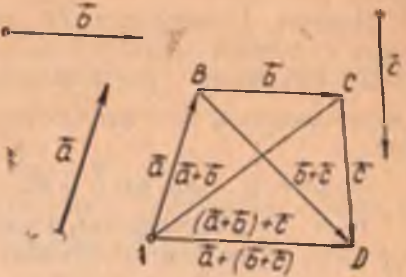
тенглик ўринли бўлиши келиб чиқади. (*) тенглик *векторларни* *қўшишнинг учбурчак қоидаси* дейилади. Икки коллинеар векторни қўшиш ҳам шу қоида бўйича бажарилади.

Векторларни қўшиш амали қуйидаги хоссаларга эга:

1°. Қўшишнинг гуруҳланиш (ассоциативлик) хоссаси. Ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$$

муносабат ўринли.



11- чизма

Исбот. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасидан (11- чизма):

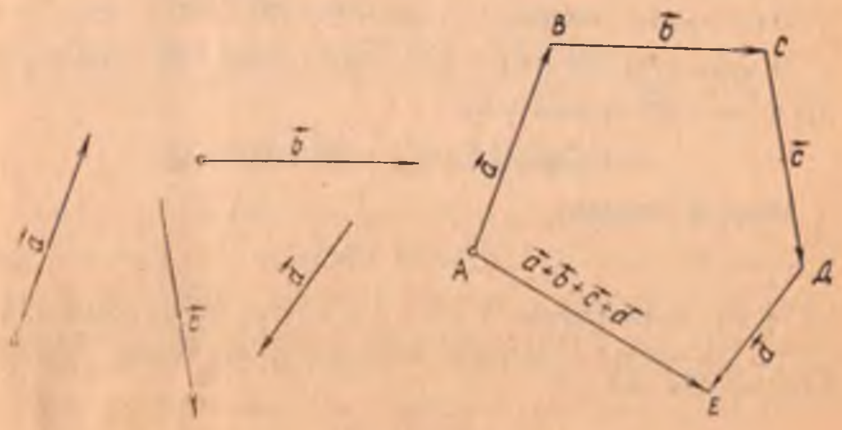
$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},$$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD} \text{ ва } \vec{b}+\vec{c}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{BD},$$

$$\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD},$$

бундан $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ экани келиб чиқади.

Қўшилувчи векторларнинг сони иккитадан ортиқ бўлганда уларни қўшиш ушбу қоида асосида бажарилади: берилган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, . . . , $\vec{l}$ векторларнинг йиғиндисини ҳосил қилиш учун $\vec{a}$ векторнинг охирига $\vec{b}$ векторнинг бошини қўйиш, кейин $\vec{b}$ векторнинг охирига $\vec{c}$ векторнинг бошини қўйиш ва бу ишни $\vec{l}$ вектор устида бажарилгунча давом эттириш керак. У вақтда $\vec{a}+\vec{b}+\ldots+\vec{l}$ йиғинди вектор боши $\vec{a}$ векторнинг бошидан, охири эса $\vec{l}$ векторнинг охиридан иборат вектор бўлади.



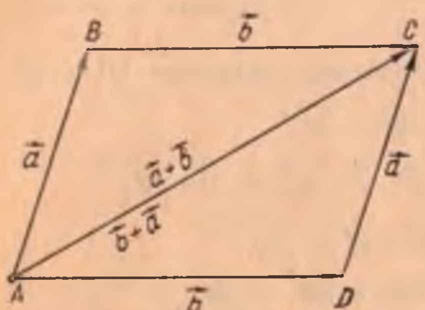
12- чизма

Масалан, 12-чизмадаги $\overrightarrow{AE}$ вектор берилган $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларни қўшишдан ҳосил бўлган.

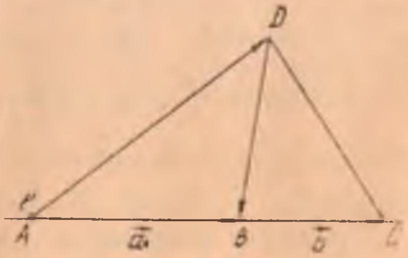
2°. Қўшишнинг ўрин алмаштириш (коммутативлик) хоссаси. Ҳар қандай иккита $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ вектор учун $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ тенглик ўринлидир.

Исбот. $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{BC}$ бўлсин. Икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар коллинеар эмас. Бу ҳолда A, B, C нуқталар битта тўғри чизиқда ётмайди (13-чизма).



13-чизма



14-чизма

ABC учбурчакни $ABCD$ параллелограммга тўлдирсак, векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасига кўра $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$, $\vec{b}+\vec{a}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$; бу икки тенгликдан эса $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлсин. Бу ҳолда A, B, C нуқталар битта l тўғри чизиқда ётади (14-чизма).

$D \notin l$ нуқтани олайлик, у ҳолда $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$.

1) ҳолга кўра $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{AD}$. Лекин $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}$ бўлгани учун

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AB}. \qquad (1)$$

Иккинчи томондан,

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}. \qquad (2)$$

(1) ва (2) тенгликлардан $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ тенгликка эга бўламиз. ▲

3°. Ҳар қандай $\vec{a}$ векторга ноль векторни қўшилса, $\vec{a}$ вектор ҳосил бўлади, яъни

$$\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}.$$

Учбурчак қоидасига кўра исталган $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ вектор учун $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB}=\overrightarrow{AB}$ тенглик ёки $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ тенглик ўринли. ▲

4°. Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор учун шундай $\vec{a}'$ вектор мавжудки, унинг учун

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}. \qquad (3)$$

Исбот. $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ бўлсин. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасига кўра $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AO}=\overrightarrow{OO}=\vec{0}$, бундан $\overrightarrow{AO}=\vec{a}'$. ▲

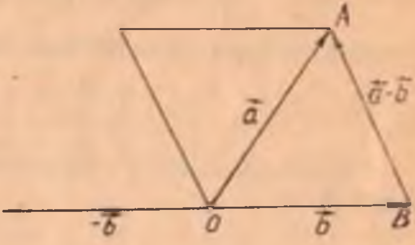
(3) тенгликни қаноатлантирувчи $\vec{a}'$ вектор $\vec{a}$ векторга *қарама-қарши* вектор дейилади ва $-\vec{a}$ билан белгиланади.

5- §. Векторларни айириш

Таъриф. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг *айирмаси* деб, $\vec{a}$ вектор билан $\vec{b}$ векторга қарама-қарши $-\vec{b}$ векторнинг йиғиндисига айтилади.

Бу таърифдан кўринадики, $\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}$ айирма векторни ясаш учун $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$ векторни ясаш керак экан. Агар $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар битта O нуқтага қўйилган бўлса (15-чизма) ҳамда $\vec{a}=\overrightarrow{OA}$ ва $\vec{b}=\overrightarrow{OB}$ деб белгиланган бўлса, у ҳолда

$$\vec{c}=\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{BA}.$$

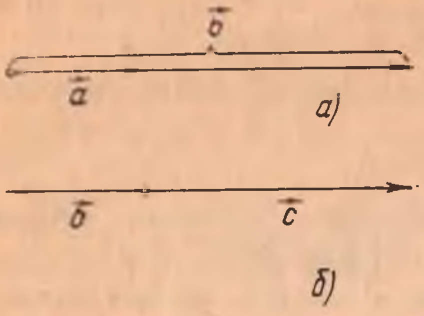


15- чизма

Бу ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг айирмасини топиш учун боши B нуқтада, охири эса A нуқтада бўлган $\overrightarrow{BA}$ векторни ясаш етарли бўлади. Бу қоидадан кўринадики, айирма вектор доимо мавжуддир.

6- §. Векторни сонга кўпайтириш

Таъриф. $\vec{a}\neq\vec{0}$ *векторнинг* $\alpha\in R$ *сонга кўпайтмаси* деб, шундай $\vec{b}$ векторга айтиладики, $\alpha>0$ бўлганда $\vec{b}$ нинг йўналиши $\vec{a}$ нинг йўналиши билан бир хил, $\alpha<0$ да $\vec{b}$ нинг йўналиши $\vec{a}$ нинг йўналишига тескари бўлиб, $\vec{b}$ векторнинг узунлиги эса $\vec{a}$ векторнинг узунлиги билан α сон модулининг кўпайтмасига тенг. Бу кўпайтма $\alpha\vec{a}$ шаклида белгиланади (сон кўпайтувчи чап томонда ёзилади).



16- чизма

Бу таърифдан бевосита қуйидаги хулосалар келиб чиқади:

а) $\forall \vec{a}$ вектор учун $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;

б) $\forall \alpha \in R$ учун $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$;

в) $\forall \vec{a}$ вектор учун $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $(-1)\vec{a} = -\vec{a}$;

г) $\vec{a}$ ва $\alpha \vec{a}$ векторлар ўзаро коллинеардир;

16-*а* чизмада $\vec{a}$ вектор 3 сонига кўпайтирилган: $\vec{b} = 3\vec{a}$. 16-*б* чизмада $\vec{c}$ вектор $-\frac{1}{2}$ сонига кўпайтирилган: $\vec{b} = -\frac{1}{2}\vec{c}$.

Шуни таъкидлаймизки, бирор $\vec{a} \neq \vec{0}$ векторни ўзининг узунлигига тескари $\frac{1}{|\vec{a}|}$ сонга кўпайтирилса, шу вектор йўналишидаги бирлик вектор (орт) ҳосил бўлади, яъни

$$\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \vec{a}_0 \quad (|\vec{a}_0| = 1).$$

Теорема. *Агар* $\vec{a} \parallel \vec{b}$ $(\vec{a} \neq 0)$ *бўлса, у ҳолда шундай* α *сон мавжудки,*

$$\vec{b} = \alpha \vec{a} \tag{4}$$

бўлади.

Исбот. $\vec{a} \parallel \vec{b}$ бўлгани учун қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ бўлса, $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ бўлиб, бундан $\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, бу ҳолда $\alpha = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$ бўлади;

2) $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ бўлса, $\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = -\frac{1}{|\vec{b}|}\vec{b}$ бўлиб, бундан $\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\vec{a}$, бу ҳолда $\alpha = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$;

3) $\vec{b} = 0$ бўлганда $\vec{b} = 0 \cdot \vec{a}$; бундан $\alpha = 0$. ▲

Демак, векторни сонга кўпайтириш таърифидан ва бу теоремадан бундай хулоса чиқарамиз; $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda \vec{a}$. Шундай қилиб (4) муносабат $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар коллинеарлигининг зарурий ва етарли шартидир.

Векторни сонга кўпайтириш қуйидаги хоссаларга эга:

1°. **Гуруҳланиш хоссаси.** Ихтиёрий $\vec{a}$ вектор ва ҳар қандай $\alpha, \beta \in R$ сонлар учун

$$\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a} \qquad (5)$$

муносабат ўринлидир.

Исбот. $\overline{AB} \in \alpha(\beta\vec{a})$ ва $\overline{CD} \in (\alpha\beta)\vec{a}$ йўналган кесмаларни оламиз. $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ ҳамда $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ бир хил йўналишли кесмалар эканини кўрсатамиз:

$$|\overline{AB}| = |\alpha(\beta\vec{a})| = |\alpha||\beta\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|$$

$$|\overline{CD}| = |(\alpha\beta)\vec{a}| = |\alpha\beta||\vec{a}| = |\alpha||\beta||\vec{a}|,$$

бундан кўринадики, $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$.

Энди $AB \uparrow\uparrow CD$ эканини кўрсатиш керак. Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\alpha > 0,\ \beta > 0$ бўлсин. Векторни сонга кўпайтириш таърифига кўра $\vec{a} \uparrow\uparrow \beta\vec{a}$ ва $\alpha(\beta\vec{a}) = \overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{a}$ бўлади. Иккинчи томондан, $\alpha > 0,\ \beta > 0 \Rightarrow \alpha\beta > 0$, бундан эса $(\alpha\beta)\vec{a} = \overrightarrow{CD} \uparrow\uparrow \vec{a}$.

Бу икки муносабатдан: $\overline{AB} \uparrow\uparrow CD$, демак, $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ йўналган кесмалар бир хил йўналишли;

2) $\alpha > 0,\ \beta < 0$ бўлсин, бу ҳолда $\vec{a} \downarrow\uparrow \beta\vec{a}$, $\alpha(\beta\vec{a}) \uparrow\uparrow \beta\vec{a} \Rightarrow \Rightarrow \overline{AB} \uparrow\downarrow \vec{a}$. Шу билан бирга $\alpha > 0,\ \beta < 0 \Rightarrow \alpha\beta < 0$, бундан эса $(\alpha\beta)\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{a}$ ёки $\overrightarrow{CD} \uparrow\downarrow \vec{a}$, бундан ва $\overline{AB} \uparrow\downarrow \vec{a}$ дан $\Rightarrow \overline{AB} \uparrow\uparrow \overline{CD}$;

3) $\alpha < 0,\ \beta > 0$; $\alpha < 0,\ \beta < 0$ ва α ҳамда β нинг бири нолга тенг бўлган ҳолларда ҳам $|\overline{AB}| = |\overline{CD}|$ ва $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ бир хил йўналишли бўлиб, (5) муносабатнинг бу ҳолларда ҳам ўринли эканини кўрсатишни ўқувчига ҳавола этамиз. ▲

2°. Ҳар қандай $\vec{a}$ вектор ва ихтиёрий $\alpha, \beta \in R$ сонлар учун

$$(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a} \qquad (6)$$

муносабат ўринли.

Исбот. $\vec{a} \neq \vec{0}$ ва $\alpha\beta(\alpha + \beta) \neq 0$ бўлсин ($\vec{a} = \vec{0}$ ёки α, β, $\alpha + \beta$ ларнинг бири ноль бўлганда шу параграфдаги б) хулосага кўра (6) муносабатнинг ўринли экани равшан). Йўналган $\overline{OA} \in \vec{a}$ кесмани оламиз. Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $\alpha > 0,\ \beta > 0\ (\alpha < 0,\ \beta < 0)$, бу ҳолда $\alpha + \beta > 0\ (\alpha + \beta < 0)$. Йўналган $\alpha\overline{OA} \in \alpha\vec{a}$, $\beta\overline{OA} \in \beta\vec{a}$ кесмаларни қараймиз. У ҳолда $(\alpha + \beta)\overline{OA} \in (\alpha + \beta)\vec{a}$ бўлиб, $\alpha\overline{OA}$, $\beta\overline{OA}$ ва $(\alpha + \beta)\overline{OA}$ кесмалар бир хил йўналишли, шу билан бирга

$$|(\alpha + \beta)\overline{OA}| = |\alpha\overline{OA}| + |\beta\overline{OA}|$$

(чунки $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$), бундан (6) муносабатнинг ўринлилиги келиб чиқади.

2) $\alpha > 0$, $\beta < 0$ ва $|\alpha| < |\beta|$ бўлсин (яъни $\alpha+\beta$ нинг ишораси α нинг ишорасига тескари). Бу ҳолда $-\alpha$ билан $\alpha+\beta$ нинг ишоралари бир хил бўлиб, 1) ҳолга кўра

$$(-\alpha)\vec{a} + (\alpha+\beta)\vec{a} = [(-\alpha)+\alpha+\beta]\,\vec{a} = \beta\vec{a},$$

бу тенгликнинг иккала томонига $\alpha\vec{a}$ векторни қўшсак, (6) муносабат келиб чиқади. Агар $\alpha < 0$, $\beta > 0$, $|\alpha| > |\beta|$, яъни $\alpha+\beta < 0$ бўлсин десак, у ҳолда $((-\alpha)+(-\beta)) > 0$ бўлиб, бунинг ишораси β нинг ишораси билан бир хил ва 1) ҳолга кўра

$$[(-\alpha)+(-\beta)]\,\vec{a} + \beta\vec{a} = [(-\alpha)+(-\beta)+\beta]\,\vec{a} = (-\alpha)\,\vec{a},$$

бундан

$$[(-\alpha)+(-\beta)]\,\vec{a} = (-\alpha)\,\vec{a} + (-\beta)\,\vec{a}$$

тенгликни ёза оламиз, унинг иккала томонини -1 га кўпайтирсак, (6) муносабатга эга бўламиз. ▲

3°. Ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар ва ихтиёрий $\alpha \in R$ учун

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} \tag{7}$$

муносабат ўринлидир.

Исбот. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин:

1) $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Бу ҳолда юқоридаги теоремага асосан шундай $\lambda \in R$ сон мавжудки, $\vec{a} = \lambda\vec{b}$.

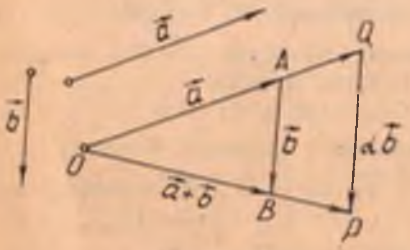
2°-хоссага кўра (7) тенгликнинг чап томони

$$\alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \alpha(\lambda\vec{b}+\vec{b}) = \alpha(\lambda+1)\,\vec{b} \tag{8}$$

кўринишга, унинг ўнг томони эса

$$\alpha\vec{a} + \alpha\vec{b} = \alpha\lambda\vec{b} + \alpha\vec{b} = \alpha(\lambda+1)\,\vec{b} \tag{9}$$

кўринишга келади. (8) ва (9) ни таққослаб, (7) нинг ўринли эканига ишонч ҳосил қиламиз.



17-чизма

2) $\vec{a} \nparallel \vec{b}$ ($\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар коллинеар эмас) ва $\alpha > 0$ бўлсин. Бирор O нуқтага $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ векторни, унинг охири A га $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$ векторни қўйиб, $\overrightarrow{OB} = \vec{a} + \vec{b}$ векторни ҳосил қиламиз (17-чизма).

$$\alpha\vec{a} = \overrightarrow{OQ},\quad \alpha(\vec{a}+\vec{b}) = \overrightarrow{OP} \tag{10}$$

бўлсин. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасига кўра

$$\overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{OP}. \tag{11}$$

OAB ва OQP учбурчакларда O учдаги бурчак умумий ва $\frac{|OQ|}{|OA|} = \frac{|OP|}{|OB|} = \alpha$ бўлгани учун $\triangle OAB \sim \triangle OQP$, бундан

$$|QP| = \alpha\,|AB|, \quad \overrightarrow{QP} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB}, \quad \alpha > 0 \Rightarrow \alpha\,\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{AB},$$

у ҳолда

$$\overrightarrow{QP} = \alpha\,\overrightarrow{AB} = \alpha\,\vec{b}. \tag{12}$$

$$(10),\ (11),\ (12) \Rightarrow \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b} = \alpha\,(\vec{a} + \vec{b}).$$

$\alpha < 0$ бўлган ҳол ҳам шу каби исбот қилинади. ▲

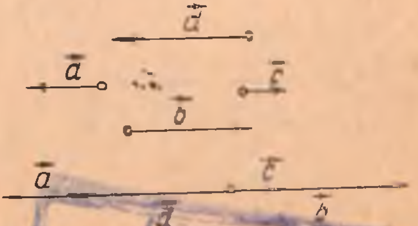
Шундай қилиб, барча озод векторлар тўплами V да аниқланган векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амаллари қуйидаги хоссаларни қаноатлантирар экан:

1. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$ (қўшишнинг ассоциативлиги).
2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (қўшишнинг коммутативлиги).
3. $\forall\, \vec{a} \in V$ учун $\exists\ \vec{0} \in V \mid \vec{0} + \vec{a} = \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$ (ноль векторнинг мавжудлиги).
4. $\forall\, \vec{a} \in V$ учун $\exists\ (-\vec{a}) \in V \mid \vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + \vec{a} = \vec{0}$ (қарама-қарши векторнинг мавжудлиги).
5. $\alpha\,(\beta\,\vec{a}) = (\alpha\,\beta)\,\vec{a}$ (векторни сонга кўпайтиришнинг сонларга нисбатан ассоциативлиги).
6. $(\alpha + \beta)\,\vec{a} = \alpha\,\vec{a} + \beta\,\vec{a}$ (векторни сонга кўпайтиришнинг сонларни қўшишга нисбатан дистрибутивлиги).
7. $\alpha\,(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\,\vec{a} + \alpha\,\vec{b}$ (векторларни қўшишга нисбатан сонга кўпайтиришнинг дистрибутивлиги).
8. $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

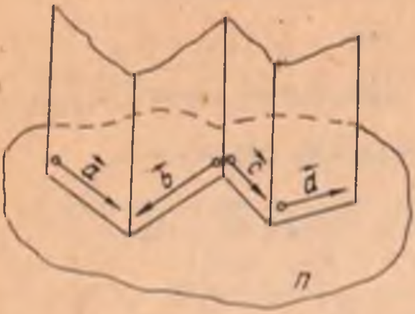
Бу саккиз хоссани қаноатлантирувчи векторлар тўплами V *вектор фазо* деб аталади.

V вектор фазонинг бирор a тўғри чизиққа параллел бўлган барча векторлари тўпламини V_1 билан белгилайлик. Равшанки, V_1 нинг ихтиёрий икки вектори ўзаро коллинеардир (18-чизма).

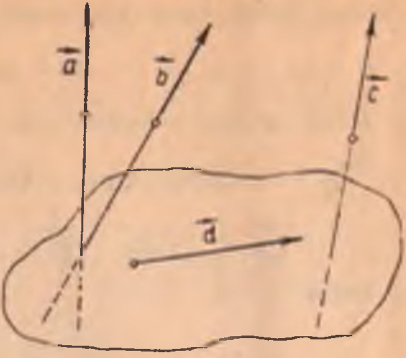
V вектор фазонинг бирор П текисликка параллел бўлган барча векторлари тўпламини V_2 билан белгилаймиз



18- чизма



19-чизма



20-чизма

ва уларни *компланар векторлар* деб атаймиз (19-чизма), 20-чизмадаги векторлар компланар эмас.

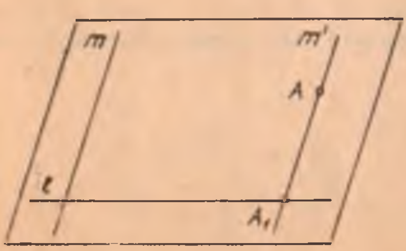
$\vec{a}, \vec{b} \in V_1$ бўлсин, у ҳолда $\vec{a}+\vec{b} \in V_1$, $\alpha \vec{a} \in V_1$ ($\alpha \in R$) бўлади. Шу билан бирга 1—8-хоссалар бажарилади (чунки бу хоссалар V нинг ҳар қандай вектори учун бажарилади). Демак, V_1 вектор фазодир. Худди шу каби V_2 ҳам вектор фазодир.

7-§. Векторнинг ўқдаги проекцияси

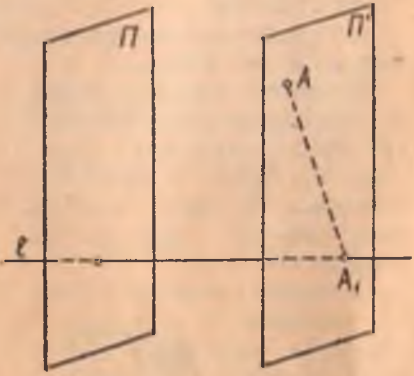
П текисликда ўзаро параллел бўлмаган l, m тўғри чизиқлар берилган бўлсин.

1-таъриф. П текисликдаги ихтиёрий A *нуқтанинг* l *тўғри чизиқдаги* m *тўғри чизиққа параллел проекцияси* деб, A нуқтадан m тўғри чизиққа параллел қилиб ўтказилган m' тўғри чизиқ билан кесишган A_1 нуқтасига айтилади (21-чизма) ва уни $\text{пр}_l A = A_1$ билан белгиланади.

$A \in l$ бўлган ҳолда $\text{пр}_l A = A$.



21-чизма



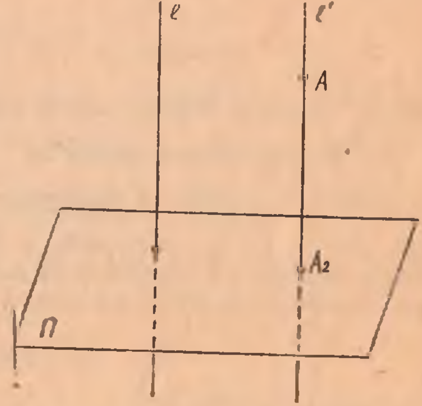
22-чизма

Фазода ихтиёрий A нуқта, l тўғри чизиқ ва бу тўғри чизиққа параллел бўлмаган П текислик берилган бўлсин.

2-таъриф. Фазодаги ихтиёрий *A нуқтанинг l тўғри чизиқдаги П текисликка параллел проекцияси* деб, A нуқтадан П текисликка параллел қилиб ўтказилган П′ текисликнинг l тўғри чизиқ билан кесишган A_1 нуқтасига айтилади ва 1-таърифдагидек белгиланади (22-чизма).

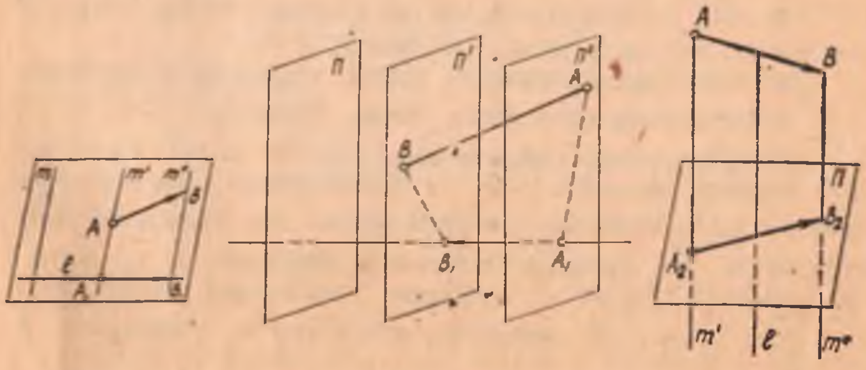
3-таъриф. Фазодаги ихтиёрий *A нуқтанинг П текисликдаги l тўғри чизиққа параллел проекцияси* деб, A нуқтадан l тўғри чизиққа параллел қилиб ўтказилган l' тўғри чизиқнинг П текислик билан кесишган A_2 нуқтасига айтилади (23-чизма) ва уни $пр_П A = A_2$ билан белгиланади.

$A \in П$ бўлган ҳолда $пр_П A = A$. Хусусий ҳолда $m \perp l$ ёки $П \perp l$ бўлса, тегишли проекциялар *ортогонал проекциялар* дейилади.



23-чизма

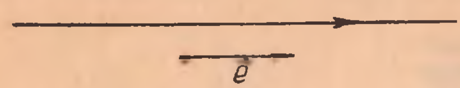
$\overrightarrow{AB}$ вектор берилган бўлсин, унинг боши ва охирини l тўғри чизиққа (П текисликка) юқоридаги тартибда параллел проекциялаб $\overrightarrow{A_1B_1}$ ёки $\overrightarrow{A_2B_2}$ векторларни ҳосил қиламиз (24-чизма). *$\overrightarrow{A_1B_1}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ векторнинг l тўғри чизиқдаги m тўғри чизиққа* (П *текисликка*) *параллел векторли проекцияси* дейилади. *$\overrightarrow{A_2B_2}$ вектор $\overrightarrow{AB}$ векторнинг* П *текисликдаги l тўғри чизиққа параллел векторли проекцияси* дейилади ва бу проекциялар қуйидагича белгиланади:



24-чизма

$$\vec{\text{пр}}_l \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}, \quad \vec{\text{пр}}_{\Pi} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_2B_2}.$$

Бирор a тўғри чизиқни олайлик. Бу тўғри чизиқда иккита ўзаро қарама-қарши йўналиш мавжуд бўлиб, улардан бирини мусбат, бунга қарама-қарши йўналишни эса манфий деб олинади.



25-чизма

4-таъриф. Мусбат йўналиши аниқланган тўғри чизиқ *ўқ* деб аталади.

Ўқни шу тўғри чизиққа коллинеар бўлган бирор вектор билан ҳам аниқлаш мумкин. Хусусий ҳолда бу вектор сифатида бирлик вектор олинади (25-чизма).

$\overrightarrow{AB}$ вектор проекцияланаётган l тўғри чизиқда $\vec{e}$ бирлик векторни оламиз. У ҳолда $\overrightarrow{AB}$ векторнинг ўқдаги проекцияси $\overrightarrow{A_1B_1} \parallel \vec{e}$ бўлиб, $\overrightarrow{A_1B_1} = \lambda \vec{e}$ $\lambda \in R$ бўлади. λ *сонни* $\overrightarrow{AB}$ *векторнинг* l *ўқдаги* m *тўғри чизиққа* (П *текисликка*) *параллел скаляр проекцияси* (қисқача *проекцияси*) деб аталади ва

$$\lambda = \text{пр}_l \overrightarrow{AB}$$

кўринишда белгиланади.

Демак, векторнинг ўқдаги вектор проекцияси унинг шу ўқдаги скаляр проекциясини ўқнинг бирлик векторига кўпайтирилганига тенг, яъни

$$\vec{\text{пр}}_l \overrightarrow{AB} = (\text{пр}_l \overrightarrow{AB}) \vec{e},$$

чунки ҳар қандай вектор учун $\vec{a} = |\vec{a}| \vec{e}$, бунда $\vec{e} \uparrow\uparrow \vec{a}$.

Баъзан $\lambda = \text{пр}_l \overrightarrow{AB}$ *сон* $\overrightarrow{AB}$ *векторнинг* $\vec{e}$ *вектор билан аниқланган йўналишдаги* m *тўғри чизиққа* ёки П *текисликка параллел проекцияси* ҳам дейилади.

Агар $\overrightarrow{A_1B_1}$ ва $\vec{e}$ векторлар бир хил йўналишли бўлса, $\lambda = \text{пр}_l \overrightarrow{AB}$ сон мусбат, акс ҳолда эса манфий бўлади.

Энди икки вектор орасидаги бурчак тушунчасини киритамиз. $\vec{a}, \vec{b}$ нолдан фарқли икки вектор бўлсин. Йўналган $\overline{OA} \in \vec{a}$, $\overline{OB} \in \vec{b}$ кесмаларни оламиз. Бу кесмалар ётган OA ва OB нурлар иккита бурчакни аниқлайди (1-§). Бу бурчакларнинг ёйиқ бурчакдан кичиги $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ *векторлар орасидаги бурчак* деб аталади ва унинг миқдори $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ кўринишда белгиланади. Равшанки, $\vec{a}, \vec{b}$ векторлар орасидаги бурчак O нуқтанинг танланишига боғлиқ эмас. $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\pi}{2}$ да $\vec{a}, \vec{b}$ векторлар *перпендикуляр* дейилади. $\vec{a}, \vec{b}$ векторларнинг перпендикулярлиги $\vec{a} \perp \vec{b}$ кўринишда белгиланади.

5-таъриф. *l ўқ билан $\vec{a}$ вектор орасидаги бурчак* деб, l ўқнинг бирлик вектори $\vec{e}$ билан $\vec{a}$ вектор орасидаги бурчакка айтилади.

Теорема. *$\vec{a} \neq \vec{0}$ векторнинг l ўқдаги ортогонал проекцияси $\vec{a}$ вектор узунлигини унинг l ўқ билан ташкил этган бурчаги косинусига кўпайтмасига тенг, яъни*

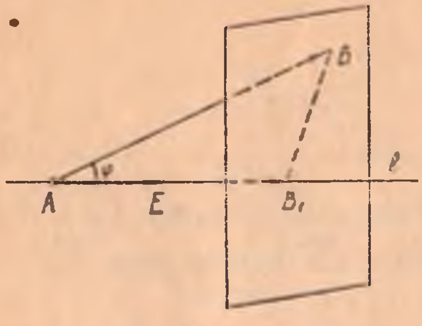
$$\text{пр}_l\, \vec{a} = |\vec{a}| \cos\varphi, \text{ бунда } \varphi = (\widehat{\vec{e}, \vec{a}}).$$

Исбот. $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ векторни қараймиз. Умумийликни бузмаслик учун $\overrightarrow{AB}$ векторнинг боши $A \in l$ деб оламиз. B_1 нуқта B нуқтанинг l ўқдаги ортогонал проекцияси, $\overrightarrow{AE} = \vec{e}$ эса l ўқнинг бирлик вектори бўлсин. Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

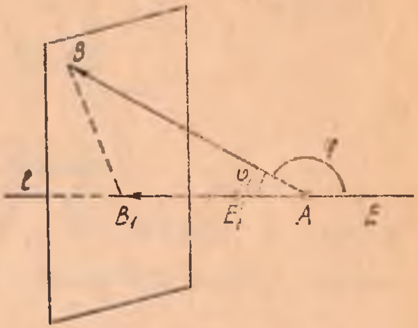
а) φ ўткир бурчак: $0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$ (26-чизма). Бу ҳолда $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\vec{e}$ векторлар бир хил йўналишли бўлиб,

$$\text{пр}_l\, \overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB_1}|$$

бўлади. Тўғри бурчакли ABB_1 учбурчакда



26-чизма



27-чизма

$$|\overrightarrow{AB_1}| = |\overrightarrow{AB}| \cos\varphi,$$

бундан

$$\text{пр}_l\, \overrightarrow{AB} = |\vec{a}| \cos\varphi$$

экани келиб чиқади.

б) $\varphi > \frac{\pi}{2}$ (27-чизма). Бу ҳолда $\overrightarrow{AB_1}$ ва $\vec{e}$ векторлар қарама-қарши йўналишли бўлиб,

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB} = -|\overrightarrow{AB_1}|.$$

Туғри бурчакли ABB_1 учбурчакда $|\overrightarrow{AB_1}| = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi_1$, бунда $\varphi_1 = \pi - \varphi$, $\cos\varphi_1 = -\cos\varphi$ бўлгани учун бу ҳолда ҳам $\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|\cos\varphi$. ▲

Эслатма. $\varphi = \frac{\pi}{2}$ бўлса, $\overrightarrow{AB}$ векторнинг l ўқдаги проекцияси битта нуқтадан иборат бўлиб, бу ҳолда

$$\text{пр}_l\,\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AA}| = 0.$$

Векторнинг ўқдаги проекцияси қуйидаги хоссаларга эга (хоссаларни исботлашда l туғри чизиққа m туғри чизиқ бўйича ёки l туғри чизиққа П текислик бўйича параллел проекциялашнинг бири билан чекланамиз).

1°. Агар $\vec{a}$ вектор проекциялаш йўналиши m туғри чизиққа (П текисликка) параллел бўлса, унинг l тўгри чизиқдаги проекцияси нолга тенг бўлади, чунки бу ҳолда векторнинг боши билан охирининг проекциялари устма-уст тушади.

2°. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ бўлган ҳолда $\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{A'B'}$ бўлади.

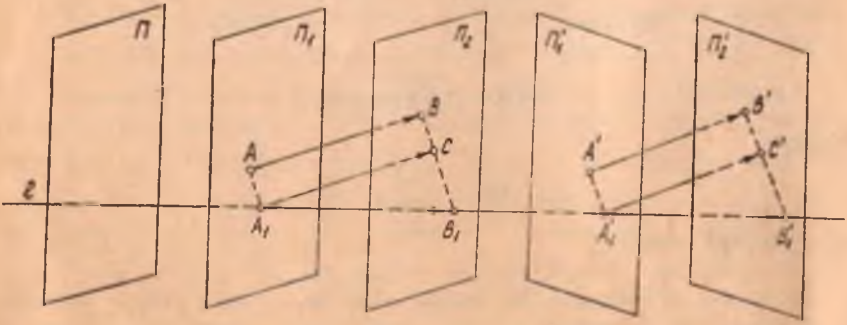
Исбот.

$$\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}, \tag{13}$$

ва

$$\overrightarrow{\text{пр}}_l\,\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{A_1'B_1'} \tag{14}$$

бўлсин. A_1 нуқтага $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AB}$ векторни, A_1' нуқтага $\overrightarrow{A_1'C'} = \overrightarrow{A'B'}$ векторни қўямиз (28-чизма). $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A'B'}$ бўлгани учун $|\overrightarrow{A_1C}| =$



28-чизма

$= |\overrightarrow{A_1'C'}|$ ва $\overrightarrow{A_1C} \uparrow\uparrow \overrightarrow{A_1'C'}$, бундан $A_1CC'A'$ тўртбурчакнинг параллелограмм экани келиб чиқади.

$A_1CC'A_1'$ тўртбурчак параллелограмм, $\overrightarrow{B_1C} \parallel \Pi$ ва $\overrightarrow{B_1'C'} \parallel \Pi$ бўлгани учун $B_1CC'B_1'$ тўртбурчак ҳам параллелограммдир. У ҳолда

$$\overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1A_1'} = \overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{B_1A_1'} + \overrightarrow{A_1'B_1'} \Rightarrow \overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1'B_1'}.$$

бундан, (13) ва (14) ни эътиборга олсак,

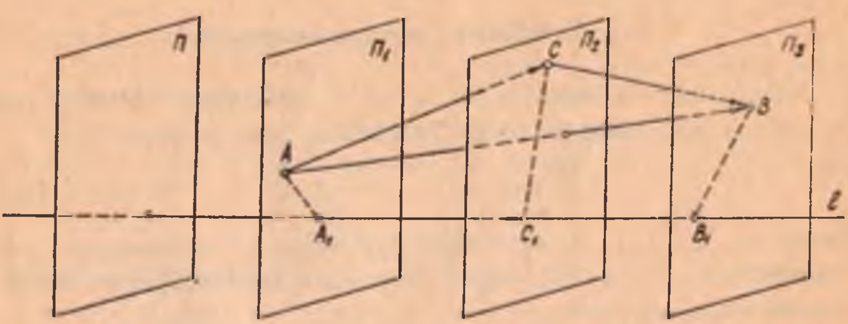
$$\text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AB} = \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{A'B'}. \quad ▲$$

3°. Иккита (ёки иккитадан кўп) вектор йиғиндисининг проекцияси қўшилувчи векторлар проекцияларининг йиғиндисига тенг.

Исбот.

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \text{ ва } \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{A_1C_1}, \quad \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{C_1B_1},$$

$$\text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1} \qquad (15)$$



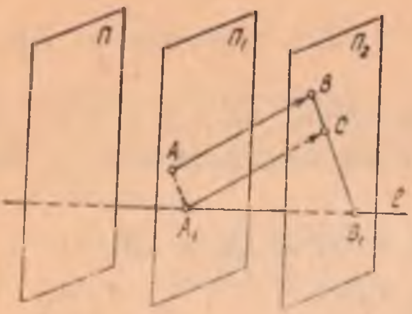
29- чизма

бўлсин (29- чизма). Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасига кўра $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{C_1B_1}$. У ҳолда (15) га асосан $\text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AB} = \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AC} + \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{CB}$ ёки $\text{пр}_{\vec{l}}\, (\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}) = \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AC} + \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{CB}$. ▲

4°. $\text{пр}_{\vec{l}}\, (\lambda \overrightarrow{AB}) = \lambda\, \text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AB}$.

Исбот. $\text{пр}_{\vec{l}}\, \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1B_1}$ бўлсин (30- чизма).

A_1 нуқтага $\overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{AB}$ векторни қўйсак, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{A_1C} = \overrightarrow{A_1B_1} + \overrightarrow{B_1C}$ бўлади, у ҳолда $\lambda \overrightarrow{AB} = \lambda \overrightarrow{A_1B_1} + \lambda \overrightarrow{B_1C}$. 3°- хоссага кўра



30-чизма

$$\overrightarrow{\text{пр}}_l (\lambda \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{\text{пр}}_l (\lambda \overrightarrow{A_1B_1}) + \overrightarrow{\text{пр}}_l (\lambda \overrightarrow{B_1C}).$$

$\overrightarrow{A_1B_1}$ вектор l тўғри чизиққа тегишли ва $\lambda \overrightarrow{A_1B_1} \parallel \overrightarrow{AB}$ бўлгани учун $\overrightarrow{\text{пр}}_l (\lambda \overrightarrow{A_1B_1}) = \lambda \overrightarrow{A_1B_1}$, $\overrightarrow{B_1C} \parallel \Pi \Rightarrow \lambda \overrightarrow{B_1C} \parallel \Pi$,

1°-хоссага кўра $\overrightarrow{\text{пр}}_l (\lambda \overrightarrow{B_1C}) = \vec{0}$, у ҳолда

$$\overrightarrow{\text{пр}}_l (\lambda \overrightarrow{AB}) = \lambda \overrightarrow{A_1B_1} = \lambda \overrightarrow{\text{пр}}_l \overrightarrow{AB}. \quad \blacktriangle$$

3°- ва 4°- хоссаларни кетма-кет татбиқ қилиш йўли билан

$$\overrightarrow{\text{пр}}_l (\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \vec{a}_n) = \lambda_1 \overrightarrow{\text{пр}}_l \vec{a}_1 + \lambda_2 \overrightarrow{\text{пр}}_l \vec{a}_2 + \ldots + \lambda_n \overrightarrow{\text{пр}}_l \vec{a}_n$$

нинг ўринли эканини кўрсатиш мумкин.

8- §. Векторнинг чизиқли боғлиқлиги

1-таъриф. Ихтиёрий $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси ва $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ ҳақиқий сонлар берилган бўлсин, у ҳолда

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n \tag{16}$$

вектор $\vec{a}_2, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *векторларнинг чизиқли комбинацияси* деб аталади, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots . \alpha_n$ сонлар бу *чизиқли комбинациянинг коэффициентлари* дейилади.

Хусусий ҳолда, икки векторнинг йиғиндиси $\vec{a}_1 + \vec{a}_2$, икки векторнинг айирмаси $\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ ва векторнинг сонга кўпайтмаси $\lambda \vec{a}$ ҳам чизиқли комбинациядир.

2-таъриф. Агар камида бири нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ сонлар мавжуд бўлиб, чизиқли комбинация ноль вектор, яъни

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \ldots + \alpha_n \vec{a}_n = \vec{0} \tag{17}$$

бўлса, у ҳолда $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизиқли боғлиқ ва (17) муносабат $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ сонларнинг барчаси нолга тенг бўлган ҳолда бажарилса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ вектор *чизиқли эркли* деб аталади.

1-теорема. Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ *векторлар системасининг бир вектори ноль вектор бўлса, у ҳолда бу векторлар системаси чизиқли боғлиқ бўлади.*

Исбот. $\vec{a}_k = \vec{0}$ бўлсин, у ҳолда $\alpha_k \neq 0$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = \alpha_{k+1} = \ldots = \alpha_n = 0$ сонлар учун (17) муносабат ўринли бўлади. Демак, 2-таърифга асосан $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар чизиқли боғлиқ. ▲

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади: чизиқли эркли векторлар системаси ноль векторни ўз ичига олмайди.

2-теорема *Агар $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизиқли боғлиқ бўлса, системанинг камида битта вектори унинг қолган векторлари орқали чизиқли ифодаланади.*

Исбот. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси чизиқли боғлиқ бўлсин, у ҳолда 2-таърифга кўра камида биттаси нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in R$ сонлар мавжуд бўлиб, (17) муносабат ўринли бўлади. Аниқлик учун $\alpha_k \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (17) муносабатни α_k га ҳадма-ҳад бўлиб, $\vec{a}_k$ векторни топсак,

$$\vec{\alpha}_k = -\frac{\alpha_1}{\alpha_k}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_k}\vec{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_n}{\alpha_k}\vec{a}_n$$

тенгликка эга бўламиз. ▲

3-теорема. *Иккита вектор чизиқли боғлиқ бўлиши учун уларнинг коллинеар бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурийлиги. $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлсин, у ҳолда камида бири нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 = \vec{0} \tag{18}$$

бўлади. Аниқлик учун $\alpha_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (18) муносабатдан $\vec{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\vec{a}_2$, $\lambda = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$ белгилашни киритсак, $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ бўлади, бундан 6-§ даги теоремага асосан $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ экани келиб чиқади.

Етарлилиги. $\vec{a}_1 \parallel \vec{a}_2$ бўлсин, у ҳолда шундай $\lambda \in R$ сон мавжудки, $\vec{a}_1 = \lambda \vec{a}_2$ ёки $(-1)\vec{a}_1 + \lambda \vec{a}_2 = \vec{0}$; шу параграфдаги 2-таърифга кўра $\vec{a}_1, \vec{a}_2$ векторлар чизиқли боғлиқ. ▲

Бу теоремадан қуйидаги хулосага келамиз. Юқорида биз V нинг бир тўғри чизиққа параллел бўлган барча векторлари тўпламини V_1 деб белгилаган эдик, 3-теоремани эътиборга олсак, V_1 нинг ҳар икки вектори чизиқли боғлиқ бўлиб, унинг нолдан фарқли ҳар бир вектори чизиқли эрклидир.

4-теорема. *Уч вектор чизиқли боғлиқ бўлиши учун уларнинг компланар бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурийлиги. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлсин, у ҳолда камида бири нолдан фарқли $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$ ҳақиқий сонлар мавжуд бўлиб,

$$\alpha_1 \vec{a}_1 + \alpha_2 \vec{a}_2 + \alpha_3 \vec{a}_3 = \vec{0} \qquad (19)$$

тенглик бажарилади. Айтайлик, $\alpha_3 \neq 0$ бўлсин, (19) муносабатни α_3 га ҳадма-ҳад бўлиб, $\vec{a}_3$ векторни топамиз: $\vec{a}_3 = -\frac{\alpha_1}{\alpha_3}\vec{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_3}\vec{a}_2$. Бу тенгликда $-\frac{\alpha_1}{\alpha_3} = \lambda$, $-\frac{\alpha_2}{\alpha_3} = \mu$ белгилашларни киритиб, $\vec{a}_3 = \lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2$ муносабатни ҳосил қилиш мумкин.

$\overline{AB} \in \vec{a}_1$ ва $\overline{AC} \in \vec{a}_2$ йўналган кесмаларни қараймиз. Агар A, B, C нуқталар бир тўғри чизиқда ётса, $\vec{a}_1$ ва $\vec{a}_2$ векторлар коллинеар булади.

Демак, бу ҳолда $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ векторлар компланар, A, B, C нуқталар битта тўғри чизиқда ётмаган ҳолда улар орқали битта П текислик ўтади. Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасидан $\lambda \vec{a}_1 + \mu \vec{a}_2$ вектор $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ векторлар билан бир текисликда ётади, бундан $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ векторларнинг компланарлиги келиб чиқади.

Етарлилиги. $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ векторлар компланар бўлсин. Бу векторларнинг ҳар бирини бирор $A \in$ П нуқтадан бошлаб қўйсак, $\overrightarrow{AB} = \vec{a}_1$, $\overrightarrow{AC} = \vec{a}_2$, $\overrightarrow{AD} = \vec{a}_3$ векторлар ҳосил бўлади. Агар бу векторларнинг иккитаси, масалан, $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ коллинеар бўлса, 3-теоремага кўра улар чизиқли боғлиқ, яъни камида бири нолдан фарқли $\alpha, \beta \in R$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 = \vec{0}$$

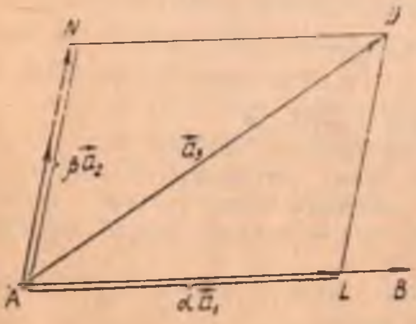
бўлса, у ҳолда

$$\alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2 + 0 \cdot \vec{a}_3 = \vec{0}$$

муносабатни ёзиш мумкин, бу муносабатдан $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$ векторларнинг чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади

$\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ векторлар коллинеар бўлмасин (31-чизма). $\vec{a}_3$ векторни $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ векторлар йўналишларига параллел проекциялаcак, $\vec{a}_3 = \overrightarrow{AL} + \overrightarrow{AN}$, лекин $AL \parallel \vec{a}_1$, $\overrightarrow{AN} \parallel \vec{a}_2$, шунинг учун $\overrightarrow{AL} = \alpha \vec{a}_1$ ва $\overrightarrow{AN} = \beta \vec{a}_2$ бўлиб,

$$\vec{a}_3 = \alpha \vec{a}_1 + \beta \vec{a}_2. \qquad (20)$$



31-чизма

бу ерда $\alpha = \text{пр}_{\vec{a}_1} \vec{a}$, $\beta = \text{пр}_{\vec{a}_1} \vec{a}_3$. (20) тенгликдан $(-1)\vec{a}_3 + \alpha\vec{a}_1 + \beta\vec{a}_2 = \vec{0} \Rightarrow \vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3$ векторлар чизиқли боғлиқ. ▲

Бу теоремадан қуйидаги натижага келамиз. V_2 вектор фазонинг ҳар икки ноколлинеар вектори чизиқли эркли, ҳар қандай уч вектори чизиқли боғлиқ.

5-теорема. *Ҳар қандай тўртта* $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ *вектор чизиқли боғлиқдир.*

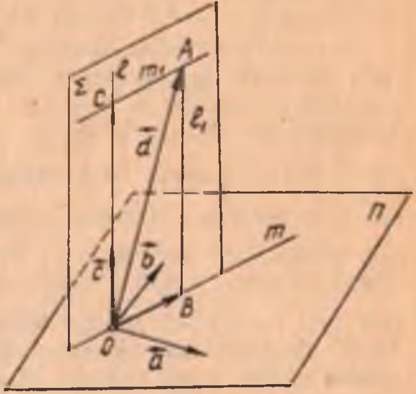
Исбот. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар компланар бўлса, 4-теоремага кўра улар чизиқли боғлиқ, у ҳолда шундай $\alpha, \beta, \gamma \in R$ сонлар мавжудки,

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}, \tag{21}$$

бунда α, β, γ сонларнинг камида бири нолдан фарқли. (21) ни ушбу

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} + 0\cdot\vec{d} = \vec{0} \tag{22}$$

кўринишда ёзиш мумкин. (22) муносабатдан $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$ векторларнинг чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади.



32- чизма

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар компланар бўлмасин. Бу векторларни бирор O нуқтага қўямиз (32-чизма). $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар орқали ўтган текисликни П билан, $\vec{c}$ ва $\vec{d}$ векторлар орқали ўтган текисликни Σ билан белгилаймиз.

$\Pi \cap \Sigma = m$ тўғри чизиқ, l эса $\vec{c}$ вектор ётган тўғри чизиқ бўлсин. Σ текисликда $\vec{d}$ векторнинг охири A нуқтадан $l_1 \parallel l$ ва $m_1 \parallel m$ тўғри чизиқларни ўтказамиз. $l_1 \cap m = B$ ва $m_1 \cap l = C$ бўлсин. У ҳолда

$$\vec{d} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}. \tag{23}$$

$\overrightarrow{OC} \parallel \vec{c}$ бўлгани учун

$$\overrightarrow{OC} = \lambda_3\vec{c}, \ \lambda_3 \in R. \tag{24}$$

$\overrightarrow{OB}, \vec{a}, \vec{b}$ векторлар битта П текисликда ётгани учун 3-теоремага кўра шундай $\lambda_1, \lambda_2 \in R$ сонлар топиладики,

$$\overrightarrow{OB} = \lambda_1\vec{a} + \lambda_2\vec{b}. \tag{25}$$

(23) — (25) муносабатлардан

$$\vec{d}=\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}$$

ёки

$$(-1)\vec{d}+\lambda_1\vec{a}+\lambda_2\vec{b}+\lambda_3\vec{c}=\vec{0},$$

бундан $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ векторларнинг чизиқли боғлиқлиги келиб чиқади. ▲

Натижа. Биз 6-§ да киритган V вектор фазода чизиқли эркли векторлар сони учтадан ортиқ эмас.

9-§. Вектор фазонинг базиси ва ўлчови ҳақида тушунча

1-таъриф. Вектор фазонинг маълум тартибда олинган $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, . . . , $\vec{e}_n$ векторлари системаси чизиқли эркли бўлиб, шу фазонинг ҳар бир вектори $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, . . . , $\vec{e}_n$ лар орқали чизиқли ифодаланса, бу векторлар системаси вектор фазонинг *базиси* дейилади ва $Б=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ орқали белгиланади.

2-таъриф. Агар базиснинг ҳар бир вектори бирлик вектор бўлиб, уларнинг ҳар иккитаси ўзаро перпендикуляр бўлса, бундай базис *ортонормаланган* дейилади. Базиснинг векторлари сони вектор фазонинг *ўлчови* деб аталади.

V вектор фазода компланар бўлмаган учта $\vec{OA}=\vec{e}_1$, $\vec{OB}=\vec{e}_2$, $\vec{OC}=\vec{e}_3$ векторни оламиз, 4-теоремага кўра улар чизиқли эркли ва ҳар қандай $\vec{a}\in V$ вектор бу $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторларнинг чизиқли комбинацияси бўлади. У ҳолда базис таърифига кўра маълум тартибда олинган $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ векторлар системаси V вектор фазонинг базиси бўлади. V да компланар бўлмаган векторлар учлигини чексиз кўп усул билан танлаб олиш мумкин. Бундан V фазода чексиз кўп базис мавжудлиги келиб чиқади.

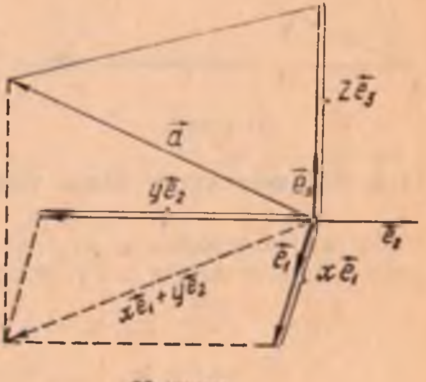
$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ базис векторларининг сони учта бўлгани учун V вектор фазо уч ўлчовли бўлади, яъни уни V_3 билан белгиланади. V_2 вектор фазога тегишли коллинеар бўлмаган $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторларни олсак, улар 3-теоремага кўра чизиқли эркли. Ҳар қандай $\vec{a}\in V_2$ вектор бу $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлар билан чизиқли боғлиқ (4-теоремага кўра). Бундан кўринадики, V_2 фазода тартибланган ноколлинеар ҳар икки вектор базисни аниқлайди. V_2 икки ўлчовли вектор фазо экан.

V_1 вектор фазонинг $\forall\,\vec{e}\neq\vec{0}$ вектори чизиқли эркли, чунки $\lambda\vec{e}=\vec{0}$ тенглик фақат $\lambda=0$ бўлгандагина бажарилади. V_1 фазонинг ҳар қандай вектори $\vec{e}$ векторга коллинеар бўлгани учун у билан чизиқли боғлиқ. Демак, V_1 вектор фазода ноль бўлмаган ҳар қандай вектор базисни аниқлайди.

10- §. Векторнинг берилган базисга нисбатан координаталари

$Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ V_3 вектор фазонинг бирор тайин базиси бўлсин. Ихтиёрий $\vec{a} \in V_3$ векторни оламиз. У ҳолда (5- теоремага кўра) шундай x, y, $z \in R$ ҳақиқий сонлар мавжудки,

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \tag{26}$$



33- чизма

(33- чизма). Агар $\vec{a}$ вектор (26) кўринишда ифодаланса, $\vec{a}$ вектор $Б$ базиснинг векторлари бўйича *ёйилган* дейилади.

Теорема. *V_3 вектор фазода ҳар қандай вектор танланган $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ базис векторлари бўйича биргина ёйилмага эга.*

Исбот. Фараз қилайлик, $\vec{a}$ вектор $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ базис векторлари бўйича

$$\vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 \tag{27}$$

ёйилмадан бошқа яна

$$\vec{a} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2 + z'\vec{e}_3 \tag{28}$$

ёйилмага ҳам эга бўлсин. (27) тенгликдан (28) тенгликни ҳадлаб айириб ушбу муносабатга эга бўламиз:

$$(x' - x)\vec{e}_1 + (y' - y)\vec{e}_2 + (z' - z)\vec{e}_3 = \vec{0}.$$

Бу тенгликда $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар чизиқли эркли бўлгани учун: $x' - x = 0$, $y' - y = 0$, $z' - z = 0$. Бундан $x' = x$, $y' = y$, $z' = z$. Демак, $\vec{a}$ вектор учун танланган $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ базисда (27) ёйилмадан бошқа кўринишдаги ёйилма мавжуд эмас. ▲

(27) ёйилмадаги x, y, z сонлар $\vec{a}$ векторнинг $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ базисга нисбатан *координаталари* дейилади ва $\vec{a}(x, y, z)$ билан белгиланади.

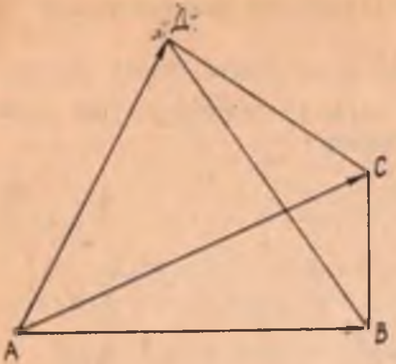
Шундай қилиб,

$$\vec{a}(x, y, z) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3.$$

Натижа. Ноль векторнинг ҳар қандай базисга нисбатан координаталари нолга тенг:

$$\vec{0}\{0, 0, 0\}.$$

Масала. $ABCD$ тетраэдрнинг қирраларидан иборат $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$,



34- чизма

$\vec{AD}$ векторлар базисни ташкил этсин (34- чизма). $\vec{BC}$ векторнинг шу базисга нисбатан координаталарини топинг.

Ечиш. $\vec{AB} = \vec{e_1}$, $\vec{AC} = \vec{e_2}$ ва $\vec{AD} = \vec{e_3}$ белгилашларни киритамиз. $\vec{BC} = \vec{AC} - \vec{AB} = \vec{e_2} - \vec{e_1}$ ёки $\vec{BC} = (-1)\vec{e_1} + 1\cdot\vec{e_2} + 0\cdot\vec{e_3} \Rightarrow$ $\Rightarrow Б = (\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ базисга нисбатан $\vec{BC}(-1,\ 1\ 0)$.

11-§. Координаталари билан берилган векторлар устида амаллар

V_3 вектор фазодаги $(\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ базисга нисбатан $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар ушбу координаталарга эга бўлсин:

$$\vec{a}(x_1,\ y_1,\ z_1) \Rightarrow \vec{a} = x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + z_1\vec{e_3};$$

$$\vec{b}(x_2,\ y_2,\ z_2) \Rightarrow \vec{b} = x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + z_2\vec{e_3}.$$

1. $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларни қўшамиз:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1\vec{e_1} + y_1\vec{e_2} + z_1\vec{e_3}) + (x_2\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + z_2\vec{e_3}).$$

Бу тенгликдан векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амаллари хоссаларига кўра

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2)\vec{e_1} + (y_1 + y_2)\vec{e_2} + (z_1 + z_2)\vec{e_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\vec{a} + \vec{b}\ (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2).$$

Демак, икки вектор йиғиндисининг координаталари қўшилувчи векторлар мос координаталарининг йиғиндисидан иборат.

2. Шунинг сингари $\vec{a} - \vec{b}$ нинг координаталари:

$$(\vec{a} - \vec{b})\,(x_1 - x_2,\ y_1 - y_2,\ z_1 - z_2).$$

3. $\{x_1,\ y_1,\ z_1\}$ векторнинг λ сонга кўпайтмасининг координаталари:

$$\lambda\vec{a}(\lambda x_1,\ \lambda y_1,\ \lambda z_1).$$

Мисол. $\vec{a}(3,\ -2,\ 1)$, $\vec{b}(-1,\ 0,\ -2)$ ва $\vec{c}(1,\ 2,\ 0)$ векторлар берилган $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{c}$, $3\vec{a}$, $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} - 3\vec{c}$ векторларнинг координаталарини аниқланг.

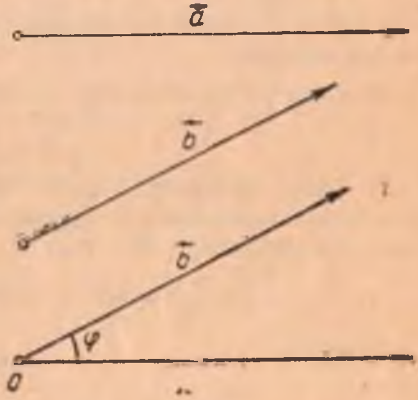
Ечиш. $\vec{a}+\vec{b}$ вектор координаталари $(3+(-1),\ -2+0,\ 1+(-2))=(2,\ -2,\ -1)$;

$\vec{b}-\vec{c}$ вектор координаталари $(-1-1,\ 0-2,\ -2-0)=(-2,\ -2,\ -2)$; $3\vec{a}(3\cdot 3,\ 3\cdot(-2),\ 3\cdot 1)$, $3\vec{a}(9,\ -6,\ 3)$;

$\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}-3\vec{c}$ вектор координаталари $\left(3+\frac{1}{2}\cdot(-1)-3\cdot 1,\ -2+\frac{1}{2}\cdot 0-3\cdot 2,\ 1+\frac{1}{2}\cdot(-2)-3\cdot 0\right)=\left(-\frac{1}{2},\ -8,0\right)$.

12- §. Икки векторни скаляр кўпайтириш

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар V_3 вектор фазонинг ихтиёрий икки вектори бўлсин. Бу векторларни бирор O нуқтага қўямиз (35- чизма).



35- чизма

Таъриф. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг узунликлари билан улар орасидаги бурчак косинусини кўпайтиришдан ҳосил қилинган сон бу *векторларнинг скаляр кўпайтмаси* деб аталади. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси $\vec{a}\,\vec{b}$ ёки $(\vec{a}\,\vec{b})$ кўринишда белгиланади.

Демак, таърифга кўра

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (29)$$

Масалан, $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг узунликлари $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$ бўлиб, бу векторлар орасидаги бурчак 120° бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})=3\cdot 4\cdot\cos 120^\circ=3\cdot 4\left(-\frac{1}{2}\right)=-6.$$

Натижа. Ноль векторнинг ҳар қандай векторга скаляр кўпайтмаси нолга тенг.

Икки векторни скаляр кўпайтириш амали қуйидаги хоссаларга эга.

1°. Скаляр кўпайтириш ўрин алмаштириш қонунига бўйсунади:

$$\vec{a}\,\vec{b}=\vec{b}\,\vec{a}.$$

Исбот. Таърифга кўра

$$\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos(\widehat{\vec{a},\ \vec{b}})$$

ва

$$\vec b\,\vec a = |\vec b|\,|\vec a|\cos(\widehat{\vec b,\ \vec a});$$

косинус жуфт функция эканлигини эътиборга олсак, $\cos(\widehat{\vec a,\ \vec b}) = \cos(\widehat{\vec b,\ \vec a})$ бундан $\vec a\,\vec b = \vec b\,\vec a$. ▲

2°. Ҳар қандай векторнинг ўз-ўзига скаляр кўпайтмаси бу вектор узунлигининг квадратига тенг:

$$\vec a\,\vec a = |\vec a|^2. \qquad (30)$$

Исбот. Скаляр кўпайтма таърифидан,

$$\vec a\,\vec a = |\vec a|\,|\vec a|\cos(\widehat{\vec a,\ \vec a}) = |\vec a|^2\cos 0^\circ = |\vec a|^2. \ ▲$$

$\vec a\,\vec a$ ифода $\vec a^2$ билан белгиланади ва $\vec a$ векторнинг *скаляр квадрати* деб аталади.

У ҳолда (30) тенгликдан $\vec a$ векторнинг узунлиги:

$$|\vec a| = \sqrt{\vec a^2}. \qquad (31)$$

3°. Икки векторнинг скаляр кўпайтмаси уларнинг бирининг узунлиги билан иккинчисининг биринчиси йўналишига туширилган проекцияси кўпайтмасига тенг, яъни

$$\vec a\,\vec b = |\vec a|\,\text{пр}_{\vec a}\vec b = |\vec b|\,\text{пр}_{\vec b}\vec a\ (\vec a \neq \vec 0,\ \vec b \neq \vec 0). \qquad (32)$$

Исбот.

$$\vec a\,\vec b = |\vec a|\underbrace{|\vec b|\cos(\widehat{\vec a,\ \vec b})}_{\text{пр}_{\vec a}\vec b} = |\vec b|\underbrace{|\vec a|\cos(\widehat{\vec b,\ \vec a})}_{\text{пр}_{\vec b}\vec a}$$

(бу ерда ортогонал проекция кўзда тутилган). ▲

4°. Скаляр кўпайтириш скаляр кўпайтувчига нисбатан гуруҳланиш қонунига бўйсунади, яъни

$$(m\vec a)\,\vec b = m(\vec a\,\vec b),\ \text{бу ерда } m \in R. \qquad (33)$$

Исбот. Юқоридаги 1°, 3°-хоссалар ва 6-§ даги 4°-хоссага кўра

$$(m\vec a)\,\vec b = \vec b(m\vec a) = |\vec b|\,\text{пр}_{\vec b}(m\vec a) = |\vec b|\,m\,\text{пр}_{\vec b}\vec a =$$

$$= m(\vec b\,\vec a) = m(\vec a\,\vec b). \ ▲$$

5°. Кўпайтувчи векторлар перпендикуляр бўлса, скаляр кўпайтма нолга тенг:

$$\vec a \perp \vec b \Rightarrow \vec a\,\vec b = 0. \qquad (34)$$

Исбот. $\vec{a}\perp\vec{b}$. Бу ҳолда $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\vec{a}\,\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\frac{\pi}{2}=$ $=0$. ▲

6°. Скаляр кўпайтириш тақсимот қонунига бўйсунади, яъни ҳар қандай $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ векторлар учун

$$(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}. \qquad (35)$$

Исбот. (35) муносабатнинг $\vec{c}=\vec{0}$ ҳол учун ўринли эканлиги равшан. $\vec{c}\neq\vec{0}$ бўлсин. Юқоридаги 1°, 3°- хоссаларга кўра

$$(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}=\vec{c}\,(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{c}|\,(\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{a}+$$

$$+\,\text{пр}_{\vec{c}}\,\vec{b})=\vec{c}\,\vec{a}+\vec{c}\,\vec{b}=\vec{a}\,\vec{c}+\vec{b}\,\vec{c}. \quad ▲$$

7°. Ортонормаланган $Б=(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ базис учун

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=\begin{cases}0, & i\neq j \text{ да}\\ 1, & i=j \text{ да}\end{cases}\qquad i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

Исбот. Скаляр кўпайтма таърифидан

$$\vec{e}_i\,\vec{e}_j=|\vec{e}_i|\,|\vec{e}_j|\cos(\widehat{\vec{e}_i,\ \vec{e}_j})=1\cdot1\cos\frac{\pi}{2}=0.$$

Хусусий ҳолда $\vec{e}_i\,\vec{e}_i=|\vec{e}_i|^2=1$. ▲

13-§. Скаляр кўпайтманинг координаталардаги ифодаси

V_3 вектор фазода ортонормаланган $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ базисни олайлик. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар бу базисга нисбатан $(x_1,\ y_1,\ z_1)$ ва $(x_2,\ y_2,\ z_2)$ координаталарга эга бўлсин:

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3,$$

$$\vec{b}=x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3.$$

12-§ даги 4°, 6°- хоссаларга асосан

$$\vec{a}\,\vec{b}=(x_1\vec{e}+y_1\vec{e}_2+z_1\vec{e}_3)(x_2\vec{e}_1+y_2\vec{e}_2+z_2\vec{e}_3)=$$

$$=x_1x_2\vec{e}_1^{\,2}+y_1y_2\vec{e}_2^{\,2}+z_1z_2\vec{e}_3^{\,2}+(x_2y_1+x_1y_2)\,\vec{e}_1\,\vec{e}_2+$$

$$+(z_1y_2+y_1z_2)\,\vec{e}_2\,\vec{e}_3+(x_1z_2+z_1x_2)\,\vec{e}_1\,\vec{e}_3$$

муносабатни ёза оламиз, бундан 12-§ даги 7- хоссани эътиборга олсак,

$$\vec{a}\,\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2. \qquad (36)$$

Демак, координаталари билан берилган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

Натижалар. 1. $\vec{a}(x, y, z)$ векторнинг узунлиги унинг координаталари квадратларининг йиғиндисидан олинган арифметик квадрат илдизга тенг:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,. \tag{37}$$

Ҳақиқатан, $\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow x_1 = x_2 = x,\ y_1 = y_2 = y,\ z_1 = z_2 = z$, у ҳолда (36) формулага асосан

$$\vec{a}\,\vec{a} = x^2 + y^2 + z^2$$

ва

$$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a}\,\vec{a}} = \sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,.$$

2. Икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектор орасидаги бурчак ушбу формула бўйича ҳисобланади:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$$

(бу формула скаляр кўпайтма таърифидан бевосита келиб чиқади).

Координаталари билан берилган $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторлар учун

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\,\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}\,. \tag{38}$$

3. $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторларнинг перпендикулярлик шарти қуйидагича бўлади:

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

Ҳақиқатан, $\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a}\,\vec{b} = 0$. (36) дан

$$x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0.$$

1-мисол. $\vec{a}(1, 3, 2)$, $\vec{b}(3. 1, -3)$, $\vec{c}(2, 0, -2)$ векторларнинг қайси жуфти перпендикуляр?

Ечиш. Аввало, равшанки, берилган векторлар ноль вектор эмас, чунки $|\vec{a}| = \sqrt{14}$, $|\vec{b}| = \sqrt{19}$, $|\vec{c}| = \sqrt{8}$.

Энди $\vec{a}\,\vec{b}$, $\vec{a}\,\vec{c}$, $\vec{b}\,\vec{c}$ скаляр кўпайтмаларни текширамиз: $\vec{a}\,\vec{b} = 3 + 3 - 6 = 0$, $\vec{a}\,\vec{c} = 2 + 0 - 4 = -2$, $\vec{b}\,\vec{c} = 6 + 0 + 6 = 12$, бундан $\vec{a} \perp \vec{b}$.

2-мисол. $\vec{a}(1, -1, 0)$, $\vec{b}(1, -2, 2)$ векторлар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторларнинг координаталарини икки вектор орасидаги бурчакни топиш формуласи (38) га қўямиз:

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{1+2+0}{\sqrt{1+1+0}\cdot\sqrt{1+4+4}} = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Бундан

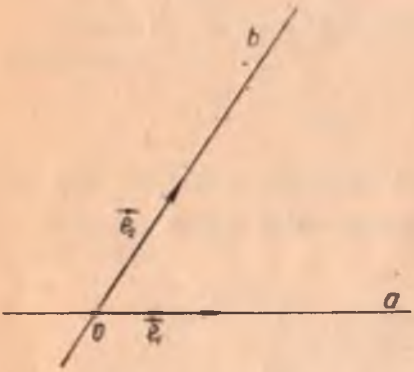
$$(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = 45°.$$

II БОБ. ТЕКИСЛИКДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ

Текисликдаги нуқтанинг ўрнини маълум сонлар ёрдамида аниқлашга имкон берадиган усул кўрсатилган бўлса, текисликда координаталар системаси берилган деб айтамиз. Текисликда координаталарнинг турли системалари мавжуд бўлиб, улардан биз соддасини киритамиз.

14-§. Текисликда координаталарнинг аффин системаси

Текисликда бирор O нуқтадан қўйилган ноколлинеар ихтиёрий икки $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ вектор берилган бўлсин. Бу векторлар системаси $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ базисни аниқлайди. Текисликда $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлар орқали ўтувчи a, b $(a \cap b = O)$ тўғри чизиқларни оламиз.



36- чизма

Таъриф. Мусбат йўналишлари мос равишда $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлар билан аниқланувчи a, b тўғри чизиқлардан ташкил топган система текисликда координаталарнинг аффин системаси ёки *аффин репер* дейилади (36- чизма) ва у $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ кўринишда белгиланади. $O = a \cap b$ нуқта *координаталар боши*, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлар эса *координата векторлари* дейилади. Мусбат йўналишлари $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторлар билан аниқланган a, b тўғри чизиқлар мос равишда *абсциссалар* ва *ординаталар ўқлари* деб аталади, уларни Ox, Oy билан белгилаймиз.

Демак, аффин репер O нуқта ва $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ базис векторларининг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

Текисликда $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин репер берилган бўлсин. Шу текисликнинг M нуқтаси учун $\overrightarrow{OM}$ вектор M нуқтанинг *радиус-вектори* дейилади. $\overrightarrow{OM} \in V_2$, шунинг учун I боб, 9- § га асосан ҳамиша шундай x, $y \in R$ сонлар топиладики,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2.$$

Таъриф. $\overrightarrow{OM}$ радиус-векторнинг x, y координаталари M нуқтанинг $(O, \vec{e}_1\ \vec{e}_2)$ *аффин репердаги координаталари* дейилади; биз $M(x, y)$ белгилашни ишлатамиз. Бунда x сон M нуқтанинг *абсциссаси* ёки *биринчи координатаси*, y сон эса M нуқтанинг *ординатаси* ёки *иккинчи координатаси* дейилади.

Хуллас, текисликда координаталарнинг аффин системаси берилса, ундаги исталган M нуқтаға унинг координаталари бўлмиш бир жуфт ҳақиқий x, y сон мос келади ва, аксинча, маълум тартибда олинган бир жуфт ҳақиқий x, y сонга текисликда координаталари шу сонлардан иборат тайин битта M нуқта мос келади.

Ҳақиқатан, танланган $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин репернинг абсциссалар ўқига координаталар бошидан бошлаб $\overrightarrow{OM_1}=x\vec{e}_1$ векторни, ординаталар ўқига эса $\overrightarrow{OM_2}=y\vec{e}_2$ векторни қўйиб (қўйиладиган векторларнинг йўналишлари x, y сонларнинг ишоралари билан аниқланади) (37-чизма), ҳосил қилинган M_1, M_2 нуқталардан мос равишда Oy ва Ox ўқларга параллел тўғри чизиқлар ўтказсак, уларнинг кесишган нуқтаси изланаётган M нуқта бўлади, чунки $\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OM_1}+\overrightarrow{OM_2}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2$. Шундай қилиб, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперга нисбатан

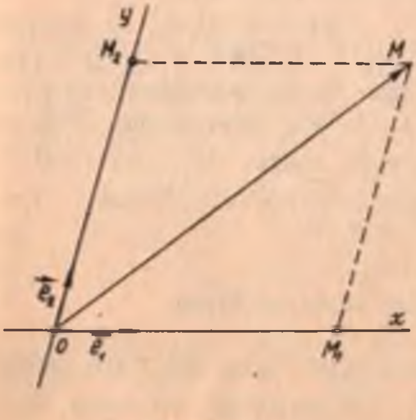
$$M(x,\ y)\Leftrightarrow\overrightarrow{OM}=x\vec{e}_1+y\vec{e}_2. \quad (1)$$

M нуқтанинг абсциссаси $x=0$ бўлса, (1) дан $\overrightarrow{OM}=y\vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM}\,||\,|\vec{e}_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow M$ нуқта Oy ўқда ётади. Худди шунингдек, M нуқтанинг ординатаси $y=0$ бўлса, M нуқта абсциссалар ўқида ётади.

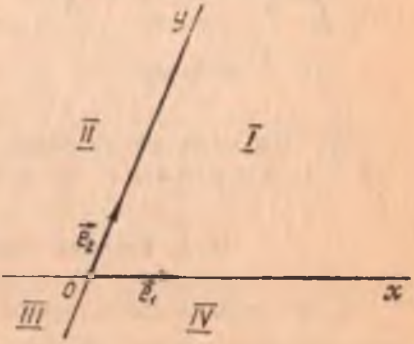
Шундай қилиб, абсциссалар ўқида ётган нуқтанинг координаталари x, 0 ва ординаталар ўқида ётган нуқтанинг координаталари 0, y бўлади. Координаталар бошининг координаталари 0, 0. Координата ўқлари бутун текисликни 38-чизмада белгиланганидек тўртта координат чоракларга ажратади.

$M(x,\ y)$ нуқта координата ўқларида ётмаса, унинг қайси чоракда ётишини x, y нинг ишораларига қараб 38-чизма бўйича аниқлаш мумкин.

Ҳақиқатан, M нуқта $x>0$, $y>0$ бўлган ҳолда биринчи чоракка, $x<0$, $y>0$ бўлган ҳолда иккинчи чоракка, $x<0$, $y<0$ бўлган



37-чизма



38-чизма

ҳолда учинчи чоракка, $x > 0$, $y < 0$ бўлган ҳолда тўртинчи чоракка тегишли бўлади.

Векторнинг боши ва охирининг координаталари бирор аффин реперга нисбатан маълум бўлса, бу векторнинг шу базисдаги координаталарини топишни кўрайлик. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперга нисбатан $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ни олайлик. Бу ҳолда $\overrightarrow{OA} = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\overrightarrow{OB} = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ва $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - y_1)\vec{e}_2$. Бундан

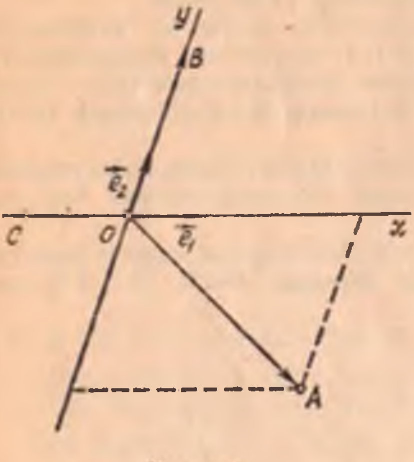
$$\overrightarrow{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1),$$

яъни векторнинг координаталари шу вектор охирининг координаталаридан мос равишда бошининг координаталарини айириш билан ҳосил қилинади.

1-мисол. Берилган $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперда $A(3, -3)$, $B(0, 3)$, $C(-2, 0)$ нуқталарни ясанг.

Ечиш. $A(3, -3)$ нуқтани ясаш учун $\overrightarrow{OA} = 3\vec{e}_1 - 3\vec{e}_2$ векторни ясаймиз. Бунинг учун O нуқтадан бошлаб $\vec{e}_1$ га коллинеар $3\vec{e}_1$ векторни, $\vec{e}_2$ га коллинеар $-3\vec{e}_2$ векторни ясаймиз. Сўнгра бу векторларнинг йиғиндисини топсак, $\overrightarrow{OA}$ вектор ҳосил қилиниб, изланаётган A нуқтани топамиз.

Худди шунга ўхшаш, $B(0, 3)$ нуқтани ясаш учун $\overrightarrow{OB} = 0\vec{e}_1 + 3\vec{e}_2$ векторни ясаймиз. $C(-2, 0)$ нуқтани ясаш учун $\overrightarrow{OC} = -2\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2 = -2\vec{e}_1$ векторни ясаймиз (39- чизма).



39- чизма

2-мисол. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперда $A(1, -2)$, $\overrightarrow{AB}(-1, 3)$; B нуқтанинг координаталарини топинг.

Ечиш. Шу реперда $B(x, y)$ десак ҳамда $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$ ни эътиборга олсак, у ҳолда $\overrightarrow{OA}(1, -2)$. Демак, $-1 = x - 1$, $3 = y + 2 \Rightarrow x = 0$, $y = 1$; $B(0, 1)$.

15-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

A, B — текисликдаги турли икки нуқта, N эса AB тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NB}$ векторлар коллинеар бўлгани учун шундай λ сон мавжуд бўладики,

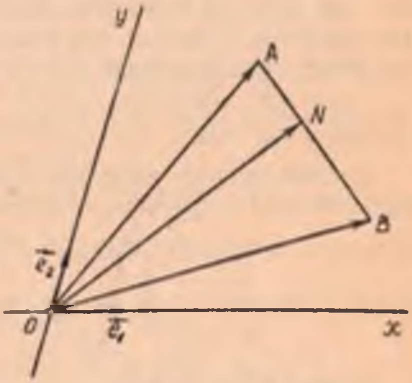
$$\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{NB}. \qquad (*)$$

Агар N нуқта AB кесмада ётса, яъни кесмани ички равишда бўлса, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NB}$ векторлар бир хил йўналишли бўлиб, $\lambda > 0$ ва N нуқта AB кесмада ётмасдан, лекин AB тўғри чизиқда ётса, $\overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{NB}$ векторлар қарама-қарши йўналишли бўлиб, $\lambda < 0$. Биз N нуқта бу ҳолда AB кесмани *ташқи равишда бўлади*, деб айтамиз. λ сон учта A, B, N нуқтанинг *оддий нисбати* деб аталади. Биз уни $(AB, N) = \lambda$ билан белгилаймиз, (*) дан $\lambda = (AB, N) = \dfrac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{AB}}$.

Текисликда $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперни олайлик. Бу реперда A, B, N нуқталар $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ ва $N(x, y)$ координаталарга эга бўлсин (40-чизма). Бу нуқталарнинг радиус-векторларини қуйидагича белгилаймиз: $\overrightarrow{OA} = \vec{r}_1$, $\overrightarrow{OB} = \vec{r}_2$, $\overrightarrow{ON} = \vec{r}$, у ҳолда $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \vec{r} - \vec{r}_1$, $\overrightarrow{NB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{ON} = \vec{r}_2 - \vec{r}$ бўлиб, буларни $\overrightarrow{AN} = \lambda \overrightarrow{NB}$ ифодага қўямиз:

$$\vec{r} - \vec{r}_1 = \lambda (\vec{r}_2 - \vec{r}) \text{ ёки}$$

$$(1 + \lambda) \vec{r} = \vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2,$$



40-чизма

бундан $1 + \lambda \neq 0$ фаразда

$$\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 + \lambda \vec{r}_2}{1 + \lambda}$$

муносабатга эга бўламиз. Бу ифода бўлувчи N нуқтанинг радиус-векторини аниқлайди. (2) ни координаталарда ёзайлик. $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\vec{r}_1 = x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2$, $\vec{r}_2 = x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2$ бўлгани учун (2) дан

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \frac{(x_1\vec{e}_1 + y_1\vec{e}_2) + \lambda (x_2\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2)}{1 + \lambda}$$

ёки

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \vec{e}_1 + \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} \vec{e}_2.$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторларнинг чизиқли эрклилигидан ($\vec{e}_1, \vec{e}_2$ векторлар олдидаги коэффициентларни нолга тенглаштирамиз):

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \qquad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Бу формулалар орқали берилган кесмани берилган λ нисбатда бўлувчи нуқтанинг координаталарини топиш мумкин. Бу ерда албатта $\lambda \neq -1$; $\lambda = -1$, яъни $1 + \lambda = 0$ бўлган ҳолни биз ҳозирча қарамаймиз. $\lambda = 1$ бўлганда N нуқта AB кесманинг ўртаси бўлиб, бу ҳолда унинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Мисол. Аффин координаталар системасида учлари $A(1, 2)$, $B(0, 5)$, $C(-2, 3)$ нуқталардан иборат учбурчак медианаларининг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш. Маълумки, учбурчакнинг бирор учидан ўтказилган медиана ана шу уч қаршисидаги томонни тенг иккига бўлади. Учбурчакнинг медианалари битта нуқтада кесишади ва шу нуқтада уларнинг ҳар бири (медиана ўтказилган учдан бошлаб ҳисоблаганда) $2:1$ каби нисбатда бўлинади, шу хоссаларга кўра AD медиана учун D нуқтанинг координаталари қуйидагича топилади:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{0 - 2}{2} = -1; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{5 + 3}{2} = 4, \quad D(-1, 4).$$

Медианаларнинг кесишиш нуқтаси O учун $\lambda = 2:1 = 2$ бўлиб, изланаётган O нуқтанинг координаталари қуйидагича аниқланади:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} = \frac{1 + 2 \cdot (-1)}{1 + 2} = -\frac{1}{3};$$

$$y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda} = \frac{2 + 2 \cdot 4}{1 + 2} = \frac{10}{3}.$$

Демак, $0\left(-\frac{1}{3}, \frac{10}{3}\right)$.

16-§. Текисликда декарт координаталарнинг тўғри бурчакли системаси. Икки нуқта орасидаги масофа

1-таъриф. Аффин репер $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ нинг координата векторлари $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ ортонормаланган базисни ташкил этсин, яъни $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$, $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = 1$ бўлсин. Бу ҳолда биз координаталарнинг тўғри бурчакли системаси, қисқача, *декарт репери* берилди деб айтамиз. Бундай реперни $(O, \vec{i}, \vec{j})$ кўринишда белгилаймиз. Бу ерда $\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = 1$, $\vec{i}\,\vec{j} = 0$. Бу ҳолда координата ўқлари перпендикулярдир. Декарт репери аффин репернинг хусусий ҳоли бўлгани учун аффин реперга нисбатан ўринли мулоҳазалар декарт реперида ҳам ўз кучини сақлайди.

Аммо декарт реперидаги айрим мулоҳазалар аффин реперда доимо ўринли бўлавермайди.

Таъриф. M_1, M_2 нуқталар орасидаги *масофа* деб, $\overrightarrow{M_1M_2}$ (ёки $\overrightarrow{M_2M_1}$) векторнинг узунлигига айтилади.

Демак, таърифга кўра

$$\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}|.$$

Энди координаталари билан берилган икки нуқта орасидаги масофани ҳисоблаш формуласини топайлик. Текисликда $(O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт репери берилган бўлиб, бу реперга нисбатан M_1, M_2 нуқталар ушбу координаталарга эга бўлсин: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, у ҳолда $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}(x_2, y_2)$, $\overrightarrow{OM_1}(x_1, y_1)$ бўлиб, $\overrightarrow{OM_2}$ ва $\overrightarrow{OM_1}$ векторларнинг айирмаси бўлган $\overrightarrow{M_1M_2}$ вектор ушбу координаталарга эгадир:

$$\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1). \tag{4}$$

I боб. 13-§ даги 1-натижага асосан,

$$\rho(M_1, M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Демак, берилган $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар орасидаги масофа ушбу формула бўйича топилади:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}. \tag{5}$$

1-мисол. $M_1(-1, 0)$, $M_2(2, 3)$ нуқталар орасидаги масофани ҳисобланг.

Ечиш. Берилган M_1, M_2 нуқталар орасидаги масофа (5) формулага асосан:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{(2-(-1))^2 + (3-0)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}.$$

2-мисол. Учлари $A(3, 2)$, $B(6, 5)$, $C(1, 10)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг тўғри бурчакли эканлигини исботланг.

Ечиш. $\rho(A, B) = \sqrt{(6-3)^2 + (5-2)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$;
$\rho(B, C) = \sqrt{(1-6)^2 + (10-5)^2} = \sqrt{(5)^2 + 5^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;
$\rho(A, C) = \sqrt{(1-3)^2 + (10-2)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 8^2} = 2\sqrt{17}$;

$$(3\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2 = 18 + 50 = 68,$$

$(2\sqrt{17})^2 = 68$ бўлгани учун

$$\rho^2(A, B) + \rho^2(B, C) = \rho^2(A, C).$$

Пифагор теоремасига асосан $\triangle ABC$ тўғри бурчакли учбурчакли учбурчакдир.

17-§. Текисликнинг ориентацияси

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(\vec{e}\,'_1, \vec{e}\,'_2) - V_2$ вектор фазонинг икки базиси бўлсин. Иккинчи базис векторларини биринчи базис векторлари бўйича ёйиб ёзамиз.

$$\vec{e}\,'_1 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \quad \vec{e}\,'_2 = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2,$$

$\vec{e_1'}$, $\vec{e_2'}$ векторларнинг бу базисга нисбатан координаталаридан $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ жадвални (иккинчи тартибли квадрат матрицани) тузамиз. Бу жадвал биринчи базисдан иккинчи базисга *ўтиш матрицаси* деб аталади.

a_1, a_2, b_1, b_2 сонлар $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ матрицанинг элементларидир. Бу матрица иккита сатр ва иккита устунга эга: a_1, b_1 сонлар биринчи сатрни, a_2, b_2 сонлар эса иккинчи сатрни; a_1, a_2 сонлар биринчи устунни, b_1, b_2 сонлар эса иккинчи устунни ташкил қилади. $a_1b_2—a_2b_1$ сон $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ *матрицанинг детерминанти* дейилади. Уни $\det\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ ёки $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ кўринишда белгилаймиз. Агар матрицанинг барча сатрлари чизиқли эркли бўлса, у *айнимаган матрица*, сатрлари орасида чизиқли боғланиш мавжуд бўлса, *айниган матрица* дейилади. Алгебра ва сонлар назарияси курсидан маълумки, квадрат матрица детерминантининг нолга тенг бўлиши унинг айниган бўлишининг зарурий ва етарли шартидир. $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ айнимаган матрицадир, чунки $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ ($\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$ бўлган ҳолда $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$ бўлиб, бундан $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$. Демак, $\vec{e_1} = \lambda \vec{e_2}$. Бу эса $(\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ базис векторларининг коллинеарлигидан дарак беради).

V_2 вектор фазонинг барча базислари тўпламини Ω билан белгилайлик. $\text{Б}_1, \text{Б}_2 \in \Omega$ базисларни оламиз.

Таъриф. Агар Б_1 базисдан Б_2 базисга ўтиш матрицасининг детерминанти мусбат (манфий) сон бўлса, у ҳолда Б_1, Б_2 базислар *бир хил (ҳар хил) исмли* дейилади.

Киритилган бир хил исмлилик тушунчаси қуйидаги хоссаларга эга:

1. $\forall \text{Б} \in \Omega$ учун $\text{Б} \sim \text{Б}$. Бу ерда $\sim$ белги бир исмлилик белгиси.
2. $\text{Б}_1 \sim \text{Б}_2 \Rightarrow \text{Б}_2 \sim \text{Б}_1$.
3. $(\text{Б}_1 \sim \text{Б}_2,\ \text{Б}_2 \sim \text{Б}_3) \Rightarrow \text{Б}_1 \sim \text{Б}_3$.

Исбот. 1. $\text{Б} = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ базис векторларининг яна шу базис векторлари бўйича ёйилмаси $\vec{e_1} = 1 \cdot \vec{e_1} + 0 \cdot \vec{e_2}$, $\vec{e_2} = 0 \cdot \vec{e_1} + 1 \cdot \vec{e_2}$ га кўра Б дан Б га ўтиш матрицаси $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ бўлиб, унинг детерминанти $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$. Демак, $\text{Б} \sim \text{Б}$.

2. $\text{Б}_1 \sim \text{Б}_2$ бўлсин. Агар $\text{Б}_1 = (\vec{e_1}, \vec{e_2})$ базисдан $\text{Б}_2 = (\vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ базисга ўтиш матрицаси $\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}$ бўлса, шартга кўра унинг детерминанти $\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} > 0$. Энди Б_2 дан Б_1 базисга ўтиш матрицаси детерминантини топайлик, бунинг учун $\vec{e_1'} = a_1\vec{e_1} + a_2\vec{e_2}$, $\vec{e_2'} = b_1\vec{e_1} + b_2\vec{e_2}$ системани $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ га нисбатан ечамиз:

$$\vec{e}_1 = \frac{b_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\vec{e}'_1 - \frac{a_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\vec{e}'_2, \quad \vec{e}_2 = -\frac{b_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\vec{e}'_1 + \frac{a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}\vec{e}'_2.$$

Бу система матрицасининг детерминанти:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} \frac{b_2}{\Delta} & -\frac{a_2}{\Delta} \\ -\frac{b_1}{\Delta} & \frac{a_1}{\Delta} \end{vmatrix} = \frac{1}{\Delta^2}\begin{vmatrix} b_2 & -a_2 \\ -b_1 & a_1 \end{vmatrix} = \frac{\Delta}{\Delta^2} = \frac{1}{\Delta},$$

$$\Delta > 0 \Rightarrow \Delta' > 0 \Rightarrow Б_2 \sim Б_1.$$

3. Ω нинг ушбу учта $Б_1 = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $Б_2 = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$, $Б_3 = (\vec{e}''_1, \vec{e}_2)$ базисини қараймиз. $Б_1 \sim Б_2$ ва $Б_2 \sim Б_3$ бўлсин. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ детерминант $Б_1$ дан $Б_2$ га ўтиш матрицасининг, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a'_1 & b'_1 \\ a'_2 & b'_2 \end{vmatrix}$ детерминант эса $Б_2$ дан $Б_3$ га ўтиш матрицасининг детерминанти бўлсин. У ҳолда

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \\ \vec{e}'_2 = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{e}''_1 = a'_1\vec{e}'_1 + a'_2\vec{e}'_2 \\ \vec{e}''_2 = b'_1\vec{e}'_1 + b'_2\vec{e}'_2 \end{cases}$$

дан

$$\begin{cases} \vec{e}''_1 = (a'_1a_1 + a'_2b_1)\vec{e}_1 + (a'_1a_2 + a'_2b_2)\vec{e}_2, \\ \vec{e}''_2 = (b'_1a_1 + b'_2b_1)\vec{e}_1 + (b'_1a_2 + b'_2b_2)\vec{e}_2 \end{cases}$$

ва $Б_1$ базисдан $Б_3$ га ўтиш матрицаси

$$\begin{pmatrix} a'_1a_1 + a'_2b_1 & a'_1a_2 + a'_2b_2 \\ b'_1a_1 + b'_2b_1 & b'_1a_2 + b'_2b_2 \end{pmatrix}$$

бўлиб, матрицаларни кўпайтириш қоидасига кўра унинг детерминанти $\Delta_3 = \Delta_2 \cdot \Delta_1$, $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0 \Rightarrow \Delta_3 > 0$. Демак, $Б_1 \sim Б_3$.

Исботланган бу уч шартни қаноатлантирувчи муносабат математикада *эквивалентлик муносабати* деб аталади.

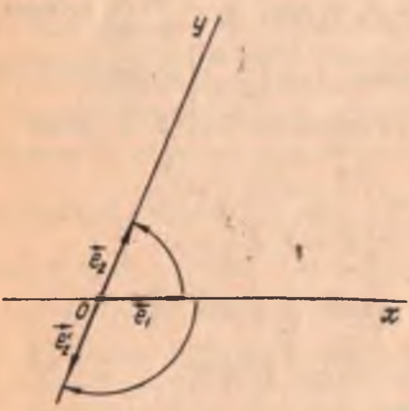
Бир базисдан бошқа базисга ўтишда ўтиш матрицасининг детерминанти ёки мусбат, ёки манфий сон бўлгани учун ихтиёрий икки базис ёки бир хил исмли, ёки ҳар хил исмли бўлади. Демак, текисликдаги барча базисларни бир исмлилик тушунчасига асосланиб, икки синфга ажратиш мумкин, бу синфларнинг бирига тегишли барча базислар ўзаро бир исмли бўлиб, ҳар хил синфга тегишли икки базис бир исмли бўлмайди. Шу синфларнинг ҳар бири *ориентация* деб аталиб, ундаги базислар *ориентирланган базислар* деб юритилади.

Баъзан бу синфларни бир-биридан фарқлаш учун *ўнг ориентация* ёки *чап ориентация* деб ҳам юритилади. Базиснинг ориентацияси маълум бўлган текислик *ориентацияли текислик* деб аталади. Агар $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $Б' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ базислар бир хил (қарама-қарши) ориентацияли бўлса, $\mathscr{B}=(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $\mathscr{B}'=(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ реперлар *бир хил (қарама-қарши) ориентацияли* дейилади.

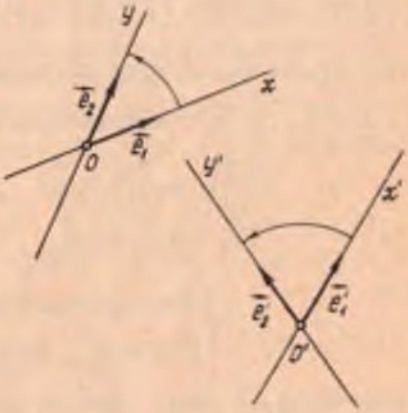
Одатда, $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ репернинг $\vec{e}_1$ векторини O нуқта атрофида $\vec{e}_2$ вектор устига тушириш учун қисқа йўл бўйича буриш соат мили ҳаракатига тескари бўлса, у *мусбат ориентацияли* дейилади.

Мисол. Текисликда $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ реперларни қараймиз, бу ерда $\vec{e}_1{}' = \vec{e}_1$, $\vec{e}_2{}' = -\vec{e}_2$ бўлсин (41- чизма). $Б'$ базиснинг векторлари $Б$ базис бўйича ушбу ёйилмага эга бўлади:

$$\vec{e}_1{}' = 1\cdot\vec{e}_1 + 0\cdot\vec{e}_2,\quad \vec{e}_2{}' = 0\cdot\vec{e}_1 - 1\cdot\vec{e}_2 \Rightarrow \vec{e}_1{}'\{1,\ 0),\ \vec{e}_2{}'(0,\ -1).$$



41- чизма



42- чизма

$Б$ базисдан $Б'$ базисга ўтиш матрицасининг детерминанти

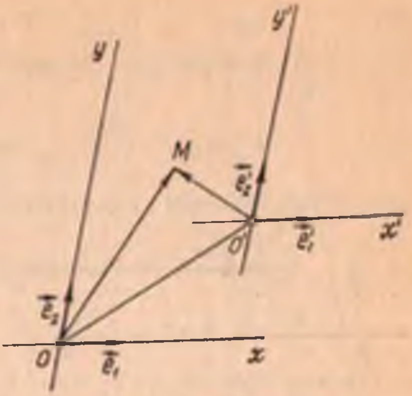
$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Демак, бу $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли. 41- чизмадан кўринадики, қарама-қарши ориентацияли реперларда биринчи координата векторларидан иккинчи координата векторларига қараб қисқа йўл бўйлаб бурилиш йўналишлари қарама-қаршидир. 42- чизмадаги $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $(O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ реперлар эса бир хил ориентацияли.

18- §. Аффин координаталар системасини алмаштириш

Геометрик образларни текширишни соддалаштириш учун кўпинча координаталарнинг бир системасидан бошқа системасига ўтишга тўғри келади. Бу ҳолат бир нуқтанинг ҳар хил системалардаги координаталарини боғловчи формулаларни топиш масаласини келтириб чиқаради.

Текисликда иккита $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $(O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ аффин репер берилган бўлсин (43- чизма). Қулайлик учун уларнинг биринчисини эски репер, иккинчисини янги репер деб атаймиз. Бундан ташқари, янги репернинг эски реперга нисбатан вазияти берилган бўлсин, яъни



43- чизма

$$O'(c_1, c_2),\ \vec{e}'_1\ (a_1, a_2),\ \vec{e}'_2(b_1, b_2),$$

$$\overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2, \qquad (6)$$

$$\vec{e}'_1 = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2,\ \vec{e}'_2 = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2 \quad (7)$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Текисликда ихтиёрий M нуқтани оламиз. Бу нуқтанинг эски ва янги реперларга нисбатан координаталарини мос равишда x, y ва x', y' орқали белгилаймиз. У ҳолда $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$, $\overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$. Векторларни қўшиш таърифи ва (6), (7) муносабатлардан фойдалансак,

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 =$$

$$= c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2 + x'(a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2) + y'(b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2)$$

ёки

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = (a_1x' + b_1y' + c_1)\vec{e}_1 + (a_2x' + b_2y' + c_2)\vec{e}_2.$$

$\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ векторларнинг чизиқли эрклилигини ҳисобга олсак,

$$x = a_1x' + b_1y' + c_1,\ y = a_2x' + b_2y' + c_2. \qquad (8)$$

M нуқтанинг эски системага нисбатан координаталари x, y, унинг янги системага нисбатан координаталари x', y' орқали шу (8) кўринишда ифодаланади.

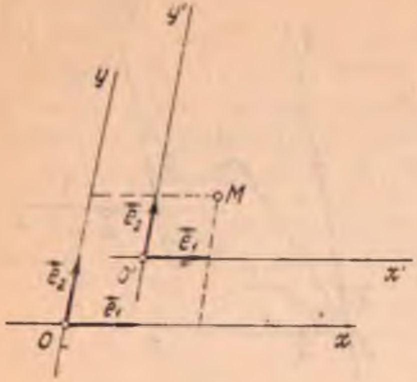
(8) формулалар бир аффин репердан иккинчи аффин реперга *ўтиш формулалари* дейилади. Бу формулаларда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ шарт билан боғланган олтита коэффициент қатнашган. Қуйидаги икки хусусий ҳолни қараймиз:

1. $O \neq O'$, $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = \vec{e}_2$ бўлсин (44- чизма). У ҳолда $a_1 = b_2 = 1$, $a_2 = b_1 = 0$ бўлиб, (8) формулалар

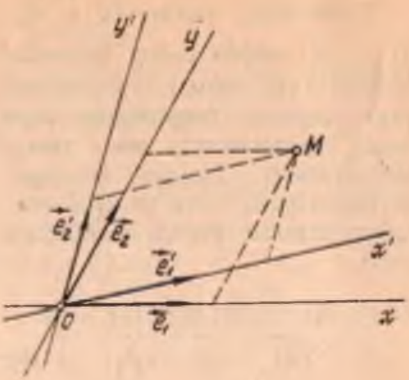
$$x = x' + c_1,\ y = y' + c_2 \qquad (9)$$

кўринишни олади.

(9) формулалар координаталар системасини *параллел кўчириш формулалари* деб аталади.



44- чизма



45- чизма

2. $O = O'$ ва базис векторлар турлича бўлсин (45- чизма). У ҳолда $c_1 = c_2 = 0$ бўлиб, (8) дан

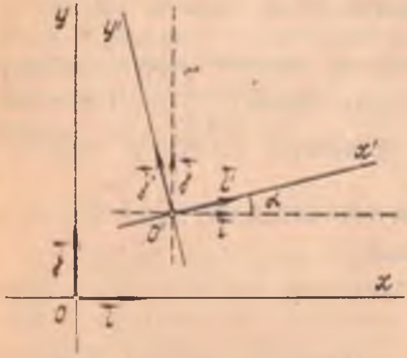
$$x = a_1x' + b_1y', \quad y = a_2x' + b_2y'. \tag{10}$$

19- §. Декарт координаталари системасини алмаштириш

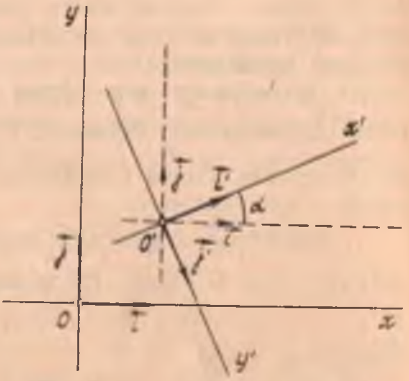
Текисликда $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ ва $\mathcal{B}' = (O', \vec{i}', \vec{j}')$ декарт реперлари берилган бўлсин. Бу ҳолда (8) формулалардаги a_1, a_2 лар $\vec{i}'$ векторнинг, b_1, b_2 лар эса $\vec{j}'$ векторнинг $\mathcal{B} = (0, \vec{i}, \vec{j})$ реперга нисбатан координаталари бўлади, яъни

$$\vec{i}' = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}, \quad \vec{j}' = b_1\vec{i} + b_2\vec{j}. \tag{11}$$

$(\widehat{\vec{i}, \vec{i}'}) = \alpha$ бўлсин. Агар $\mathcal{B}$ ва $\mathcal{B}'$ декарт реперлари бир хил ориентацияли бўлса, у ҳолда (46- чизма)



46- чизма



47- чизма

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{j'}}) = 90^\circ + \alpha, \quad (\widehat{\vec{i'}, \vec{j}}) = 90^\circ - \alpha, \quad (\widehat{\vec{j},, \vec{j'}}) = \alpha. \tag{12}$$

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ декарт реперлари қарама-қарши ориентацияли бўлса (47-чизма), у ҳолда

$$(\widehat{\vec{i}, \vec{j'}}) = 270^\circ + \alpha, \quad (\widehat{\vec{i'}, \vec{j}}) = 90^\circ - \alpha, \quad (\widehat{\vec{j}, \vec{j'}}) = 180^\circ + \alpha. \tag{13}$$

(11) тенгликларни навбат билан $\vec{i}$, $\vec{j}$ векторларга скаляр кўпайтирсак,

$$a_1 = \vec{i'}\ \vec{i} = \cos(\widehat{\vec{i'}, \vec{i}}), \qquad a_2 = \vec{i'}\ \vec{j} = \cos(\widehat{\vec{i'}, \vec{j}}),$$

$$b_1 = \vec{j'}\ \vec{i} = \cos(\widehat{\vec{j'}, \vec{i}}), \qquad b_2 = \vec{j'}\ \vec{j} = \cos(\vec{j'}, \vec{j}).$$

(12) ва (13) муносабатларни ҳисобга олсак, $\vec{i'}$, $\vec{j'}$ векторларнинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари, агар $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса,

$$\vec{i'}(\cos\alpha, \ \sin\alpha), \qquad \vec{j'}(-\sin\alpha, \cos\alpha);$$

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли бўлганда эса

$$\vec{i'}\ (\cos\alpha, \ \sin\alpha), \quad \vec{j'}(\sin\alpha, -\cos\alpha).$$

У ҳолда (8) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha + c_1, \\ y = x'\sin\alpha + y'\cos\alpha + c_2, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha + y'\sin\alpha + c_1, \\ y = x'\sin\alpha - y'\cos\alpha + c_2. \end{cases} \tag{15}$$

(14) ва (15) формулаларни битта

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - \varepsilon\, y'\sin\alpha + c_1, \\ y &= x'\sin\alpha + \varepsilon\, y'\cos\alpha + c_2 \end{aligned} \tag{16}$$

кўринишдаги ёзувга бирлаштириш мумкин, бу ерда $\varepsilon = \pm 1$. Шундай қилиб, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар декарт реперлари бўлганида уларнинг биридан иккинчисига ўтиш (16) формулалар билан ифодаланади. Бу ерда, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса, $\varepsilon = +1$, акс ҳолда эса $\varepsilon = -1$.

Мисол. Иккита аффин репер $\mathscr{B} = (O, \vec{e_1}, \vec{e_2})$, $\mathscr{B}' = (O', \vec{e_1'}, \vec{e_2'})$ берилган бўлиб, бунда $O'(1, \ 2)$, $\vec{e_1'}(-1, \ 1)$, $\vec{e_2'}(2, \ -1)$ бўлсин. M нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари $x = 2$, $y = 1$ эканини билган ҳолда бу нуқтанинг $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан координаталари x', y' ни топинг.

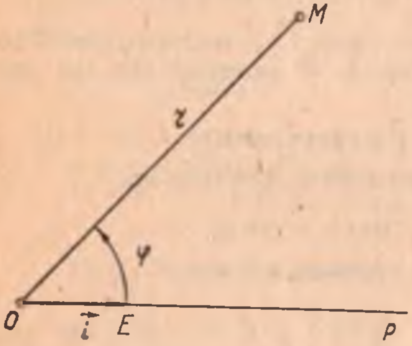
Ечиш. Берилган: $a_1 = -1$, $b_1 = 2$, $c_1 = 1$, $a_2 = 1$, $b_2 = -1$, $c_2 = 2$. Бу қийматларни (8) формулаларга қўйсак,

$$x = -x' + 2y' + 1, \quad y = x' - y' + 2.$$

$x = 2$, $y = 1$ эканини ҳисобга олсак, $2 = -x' + 2y' + 1$, $1 = x' - y' + 2$ ёки $-x' + 2y' = 1$, $x' - y' = -1$, бу системани ечиб, $x' = -1$, $y' = 0$ ни топамиз. Демак, M нуқтанинг $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан координаталари $x' = -1$, $y' = 0$.

20- §. Қутб координаталар системаси

Кўп тадқиқотларда ва эгри чизиқларнинг муҳим синфларини (масалан, спиралларни) ўрганишда қутб координаталар системаси деб аталувчи системани қўлланиш мақсадга мувофиқдир. Бу параграфда шу система билан танишамиз.



48- чизма

Ориентацияли текисликда бирор O нуқта OP нур ва OP нурда ётувчи $\overrightarrow{OE} = \vec{i}$ бирлик векторни белгилаймиз (48- чизма). Ҳосил қилинган геометрик образ *қутб координаталар* системаси дейилади. Уни $(O, \vec{i})$ кўринишда белгилаймиз. O нуқта *қутб боши*, OP нур эса *қутб ўқи* дейилади. M нуқтанинг текисликдаги вазияти маълум тартибда олинган икки сон: бири OE бирлик кесма ёрдамида ўлчанган $r = |\overrightarrow{OM}| \geqslant 0$ масофа, иккинчиси OP нур OM нурнинг устига тушиши учун бурилиши керак бўлган $\varphi = (\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM}})$ бурчак билан тўла аниқланади.

Қутб ўқини OM нур устига тушгунга қадар буриш мусбат йўналишда, яъни соат мили йўналишига тескари йўналишда бажарилса, φ мусбат деб, акс ҳолда φ ни манфий деб ҳисобланади.

r ни M нуқтанинг *қутб радиуси*, φ ни M нуқтанинг *қутб бурчаги* дейилиб, уларни M нуқтанинг *қутб координаталари* дейилади ва $M\ (r, \varphi)$ кўринишда белгиланади.

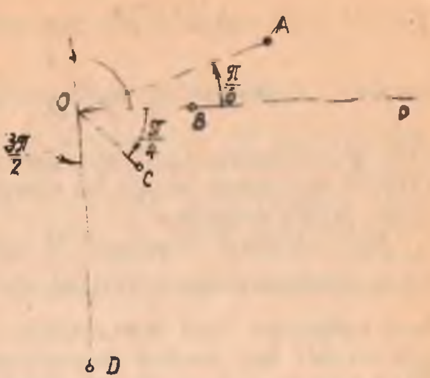
O нуқта учун $r = 0$ бўлиб, φ аниқланмаган ҳисобланади. Агар $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ ярим сегментда ўзгарса, текисликнинг ҳар бир нуқтаси қутб координаталари билан таъминланади.

Масалан, A, B, C, D нуқталар 49- чизмада ушбу қутб координаталарига эга:

$$A\left(2, \frac{\pi}{6}\right), \; B\ (1,\ 0), \; C\left(\frac{3}{4}, -\frac{\pi}{4}\right), \; D\left(3, \frac{3\pi}{2}\right).$$

Равшанки, сонларнинг ҳар қандай (r, φ) жуфти учун текисликнинг битта нуқтаси мавжуд бўлиб, сонларнинг бу жуфти шу нуқта учун қутб координаталар бўлади. Аммо бир нуқтанинг ўзига чексиз кўп сонлар жуфтлиги мос келади. Чунончи, M нуқтанинг координаталари

$r = a > 0$, $\varphi = \alpha$ бўлса, $r = a$, $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ (бу ерда $k=0, 1, 2, \ldots$) жуфтликлар ҳам шу M нуқтанинг координаталари бўлади, чунки OM нур OP қутб ўқини α бурчак қадар бурилишидан ҳосил бўлади деб фараз қилсак, у ҳолда OP нурни $\varphi = \alpha \pm 2\pi k$ қадар бурилишидан ҳам ўша нурнинг ўзини ҳосил қилиш мумкин.



49- чизма

M нуқтанинг қутб бурчаги қабул қилиши мумкин бўлган қийматлари орасидан $-\pi \leqslant \varphi \leqslant \pi$ тенгсизликни қаноатлантирадиган аниқ бир қиймати ажратилади ва у *бош қиймат* деб аталади. Қутб бурчагининг бош қиймаги сифатида OP нурни OM нурнинг устига тушириш учун уни бурии керак бўлган бурчак олинади. OM нур OP нурга қарама-қарши йўналган бўлса, 180° га икки йўналишда буриш мумкин, бу вақтда қутб бурчагининг бош қиймати учун $\varphi = \pi$ қабул қилинади.

21-§. Нуқтанинг қутб ва декарт координаталари орасидаги боғланиш

Текисликда $(O, \vec{i})$ қутб координаталар системаси берилган бўлсин. Координаталар боши қутб боши билан, абсциссалар ўқининг мусбат қисми қутб ўқи билан устма-уст тушадиган мусбат ориентацияли $(O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперини киритамиз (50- чизма).

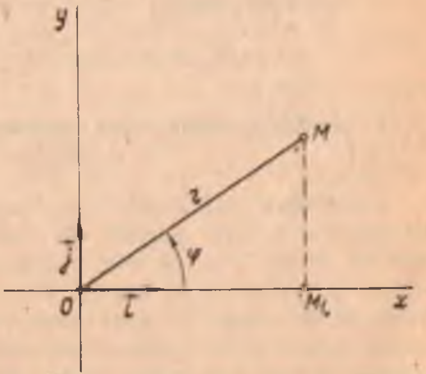
M нуқтанинг қутб координаталари r, φ, декарт координаталари эса x, y бўлсин.

OM_1M тўғри бурчакли учбурчакдан:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\cdot\sin\varphi. \qquad (17)$$

M нуқтанинг қутб координаталари r, φ маълум бўлса, (17) формулалар бўйича унинг декарт координаталари ҳисобланади.

Ўз навбатида M нуқтанинг қутб координаталари r, φ ни унинг декарт координаталари x, y орқали топиш мумкин. OM_1M учбурчакдан:



50- чизма

$$\left.\begin{aligned} r=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}\Rightarrow\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{y}{x}, \\ \cos\varphi=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \end{aligned}\right| \qquad (18)$$

(17) M нуқтанинг қутб координаталаридан декарт координаталарига, (18) M нуқтанинг декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтиш формулаларидир.

Шуни эслатиб ўтамизки, M нуқтанинг декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтишда $\operatorname{tg}\varphi=\frac{y}{x}$ формула қутб бурчагининг бош қийматини тўла аниқламайди, чунки бунинг учун яна φ миқдор мусбат ёки манфий эканлигини ҳам билиш керак. Одатда бу M нуқтанинг қайси чоракда жойлашишига қараб аниқланади. Масалан, (18) фсрмулада $x=3$, $y=3$ бўлса, $\operatorname{tg}\varphi=1$ бўлиб, $\varphi=45°$. Лекин $x=-3$, $y=-3$ бўлганда ҳам $\operatorname{tg}\varphi=1$ бўлиб, энди φ бурчак 45° эмас, балки $-135°$ бўлиши керак, чунки $(-3, -3)$ нуқта учинчи чоракда жойлашган. φ бурчакнинг қиймати ва ишорасини $\cos\varphi$, $\sin\varphi$ га қараб аниқлаш қулайроқ.

Мисол. Қутб координаталари билан берилган $M_1(r_1, \varphi_1)$, $M_2(r_2, \varphi_2)$ нукталар орасидаги масофани ҳисоблаш формуласини келтириб чиқаринг.

Ечиш. M_1, M_2 нуқталарнинг декарт координаталари $M_1(x_1, y_1)$ ва $M_2(x_2, y_2)$ бўлсин. Декарт координаталаридан қутб координаталарига ўтиш формулаларига кўра

$$\begin{aligned} x_1=r_1\cos\varphi_1 \\ y_1=r_1\sin\varphi_1 \end{aligned} \quad \text{ва} \quad \begin{aligned} x_2=r_2\cos\varphi_2, \\ y_2=r_2\sin\varphi_2. \end{aligned}$$

У ҳолда

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}=$$

$$=\sqrt{(r_2\cos\varphi_2-r_1\cos\varphi_1)^2+(r_2\sin\varphi_2-r_1\sin\varphi_1)^2}=$$

$$=\sqrt{r_1^2(\cos^2\varphi_1+\sin^2\varphi_1)+r_2^2(\cos^2\varphi_2+\sin^2\varphi_2)-2r_1r_2(\cos\varphi_2\cos\varphi_1+}$$

$$\overline{+\sin\varphi_2\sin\varphi_1)}=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1)},$$

$$\rho(M_1, M_2)=\sqrt{r_1^2+r_2^2-2r_1r_2\cos(\varphi_2-\varphi_1.)}$$

22- §. Координаталарни боғловчи тенглама ва тенгсизликларнинг геометрик маъноси

Текисликда бирор $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин репер олиниб, x, y ўзгарувчиларнинг камида бирини ўз ичига олган $F(x, y)$ ифода берилган бўлсин. Агар $x=x_0$, $y=y_0$ сонлар учун $F(x_0, y_0)$ ифода маънога эга бўлса, у ҳолда x_0, y_0 сонлар $F(x, y)$ ифоданинг аниқланиш соҳасига тегишли дейилади. Бундай сонларнинг ҳар бир жуфти берилган реперда тайин битта нуқтани аниқлайди. Барча бундай нуқталар тўплами текисликдаги бирор геометрик фигурадан иборат. Бу фигура бутун текисликдан ёки унинг бирор қисмидан, баъзан бўш тўпламдан иборат бўлиши мумкин.

Масалан, $F(x, y) = \frac{x}{y} - 1$ ифода $y \neq 0$ бўлгандагина маънога эга бўлиб, унинг аниқланиш соҳаси текисликнинг Ox ўқда ётмаган барча нуқталари тўпламидан иборат фигура бўлади. $F(x, y) = \sqrt{-x^2 - y^2 - 1}$ ифода x, y нинг ҳар қандай қийматларида ҳақиқий соҳада маънога эга бўлмайди. Демак, бу ифода билан аниқланган фигура бўш тўплам. $F(x, y) = x + y$ ифода x, y нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматларида маънога эга бўлиб, тегишли фигура бутун текисликдан иборат.

Энди

$$F(x, y) = 0 \quad (F(x, y) \gtreqless 0) \tag{19}$$

кўринишдаги тенгламани (тенгсизликни) қараймиз.

Агар икки $x = x_0$, $y = y_0$ сон (19) тенгламадаги (тенгсизликдаги) ўзгарувчиларнинг ўрнига қўйилганда уни тўғри тенгликка (тенгсизликка) айлантирса, бу сонлар (19) тенгламанинг (тенгсизликнинг) *ечими* дейилади.

Масалан, $x = 4$, $y = -5$ сонлар $3x + 2y - 2 = 0$ тенгламанинг ечимидир, чунки шу сонлар тенгламанинг чап қисмига қўйилса, у нолга айланади:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) - 2 = 12 - 12 = 0, \text{ демак, } 0 = 0.$$

$x = 5$, $y = 7$ сонлар эса бу тенгламанинг ечими бўла олмайди, чунки уларни тенгламага қўйилганда унинг чап қисми нолга тенг бўлмайди.

Шу сингари $x = 4$, $y = -5$ сонлар $3x + 2y > 1$ тенгсизликнинг ечими бўлади, чунки бу сонларни тенгсизликка қўйсак,

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot (-5) > 1, \quad 2 > 1,$$

$x = 4$, $y = -6$ сонлар эса $3x + 2y > 1$ тенгсизликнинг ечими бўла олмайди, чунки бу сонларни тенгсизликка қўйганда $0 > 1$ ҳосил қилинади.

(19) тенгламанинг (тенгсизликнинг) барча ечимлари тўплами текисликда бирор фигурани аниқлайди. Энди фигуранинг тенгламаси (фигурани аниқловчи тенгсизлик) тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Агар Ф фигурага тегишли ҳар бир нуқтанинг координаталари $F(x, y) = 0$ тенгламани ($F(x, y) \gtreqless 0$ тенгсизликни) қаноатлантириб, Ф га тегишли бўлмаган бирорта ҳам нуқтанинг координаталари уни қаноатлантирмаса, бу тенглама (тенгсизлик) *фигуранинг тенгламаси (фигурани аниқловчи тенгсизлик)* деб аталади.

Агар фигуранинг тенгламаси (уни аниқловчи тенгсизлик) маълум бўлса, текисликнинг ҳар қандай нуқтасини шу фигурага тегишли ёки тегишли эмаслиги масаласини ҳал қилиш мумкин. Бунинг учун синалаётган нуқтанинг координаталарини тенгламадаги (тенгсизликдаги) ўзгарувчиларнинг ўрнига қўйилганда, бу координаталар тенгламани (уни аниқловчи тенгсизликни) қаноатлантирса, нуқта фигурага тегишли, қаноатлантирмаса, нуқта фигурага тегишли бўлмайди.

Геометрияда асосан икки масала қаралади:

1. Фигурани аниқловчи тенглама (тенгсизлик) берилади, шу тенглама (тенгсизлик) бўйича унинг хоссалари ўрганилади ва аксинча.

2. Маълум шартларни қаноатлантирувчи нуқталардан иборат фигура берилади, бу фигуранинг тенгламасини (уни аниқловчи тенгсизликни) тузиш талаб қилинади.

Нуқталар тўпламини тенгламалар ва тенгсизликлар ёрдамида аниқлашга доир мисоллар кўрамиз. Аввало тенгламалари бўйича фигураларни аниқлашга доир мисоллар келтирайлик.

1. $F(x, y) = x - y = 0$. Ўрта мактаб математика курсидан координаталари бу тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқни аниқлашини биламиз. $x - y = 0$ тенглама биринчи ва учинчи чорак координата бурчакларининг биссектрисасини аниқлаши маълум (солиштиринг, 28- §).

2. Шунга ўхшаш, $F(x, y) = x + y = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталар танланган декарт реперида иккинчи ва тўртинчи чоракда координата ўқларидан бир хил масофада ётади. Демак, $x + y = 0$ тенглама билан иккинчи ва тўртинчи чорак координата бурчакларининг биссектрисаси аниқланади.

3. $x^2 - y^2 = 0$ тенгламани

$$(x - y)(x + y) = 0 \tag{20}$$

кўринишда ёзамиз.

$$x^2 - y^2 = 0 \Longleftrightarrow x - y = 0, \ x + y = 0. \tag{21}$$

(21) тенгламалардан бирини қаноатлантирувчи координаталар (20) тенгламани, шу билан $x^2 - y^2 = 0$ тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Шундай қилиб, $x^2 - y^2 = 0$ тенглама координаталар бошидан ўтувчи икки тўғри чизиқни аниқлайди.

4. $x^2 + y^2 = 0$ тенглама берилган. x, y нинг ҳар қандай қийматларида[1] x^2, y^2 сонлар манфий бўлмайди. Шунинг учун бу тенглама фақат $x = 0$, $y = 0$ бўлгандагина нолга айланади. Демак, координаталари аффин реперда $x^2 + y^2 = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами биттагина $O(0, 0)$ нуқтадан иборат экан.

5. $x^2 + y^2 + 1 = 0$ тенглама берилган. x^2, y^2 манфий бўлмагани учун x ва y ларнинг ҳар қандай қийматларида $x^2 + y^2 + 1 > 0$. Демак, координаталари $x^2 + y^2 + 1 = 0$ тенгламани қаноатлантирувчи битта ҳам нуқта йўқ, яъни координаталари бу тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами бўш.

6. $y - |y| = 0$ тенглама берилган. Бу тенглама $y \geqslant 0$ муносабатга тенг кучли. Текисликда танланган аффин реперда ординаталари $y \geqslant 0$ муносабатни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами Ox ўқ билан чегараланган ва Oy ўқнинг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликни ташкил этади. Демак, $y - |y| = 0$ тенгла-

---

[1] Ўзгарувчилар ҳақиқий қийматларнигина қабул қилади.

ма билан биринчи ва иккинчи чорак координата бурчакларида ётган нуқталар тўплами аниқланади (51- чизма).

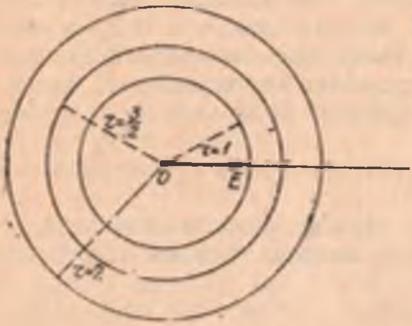
51- чизма

7. Текисликда қутб координаталардаги тенгламалари билан аниқланган чизиқларга мисол сифатида

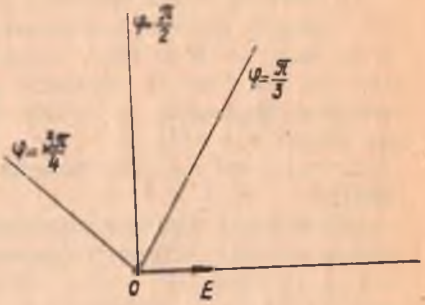
а) $r = a(a = \text{const})$,
б) $\varphi = \alpha\,(\alpha = \text{const})$

тенгламалар билан аниқланувчи фигураларни қараймиз.

$r = a$ тенглама билан аниқланувчи фигуранинг ҳар бир нуқтаси қутб бошидан a масофада жойлашган (қутб бурчаги эса ихтиёрий). Бизга маълумки, бундай фигура маркази қутб бошида ва радиуси a га тенг айланадан иборатдир (52- чизма).



52- чизма



53- чизма

Шунга ўхшаш $\varphi = \alpha(\alpha = \text{const})$ тенглама учи қутб бошида бўлган ва қутб ўқи билан α бурчак ҳосил қилган нурни аниқлайди (бунда r—ихтиёрий) (53- чизма).

Энди берилган тенгсизлик билан аниқланадиган фигураларга доир мисоллар келтирайлик.

1. $x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0$ тенгсизлик билан аниқланувчи фигурани топинг.

Ечиш. $x^2 + y^2 = 4$ тенглама маркази координаталар бошида ва радиуси 2 га тенг айланани аниқлайди. Бундан ташқари, текисликнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасидан координаталар бошигача бўлган масофанинг квадрати $\rho^2(O;\ M) = x^2 + y^2$; шу сабабли тенгсизлик текисликнинг шундай нуқталари тўпламини ифодалайдики, бу нуқталарнинг ҳар биридан координаталар бошигача бўлган масофа 2 бирликдан катта эмас. Бундай нуқталар тўплами маркази координаталар бошида ва радиуси 2 бирликка тенг доирадир.

2. $y \geqslant 0$ тенгсизлик билан аниқланувчи фигурани топинг. Бу тенгсизлик билан аниқланувчи фигура нуқталарининг ординаталари манфий эмас. Бундай нуқталар тўплами I ва II чораклар нуқталаридан иборат. Бу эса абсциссалар ўқи билан чегараланган ва ординаталар ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликдир.

Баъзан биргина тенглама ёки тенгсизлик билан аниқланадиган фигураларнигина эмас, балки (бир реперда) тенгламалар системаси билан, ёки тенглама ва тенгсизликлар системаси билан, ёки фақат тенгсизликлар системаси билан аниқланадиган фигураларни қарашга тўғри келади.

Масалан,

$$F_1(x, y) = 0, \ F_2(x, y) = 0$$

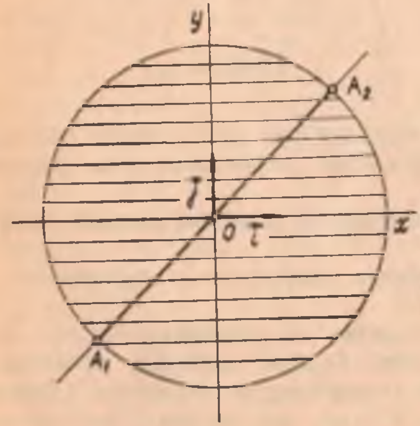
система билан аниқланадиган фигура бу системанинг ҳар бир тенгламаси билан аниқланувчи фигураларнинг кесишмасидан иборат.

1. $x^2 + y^2 - 4 \leqslant 0, \ x - y = 0$ система билан аниқланувчи фигурани топинг.

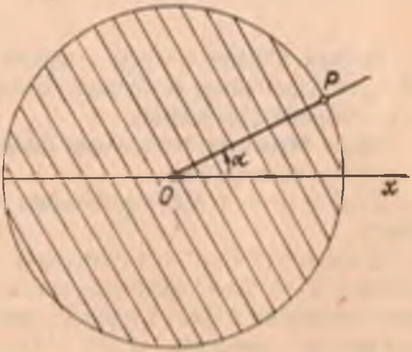
Бу система битта тенглама ва битта тенгсизликдан ташкил топган. Бундаги биринчи тенгсизлик 7- мисолга асосан $O(0, 0)$ марказли ва радиуси 2 га тенг доирани аниқлайди: системадаги иккинчи тенглама эса I ва II чораклар координата бурчакларининг биссектрисасини аниқлайди. Бу икки фигуранинг кесишмаси $A_1 A_2$ кесмадан иборат (54- чизма).

2. $r - a \leqslant 0, \ \varphi = \alpha$ система билан аниқланувчи фигурани топинг.

Системадаги биринчи тенгсизлик маркази қутб бошида ва a радиусли доирадан иборат. Системадаги иккинчи тенглама қутб ўқи



54- чизма

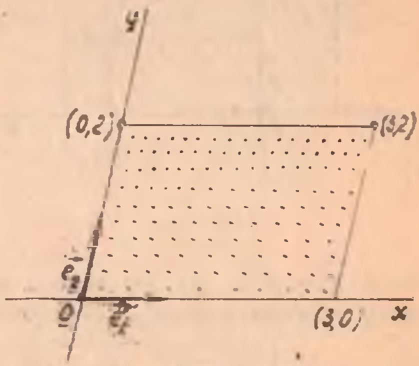


55- чизма

билан α бурчак ташкил этувчи нурни аниқлайди. Бу икки фигуранинг кесишмаси OP кесмадан иборат (55- чизма).

3. $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $3 - x \geqslant 0$, $2 - y \geqslant 0$ система билан аниқланувчи фигурани топинг.

Бу система тўрт тенгсизликдан ташкил топган. Аффин реперда системадаги биринчи тенгсизлик Oy ўқ билан чегараланган ва Ox ўқнинг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликни, иккинчи тенгсизлик эса Ox ўқ билан чегараланган ва Oy ўқнинг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликни аниқлайди. Системадаги учинчи тенгсизлик $x = 3$ тўғри чизиқ билан чегараланган иккита ярим текисликнинг координаталар боши O ни ўз ичига олганини аниқлайди.



56- чизма

Системадаги тўртинчи тенгсизлик эса $y = 2$ тўғри чизиқ билан чегараланган иккита ярим текисликнинг координаталар бошини ўз ичига олганини аниқлайди. Бу тўрт фигуранинг кесишмаси учлари (0, 0), (3, 0), (0, 2), (3, 2) нуқталарда бўлган тўртбурчакдир (56-чизма).

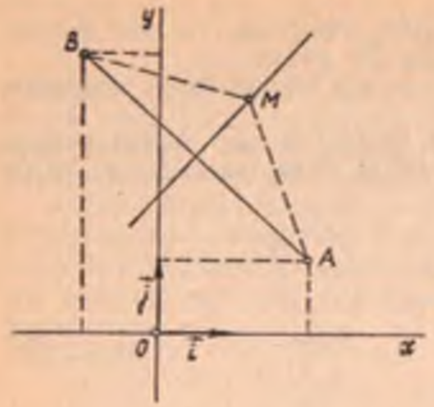
Фигураларнинг тенгламаларини (тенгсизлигини) келтириб чиқаришга доир баъзи мисоллар. Юқорида тенглама ёки тенгсизликка кўра фигурани аниқладик. Бу ерда аксинча, маълум хоссаларга асосланиб фигура тенгламасини ҳосил қилишга ҳаракат қиламиз. Бу масала умумий ҳолда қуйидагича ҳал қилинади: берилган фигура ихтиёрий нуқтасининг координаталарини бирор реперга нисбатан x, y билан белгилаб, уларни боғловчи шундай математик ифода ҳосил қиламизки, бу ифода шу фигурага тегишли ҳар қандай нуқтанинг координаталарини қўйилганда ўринли бўлиб, берилган фигурага тегишли бўлмаган бирорта ҳам нуқтанинг координаталарини қўйилганда ўринли бўлмайди. Одатда бундай ифода тенглама ёки тенгсизликдан иборат бўлади. Ҳосил қилинган тенглама ёки тенгсизлик шу *фигуранинг аналитик ифодаси* деб аталади.

Қуйида декарт реперига нисбатан бир нечта фигуранинг тенгламаларини тузамиз.

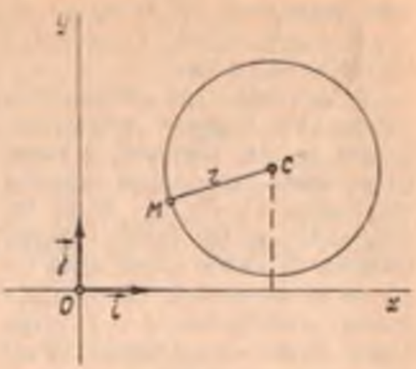
1. Текисликнинг шу текисликда берилган $A(2, 1)$, $B(-1, 4)$ нуқталардан тенг масофада ётган нуқталари тўпламининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Текисликнинг A, B нуқталаридан тенг масофада ётган барча нуқталари тўплами тўғри чизиқ бўлиб, у AB кесманинг ўрта перпендикуляридан иборат (57- a чизма).

$M(x, y)$ бу тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда



57-*а* чизма



57-*б* чизма

$\rho(M, A) = \rho(M, B)$. Бу шартни координаталарда ифодалаймиз. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2} = \sqrt{(x+1)^2+(y-4)^2}$$

ёки

$$(x-2)^2+(y-1)^2 = (x+1)^2+(y-4)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2-4x+4+y^2-2y+1 = x^2+2x-1+y^2-8y-16 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6x-6y+12=0 \text{ ёки } x-y+2=0,$$

бу тенглама изланган тенгламадир.

2. Текисликда берилган $C(a, b)$ нуқтадан берилган r масофада ётган барча нуқталар тўпламининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бундай нуқталар тўплами маркази C нуқтада, радиуси эса r га тенг айланадан иборатдир (57-*б* чизма).

$M(x, y)$ айлананинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. У ҳолда $\rho(C, M) = r$, яъни

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} = r. \tag{22}$$

(22) берилган айлананинг тенгламасидир, чунки уни фақат шу айланада ётган нуқталарнинг координаталаригина қаноатлантиради, агар M нуқта айланага тегишли бўлмаса, $\rho(C, M) \lessgtr r$ бўлиб, (22) шарт бажарилмайди.

(22) тенгликнинг иккала қисмини квадратга кўтариб, ушбу айлана тенгламасини ҳосил қиламиз:

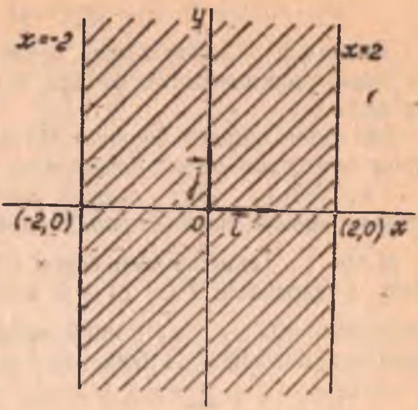
$$(x-a)^2+(y-b)^2 = r^2. \tag{23}$$

Хусусан, айлананинг маркази координаталар бошида, яъни $a = b = 0$ бўлса, (23) тенглама қуйидаги содда кўринишни олади:

$$x^2+y^2=r^2.$$

3. Текисликда ординаталар ўқига параллел ва абсциссалар ўқи-

дан икки бирлик кесма кесиб ўтган тўғри чизиқлар орасида ҳосил бўлган фигуранинг аналитик ифодасини ёзинг (58- *а* чизма).



58- *а* чизма

Ечиш. Бундай фигура *полоса* дейилади. Қаралаётган полоса иккита ярим текисликнинг кесишмасидан ташкил топган. Бу ярим текисликларнинг иккаласи ҳам координаталар бошини ўз ичига олган бўлиб, уларнинг бири $x = 2$ тўғри чизиқ билан, иккинчиси эса $x = -2$ тўғри чизиқ билан чегараланган. Ҳосил бўлган полоса 58- *а* чизмада штрихлаб кўрсатилган. Чизмадан кўриниб турибдики, полоса ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасининг абсциссаси

$$|x| \leqslant 2 \tag{24}$$

шартни қаноатлантиради. (24) шарт ушбу

$$-2 \leqslant x \leqslant 2 \tag{25}$$

тенгсизликка тенг кучли. (25) шарт фақатгина полосанинг нуқталари учун бажарилганидан у полосанинг аналитик ифодасидир.

23- §. Алгебраик чизиқ ва унинг тартиби

Таъриф. Текисликдаги бирор аффин реперда $F(x, y) = 0$ тенгламанинг чап томони x, y га нисбатан алгебраик кўпҳад, яъни $a_{ij} x^i y^j$ кўринишидаги ҳадларнинг алгебраик йиғиндисидан иборат бўлса, бу тенглама билан аниқланувчи нуқталар тўплами *алгебраик чизиқ*, тенглама эса *алгебраик тенглама* дейилади.

i, j манфий бўлмаган бутун сонлар бўлиб, $i + j$ сон $a_{ij} x^i y^j$ ҳаднинг *даражаси* дейилади. i, j даражалар йиғиндисининг максимал қиймати $F(x, y)$ кўпҳаднинг *даражаси*, шу билан бир вақтда $F(x, y) = 0$ тенгламанинг ҳам *даражаси* дейилади.

Масалан,

$$F(x, y) = Ax + By + C = 0$$

биринчи даражали алгебраик тенглама,

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

иккинчи даражали алгебраик тенгламадир. Алгебраик бўлмаган барча чизиқлар *трансцендент чизиқлар* дейилади.

Алгебраик бўлмаган чизиқларга мисоллар сифатида ушбу тенгламаларнинг графикларини кўрсатиш мумкин:

$$y - \sin x = 0,\ y - \operatorname{tg} x = 0,\ y - \lg x = 0,\ y - a^x = 0.$$

Таъриф. Бирор аффин реперда n- даражали алгебраик тенглама билан аниқланадиган фигура *n- тартибли алгебраик чизиқ* деб аталади.[1]

Биз текисликдаги биринчи ва иккинчи тартибли алгебраик чизиқларни текшириш билан чекланамиз.

Теорема. *Бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтишда чизиқнинг алгебраиклиги ва унинг тартиби ўзгармайди.*

Исбот. Текисликдаги бирор $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ аффин реперда бирор l чизиқ n- даражали $F(x,\ y) = 0$ алгебраик тенглама билан аниқланган бўлсин. $(O',\ \vec{e'}_1,\ \vec{e'}_2)$ янги аффин реперни оламиз. Бу реперлар орасидаги боғланиш II боб, 11- § дан бизга маълум:

$$\begin{cases} x = a_1x' + b_1y' + c_1, \\ y = a_2x' + b_2y' + c_2, \end{cases} \quad \text{бу ерда } \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{26}$$

l чизиқнинг янги координаталардаги тенгламасини ҳосил қилиш учун унинг тенгламасидаги эски ўзгарувчиларни (26) формулалар бўйича алмаштирамиз. Натижада $F(x,\ y) = 0$ тенгламадаги ҳар бир $a_{ij} x^i y^j$ ҳаднинг ўрнида

$$a_{ij}(a_1x' + b_1y' + c_1)^i(a_2x' + b_2y' + c_2)^j$$

кўринишдаги ҳад ҳосил бўлади. Барча шундай ҳадларда қавсларни очиб ихчамласак, $\Phi(x',\ y') = 0$ кўринишдаги алгебраик тенглама ҳосил бўлади. $\Phi(x',\ y') = 0$ тенгламанинг ҳар бир ҳади $b_{st}(x')^s(y')^t$ кўринишдаги ҳадлардан иборат бўлиб, ҳар бир бундай ҳаднинг даража кўрсаткичи $s + t \leqslant i + j$. Агар $\Phi(x',\ y')$ кўпҳаднинг даражасини m билан белгиласак, натижада $m \leqslant n$ га эга бўламиз.

Энди m нинг n дан кичик бўла олмаслигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $m < n$ бўлсин. $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ шартда (26) алмаштиришга тескари алмаштириш мавжуд:

$$\begin{cases} x' = \dfrac{b_2}{\Delta}\ x - \dfrac{b_1}{\Delta}\ y + \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \\ y' = -\dfrac{a^2}{\Delta}\ x + \dfrac{a_1}{\Delta}\ y - \dfrac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\Delta} \end{cases} \quad \left(\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \right) \tag{27}$$

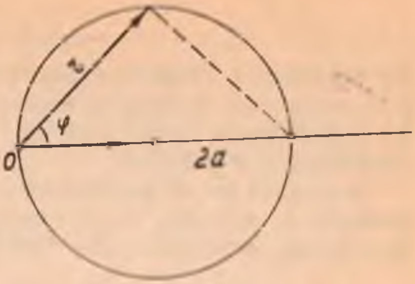
(27) дан $x',\ y'$ нинг қийматларини $\Phi(x',\ y') = 0$ тенгламанинг чап томонига қўйсак, яна $F(x,\ y) = 0$ тенгламага қайтамиз. Юқоридаги мулоҳазани такрорласак, ҳосил бўлган $F(x,\ y)$ кўпҳаднинг даражаси $n \leqslant m$ бўлади. Бир вақтда ҳам $m < n$, ҳам $n \leqslant m$ юз бера олмайди. Демак, $\Phi(x',\ y')$ кўпҳаднинг даражаси $m = n$.

Хуллас, алгебраик чизиқнинг тартиби ва унинг алгебраиклиги

---

[1] Адабиётда бу тарздаги таъриф *дуруст* (тўғри) таъриф деб юритилади (русча — корректное определение).

аффин (ёки декарт) координаталар системасининг танланишига боғлиқ эмас. Шунинг учун чизиқларнинг алгебраик ва трансцендент чизиқларга бўлинишида фақат аффин координаталар системаси (декарт координаталар системаси) кўзда тутилади. Қутб координаталар системасида чизиқларни бу тариқа синфларга ажратиб бўлмайди. Чунончи маркази қутбда ва радиуси a га тенг айлана тенгламаси $r - a = 0$ дан иборат бўлиб, у r га нисбатан биринчи даражали, яъни алгебраик тенгламадир. Шу айлана учун қутб айлананинг ўзида олинса, айлана $r - 2a\cos\varphi = 0$ тенглама билан, яъни трансцендент тенглама билан ифодаланади (58- *б* чизма).



58- *б* чизма

24- §. Тўғри чизиқнинг турли тенгламалари

Таъриф. Тўғри чизиққа параллел ҳар қандай вектор унинг *йўналтирувчи вектори* дейилади.

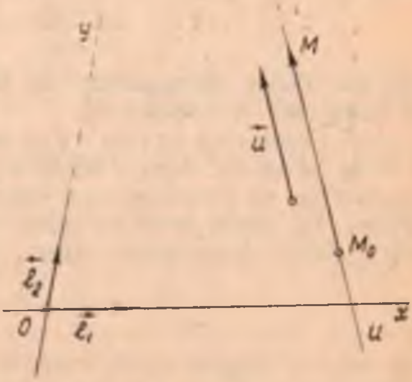
Қуйида биз тўғри чизиқнинг берилиш усулларига қараб унинг тенгламасини келтириб чиқарамиз.

1. Тўғри чизиқнинг параметрик тенгламалари. Текисликда u тўғри чизиқнинг вазияти бирор $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин реперга нисбатан шу тўғри чизиққа тегишли $M_0(x_0, y_0)$ нуқта ва йўналтирувчи $\vec{u}(a_1, a_2)$ вектор билан тўла аниқланади (59- чизма). Бу маълумотларга асосланиб, u тўғри чизиқнинг тенгламасини келтириб чиқарамиз. M орқали u тўғри чизиқнинг ихтиёрий нуқтасини белгилаймиз. У ҳолда $\overrightarrow{M_0M}$ векторни йўналтирувчи вектор сифатида олиш мумкин.

Демак, шундай t сон топиладики (I боб, 6- §, (4) формула),

$$\overrightarrow{M_0M} = t\vec{u} \qquad (28)$$

бўлади. Аксинча, бирор M нуқта учун (23) муносабат ўринли бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{u}$. Демак, (28) муносабат фақат u тўғри чизиққа тегишли M нуқталар учунгина бажарилади. M, M_0 нуқталарнинг радиус-векторларини мос равишда $\vec{r}$, $\vec{r}_0$ билан белгиласак, яъни $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, $\vec{r}_0 = \overrightarrow{OM_0}$ бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{M_0M} = \vec{r} - \vec{r}_0$. (28) тенгликдан



59- чизма

$$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{u}. \qquad (29)$$

Бу тенглама *u* тўғри чизиқнинг *векторли тенгламаси* деб аталади. *t* га турли хил қийматлар бериб, *u* га тегишли нуқталарнинг радиус- векторларини ҳосил қиламиз; (29) тенгламага кирган *t* ўзгарувчи *параметр* деб аталади.

Энди (29) ни координаталарда ёзайлик. M нуқтанинг координаталарини x, y билан, M_0 нуқтанинг координаталарини x_0, y_0 билан белгиласак, натижада ушбу тенгламалар ҳосил қилинади:

$$x = x_0 + a_1 t, \quad y = y_0 + a_2 t. \qquad (30)$$

Бу тенгламалар тўғри чизиқнинг *параметрик тенгламалари* деб аталади.

Агар *u* тўғри чизиқ координата ўқларидан бирортасига ҳам параллел бўлмаса, яъни $a_1 a_2 \neq 0$ шарт бажарилса, (30) дан ушбу

$$\frac{x - x_0}{a_1} = \frac{y - y_0}{a_2} \qquad (31)$$

тенгламани ҳосил қиламиз. Ундан

$$a_2 x - a_1 y + (-a_2 x_0 + a_1 y_0) = 0. \qquad (32)$$

Бу ерда шартга кўра a_1, a_2 лардан камида биттаси нолдан фарқли, шу сабабли (32) биринчи даражали тенгламадир. Шунинг билан ушбу муҳим хулосага келдик: ҳар қандай тўғри чизиқ биринчи тартибли алгебраик чизиқдир.

2. Икки нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламаси. Ҳар қандай тўғри чизиқнинг вазияти унинг иккита ҳар хил нуқтаси билан аниқланади. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин реперда *u* тўғри чизиқнинг $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ нуқталари маълум бўлсин. Шу тўғри чизиқнинг тенгламасини келтириб чиқарайлик. Қаралаётган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида $\vec{u} = \overrightarrow{M_1 M_2}\,(x_2 - x_1,\ y_2 - y_1)$ векторни қабул қилиш мумкин, шунинг учун (31) га асосан *u* тўғри чизиқ ушбу

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \qquad (33)$$

тенглама билан ифодаланади. Бу берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

3. Тўғри чизиқнинг кесмалари бўйича тенгламаси. *u* тўғри чизиқ Ox ўқни $A(a, 0)$ нуқтада, Oy ўқни эса $B(0, b)$ нуқтада кессин ва координаталар бошидан ўтмасин, яъни $a \neq 0$, $b \neq 0$ бўлсин. Бу ҳолда икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламаси (33) қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{x - a}{-a} = \frac{y}{b} \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \qquad (34)$$

(34) да a, b сонлар тўғри чизиқнинг координата ўқларидан ажратган кесмаларидир. Шуни ҳисобга олиб, (34) *тўғри чизиқнинг кесмалари бўйича тенгламаси* деб аталади.

1-мисол. Учларининг координаталари $A(-3,\ 2)$, $B(2,\ 4)$ ва $C(5,\ -4)$ бўлган ABC учбурчак берилган. Унинг B учидан чиққан медианаси тенгламасини тузинг.

Ечиш. B_1 нуқта AC томоннинг ўртаси бўлсин. У ҳолда 15-§ даги (3) формулага кўра $B_1(1,\ -1)$. B ва B_1 нуқталарнинг координаталарини (33) тенгламага қўйсак (бунда $M_1=B,\ M_2=B_1$),

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-4}{-1-4} \text{ ёки } 5x-y-6=0.$$

Бу BB_1 медиананинг тенгламаси.

2-мисол. Абсциссалар ўқидан 2 бирлик, ординаталар ўқидан -3 бирлик кесмалар ажратгэн тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилишига кўра $a=2$, $b=-3$, у ҳолда (34) тенглама $\frac{x}{2}+\frac{y}{-3}=1$ ёки $\frac{x}{2}-\frac{y}{3}=1$ кўринишда бўлиб, бу изланган тўғри чизиқнинг тенгламасидир.

3. Тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси. Аввало тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти тушунчасини киритамиз.

Таъриф. $\vec{u}$ вектор $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ базисда $a_1,\ a_2$ координаталарга эга ва $a_1\neq 0$ бўлсин, у ҳолда $\frac{a_2}{a_1}=k$ сон u *векторнинг бурчак коэффициенти* дейилади.

Теорема. *Коллинеар векторларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг.*

Исбот. Ҳақиқатан, $\vec{u}\parallel\vec{v}$ векторлар берилган бўлиб, улар $\vec{e}_1,\ \vec{e}_2$ базисга нисбатан $\vec{u}\ (a_1,\ a_2)$, $\vec{v}\ (b_1,\ b_2)\,(a_1\neq 0,\ b_1\neq 0)$ координаталарга эга бўлсин ҳамда $k_1,\ k_2$ мос равишда бу векторларнинг бурчак коэффициентлари бўлсин. Таърифга кўра

$$k_1=\frac{a_2}{a_1} \text{ ва } k_2=\frac{b_2}{b_1}.$$

$\vec{u}\parallel\vec{v}$ бўлгани учун шундай t сон мавжудки, $\vec{u}=t\vec{v}$ ёки $a_1=$ $=tb_1,\quad a_2=tb_2\Rightarrow\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}\Rightarrow\frac{b_2}{b_1}=\frac{a_2}{a_1}$ ёки $k_2=k_1$. ▲

Хулоса. Битта тўғри чизиққа параллел барча векторларнинг бурчак коэффициентлари ўзаро тенг. k сон *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти* дейилади.

Энди тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламасини келтириб чиқарайлик.

Битта нуқтаси ва бурчак коэффициенти тўғри чизиқнинг текисликдаги вазиятини тўла аниқлайди. Oy ўққа параллел тўғри чизиқлар учун бурчак коэффициент мавжуд эмас. Энди Oy ўққа параллел бўлмаган u тўғри чизиқ $M_0(x_0,\ y_0)$ нуқтадан ўтсин ва k га тенг бурчак коэффициентга эга бўлсин. u нинг тенгламасини тузамиз. (32) га асосан $a_1\neq 0$ шартда $y-y_0=\frac{a_2}{a_1}\ (x-x_0)$, аммо $k=$ $=\frac{a_2}{a_1}$, демак,

$$y-y_0=k(x-x_0) \qquad (35)$$

ёки

$$y=kx+b,$$

бунда

$$b=y_0-kx_0. \qquad (36)$$

(36) тенглама *тўғри чизиқнинг бурчак коэффициентли тенгламаси* дейилади.

Мисол. $P(2,\ -3)$ нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти $\frac{3}{4}$ бўлган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилганларга асосан $x_0=2$, $y_0=-3$, $k=\frac{3}{4}$ бўлиб, буларни (35) тенгламага қўямиз:

$$y-(-3)=\frac{3}{4}(x-2) \text{ ёки } 3x-4y-18=0.$$

4. Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси. Тўғри чизиқнинг юқорида келтириб чиқарилган (30) — (34), (36) тенгламаларининг ҳар бирини олиб солиштирсак, улар умумий кўринишдаги

$$Ax+By+C=0 \qquad (37)$$

икки номаълумли биринчи даражали тенгламанинг хусусий ҳоллари эканини кўрамиз.

Энди қуйидагича савол туғилади: аксинча, (37) кўринишдаги тенглама тўғри чизиқни ифода этадими?

Теорема. *x, y ўзгарувчиларга нисбатан биринчи даражали* $Ax+By+C=0$ (бу ерда $A^2+B^2\neq 0$) *алгебраик тенглама аффин реперга нисбатан тўғри чизиқни аниқлайди.*

Исбот. Бу ерда икки ҳолни текширамиз.

а) $B\neq 0$. Берилган тенгламани

$$y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}$$

кўринишда ёзиш мумкин. Энди бу тенгламани юқоридаги $y=kx+b$ тенглама билан солиштирсак, $k=-\frac{A}{B}$, $b=-\frac{C}{B}$ ни ҳосил қиламиз. Демак, $Ax+By+C=0$ тенглама $B\neq 0$ шартда $y=kx+b$ кўринишни олади, унинг эса тўғри чизиқни ифодалашини биламиз. Шундай қилиб, умумий кўринишли $Ax+By+C=0$ тенглама ҳам $B\neq 0$ да бирор тўғри чизиқни ифодалайди.

б) $B=0$. Бу ҳолда $A^2+B^2\neq 0$ муносабатга кўра $A\neq 0$ бўлиб, $Ax+By+C=0$ тенглама $x=-\frac{C}{A}$ кўринишни олади. Бундай тенглама Oy ўққа параллел тўғри чизиқни аниқлайди. Демак, иккала ҳол учун ҳам теорема кучга эга. ▲

Тўғри чизиқнинг умумий тенгламаси

$$Ax+By+C=0 \qquad (37)$$

берилган бўлсин, бунда $k = -\frac{A}{B} = \frac{a_2}{a_1}$, демак, тўғри чизиқнинг $\vec{u}$ йўналтирувчи векторининг координаталари сифатида $-B$, A сонларни қабул қилиш мумкин, яъни умумий тенгламаси билан берилган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори сифатида $\vec{u}(-B, A)$ векторни олиш мумкин.

Мисол. Учларининг координаталари $L(-3, -1)$, $M(2, 3)$, $N(2,1)$ бўлган LMN учбурчак берилган. Учбурчакнинг L учидан MN томонига параллел бўлиб ўтган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори учун $\overrightarrow{MN}$ векторни олиш мумкин, унинг координаталари $\overline{MN}(0, -2) \Rightarrow A = -2$, $B = 0$. Тўғри чизиқнинг $L(-3, -1)$ нуқтадан ўтишини эътиборга оламиз. $-2 \cdot (-3) + 0 \cdot (-1) + C = 0$. $C = -6$: A, B, C нинг топилган қийматларини (37) га қўямиз: $x + 3 = 0$ ёки $x = -3$. Бу изланаётган тенгламадир.

Энди тўғри чизиқнинг

$$Ax + By + C = 0$$

умумий тенгламасини текширамиз.

1. $C = 0$. Бу ҳолда тенглама қуйидаги кўринишни олади: $Ax + By = 0$. Бу тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади, чунки уни (0, 0) қаноатлантиради. Аксинча, тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтса, у ҳолда

$$A \cdot 0 + B \cdot 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0.$$

2. $A = 0$.

$$By + C = 0. \tag{38}$$

Бу тўғри чизиқнинг йўналтирувчи $\vec{u}(-B, 0) \Rightarrow \vec{u} = -B\vec{e}_1$ вектори $\vec{e}_1$ векторга коллинеар, демак, у Ox ўққа параллел. $B \neq 0$ бўлганда (38) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$y = b, \text{ бу ерда } b = -\frac{C}{A}.$$

Шундай қилиб, $y = b$ тенглама Ox ўққа параллел ва ординаталар ўқини $\left(O, -\frac{C}{B}\right)$ нуқтада кесиб ўтадиган тўғри чизиқни аниқлайди.

Агар $A = 0$, $C = 0 \Rightarrow By = 0 \Rightarrow y = 0$ (чунки $B \neq 0$), $y = 0$ эса Ox ўқнинг тенгламасидир, чунки бу тенглама билан аниқланувчи тўғри чизиқ Ox ўққа параллел ва Oy ўқдан $b = 0$ кесма ажратади.

3. $B = 0$. Бунда 2) ҳолдагига ўхшаш тўғри чизиқ Oy ўққа параллел жойлашади ва бу ҳолда $C = 0$ бўлса ($Ax = 0 \Rightarrow x = 0$), тўғри чизиқ Oy ўқнинг ўзини ифодалайди.

25- §. Тўғри чизиқни тенгламасига кўра ясаш

Қуйида биз бирор аффин реперга нисбатан тенгламаси билан берилган тўғри чизиқни ясашнинг бир неча усуллари билан танишамиз.

1. Тўғри чизиқ ўзининг икки нуқтасининг берилиши билан тўлиқ аниқлангани учун у бирор $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ реперга нисбатан қандай кўринишдаги тенгламаси билан берилмасин, уни ясаш учун икки нуқтасини ясаш кифоядир.

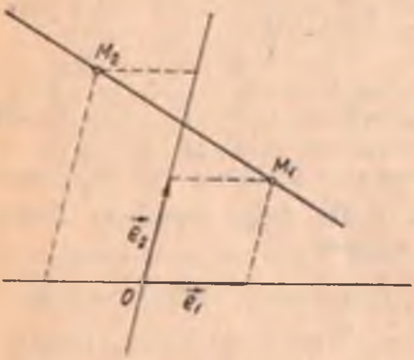
Мисол. $x + 2y - 3 = 0$ тенглама билан берилган тўғри чизиқни ясанг.

Тўғри чизиқнинг икки нуқтасини топиш учун берилган тенгламадаги x ўзгарувчига ихтиёрий икки қийматни бериб, тенгламадан бу қийматларга y нинг мос қийматларини топамиз;

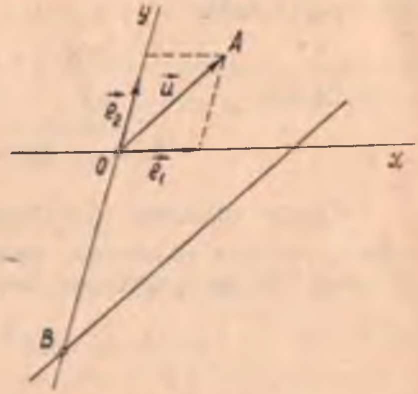
$$x = 1 \text{ да } 1 + 2y - 3 = 0 \text{ дан } y = 1,$$
$$x = -1 \text{ да } -1 + 2y - 3 = 0 \text{ дан } y = 2.$$

Топилган $M_1(1,\ 1)$, $M_2(-1,\ 2)$ нуқталарни ясаб, уларни туташтирсак, изланаётган $M_1 M_2$ тўғри чизиқ ҳосил бўлади (60- чизма).

2. Тўғри чизиқ $(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2)$ реперда $y = kx + b$ кўринишдаги тенглама билан берилган бўлса, уни қуйидагича ясаш мумкин. Ординаталар ўқида $(0,\ b)$ нуқтани ясаймиз ҳамда $(1,\ k)$ векторни ясаб, $(0,\ b)$ нуқтадан u векторга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз.



60- чизма



61- чизма

Мисол. $y = 2x - 3$ тенглама билан аниқланувчи тўғри чизиқни ясанг.

$(0,\ -3)$ нуқтани ясаймиз. 61- чизмада бу B нуқтадир. Сўнгра шу чизмада $\vec{u} = \vec{e}_1 + 2\,\vec{e}_2$ векторни ясаймиз. Чизмада бу $\overrightarrow{OA}$ вектордир. Энди B нуқтадан $\overrightarrow{OA}$ векторга параллел тўғри чизиқ ўтказамиз.

3. Агар тўғри чизиқ

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1 t, \\ y = y_0 + a_2 t \end{cases}$$

параметрик тенгламалари билан берилса, бу тўғри чизиқ ҳам 2- ҳолдаги сингари (x_0, y_0) нуқтадан ўтиб (a_1, a_2) векторга параллел тўғри чизиқ каби ясалади.

26- §. $Ax + By + C$ учҳад ишорасининг геометрик маъноси

(O, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$) реперда ушбу $Ax + By + C = \delta$ учҳадни қараймиз.

$$Ax + By + C = 0 \tag{39}$$

тенглама йўналтирувчи вектори $\vec{u}$ $(-B, A)$ бўлган бирор u тўғри чизиқни аниқлайди. Бу тўғри чизиқ текисликни иккита қисмга ажратади. Уларнинг бирини Φ_1, иккинчисини Φ_2 билан белгилаймиз. Бу қисмларнинг ҳар бирини *очиқ ярим текислик* деб атаймиз.

Теорема. $M_1(x_1, y_1)$ ва $M(x_2, y_2)$ *нуқталар* (39) *тўғри чизиқ билан ажратилган турли очиқ ярим текисликларга тегишли бўлиши учун* $\delta_{M_1} = Ax_1 + By_1 + C$ ва $\delta_{M_2} = Ax_2 + By_2 + C$ *сонлар ишораларининг ҳар хил бўлиши зарур ва етарли.*

Исбот. Зарурийлиги. M_1, M_2 нуқталар тўғри чизиқ билан ажратилган турли очиқ ярим текисликка тегишли бўлсин. У ҳолда M_1M_2 кесма u тўғри чизиқни бирор M_0 нуқтада кесиб, M_0 нуқта M_1M_2 кесмани бирор λ нисбатда ($\lambda > 0$, чунки M_0—кесманинг ички нуқтаси) бўлади, яъни

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}.$$

Лекин

$$M_0 \in u \Rightarrow Ax_0 + By_0 + C = 0.$$

Бу тенгликка x_0, y_0 нинг қийматларини қўйсак,

$$A\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\right) + B\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right) + C = 0.$$

Бундан

$$A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(1 + \lambda) \Rightarrow 0$$

ёки

$$Ax_1 + By_1 + C + \lambda(Ax_2 + By_2 + C) = 0.$$

Юқоридаги белгилашимизга асосан $\delta_{M_1} + \lambda\delta_{M_2} = 0$ бўлиб, бундан $\lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}}$, $\lambda > 0$ бўлгани сабабли бу шартнинг бажарилиши учун δ_{M_1}, δ_{M_2} лар ҳар хил ишорали бўлиши керак.

Етарлилиги. δ_{M_1}, δ_{M_2} ҳар хил ишорали бўлсин, у ҳолда $M_1 \notin u$ ва $M_2 \notin u$. M_1M_2 тўғри чизиқ u тўғри чизиқни бирор M_0 нуқтада кессин, бу ҳолда M_0 нуқта M_1M_2 кесмани бирор λ нисбатда бўлади.

Исботнинг биринчи қисмида бажарилган ишни такрорласак,

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + C}{Ax_2 + By_2 + C} = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}}.$$

δ_{M_1}, δ_{M_2} сонлар ҳар хил ишорали бўлгани учун $\lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}} > 0$. Демак, M_1M_2 ва u тўғри чизиқларнинг кесишган M_0 нуқтаси M_1, M_2 нуқталар орасида ётади, бундан эса M_1, M_2 нуқталарнинг турли очиқ ярим текисликка тегишлилиги келиб чиқади. ▲

Бу теоремадан қуйидаги натижани келтириб чиқарамиз: $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$ нуқталар учун $\delta_{M_1} = Ax_1 + By_1 + C$ ва $\delta_{M_2} = Ax_2 + By_2 + C$ сонлар бир хил ишорали бўлса, бу нуқталар (39) тўғри чизиқ билан ажратилган Φ_1, Φ_2 очиқ ярим текисликларнинг фақат бирига тегишли бўлади.

Хулоса. Текисликнинг координаталари $Ax + By + C > 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи барча нуқталари тўплами (39) тўғри чизиқ билан ажратилган Φ_1, Φ_2 очиқ ярим текисликларнинг биридан ва $Ax + By + C < 0$ тенгсизликни қаноатлантирувчи нуқталари тўплами эса очиқ ярим текисликларнинг иккинчисидан иборат экан.

Мисол. u: $x - 3y + 1 = 0$ тўғри чизиқ учлари $M_1(0, -1)$, $M_2(1, 2)$ нуқталар бўлган M_1M_2 кесмани кесадими?

Ечиш. M_1, M_2 нуқталарнинг координаталарини $\delta = x - 3y + 1$ ифодага қўямиз:

M_1 нуқта учун $\delta_{M_1} = 0 - 3\cdot(-1) + 1 = 4 > 0$;

M_2 нуқта учун $\delta_{M_2} = 1 - 3\cdot 2 + 1 = -4 < 0$.

Бундан кўринадики, $M_1 \in \Phi_1$, $M_2 \in \Phi_2$, демак, тўғри чизиқ M_1M_2 кесмани кесиб ўтади.

27- §. Текисликда икки тўғри чизиқнинг ўзаро жойлашиши

Тенгламалари аффин системада берилган u_1, u_2 тўғри чизиқларни олайлик:

$$u_1: \ A_1x + B_1y + C_1 = 0$$
$$u_2: \ A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

$\vec{u_1}(-B_1, A_1)$, $\vec{u_2}(-B_2, A_2)$ векторлар мос равишда бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларидир. u_1, u_2 тўғри чизиқларнинг ўзаро жойлашувида ушбу ҳоллар юз бериши мумкин.

1. u_1, u_2 тўғри чизиқлар кесишади (62- *а* чизма). У ҳолда $\vec{u_1} \nparallel \vec{u_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Бундай тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топиш учун берилган тенгламалар системасини ечиш керак.

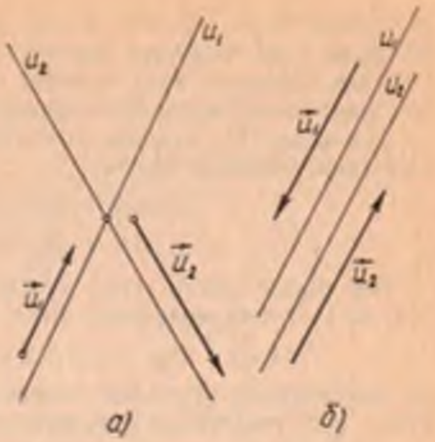
2. u_1, u_2 тўғри чизиқлар параллел (62- *б* чизма) $\Rightarrow \vec{u_1} \parallel \vec{u_2} \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}$.

Аксинча, $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \rightarrow A_1 = \lambda A_2$, $B_1 = \lambda B_2 \Rightarrow \vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2$, бу эса u_1, u_2 нинг параллеллигини англатади.

Агар $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$ бўлса, u_1, u_2 тўғри чизиқлар уст-ма- уст тушади (мустақил исботланг).

Мисол. $u_1 : x + 3y - 2 = 0$ ва $u_2 : 2x + y + 5 = 0$ тўғри чизиқларнинг кесишишини исботланг ва уларнинг кесишган нуқтасини топинг.

Ечиш. Бу тенгламаларда: $A_1 = 1$, $B_1 = 3$, $C_1 = -2$, $A_2 = 2$, $B_2 = 1$, $C_2 = 5$; $\frac{1}{2} \neq \frac{3}{1}$; берилган тўғри чизиқлар кесишади. Шу кесишган нуқтани топиш учун ушбу тенгламалар системасини ечамиз:



62- чизма

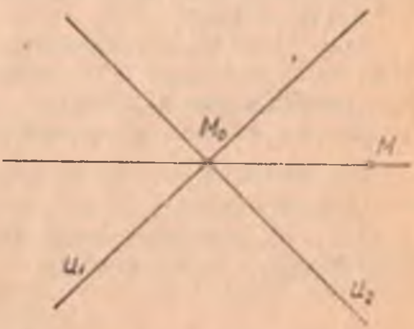
$$\begin{cases} x + 3y - 2 = 0, \\ 2x + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Бу системадан кесишиш нуқтасини топамиз: $\left(\frac{13}{5}, \ -\frac{1}{5}\right)$.

28- §. Тўғри чизиқлар дастаси

Текисликдаги тўғри чизиқлар битта нуқтадан ўтса ёки битта тўғри чизиққа параллел бўлса, улар дастани ташкил қилади, деймиз. Шу нуқта *даста маркази* дейилади. Бу дасталарни айрим-айрим кўриб чиқамиз.

1. Кесишувчи тўғри чизиқлар дастаси (63- чизма) даста марказининг ёки дастага тегишли икки тўғри чизиқнинг берилиши билан тўлиқ аниқланади. Даста марказини M_0 деб белгиласак, $M \neq M_0$ нуқта орқали дастанинг фақат битта M_0M тўғри чизиғи ўтади.



63- чизма

Энди бу дастанинг тенгламаси билан танишамиз. $y - y_0 = k(x - x_0)$ тенглама (x_0, y_0) нуқтадан ўтувчи ва бурчак коэффициенти k бўлган тўғри чизиқни аниқлайди. k ни параметр ва (x_0, y_0) ни марказ деб қарасак, бу тенглама тўғри чизиқлар дастасини ифодалайди.

Энди дастанинг унга тегишли иккита кесишувчи тўғри чизиқ билан аниқланиши масаласини қарайлик.

Дастанинг M_0 нуқтада кесишувчи иккита (турли) u_1, u_2 тўғри чизиқлари берилган бўлсин:

$$u_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (40)$$

$$u_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0. \qquad (41)$$

Бир вақтда нолга тенг бўлмаган $\forall\ \alpha, \beta \in R$ сонларни олиб, (40) ва (41) тенгламалардан ушбу тенгламани тузайлик:

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0. \qquad (42)$$

Бу тенглама M_0 нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқни аниқлайди. Ҳақиқатан, (42) тенгламани қуйидагича ёзайлик:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y + \alpha C_1 + \beta C_2 = 0. \qquad (43)$$

Бу тенгликда x, y ўзгарувчилар олдидаги коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли, чунки

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0,\ \alpha B_1 + \beta B_2 = 0$$

бўлсин десак (масалан, $\alpha \neq 0$ бўлганда), уни

$$\frac{A_1}{A_2} = -\frac{\beta}{\alpha}, \quad \frac{B_1}{B_2} = -\frac{\beta}{\alpha}. \qquad (44)$$

кўринишда ёзиш мумкин. (44) дан $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow u_1 \parallel u_2$, бу зидликка олиб келади: шартга асосан $u_1 \cap u_2 = M_0$. Демак, (43) тенглама α, β нинг бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар бир қийматида тўғри чизиқни аниқлайди.

$$M_0 \in u_1,\ M_0 \in u_2 \Rightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \text{ ва } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \Rightarrow \alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0.$$

Бундан кўринадики, (43) тенглама билан аниқланган тўғри чизиқ M_0 нуқтадан ўтади.

Агар $M_1 \neq M_0$ нуқта берилса, α, β га тегишли қийматлар бериш йўли билан дастанинг шу нуқтадан ўтадиган тўғри чизиғини аниқлаш мумкинлигини кўрсатамиз.

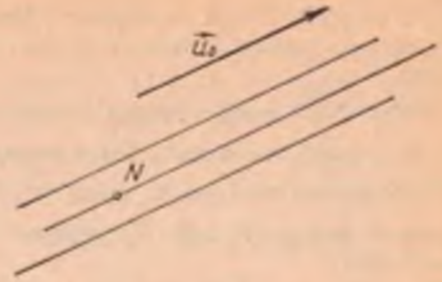
Дастага тегишли тўғри чизиқнинг M_1 нуқтадан ўтиш шарти:

$$\alpha(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1) + \beta(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2) = 0. \qquad (44')$$

$M_1 \neq M_0$ бўлгани учун $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1$, $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2$ ифодаларнинг камида бири нолдан фарқли, масалан, $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1 \neq 0$ бўлсин, у ҳолда (44′) дан

$$\alpha = -\frac{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2}{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1}\beta \qquad (45)$$

(45) ни қаноатлантирувчи α, β да дастанинг M_1 нуқтадан ўтувчи



64- чизма

тўғри чизиғи аниқланади. Шундай қилиб, (42) тенглама бир вақтда нолга тенг бўлмаган ҳар қандай α, β да дастани ифодалайди.

Мисол. Маркази координаталар бошида бўлган дастанинг $A(-1, 2)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиғини топинг.

Ечиш. $M_0(x_0, y_0)$ марказли дастанинг тенгламасини ушбу $y - y_0 = k(x - x_0)$ кўринишда ёзамиз, бу ерда даста $y - 0 = k(x - 0)$ ёки $y = kx$ тенглама билан ифодаланади. Дастанинг $A(-1, 2)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиғи учун $2 = k\cdot(-1)$, бундан $k = -2$. Демак, $y = kx$ дастанинг $A(-1, 2)$ нуқтадан ўтган тўғри чизиғига $y = -2x$ тенглама мос келади.

2. Параллел тўғри чизиқлар дастаси (64-чизма). Текисликдаги параллел тўғри чизиқлар дастаси даста тўғри чизиқларига параллел бўлган бирор $\vec{u}_0$ векторнинг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

Параллел тўғри чизиқлар дастасини ифодаловчи тенгламани қарайлик. Параллел тўғри чизиқлар дастаси $\vec{u}_0(-B_0, A_0)$ вектор билан аниқланган бўлсин. У холда $A_0x + B_0y + C = 0$ тенглама дастани ифодалайди. Бу ерда C ҳар қандай қийматларни қабул қила олади. Ҳақиқатан, C нинг ҳар бир қийматида бу тенглама билан аниқланган тўғри чизиқ $\vec{u}_0(-B_0, A_0)$ векторга параллел бўлгани сабабли дастага тегишли.

Мисол. Йўналиши $\vec{u}_0\ (1, -2)$ вектор билан аниқланган, параллел тўғри чизиқлар дастасига тегишли ва координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиқни топинг.

Ечиш. $\vec{u}_0(1, -2) \Rightarrow B_0 = -1,\ A_0 = -2;\ A_0x + B_0y + C = 0$ дан $2x + y - C = 0$ тенглама ҳосил қилинади. Энди бу дастанинг координаталар бошидан ўтувчи тўғри чизиғини топамиз: $2\cdot 0 + 0 - C = 0 \Rightarrow C = 0$. Изланаётган тўғри чизиқ: $2x + y = 0$.

29-§. Декарт реперида тўғри чизиқ ва у билан боғлиқ бўлган метрик масалалар

Ҳозирга қадар текисликда координаталарнинг аффин системасини қараб, бу системада тўғри чизиқнинг турли тенгламалари ва тўғри чизиқ билан боғлиқ айрим масалалар билан танишдик.

Энди декарт репери (декарт координаталарининг тўғри бурчакли системаси) олинган бўлсин. Бу системада тўғри чизиққа тааллуқли кўпгина метрик масалалар ҳал қилинади.

Таъриф. Кесма узунлиги ва бурчак катталигини ҳисоблаш билан боғлиқ бўлган масалалар *метрик масалалар* дейилади.

Таъриф. Тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторига перпендикуляр ҳар қандай вектор бу тўғри чизиқнинг *нормал вектори* дейилади.

(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) декарт реперини оламиз. Тўғри чизиқ $Ax+By+C=0$ умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. $\vec{u}(-B,\ A)$ унинг йўналтирувчи вектори, у ҳолда $\vec{n}(A, B)$ вектор u тўғри чизиқнинг нормал вектори бўлади. Ҳақиқитан, $\vec{u}$, $\vec{n}$ векторларнинг скаляр кўпайтмаси:

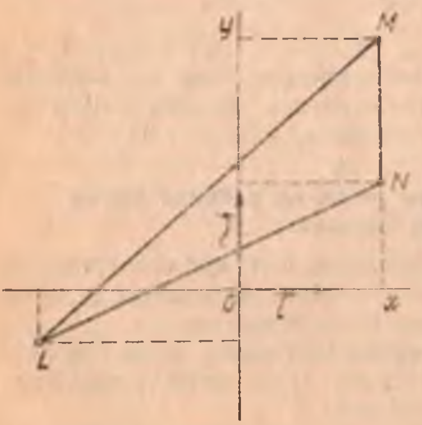
$$\vec{u}\cdot\vec{n}=-B\cdot A+A\cdot B=0\Rightarrow\vec{n}\perp\vec{u}.$$

Демак, тўғри чизиқнинг умумий тенгламасидаги A, B сонлар шу тартибда олинса, улар шу тенглама билан аниқланадиган тўғри чизиқ нормал векторининг координаталарини билдиради.

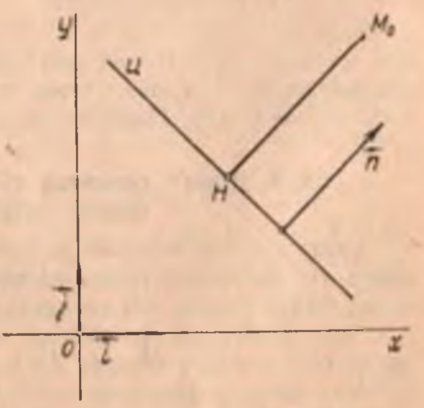
Мисол. Учларининг координаталари $L(-2{,}5;\ -0{,}5)$, $M(2;\ 2{,}5)$ ва $N(2;1)$ бўлган LMN учбурчакнинг L учидан MN томонига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланаётган тўғри чизиқнинг нормал вектори учун $\vec{n}=\overrightarrow{MN}$ векторни олиш мумкин, унинг координаталари $\vec{n}=\overrightarrow{MN}(0;-1{,}5)$. Нормал вектори $\vec{n}(0,\ -1{,}5)$ бўлган тўғри чизиқнинг тенгламаси $0\cdot x+(-1{,}5)y+C=0$, бу тўғри чизиқ L учдан ўтгани учун $0\cdot(-2{,}5)+(-1{,}5)\cdot(-0{,}5)+C=0$, бундан $C=-\frac{3}{4}$. Изланаётган тенглама $0\cdot x+(-1{,}5)y-\frac{3}{4}=0$ ёки $2y+1=0$ кўринишда бўлади (65- чизма).

Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофа. (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) декарт реперида



65- чизма



66- чизма

$$u: Ax + By + C = 0 \qquad (46)$$

тўғри чизиқ ва $M_0(x_0, y_0)$ нуқта берилган бўлсин. M_0 нуқтадан тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказамиз. Уларнинг кесишган нуқтасини H билан белгилаймиз (66-чизма). H нуқта бу перпендикулярнинг *асоси* дейилади. $\overrightarrow{HM_0}$ векторнинг узунлигини M_0 нуқтадан u тўғри чизиққача бўлган *масофа* дейилади ва $\rho(M_0, u)$ кўринишда белгиланади.

Агар $M_0 \in u$ бўлса, $M_0 = H$ бўлиб, $\rho(M_0, u) = 0$ бўлади. $M_0 \notin u$ бўлсин, у ҳолда $\rho(M_0, u) = |\overrightarrow{HM_0}|$. $\vec{n}(A, B)$ вектор u тўғри чизиқнинг нормал вектори бўлгани учун $\overrightarrow{HM_0}$ ва $\vec{n}$ векторлар коллинеар бўлади, у ҳолда бу векторларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = |\overrightarrow{HM_0}|\,|\vec{n}| \cos(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}}) = \pm\rho(M_0, u)\,|\vec{n}|$$

($\overrightarrow{HM_0} \uparrow\uparrow \vec{n}$ бўлса, $(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}}) = 0^\circ$ бўлиб $\cos(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}}) = +1$ бўлади. $\overrightarrow{HM_0} \uparrow\downarrow \vec{n}$ бўлса, $(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}}) = 180^\circ$ бўлиб, $\cos(\widehat{\overrightarrow{HM_0}, \vec{n}}) = -1$ бўлади), бу ердан

$$\rho(M_0, u) = \frac{|\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}.$$

H нуқтанинг координаталари x_1, y_1 бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{HM_0}(x_0 - x_1, y_0 - y_1)$ бўлиб, $H \in u$ эканини ҳисобга олсак, скаляр кўпайтма

$$\overrightarrow{HM_0} \cdot \vec{n} = A(x_0 - x_1) + B(y_0 - y_1) = Ax_0 + By_0 - $$
$$- (Ax_1 + By_1) = Ax_0 + By_0 + C$$

бўлади.

Шу билан бирга $|\vec{n}| = \sqrt{A^2 + B^2}$ эканини назарда тутсак,

$$\rho(M_0, u) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \qquad (47)$$

(47) берилган M_0 нуқтадан берилган u тўғри чизиққача бўлган масофани ҳисоблаш формуласидир.

Мисол. Учбурчакнинг бир учи (5, —3) дан, асоси (0, —1) ва (3, 3) нуқталарни туташтирувчи кесмадан иборат. Унинг баландлигини топинг.

Ечиш. Учбурчакнинг асоси (0, —1) ва (3, 3) нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқ бўлгани учун унинг тенгламаси

$$\frac{x - 0}{3 - 0} = \frac{y + 1}{3 + 1} \text{ ёки } 4x - 3y - 3 = 0.$$

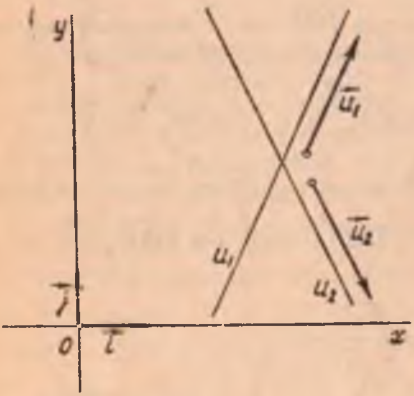
Учбурчакнинг h баландлиги эса (5, —3) нуқтадан бу тўғри чизиққача бўлган масофадир. У ҳолда (47) формула бўйича:

$$h = \frac{|4\cdot 5 - 3\cdot(-3) - 3|}{\sqrt{16+9}} = \frac{26}{5}.$$

30-§. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак

Таъриф. *Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак* деб бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтилади.

Берилган u_1, u_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни $\widehat{(u_1, u_2)}$ кўринишда белгилаймиз. Декарт реперида u_1, u_2 тўғри чизиқлар



67- чизма

$$u_1: A_1x + B_1y + C_1 = 0,$$
$$u_2: A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

умумий тенгламалари билан аниқланган бўлсин (67- чизма). $\vec{u}_1(-B_1, A_1)$ вектор u_1 тўғри чизиқнинг, $\vec{u}_2(-B_2, A_2)$ вектор u_2 тўғри чизиқнинг йўналтирувчи векторидир, у ҳолда таърифга кўра u_1, u_2 тўғри чизиқлар орасидаги бурчак ушбу формуладан аниқланади:

$$\cos\widehat{(u_1, u_2)} = \cos\widehat{(\vec{u}_1, \vec{u}_2)} = \frac{\vec{u}_1\cdot\vec{u}_2}{|\vec{u}_1|\cdot|\vec{u}_2|} =$$

$$= \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}}.$$

Хусусий ҳолда

$$u_1 \perp u_2 \Leftrightarrow \vec{u}_1 \perp \vec{u}_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0. \qquad (48)$$

(48) тенглик икки *тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартидир.*

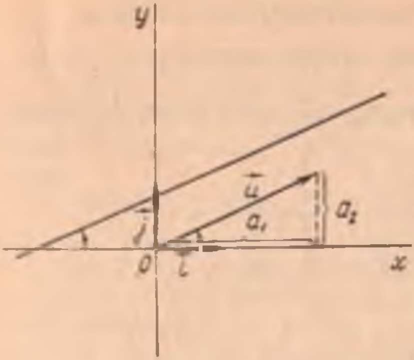
Декарт реперида Oy ўққа параллел бўлмаган u_1, u_2 тўғри чизиқлар бурчак коэффициентли тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$u_1: y = k_1x + b_1, \quad u_2: y = k_2x + b_2.$$

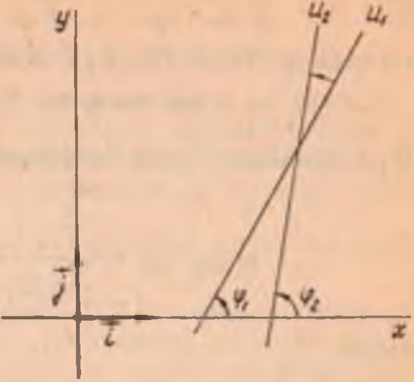
Бу тўғри чизиқлар орасидаги бурчакни ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарамиз. Тўғри чизиқ декарт реперида қаралганда унинг $\vec{u}(a_1, a_2)$ йўналтирувчи векторининг бурчак коэффициенти

$$k = \frac{a_2}{a_1} = \operatorname{tg}\widehat{(\vec{u}, \vec{i})}$$

бўлади (68- чизма). $\widehat{(\vec{u}, \vec{i})}$ бурчак тўғри чизиқнинг Ox ўққа *оғиш*



68- чизма



69- чизма

бурчаги дейилади. u_1, u_2 тўғри чизиқларнинг Ox ўққа оғиш бурчаклари мос равишда φ_1, φ_2 бўлсин (69- чизма), у ҳолда

$$k_1 = \operatorname{tg}\varphi_1,\ k_2 = \operatorname{tg}\varphi_2 \text{ ва } (\widehat{u_1, u_2}) = \varphi_2 - \varphi_1$$

бўлади. Икки бурчак айирмасининг тангенси формуласига кўра

$$\operatorname{tg}(\widehat{u_1, u_2}) = \operatorname{tg}(\varphi_2 - \varphi_1) = \frac{\operatorname{tg}\varphi_2 - \operatorname{tg}\varphi_1}{1+\operatorname{tg}\varphi_1 \operatorname{tg}\varphi_2}.$$

$\operatorname{tg}\varphi_1$, $\operatorname{tg}\varphi_2$ ни k_1, k_2 билан алмаштириб, ушбу формулага эга бўламиз:

$$\operatorname{tg}(\widehat{u_1, u_2}) = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}. \tag{48'}$$

(48′) икки тўғри чизиқ бурчак коэффициентли тенгламалари билан берилганда улар орасидаги бурчакни ҳисоблаш фурмуласидир.

u_1, u_2 тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлган ҳолда $\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{\pi}{2}$ дейиш мумкин $\Leftrightarrow \operatorname{tg}\varphi_2 = -\operatorname{ctg}\varphi_1$ ёки

$$k_2 = -\frac{1}{k_1},\quad k_1 k_2 = -1. \tag{49}$$

(49) тенглик u_1, u_2 тўғри чизиқларнинг перпендикулярлик шартидир. u_1, u_2 тўғри чизиқлар параллел бўлган ҳолда $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ ёк- $k_2 = k_1 = 0$, бундан

$$k_1 = k_2. \tag{50}$$

(50) тенглик u_1, u_2 тўғри чизиқларнинг параллеллик шартидир.

Эслатма. Икки тўғри чизиқнинг кесишишидан тўртта бурчак ҳосил бўлади. Бу бурчакларнинг ҳар бирини берилган икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак сифатида олиш мумкин. Бу тўртта бури чакнинг бирини топсак, қолган учта бурчак ҳам аниқланади.

Мисол. u_1, u_2 тўғри чизиқлар

$$u_1 : x + 7y - 5 = 0 \text{ ва } u_2 : 3x - 4y + 20 = 0$$

тенгламалари билан берилган. Улар орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. u_1 тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k_1 = -\frac{1}{7}$. u_2 тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти $k_2 = \frac{3}{4}$. (48′) формула бўйича

$$\operatorname{tg}(\widehat{u_1, u_2}) = \frac{\frac{3}{4} - \left(-\frac{1}{7}\right)}{1 + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{7}\right)} = \frac{\frac{3}{4} + \frac{1}{7}}{1 - \frac{3}{28}} = 1.$$

Демак,

$$(\widehat{u_1, u_2}) = 45^\circ.$$

Тўғри чизиқлар умумий тенгламалари билан берилган ҳолда

$$k_1 = -\frac{A_1}{B_1}, \quad k_2 = -\frac{A_2}{B_2}.$$

Энди (48′) дан

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}}{A_1A_2 + B_1B_2}.$$

Бундан

$$u_1 \perp u_2 \Rightarrow A_1B_2 - A_2B_1 = 0 \Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}.$$

III БОБ. ТЕКИСЛИКДАГИ АЛМАШТИРИШЛАР

31-§. Тўпламларни акслантириш ва алмаштириш

Бўш бўлмаган икки X, Y тўплам берилган бўлсин.

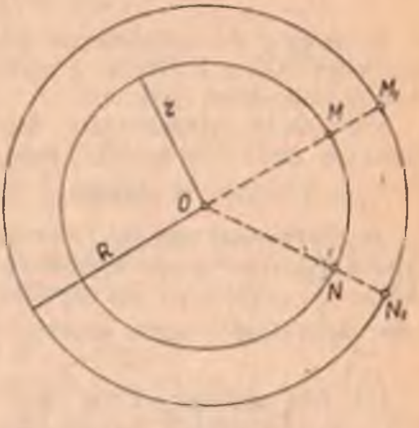
1-таъриф. Агар X тўпламнинг ҳар бир x элементига бирор f қоида билан Y тўпламнинг аниқ y элементи мос қўйилган бўлса, у ҳолда X тўпламнинг Y тўпламга *акслантирилиши* берилган дейилади.

f қоида X тўпламни Y тўпламга акслантиради деган жумлани $f: X \to Y$ ёки $X \xrightarrow{f} Y$ кўринишда ёзамиз.

Агар $x \in X$ элемент f акслантиришда $y \in Y$ элементга мос келса, уни $y = f(x)$ каби ёзилади, y ни x элементнинг f акслантиришдаги *образи* (*акси*), x ни эса y элементнинг *прообрази* (*асли*) дейилади. X тўплам барча элементларининг образлари тўплами $\{f(x) \mid x \in X\}$ ни $f(X)$ кўринишда белгиланади ва f акслантиришдаги X тўпламнинг *образи* дейилади.

Мисол. Умумий O марказли иккита концентрик айланани қараймиз. r радиусли айлананинг нуқталари тўплами X, R радиусли айлананинг нуқталари тўплами Y бўлсин.

X тўпламнинг ҳар бир M нуқтасига Y тўпламнинг OM нурда ётган M_1 нуқтасини мос келтирайлик. Натижада биринчи айлананинг иккинчи айланага акслантирилиши ҳосил бўлади: $M_1 = f(M)$, $N_1 = f(N)$ ва хоказо (70- чизма).



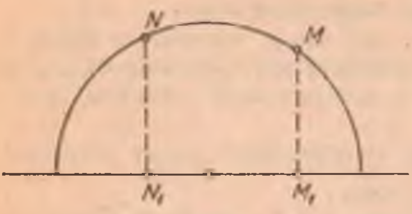
70- чизма

Бу ерда f қоида O нуқтадан чиқарилган нурнинг биринчи айлана билан кесишган нуқтасини унинг иккинчи айлана билан кесишиш нуқтасига мос келтиришдан иборат.

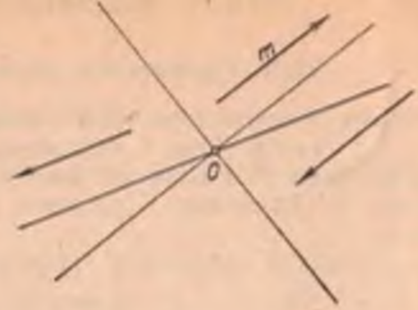
$f: X \to Y$ акслантиришнинг муҳим хусусий ҳоллари билан танишамиз.

I. Агар X тўпламнинг ҳар қандай икки x_1, x_2 элементи учун $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлса, у ҳолда $f: X \to Y$ акслантириш *инъектив акслантириш* дейилади. Бошқача айтганда, f акслантириш инъектив бўлса, Y тўпламнинг ҳар бир элементи биттадан ортиқ бўлмаган прообразга эгадир.

Мисол. X — ярим айлананинг барча нуқталари тўплами, Y эса бу ярим айлана диаметри орқали ўтган тўғри чизиқнинг барча нуқталари тўплами бўлсин (71- чизма). Ярим айлананинг ҳар бир нуқтасига бу нуқтанинг l тўғри чизиқдаги ортогонал проекциясини мос келтирамиз. Бу ерда f қоида ярим айлананинг ҳар бир нуқтасининг



71-чизма



72-чизма

l тўғри чизиқдаги ортогонал проекциясини топишдир. Натижада X тўпламнинг Y тўпламга акслантирилиши ҳосил қилинади. Бу акслантиришда $M_1 = f(M)$, $N_1 = f(N)$ ва ҳоказо бўлиб,

$$M \neq N \Rightarrow f(M) \neq f(N).$$

II. Агар f акслантиришдаги образлар тўплами Y тўпламдан иборат, яъни $f(X) = Y$ бўлса, у ҳолда $f: X \to Y$ акслантириш *сюръектив акслантириш* дейилади.

Мисол. X текисликдаги барча векторлар тўплами, Y эса O марказли даста бўлсин (72-чизма).

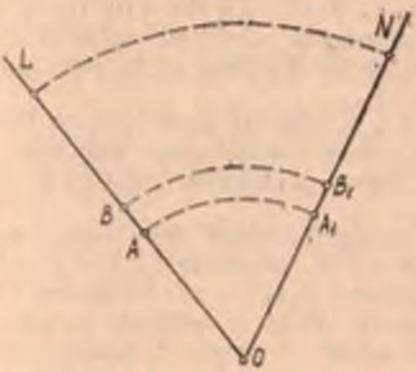
$X_1 = X \setminus \{O\}$ тўпламнинг ҳар бир $\vec{m}$ векторига Y тўпламнинг $l \parallel \vec{m}$ тўғри чизиғини мос келтирамиз. Бу билан X_1 тўпламни Y тўпламга $f: X_1 \to Y$ акслантирилиши ҳосил бўлиб, бу акслантиришда $f(X_1) = Y$. Демак, f акслантириш сюръектив, лекин у инъектив эмас, чунки ҳар қандай $\vec{m} \neq \vec{n}$, $\vec{m} = \lambda \vec{n}$ векторлар учун $f(\vec{m}) = f(\vec{n})$.

III. Бир вақтнинг ўзида ҳам инъектив, ҳам сюръектив бўлган $f: X \to Y$ акслантириш *биектив* ёки *ўзаро бир қийматли акслантириш* дейилади. Акслантириш биектив бўлганда Y тўпламнинг ҳар бир элементи битта прообразга эга. Биектив акслантиришга мисоллар келтирамиз:

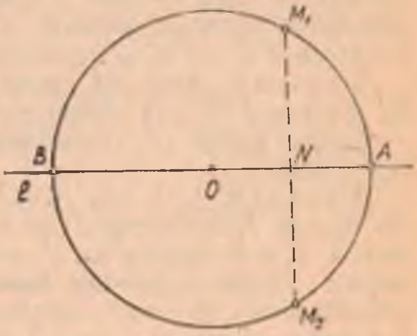
1-мисол. Текисликда координаталарнинг аффин системасини киритиш билан текисликнинг барча нуқталари тўпламини барча тартибланган ҳақиқий сонлар жуфтлари (x, y) тўпламига ва аксинча тартибланган барча ҳақиқий сонлар жуфтлари тўпламини текисликнинг барча нуқталари тўпламига акслантирилади. Бунда f қоида координаталарнинг аффин системасини киритиш қоидасидир.

X — текисликдаги барча нуқталар тўплами, Y — маълум тартибда олинган барча ҳақиқий сонлар жуфтлари тўплами (ёки аксинча) бўлсин десак, бу акслантиришда ҳар бир $M \in X$ нуқтага бир жуфт $(x, y) \in Y$ сон ва аксинча сонларнинг ҳар бир $(x, y) \in Y$ жуфтига битта $M \in X$ нуқта мос келади.

2-мисол. Бирор $\angle LON$ берилган бўлсин. Унинг OL ва ON томонларининг нуқталари орасида қуйидаги мосликни ўрнатайлик: OL томонидаги ҳар бир M нуқтага O марказли ва OM радиусли ёйнинг ON томони билан кесишган M_1 нуқтаси мос келсин (73-чизма), 73-чизмадан кўринадики, $A \to A_1$, $B \to B_1$ ва ҳоказо. Бунда бурчакнинг O учи ўзи-ўзига мос деб ҳисоблаймиз. Бу билан OL нурнинг ON нурга ўзаро бир қийматли акслантирилиши ҳосил қилинади.



73-чизма



74-чизма

Инъектив ҳам, сюръектив ҳам бўлмаган акслантиришга ушбу мисолни келтириш мумкин.

Мисол. X тўплам O марказли айлананинг барча нуқталари тўплами, Y эса O нуқтадан ўтувчи l тўғри чизиқнинг барча нуқталари тўплами бўлсин. X тўпламнинг ҳар бир M нуқтасига унинг l тўғри чизиқдаги ортогонал проекциясини мос қўйсак, бу билан $f: X \to Y$ акслантириш ҳосил бўлади (74-чизма).

Бу ерда f қоида айлананинг ҳар бир нуқтасининг l тўғри чизиқдаги ортогонал проекциясини топишдир. f акслантириш инъектив эмас, чунки M_1, M_2 $(M_1 \neq M_2)$ нуқталар учун $f(M_1) = f(M_2) = N$. Шу билан бирга f акслантириш сюръектив ҳам эмас, чунки

$$f(X) \neq Y, \quad f(X) = AB \subset l.$$

2-таъриф. X тўпламни Y тўпламга бирор $f: X \to Y$ биектив акслантириш берилган ва ҳар қандай $x \in X$ элемент учун $y = f(x)$ бўлсин. У ҳолда $f^{-1}(y) = x$ қонуният билан бажарилган $f^{-1}: Y \to X$ акслантириш f учун *тескари акслантириш* дейилади. X тўпламни Y тўпламга f акслантириш биектив бўлганда унга тескари f^{-1} акслантириш мавжуд ва айни вақтда биектив ҳам бўлади. Ҳақиқатан, $f: X \to Y$ биектив акслантириш бўлганда у бир вақтда ҳам инъектив, ҳам сюръектив бўлади. f — инъектив, яъни $x_1 \neq x_2$ учун $f(x_1) \neq f(x_2)$ бўлганидан $f^{-1}(y_1) \neq f^{-1}(y_2)$, бу ерда $y_1 = f(x_1)$, $y_2 = f(x_2)$. f — сюръектив, яъни $f(X) = Y$ бўлганидан ҳар қандай $y \in Y$ учун $f^{-1}(y)$ прообразлар тўплами бўш эмас. Демак, f акслантиришга тескари f^{-1} акслантириш мавжуд ва у биективдир.

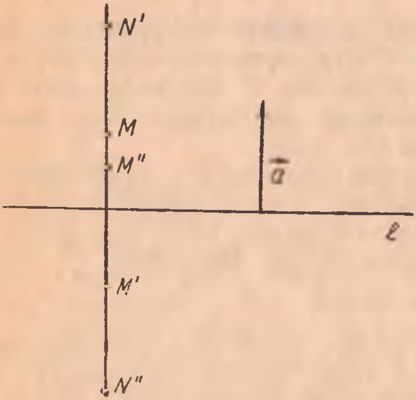
3-таъриф. $X \neq \varnothing$ тўпламни ўз-ўзига ҳар қандай $f: X \to X$ биектив акслантириш *X тўпламда алмаштириш* дейилади. f акслантириш X тўпламнинг бирор алмаштириши бўлса, унга тескари f^{-1} акслантириш, яъни ҳар бир $x' \in X$ элементни унинг асли $x \in X$ га ўтказадиган акслантириш ҳам X тўпламда алмаштириш бўлади. Уни f алмаштиришга *тескари алмаштириш* дейилади.

Агар бирор $x \in X$ элемент учун (мос ҳолда X тўпламнинг Ф қисм тўплами учун) f алмаштиришда $f(x) = x$ ($f(\Phi) = \Phi$) бўлса, x элемент (Ф қисм тўплам) f алмаштиришда *қўзғалмас элемент* ёки *инвариант элемент* дейилади. Юқоридаги биектив акслантиришнинг 2-мисолида O нуқта қўзғалмасдир.

4-таъриф. Агар ҳар қандай $x \in X$ элемент учун $f(x) = x$ бўлса, у ҳолда $f: X \to X$ алмаштириш *айнан алмаштириш* дейилади.

Бундан кейин X тўпламнинг айнан алмаштиришлари E_0 билан белгиланади.

5-таъриф. f_1, f_2 лар X тўпламнинг ихтиёрий икки алмаштириши бўлсин, f_1 алмаштириш ҳар бир $x \in X$ элементни $f_1(x) = x'$ элементга, f_2 алмаштириш эса x' элементни $f_2(x') = x''$ элементга ўтказсин. Уларни кетма-кет бажарилса, яъни x элемент устида f_1 алмаштиришни ва ҳосил қилинган образ x' устида f_2 алмаштириш бажарилса, натижада x ни x'' элементга ўтказувчи f_3 алмаштириш ҳосил бўлади. f_3 алмаштириш *f_1, f_2 алмаштиришнинг кўпайтмаси* (ёки *композицияси*) дейилади ва $f_3 = f_2 f_1$ кўринишда ёзилади (бунда аввал f_1 сўнгра f_2 бажарилади).



75-чизма

Шундай қилиб, f_1, f_2 алмаштиришларнинг кўпайтмаси барча $x \in X$ учун $f_3(x) = (f_2(f_1(x))$ тенглик ўринли бўладиган $f_3: X \to X$ алмаштиришдан иборат. Умуман $f_2 f_1$ ва $f_1 f_2$ турли алмаштиришлардир, яъни $f_2 f_1 \neq f_1 f_2$.

Мисол. Фараз қилайлик, f_1 текисликни l тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш, f_2 эса шу текисликни l тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш бўлсин[1].

M — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. Аввал $f_2 f_1$ алмаштиришни бажарамиз. Текисликни l тўғри чизиққа нисбатан f_1 симметрик алмаштириш M нуқтани M' нуқтага ўтказади. Текисликни $\vec{a}$ вектор қадар f_2 парал-

---

[1] Параллел кўчириш ва симметрик алмаштириш ҳақидаги маълумот ўқувчига ўрта мактаб геометрия курсидан маълум бўлиб, бу тушунчалар 35-§ да муфассал қаралади.

лел кўчириш M' нуқтани M'' нуқтага ўтказади (75-чизма). Бу алмаштиришларнинг кўпайтмаси f_2f_1 алмаштириш M нуқтани M'' нуқтага ўтказади.

Энди f_1f_2 алмаштиришни бажарамиз. Текисликни $\vec{a}$ вектор қадар f_2 параллел кўчириш M нуқтани N' нуқтага ўтказади. l тўғри чизиққа нисбатан f_1 симметрик алмаштириш эса N' нуқтани N'' нуқтага ўтказади, уларнинг кўпайтмаси, яъни текисликни f_1f_2 алмаштириш M нуқтани N'' нуқтага ўтказади. $M'' \neq N''$. Демак, бу мисолда $f_2f_1 \neq f_1f_2$.

Теорема. *Алмаштиришларни кўпайтириш ассоциативлик қонунига бўйсунади, яъни X тўпламнинг ихтиёрий учта f_1, f_2, f_3 алмаштириши учун ҳар вақт* $f_3(f_2f_1) = (f_3f_2)f_1$.

Исбот. X тўпламнинг ихтиёрий элементи x бўлсин. f алмаштиришдаги x нинг образи y, f_2 алмаштиришдаги y нинг образи z, f_3 алмаштиришдаги z нинг образи t бўлсин. У ҳолда алмаштиришларни кўпайтириш таърифига кўра f_2f_1 алмаштириш x элементни z элементга ўтказади, f_3f_2 алмаштириш y элементни t элементга ўтказади. Шунга кўра

$$(f_3(f_2f_1))(x) = f_3(z) = t, \quad ((f_3f_2)f_1)(x) = (f_3f_2)(y) = t,$$

бундан эса

$$f_3(f_2f_1) = (f_3f_2)f_1. \quad \blacktriangle$$

f ихтиёрий алмаштириш бўлсин. Унга тескари f^{-1} алмаштириш ва E_0 айнан алмаштириш учун

$$fE_0 = E_0f = f \text{ ва } ff^{-1} = f^{-1}f = E_0$$

тенгликлар ўринли бўлади (буни текширишни ўқувчига ҳавола қиламиз).

32-§. Алмаштиришлар группаси. Алмаштиришлар группасининг қисм группалари

X тўпламдаги f_1, f_2, f_3 ... алмаштиришлар тўпламини Γ билан белгилайлик.

1-таъриф. Агар Γ тўпламдан олинган ихтиёрий икки f_1 ва f_2 алмаштиришнинг f_2f_1 кўпайтмаси тўпламга тегишли бўлса ва ундаги ҳар бир f алмаштиришга тескари f^{-1} алмаштириш ҳам Γ тўпламга тегишли бўлса, Γ тўплам *группа* дейилади.

Γ нинг ҳар қандай икки f_1, f_2 алмаштириши учун $f_2f_1 = f_1f_2$ бўлса, Γ группа *коммутатив группа* ёки *Абель группаси* дейилади.

1-мисол. Фараз қилайлик, бирор текисликдаги барча параллел кўчиришлар тўплами P бўлсин, f_1, $f_2 \in P$ алмаштиришларни олайлик. f_1 алмаштириш $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш, f_2 алмаштириш эса $\vec{b}$ вектор қадар параллел кўчириш бўлсин. Текисликнинг ихтиёрий M нуқтасини f_1 алмаштириш шундай M' нуқтага ўтказадики, бунда $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ бўлади, f_2 алмаштириш эса M' нуқтани шундай M'' нуқтага ўтказадики, $\overrightarrow{M'M''} = \vec{b}$ бўлади. f_1, f_2 алмаштиришларнинг f_2f_1 кўпайтмаси M нуқтани M'' нуқтага ўтказади.

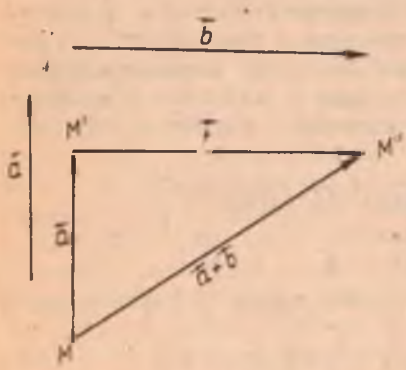
Векторларни қўшиш қоидасига кўра

$$\overrightarrow{M\,M''} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'M''} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{c},$$

яъни

$$\overrightarrow{MM''} = \vec{c} \quad (76\text{- чизма}).$$

Бинобарин, f_1, f_2 параллел кўчиришларнинг кўпайтмаси $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ вектор қадар параллел кўчиришдир.



76- чизма

77- чизма

Энди f_1 параллел кўчиришга тескари алмаштиришни бажарайлик. f_1 алмаштириш $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш бўлгани учун унга тескари алмаштириш $-\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчиришдир (77- чизма).

Шундай қилиб,

$$f_1,\ f_2 \in P \Rightarrow f_2f_1 \in P \text{ ва } f_1 \in P \Rightarrow f^{-1} \in P.$$

Демак, P группа экан. Шу билан бирга P коммутатив группадир, чунки $f_2 f_1$ алмаштириш $\vec{a} + \vec{b}$ вектор қадар параллел кўчиришдир, $f_1 f_2$ эса $\vec{b} + \vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ бўлганидан

$$f_2 f_1 = f_1 f_2.$$

Энди Г бирор алмаштиришлар группаси, Г′ эса Г тўпламнинг қисм тўплами бўлсин.

2- **таъриф**. Агар 1) Г′ нинг ихтиёрий икки алмаштиришининг кўпайтмаси Г′ га тегишли, 2) Г′ нинг ҳар бир алмаштиришига тескари алмаштириш яна Г′ га тегишли бўлса, Г′ ни Г группанинг *қисм группаси* дейилади. Бошқача айтганда, Г группанинг Г′ қисм тупламн Г нинг қисм группаси бўлиши учун унинг ўзи группани ташкил этиши керак.

2-мисол. Текисликдаги барча векторлар қадар параллел кўчиришлар тупламини P билан белгилайлик. (P нинг коммутатив группа ташкил этиши бизга маълум.) Бу текисликда бирор l тўғри чизиққа параллел векторлар қадар барча параллел кўчиришлар тупламиэса P' бўлсин. Равшанки, $P' \subset P$, шу билан бирга P' группа ташкил қилади. (P' нинг группа ташкил қилиши худди P нинг группа ташкил қилиши сингари кўрсатилади.)

Демак, P' группа P группанинг қисм группасидир.

33-§. Текисликдаги ҳаракатлар ва уларнинг хоссалари

Текисликдаги турли алмаштиришлар билан танишамиз.

Таъриф. Текисликнинг ҳар қандай икки нуқтаси орасидаги масофани ўзгартирмайдиган алмаштириш *ҳаракат* ёки *силжитиш* дейилади.

Ҳаракатни F орқали белгилаймиз. F текисликдаги ҳаракат бўлса, таърифга кўра текисликнинг ҳар қандай M, N нуқталари учун

$$\rho(M, N) = \rho(F(M), F(N)).$$

Текисликдаги ҳаракат ушбу хоссаларга эга.

1°. Ҳаракатда бир тўғри чизиқда ётган уч нуқта яна бир тўғри чизиқда ётган уч нуқтага, бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқта яна бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқтага ўтади.

Исбот. A, B, C бир тўғри чизиқнинг уч нуқтаси, шу билан бирга B нуқта A ва C нуқталар орасида ётсин. У ҳолда I боб, 1-§ даги таърифга кўра

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C).$$

Текисликдаги F ҳаракатда A', B', C' нуқталар мос равишда A, B, C нуқталарнинг образлари бўлсин, десак, ҳаракатда ҳар қандай икки нуқта орасидаги масофа ўзгармагани учун:

$$\rho(A', B') = \rho(A, B), \ \rho(B', C') = \rho(B, C), \ \rho(A', C') = \rho(A, C);$$

шунга кўра
$\rho(A', B') + \rho(B', C') = \rho(A', C') \Rightarrow B'$ нуқта A' ва C' нуқталар орасида ётади. Демак, A', B', C' нуқталар битта тўғри чизиққа тегишли.

Энди A, B, C нуқталар битта тўғри чизиқда ётмасин $\Rightarrow \rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, C)$. У ҳолда уларнинг A', B', C' образлари ҳам битта тўғри чизиқда ётмайди. Аксинча, агар A', B', C' нуқталар битта тўғри чизиқда ётади ва B' нуқта A', C' нуқталар орасида ётсин десак, $\rho(A', B') + \rho(B', C') = \rho(A', C')$ тенглик ўринли бўлади. Ҳаракатда ҳар қандай икки нуқта орасидаги масофа сақлангани учун $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$, бу эса A, B, C нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётмаслигига зид. ▲

2°. Ҳаракатда тўғри чизиқдаги ҳар қандай уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади.

Исбот. A, B, C бир тўғри чизиқнинг уч нуқтаси бўлсин. Бу уч нуқтанинг оддий нисбати:

$$\lambda = (AC,\ B) = \frac{\overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{BC}} \text{ (II боб, 15-§).}$$

B нуқта A, C нуқталар орасида ётганда бу нисбат $\frac{\rho(\overrightarrow{AB})}{\rho(\overrightarrow{BC})}$ сонга ва B нуқталар AC кесмага тегишли бўлмаган ҳолда $-\frac{\rho(A,B)}{\rho(B,C)}$ сонга тенг.

F ҳаракат бўлгани учун $\rho(A,\ B) = \rho(F(A),\ F(B))$ ва $\rho(B,\ C) = \rho(F(B),\ F(C))$, бундан $(AC,\ B) = (F(A)F(C),\ F(B))$.

3°. Ҳаракатда нурнинг образи нурдан иборат.

Исбот. Учи O нуқта бўлган $l = OA$ нурни оламиз. F ҳаракатда $.O' = F(0)$, $A' = F(A)$ бўлсин. $F(l) = O'A'$ нур эканини кўрсатамиз $B \in l$, $B \neq A$ нуқтани оламиз, у ҳолда ё A нуқта O, B нуқталар орасида, ёки B нуқта O ва A нуқталар орасида ётади. 1°- хоссага кўра A' нуқта O' ва $F(B)$ нуқталар орасида ёки $F(B)$ нуқта O' ва A' нуқталар орасида ётади.

Бундан $F(B)$ нинг $O'A'$ кесмага тегишли экани келиб чиқади. Аксинча, $O'A'$ нурга тегишли C' $(C' \neq A')$ нуқтани оламиз. l нурда $OC = O'C'$ тенгликни қаноатлантирувчи C нуқтани ясаймиз. 1°- хоссага кўра $F(C)$ нуқта $O'A'$ нурга тегишли ва F ҳаракат бўлгани учун

$$O'F(C) = OC = O'C' \Rightarrow C' = F(C).$$

Шундай қилиб, $B \in l \Rightarrow F(B) \in O'A'$ нурга ва $C' \in O'A'$ нурга $\Rightarrow C' = F(C)$, $C \in l$.

Демак, $F(l) = O'A'$ нур. ▲

4°. Ҳаракатда тўғри чизиқнинг образи яна тўғри чизиқдир.

Исбот. Бирор a тўғри чизиқда A, B нуқталарни белгилаймиз. a тўғри чизиқ AB ва BA нурларнинг бирлашмаси бўлсин. 3°- хоссага асосан F ҳаракат AB нурни $A'B'$ нурга ва BA нурни $B'A'$ нурга ўтказади десак, бу ҳолда $F(a) = A'B' \cup B'A' = a'$ тўғри чизиқ ҳосил қилинади. ▲

5°. Ҳаракатда параллел тўғри чизиқларнинг образлари ҳам параллел тўғри чизиқлардан иборат.

Исбот. Текисликдаги икки l_1, l_2 тўғри чизиқ учун $l_1 \cap l_2 = \varnothing$ бўлсин. F ҳаракат биектив акслантириш бўлгани учун

$$F(l_1) \cap F(l_2) = \varnothing \Rightarrow F(l_1) \parallel F(l_2). \ ▲$$

6°. Ҳаракатда бурчакнинг образи бурчак бўлади ва унинг катталиги сақланади.

Исбот. Ихтиёрий $\angle LON$ берилган бўлсин. OL ва ON нурлар унинг томонлари. F ҳаракатда $O' = F(O)$, $N' = F(N)$, $L' = F(L)$ бўлсин. 3°- хоссага кўра ON ва OL нурларнинг образлари мос равишда $O'N'$ ва $O'L'$ нурлар бўлиб, бундан $\angle L'O'N' = F(\angle LON)$.

OL ва ON нурларда мос равишда A, B нуқталарни оламиз. $A' = F(A)$, $B' = F(B)$ бўлсин, у ҳолда уч томони бўйича $\triangle OAB \equiv \triangle O'A'B'$ бўлиб $\Rightarrow \angle AOB \equiv \angle A'O'B'$, демак, $(\widehat{LON}) = (\widehat{L'O'N'})$. ▲

Бу хоссадан ҳар қандай F ҳаракатда ушбу ҳолларнинг бажарилишли келиб чиқади:

а) $l_1 \perp l_2 \Rightarrow F(l_1) \perp F(l_2)$;

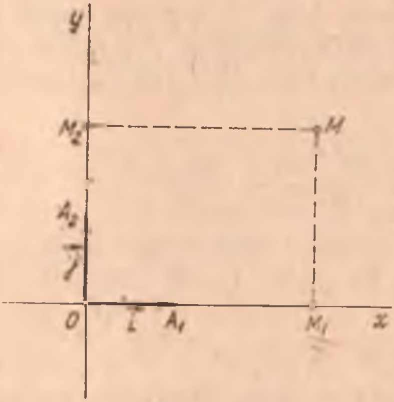
б) M_1 нуқта M нуқтанинг l тўғри чизиқдаги ортогонал проекцияси бўлса, $F(M_1)$ нуқта $F(M)$ нуқтанинг $F(l)$ тўғри чизиқдаги ортогонал проекцияси бўлади.

Таъриф. Агар икки фигурадан бирини иккинчисига ўтказадиган ҳаракат мавжуд бўлса, бу фигуралар *конгруэнт* дейилади.

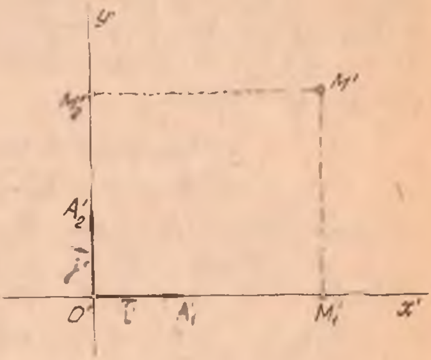
Ҳаракат таърифи ва унинг хоссаларига кўра конгруэнт фигуралар текисликда тутган ўринлари билангина бир-биридан фарқ қилади, холос.

1-теорема. *Текисликдаги ҳар қандай F харакат декарт репери $\mathscr{B}$ ни яна декарт репери $\mathscr{B}'$ га ўтказади ва $M' = F(M)$ нуқтанинг $\mathscr{B}'$ репердаги координаталари M нуқтанинг $\mathscr{B}$ репердаги мос координаталари билан бир хил бўлади.*

Исбот. $\mathscr{B} = (O, A_1, A_2)$ текисликдаги бирор декарт репери (78-чизма), F эса текисликдаги ҳаракат ва $O' = F(O)$, $A'_1 = F(A_1)$, $A'_2 = F(A_2)$ бўлсин. 1°-хоссага кўра, O', A_1', A_2', нуқталар битта тўғри чизиқда ётмайди. 6°-хоссага кўра $(\widehat{A_2'O'A_1'}) = 90°$. Демак, $\mathscr{B}$ репернинг F ҳаракатдаги образи $\mathscr{B}'(O', A_1', A_2')$ декарт реперидир (79-чизма).



78-чизма



79-чизма

Текисликнинг ихтиёрий M нуқтасини оламиз. x, y бу нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари бўлсин, яъни

$$x = \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = -\frac{\overrightarrow{M_1O}}{\overrightarrow{OA_1}} = -(M_1A_1, O), \quad y = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OA_2}} = -\frac{\overrightarrow{M_2O}}{OA_2} = -(M_2A_2, O).$$

F ҳаракатда

$$M' = F(M),\ M_1' = F(M_1),\ M'_2 = F(M_2)$$

бўлсин; 2°- хоссага кўра $(M_1A_1,\ O) = (M_1'A_1',\ O')$, ва $(M_2A_2,\ O) = (M_2A_2'O')$, лекин

$$-(M_1'A_1',\ O') = \frac{\overrightarrow{O'M_1'}}{\overrightarrow{O'A_1'}} = x',\quad -(M'A',O') = \frac{\overrightarrow{O'M_2'}}{\overrightarrow{O'A_2'}} = y',$$

булардан:

$$x = x',\ y = y'.\ \blacktriangle$$

Энди тескари теоремага ўтайлик.

2- теорема. *Текисликни бирор f алмаштиришда $M' = f(M)$ нуқтанинг $\mathscr{B}'$ декарт реперига нисбатан координаталари M нуқтанинг $\mathscr{B}$ декарт реперига нисбатан координаталари билан бир хил бўлса, f алмаштириш ҳаракатдан иборат бўлади ва $\mathscr{B}' = f(\mathscr{B})$.*

Исбот. Текисликда $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ декарт реперларини оламиз. Текисликдаги шундай f алмаштиришни қараймизки, M нуқта $\mathscr{B}$ реперга нисбатан қандай координаталарга эга бўлса, унинг f алмаштиришдаги M' образи $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан худди шундай координаталарга эга дейлик; бундан ташқари, M_1, M_2 — текисликнинг турли икки нуқтаси, M_1', M_2' — бу нуқталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин, f алмаштиришни танлашимизга кўра $\mathscr{B}$ реперга нисбатан $M_1(x_1,\ y_1)$ ва $M_2(x_2,\ y_2) \Rightarrow \mathscr{B}'$ реперга нисбатан $M_1'(x_1,\ y_1)$ ва $M_2'\ (x_2,\ y_2)$. $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ декарт реперларида $\rho(M_1,\ M_2)$, $\rho(M_1',\ M_2)$ масофаларни ҳисоблаймиз:

$$\rho(M_1,\ M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$
$$\rho(M_1',\ M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2},$$

булардан $\rho(M_1,\ M_2) = \rho(M_1',\ M_2)$. Демак, f ҳаракат экан, яъни $f = F$. $\mathscr{B}$ реперда $O(0,\ 0)$, $A_1(1,\ 0)$, $A_2(0,\ 1)$, $\mathscr{B}'$ реперда эса $O'(0,\ 0)$, $A'(1,\ 0)$, $A_2'(0,\ 1)$, яъни

$$O' = f(O),\ A_1' = f(A_1),\ A_2' = f(A_2) \Rightarrow \mathscr{B}' = f(\mathscr{B}).\ \blacktriangle$$

1- теоремадан бундай хулоса келиб чиқади: текисликдаги ҳаракат бир жуфт декарт реперининг берилиши билан тўлиқ аниқланади.

34- §. Ҳаракатнинг аналитик ифодаси

Текисликда ихтиёрий иккита $(O,\ \vec{i},\ \vec{j}')$, $(O',\ \vec{i}',\ \vec{j}')$ декарт реперини қараймиз. Улар текисликдаги F ҳаракатни аниқлайди ва $F(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$. Фараз қилайлик, $(\widehat{\vec{i},\ \vec{i}'}) = \alpha$ бўлсин. M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' эса унинг F ҳаракатдаги образи бўлсин. M нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталарини x, y билан белгилаймиз. У ҳолда, 33- § даги 2-теоремага кўра, $M' = F(M)$ нуқта $\mathscr{B}'$ реперда шу x, y координаталарга эга бўлади. M' нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталарини x', y' орқали белгилаймиз.

Маълумки (II боб, 19- §), $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар декарт реперлари бўлгани учун текисликнинг ихтиёрий M нуқтасининг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари x, y, унинг $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан координаталари x', y' орқали

$$\begin{cases} x = x'\cos\alpha - \varepsilon y'\sin\alpha + c_1, \\ y = x'\sin\alpha + \varepsilon y'\cos\alpha + c_2 \end{cases} \tag{1}$$

формулалар билан ифодаланар эди. Бу ерда $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлса, $\varepsilon = +1$, акс ҳолда $\varepsilon = -1$. (1) формулаларни қаралаётган ҳолда M' нуқтанинг координаталари учун ёзамиз:

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + c_1, \\ y' = x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + c_2. \end{cases} \tag{2}$$

(2) формулалардаги x, y бир вақтда M' нуқтанинг F ҳаракатдаги асли M нинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари эди. Шунга кўра (2) формулалар F ҳаракатда битта $\mathscr{B}$ реперга нисбатан $M' = F(M)$ нуқтанинг координаталарини M нуқтанинг координаталари орқали ифодасини беради.

Аксинча, текисликдаги бирор f алмаштиришда M ва $M' = F(M)$ нуқталарнинг битта $(O, \vec{i}, \vec{j})$ реперга нисбатан координаталари (2) формулалар билан боғланган бўлсин; f нинг ҳаракат эканини кўрсатамиз.

Бунинг учун текисликда ихтиёрий икки M, N нуқтани оламиз. M, N' бу нуқталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин; f нинг ҳаракат эканини кўрсатиш учун

$$\rho(M', N') = \rho(M, N)$$

бўлишини кўрсатиш етарли. Бу реперга нисбатан

$$M'(x'_M, y'_M),\ N'(x'_N, y'_N),\ M(x_M, y_M),\ N(x_N, y_N)$$

бўлсин. У ҳолда $\rho(M', N') = \sqrt{(x'_N - x'_M)^2 + (y'_N - y'_M)^2} =$

$$= \sqrt{(x_N\cos\alpha - \varepsilon y_N\sin\alpha + c_1 - x_M\cos\alpha + \varepsilon y_M\sin\alpha - c_1)^2 + (x_N\sin\alpha + \varepsilon y_N\cos\alpha + c_2 - x_M\sin\alpha - \varepsilon y_M\cos\alpha - c_2)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_N + x_M)^2\cos^2\alpha + \varepsilon^2(y_N - y_M)^2\sin^2\alpha - 2\varepsilon(x_N - x_M)(y_N - y_M)\sin\alpha\cos\alpha + (x_N - x_M)^2 \times \sin^2\alpha + \varepsilon^2(y_N - y_M)^2\cos^2\alpha + 2\varepsilon(x_N - x_M)(y_N - y_M)\cos\alpha\sin\alpha} =$$

$$= \sqrt{(x_N - x_M)^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) + (y_N - y_M)^2(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)} =$$

$= \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2} = \rho(M, N) \Rightarrow f$ ҳаракатдир. Демак, (2) формулалар ҳаракатнинг аналитик ифодасидир.

(2) формулаларда c_1, c_2 сонлар O нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари.

Таъриф. Ҳаракатни аниқлайдиган $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}' = F(\mathscr{B})$ декарт реперлари бир хил ориентацияли бўлса, ҳаракат *биринчи тур*, қарама-қарши ориентацияли бўлса, *иккинчи тур ҳаракат* дейилади.

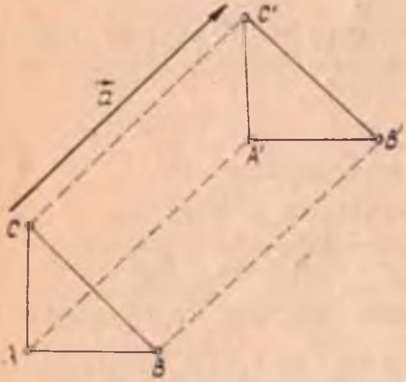
35- §. Ҳаракатнинг асосий турлари

1. Параллел кўчириш. Текисликда $\vec{a} \neq \vec{0}$ вектор берилган бўлсин.

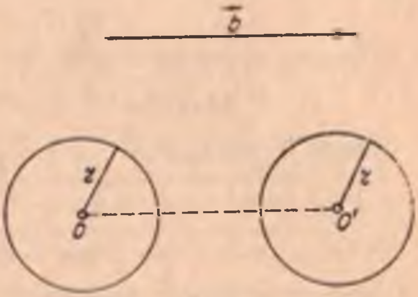
Таъриф. Текисликнинг ҳар бир M нуқтасига $\overline{MM'} = \vec{a}$ шарт билан аниқланувчи M' нуқтасини мос келтириш текисликда $\vec{a}$ *вектор қадар параллел кўчириш* дейилади. Уни $T_{\vec{a}}$ кўринишда белгиланади, $\vec{a}$ ни *кўчириш вектори* дейилади. Текисликда $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш текисликнинг ҳар бир M нуқтасига биргина M' нуқтасини мос келтиради. Шунга кўра параллел кўчириш текисликдаги алмаштиришдир. Таърифга кўра текисликда $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчириш $T_{\vec{a}}$ да текисликнинг барча нуқталари $\vec{a}$ вектор йўналишида $|\vec{a}|$ масофага силжийди.

80- чизмада $\triangle A'B'C'$ $T_{\vec{a}}$ даги $\triangle ABC$ нинг образидир, яъни

$$\triangle A'B'C' = T_{\vec{a}}(\triangle ABC).$$



80- чизма



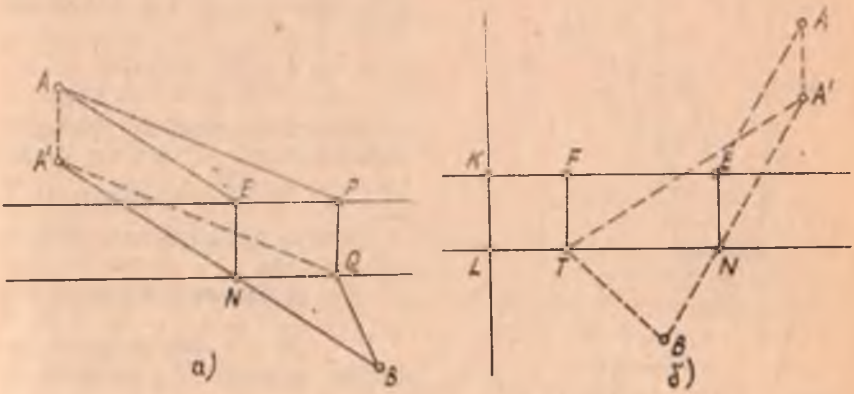
81- чизма

Параллел кўчиришда айлананинг образини ҳосил қилиш учун унинг марказини кўчириш вектори қадар параллел кўчирилади (81- чизма).

Параллел кўчириш ҳаракатдир. Ҳақиқатан, M, N текисликнинг ихтиёрий икки нуқтаси ва M', N' бу нуқталарнинг $T_{\vec{a}}$ даги образлари бўлсин. У ҳолда $\overline{MM'} = \vec{a}$, $\overrightarrow{NN'} = \vec{a}$ бўлиб, бунда $\overline{MM'} =$

$= \overrightarrow{NN'} \Rightarrow MNN'M'$ тўртбурчак параллелограмм. У ҳолда $\rho(M, N) = \rho(M', N')$. Бундан параллел кўчиришнинг ҳаракатдан иборатлиги ва унинг I тур ҳаракат эканлиги тўғрисида хулоса чиқарамиз.

Масала. Аҳоли яшайдиган A ва B пунктлар қирғоқлари параллел бўлган каналнинг икки томонида жойлашган (82-*а* чизма), A ва B пунктларни энг қисқа йўл орқали туташтириш учун қайси ерга кўприк қуриш керак?



82- чизма

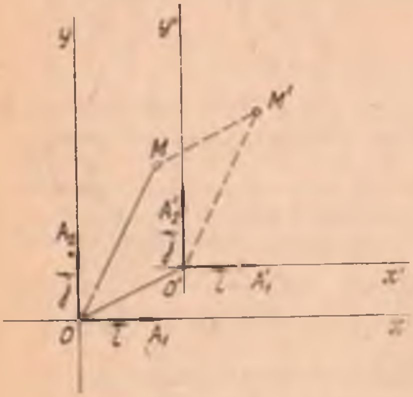
Ечиш. $APQB$ чизиқ A ва B пунктларни туташтирувчи бирор йўл бўлсин. AP кесмани $\overrightarrow{PQ}$ вектор қадар параллел кўчирсак, у $A'Q$ кесмага ўтиб, $A'Q = AP$ ва $AA' = PQ$ дан

$$AP + PQ + QB = AA' + A'Q + QB$$

бўлади. Бундан кўринадики, $APQB$ йўл энг қисқа бўлиши учун $A'QB$ синиқ чизиқнинг узунлиги энг қисқа бўлиши керак. Бу (икки нуқта орасидаги энг қисқа масофа уларни туташтирувчи кесма узунлигидан иборат бўлишини эътиборга олсак), $A'QB$ синиқ чизиқ A' ва B ни туташтирувчи кесмага айланганда, яъни $Q = N$ бўлса бажарилади. Бу ерда N нуқта $A'B$ кесма билан каналнинг B пунктга яқин қирғоғининг кесишган нуқтаси. Юқорида қилинган таҳлил бўйича изланган нуқтани топайлик. Канал қирғоқларига перпендикуляр ўтказиб, канал кенглиги KL ни топамиз (82- *б* чизма). K ўтказилган перпендикулярнинг A пунктга яқин қирғоғи билан, L эса B га яқин қирғоғи билан кесишган нуқтаси. A нуқтани $\overrightarrow{KL}$ қадар параллел кўчирсак, A' ҳосил бўлади. $A'B$ кесмани ўтказиб, унинг каналнинг B пунктга яқин қирғоғи билан кесишган N нуқтасини топамиз. N дан каналнинг иккинчи қирғоғига туширилган перпендикулярнинг асоси E кўприк қуриш учун изланган нуқта бўлади.

Ҳақиқатан, каналнинг A пунктга яқин қирғоғида $\forall F \neq E$ нуқтани олсак, $AFTB$ (T нуқта F дан иккинчи қирғоққа туширилган перпендикулярнинг асоси) йўлнинг $AENB$ дан узун эканини кўриш мумкин:

$$AE + EN + NB = EN + A'N + NB = EN + A'B < EN + A'T + \\ + TB = AF + FT + TB$$



83-чизма

Ҳаракатнинг аналитик ифодаси (34- § даги (2) формула), $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O', \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперлари учун (83- чизма) $\alpha = 0$, $\varepsilon = +1$ бўлганидан

$$\begin{cases} x' = x + c_1, \\ y' = y + c_2 \end{cases}$$

кўринишни олади. Бу формулаларда (c_1, c_2), (x', y'), (x, y) лар O', M', M нуқталарнинг $(O, \vec{i}, \vec{j})$ реперга нисбатан мос координаталаридир.

$T_{\vec{a}}$ қуйидаги хоссаларга эга.

1°. $\vec{a} = \vec{0}$ вектор қадар параллел кўчириш $T_{\vec{a}}$ текисликдаги ҳар бир нуқтани ўзини-ўзига алмаштиради, демак, у айнан алмаштиришдир.

2°. $T_{\vec{a}}$ да тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа ўтади. Хусусий ҳолда $\vec{a}$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ ўз-ўзига ўтади.

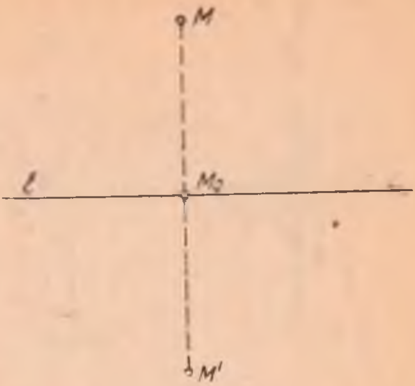
Исбот. $l \parallel \vec{a}$ бўлсин. Ихтиёрий $M \in l$ нуқтани оламиз. Бу нуқтанинг $T_{\vec{a}}$ даги M' образи $\overrightarrow{MM'} = \vec{a}$ шартни қаноатлантиргани учун $M' \in l$ бўлади. Бундан $\vec{a}$ вектор қадар параллел кўчиришда $\forall\, l \parallel \vec{a}$ тўғри чизиқнинг образи унинг ўзи бўлади.

$l \nparallel \vec{a}$ бўлсин. M, $N \in l$ нуқталарни оламиз. M', N' бу нуқталарнинг $T_{\vec{a}}$ даги образлари бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \vec{a}$ бўлиб $\Rightarrow MM'N'N$ тўртбурчак параллелограммдир. Демак,

$$\overline{M'N'} = l' \parallel l. \ \blacktriangle.$$

Текисликда параллел кўчириш кўчириш векторининг ёки бир жуфт мос нуқталарнинг берилиши билан аниқланади. Агар параллел кўчириш бир жуфт мос A, A' нуқталар билан берилган бўлса, у ҳолда $\overrightarrow{AA'}$ векторни параллел кўчириш вектори сифатида қабул қиламиз. Текисликда барча параллел кўчиришлар тўплами группа ташкил этади (буни 32- § даги 1- мисолда кўрдик).

2. Тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш. Текисликда бирор l тўғри чизиқ берилган бўлсин.



84- чизма

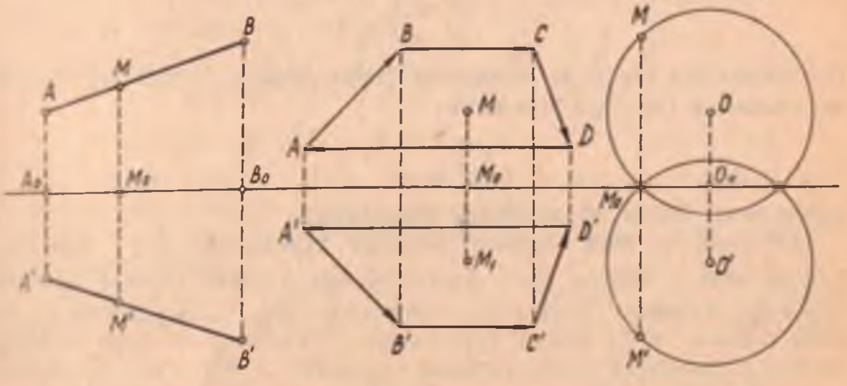
1- таъриф. Текисликдаги M, M' нуқталар учун MM' кесма l га перпендикуляр бўлиб, MM' кесманинг ўртаси l тўғри чизиқда ётса, у ҳолда бу нуқталар l *тўғри чизиққа нисбатан симметрик* деб аталади.

Бу таърифга кўра текисликда берилган ихтиёрий M нуқтага шу текисликдаги бирор l тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган M' нуқта қуйидагича топилади (84- чизма): 1) M нуқтадан l тўғри чизиққа перпендикуляр ўтказамиз, унинг l тўғри чизиқ билан кесишган нуқтаси M_0 бўлсин; 2) бу перпендикулярда узунлиги MM_0 кесма узунлигига тенг M_0M' кесмани ажратамиз ($M \neq$ $\neq M'$). M' нуқта l тўғри чизиққа нисбатан M нуқтага симметрик нуқта бўлади.

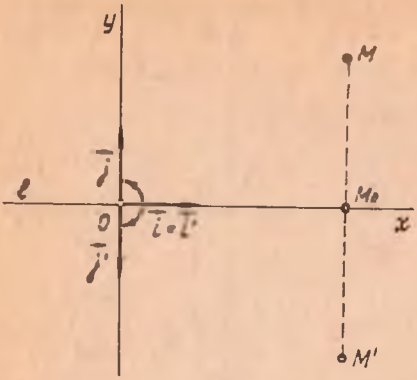
2- таъриф. Текисликнинг ҳар бир M нуқтасига l тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган M' нуқтасини мос келтирувчи алмаштириш текисликда l тўғри чизиққа нисбатан *симметрик алмаштириш* ёки l *ўқли симметрия* деб аталади. l ўқли симметрия S_l кўринишда белгиланади. l тўғри чизиқ *симметрия ўқи* дейилади. Ҳар бир $M \in l$ нуқта l тўғри чизиққа нисбатан ўз-ўзига симметрик деб ҳисобланади.

l ўқли S_l симметрияда M' нуқтанинг M нуқта учун образ эканини $S_l(M) = M'$ кўринишда белгилаймиз.

Бирор Ф фигурани ташкил этувчи барча нуқталарга l тўғри чи-



85- чизма



86- чизма

зиққа нисбатан симметрик нуқталардан тузилган Ф' фигура l тўғри чизиққа нисбатан Ф фигурага *симметрик* дейилади ва S_l (Ф) = Ф' кўринишда ёзилади. Масалан, 85- чизмада S_l да AB кесмага симметрик фигура $A'B'$ кесма: S_l $(AB) = A'B'$, $ABCD$ трапецияга симметрик фигура $A'B'C'D'$ трапеция, (O, r) айланага симметрик фигура (O', r) айлана экани тасвирланган.

l ўқли симметрия ҳаракатдир. Буни кўрсатиш учун иккита шундай $(O, \vec{i}, \vec{j})$, $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ декарт реперини танлаймизки, $O \in l$, $\vec{i} \parallel l$, $\vec{i}'=\vec{i}$ ва $\vec{j}'=-\vec{j}$ бўлсин (86- чизма).

Текисликда l тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришда $S_l(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$ бўлади. M — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' унинг S_l даги образи, яъни $S_l(M) = M'$ бўлсин. M нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталарини x, y билан белгилаймиз. l ўқли симметрия таърифига ва реперларнинг танланишига кўра $M' = S_l(M)$ нуқта $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан шу x, y координаталарга эга бўлади. 33- § даги 2- теоремага кўра $l = Ox$ ўқли симметрия ҳаракатдан иборат экан, шу билан бирга у иккинчи тур ҳаракатдир, чунки уни аниқланаётган $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли.

$M' = S_l(M)$ нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталарини x', y' билан белгиласак, MM' кесма Ox ўққа перпендикуляр ва унинг ўртаси M_0 нуқта Ox ўққа тегишли бўлгани учун $\overrightarrow{M_0M'} = -\overrightarrow{M_0M} = -y\vec{j}$. Бундан ушбу формулага эга бўламиз:

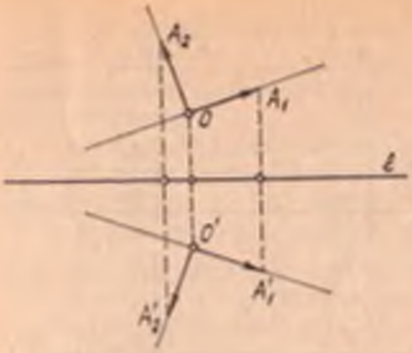
$$\begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Бу текисликда Ox ўқли симметрия формуласидир. Худди шу тартибда текислида Oy ўқли симметрия

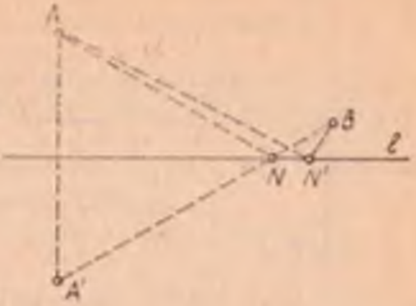
$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = y \end{cases}$$

формулалар билан ифодаланиши кўрсатилади.

Юқорида S_l нинг ҳаракат эканини кўрсатишда $O \in l$ шартини қўйган эдик. Аслида $O \notin l$ бўлганда ҳам S_l нинг ҳаракат эканини кўрсатиш мумкин. Ҳақиқатан, текисликда (O, A_1, A_2) декарт реперини оламиз, $O \notin l$ бўлсин (87- чизма). Текисликда l тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришни қарайлик. $S_l(O) = O'$, $S_l(A_1) = A_1'$, $S_l(A_2) = A_2'$ бўлсин.



87- чизма



88- чизма

Бу ҳолда 1- таърифга кўра

$$\rho(O,\ A_1) = \rho(O',\ A_1')\rho(O,\ A_2) = \rho(O',\ A_2') \text{ ва}$$

$$\rho(A_1,\ A_2) = \rho(A_1',\ A_2') \qquad (3)$$

муносабатларга эга бўламиз.

$$(3) \Rightarrow \triangle OA_1A_2 \equiv \triangle O'A_1'A_2' \Rightarrow (A_1'\widehat{O'}A_2) = 90^\circ. \qquad (4)$$

(3), (4) муносабатлардан кўринадики, S_l алмаштириш $(O,\ A_1,\ A_2)$, $(O',\ A_1',\ A_2')$ декарт реперлари билан аниқланувчи ҳаракат экан. Шу билан бирга у иккинчи тур ҳаракат, чунки бу реперлар қарама-қарши ориентациялидир.

Мисол. l тўғри чизиқдан бир томонда A ва B нуқталар берилган (88- чизма). l тўғри чизиқда шундай N нуқта топингки, $\rho(A,\ N) + \rho(N,\ B)$ миқдор энг кичик бўлсин.

Ечиш. A нуқтани l тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштирамиз. $S_l(A) = A'$ бўлсин. $A'B \cap l = N$ нуқтани топамиз.

$\rho(A,\ N) + \rho(N,\ B)$ йиғинди энг кичик бўлади. Ҳақиқатан, ихтиёрий $l \ni N' \neq N$ нуқтани олайлик.

$$\rho(A,\ N) + \rho(N,\ B) = \rho(A',\ N) + \rho(N,\ B) = \rho(A',\ B) < \rho(A',\ N') + \\ + \rho(N',\ B)^* = \rho(A,\ N') + \rho(N',\ B).$$

l ўқли симметрия қуйидаги хоссаларга эга:

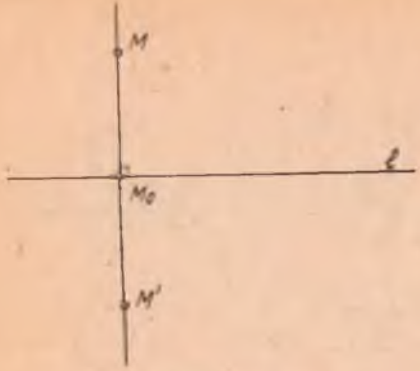
1°. l тўғри чизиқ ўз-ўзига симметрик, чунки 2- таърифга кўра унинг ҳар бир нуқтаси ўз-ўзига симметрик.

2°. l тўғри чизиққа перпендикуляр ҳар қандай тўғри чизиқ ўз-ўзига симметрикдир.

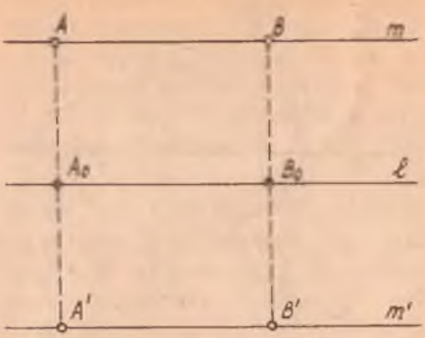
Ҳақиқатан, $a \perp l$ бўлсин (89- чизма). Ихтиёрий $M \in a$ нуқтани оламиз. S_l да унга мос келган M' нуқта учун MM' кесма l га

---

* Учбурчак икки томонининг йиғиндиси унинг учинчи томонидан катта.



89- чизма



90- чизма

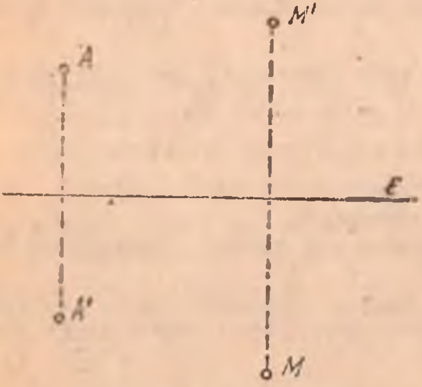
перпендикуляр ва M_0 нуқта MM' кесманинг ўртаси. Бундан $M' \in a$.

a тўғри чизиқ ихтиёрий M нуқтасининг M' образи a тўғри чизиққа тегишли бўлгани учун a тўғри чизиқ ўз- ўзига ўтади.

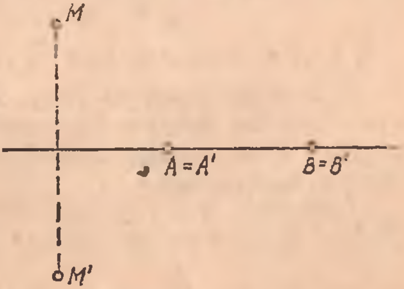
3°. Симметрия ўқига параллел тўғри чизиқнинг образи шу ўққа параллел тўғри чизиқ бўлади, яъни $m \parallel l \Rightarrow m' = S_l(m) \parallel l$. Ҳақиқатан, m тўғри чизиқда $A \neq B$ нуқталарни оламиз. A', B' бу нуқталарнинг S_l даги образлари бўлсин (90- чизма).

У ҳолда AA' ҳамда BB' кесмалар l тўғри чизиққа перпендикуляр ва $AA_0 = A_0A'$, $BB_0 = B_0B'$. Шу билан бирга $m \parallel l$. Булардан $m' \parallel l$.

Тўғри чизиққа нисбатан симметрия симметрия ўқи ёки бир жуфт мос нуқтани бериш билан бир қийматли аниқланади. Ҳақиқатан, текисликдаги бирор l тўғри чизиқ симметрия ўқи учун қабул қилинса, 1- таърифга кўра текисликнинг ҳар бир M нуқтасига l ўққа нисбатан симметрик бўлган ягона M' нуқта топилади. Агар тўғри чизиқ-



91- чизма



92- чизма

қа нисбатан симметрик алмаштириш бир жуфт A, A' мос нуқталар билан берилган бўлса, AA' кесманинг ўртаси A_0 дан AA' кесмага перпендикуляр қилиб ўтказилган l тўғри чизиқ симметрия ўқи бўлади (91- чизма).

Агар ўқли симметрия ўзи- ўзига аксланадиган икки $A \to A$, $B \to B$ нуқталар билан берилган бўлса, у ҳолда AB тўғри чизиқ симметрия ўқи бўлади (92- чизма).

3. Буриш. Ориентацияли текисликда O нуқта ва (ориентацияли) ABC бурчакни белгилаб қўяйлик: $(\widehat{ABC}) = \alpha$.

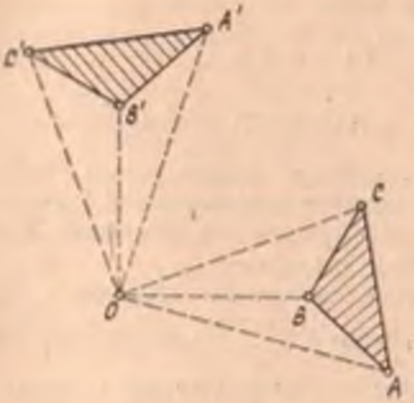
Таъриф. Текисликдаги ҳар бир M нуқтага унинг

1) $\rho(O,\ M) = \rho(O,\ M')$,

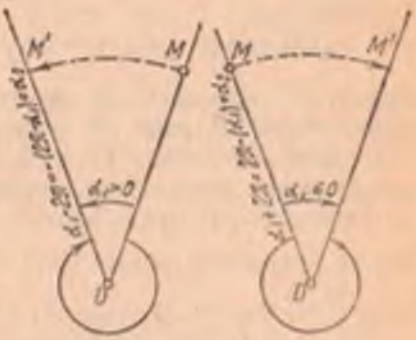
2) $(\widehat{MOM'}) = \alpha$ ва MOM' бурчак ABC бурчак билан бир хил ориентацияли бўлиш шартларини қаноатлантирадиган M' нуқтасини мос келтирувчи алмаштириш текисликда *O нуқта атрофида берилган α бурчакка буриш* дейилади. O нуқта *буриш маркази*, α *буриш бурчаги* дейилади.

Текисликда O нуқта атрофида α бурчакка буриш R_O^{α} билан белгиланади. 93- чизмадаги $A'B'C'$ учбурчак берилган $\triangle ABC$ ни текисликда O нуқта атрофида $\alpha = 90°$ бурчакка буришдаги, яъни R_O^{90} даги образидир.

$R_O^{\alpha_1}$ ва $R_O^{\alpha_2}$ текисликда O нуқта атрофида мос равишда α_1, α_2 бурчакларга буришлар бўлиб, бунда



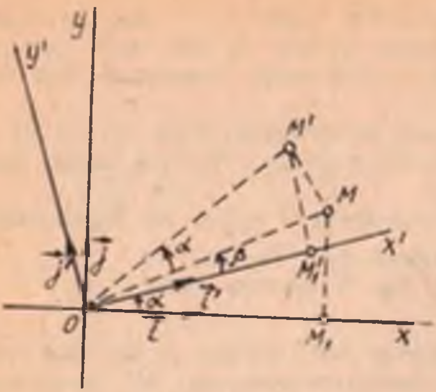
93- чизма



94- чизма

$$\alpha_2 = \begin{cases} \alpha_1 - 2\pi, & \text{агар } \alpha_1 > 0, \\ \alpha_1 + 2\pi, & \text{агар } \alpha_1 \leqslant 0 \end{cases}$$

бўлсин (94- чизма). У ҳолда $R_O^{\alpha_1}$ буриш ҳар қандай M нуқтани M' нуқтага ўтказса, $R_O^{\alpha_2}$ буриш ҳам M нуқтани шу M' нуқтага ўтказади, бундан $R_O^{\alpha_1} = R_O^{\alpha_2}$.



95- чизма

Демак, O нуқта атрофида $R_O^{\alpha_1}$ буришнинг α_1 бурчагини ҳар вақт шундай танлаш мумкинки, $|\alpha_1| \leqslant \pi$ бўлади. Шундай қилиб, буриш бурчаги $0 < \alpha \leqslant \pi$ оралиқда олинади.

$\alpha = 0°$ бурчакка буриш R_O^0 текисликнинг барча нуқталарини ўз ўрнида қолдиради. Демак, текисликда R_O^0 буриш айнан алмаштириш экан.

Текисликда буришдан иборат алмаштириш ҳаракатдир.

Дарҳақиқат, координаталар боши умумий O нуқта бўлган бир хил ориентацияли иккита $(O, \vec i, \vec j)$, $(O, \vec i', \vec j')$ декарт реперини оламиз. $(\widehat{\vec i, \vec i'}) = \alpha$ бўлсин (95- чизма).

Текисликда O нуқта атрофида α бурчакка буриш $R_O^\alpha \mathscr{B}$ реперни $\mathscr{B}'$ реперга ўтказади (чунки реперлар бир хил ориентирланган ва $(\widehat{i, i'}) = \alpha$).

M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' бу нуқтанц R_O^α буришдаги образи бўлсин. Буриш таърифига кўра:

$$(M_1\widehat{O}M) = (M_1'\widehat{O}M') = \alpha + \beta,$$

у ҳолда

$$\triangle M_1OM \equiv \triangle M_1'OM' \Rightarrow OM_1 = OM_1' \text{ ва } M_1M = M_1'M'.$$

Демак, M нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари билан унинг образи M' нинг $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан координаталари бир хил. 37- § даги 2- теоремага кўра R_O^x буриш биринчи тур ҳаракатдир. Буришда буриш марказигина инвариант нуқта бўлади.

Буришнинг аналитик ифодаси билан танишамиз. Текисликда R_O^α буриш натижасида ундаги $(O, \vec i, \vec j)$ репер $(O, \vec i', \vec j')$ реперга ўтиб (бу ерда $(\widehat{\vec i, \vec i'}) = \alpha$), $\mathscr{B}$ реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлган $\forall M$ нуқтанинг M' образи $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан шу x, y координаталарга эгалиги кўрилган эди. M' нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари x', y' бўлсин. Буриш маркази O инвариант, яъни $O = O'$ ва $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлгани учун 34- § даги ҳаракат формулалари

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha + c_1, \\ y' = x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha + c_2 \end{cases} \tag{5}$$

ушбу

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

кўринишни олади. (5) формулалар текисликдаги R_0^α буришни ифодалайди.

Текисликда буриш буриш маркази ва буриш бурчагининг берилиши билан, шунингдек, буриш маркази ва бир жуфт мос нуқталарнинг берилиши билан ягона равишда аниқланади.

Агар буриш маркази ва буриш бурчаги берилса, буришга берилган таъриф асосида текисликнинг ҳар бир M нуқтасининг биргина M' образи топилади. Агар буриш буриш маркази O ва бир жуфт мос A, A' нуқталар билан берилса, у ҳолда $\angle AOA'$ нинг миқдори (AOA') ни буриш бурчаги деб қабул қилиб, шу буриш бурчаги ва буриш маркази бўйича текисликдаги M нуқтанинг M' образи топилади

Мисол. Қвадратнинг ва тенг томонли учбурчакнинг ўз-ўзига ўтказадиган барча буриш марказлари ва буриш бурчакларини топинг.

Ечиш. Қвадрат диагоналларининг кесишган нуқтаси O ни буриш маркази ва соат мили бўйича ёки унга қарама- қарши йўналишда 90° ва 180° бурчакни буриш бурчаги деб қабул қилсак, квадрат ўз ўзига алмашинади. Демак, квадратни ўз- ўзига ўтказувчи 4 та буриш мавжуддир:

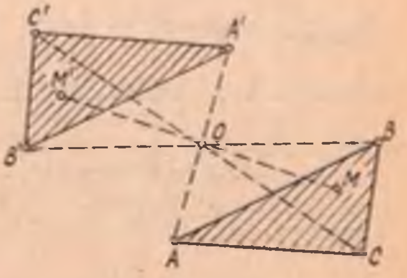
$$\alpha = 90°,\ 180°,\ -90°,\ -180°.$$

Тенг томонли учбурчак баландликларининг кесишган O нуқтасини буриш маркази, соат мили йўналиши бўйича ва унга қарама-қарши йўналишда 120° бурчакни буриш бурчаги деб қабул қилсак, тенг томонли учбурчак ўз- ўзига ўтади. Демак, тенг томонли учбурчакни ўз- ўзига ўтказадиган 2 та буриш мавжуд: бири O нуқта атрофида $\alpha = 120°$ бурчакка, иккинчиси шу нуқта атрофида $\alpha = -120°$ бурчакка буришдир.

Таъриф. Текисликда O нуқтаси атрофида $\alpha = 180°$ га буриш *O марказли симметрия* деб аталади. O нуқта *симметрия маркази* дейилади. O марказли симметрия Z_O ёки $R_O^{180°}$ билан белгиланади.

$\forall$ M нуқтага O марказга нисбатан симметрик M' нуқтани ясаш учун OM тўғри чизиқни ўтказиб, бу тўғри чизиққа O нуқтадан иккинчи томонда $OM' = OM$ кесма қўйилади.

Ихтиёрий Ф фигуранинг O марказли марказий симметриядаги образини топиш учун унинг ҳар бир нуқтаси юқоридаги қоида бўйича алмаштирилади. 96- чизмада текисликдаги O марказли марказий симметрия $R_O^{180°}$ да берилган ABC учбурчакнинг $A'B'C'$ учбурчакка ўтиши тасвирланган (96- чизма).



96- чизма

Марказий симметрия 180° га

буриш бўлгани учун у ҳам биринчи тур ҳаракат ва (5) буриш формулаларига кўра декарт реперида

$$\begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y \end{cases} \qquad (6)$$

формулалар билан аниқланади.

(6) да x, y лар M нуқтанинг, x', y' эса бу нуқтанинг R_O^{180} даги M' образининг битта реперга нисбатан координаталаридир. Марказий симметрия таърифи ва симметрик нуқталарни ясаш қоидасидан, у, симметрия марказининг ёки бир жуфт мос нуқталарнинг берилиши билан ягона равишда аниқланади, деган хулоса чиқарамиз.

Агар марказий симметрия бир жуфт мос A, A' нуқталар билан берилган бўлса, AA' кесманинг ўртасини симметрия маркази сифатида қабул қиламиз.

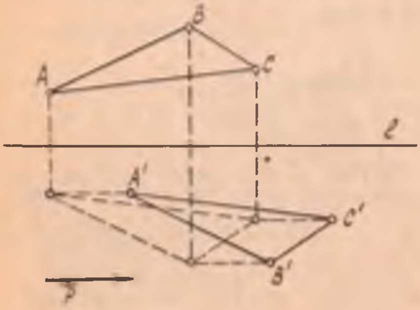
4. Сирпанувчи симметрия. S_l текисликдаги ўқли симметрия, $T_{\vec{p}}$ эса $\vec{p} \neq \vec{0}$, $\vec{p} \parallel l$ вектор қадар параллел кўчириш бўлсин.

Таъриф. $f = T_{\vec{p}} S_l$ алмаштириш текисликнинг *сирпанувчи симметрияси* дейилади.

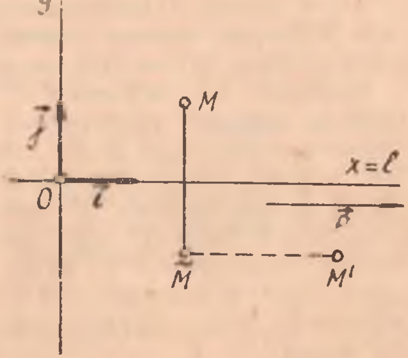
Текислик $\forall M$ нуқтасининг $f = T_{\vec{p}} S_l$ сирпанувчи симметриядаги образи қуйидагича топилади: аввал M нуқтанинг S_l даги образи M_1 ни топамиз, сўнгра M_1 нуқтанинг $T_{\vec{p}}$ даги образи M' ни топамиз. M' изланган нуқта, яъни $f(M) = M'$ бўлади.

97- чизмадаги $A'B'C'$ учбурчак ABC учбурчакнинг $f = T_{\vec{p}} S_l$ сирпанувчи симметриядаги образидир.

Текисликда l тўғри чизиқ ва $\vec{p} \neq \vec{0}$ векторни белгилаймиз, бунда $\vec{p} \parallel l$ бўлсин. Декарт реперини $O \in l$ ва $\vec{i} \parallel l$ шартларда оламиз (98- чизма). Текисликнинг ихтиёрий M нуқтаси x, y координаталарга



97- чизма



98- чизма

эга бўлсин. $\tilde{M}$ нуқта M нуқтанинг S_l даги образи, M' эса $\tilde{M}$ нуқтанинг $T_{\vec{p}}$ даги образи бўлсин, яъни $S_l(M) = \tilde{M}$, $T_{\vec{p}}(\tilde{M}) = M'$.

M, M' нуқталар $\mathcal{B}$ реперда ушбу координаталарга эга бўлсин: $\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $M'(x', y')$, $\vec{p} \parallel l = Ox$ бўлгани учун $\vec{p} = x_0\vec{i} \Rightarrow (O, \vec{i}, \vec{j})$ да $\vec{p}(x_0, 0)$. Тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш ва параллел кўчириш формулаларига кўра S_l, $T_{\vec{p}}$ алмаштиришлар ушбу формулалар билан ифодаланади:

$$S_l: \begin{cases} \tilde{x} = x, \\ \tilde{y} = -y \end{cases} \text{(а)}, \quad T_{\vec{p}}: \begin{cases} x' = \tilde{x} + x_0 \\ y' = \tilde{y}, \end{cases} \text{(б)}$$

булардан

$$f: \begin{cases} x' = x + x_0, \\ y' = -y. \end{cases} \tag{7}$$

(7) формулалар сирғанувчи симметриянинг аналитик ифодаси бўлиб, улар битта реперда $M' = f(M)$ нуқтанинг координаталарини M нуқтанинг координаталари орқали ифодалайди. Сирпанувчи симметрия тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш билан параллел кўчиришнинг кўпайтмасидан иборат бўлгани сабабли бу икки алмаштириш учун умумий бўлган хоссалар сирпанувчи симметриянинг ҳам хоссалари бўлади.

Бу хоссалардан айримларини келтирамиз.

1. Сирпанувчи симметрияда тўғри чизиқнинг образи унинг ўзидир:

$$f(l) = l.$$

2. l га параллел бўлган m тўғри чизиқнинг образи ҳам l га параллел, яъни $m \parallel l \Rightarrow f(m) \parallel l$.

3. l га перпендикуляр бўлган m тўғри чизиқнинг образи ҳам l га перпендикуляр, яъни $m \perp l \Rightarrow f(m) \perp l$.

S_l ва $T_{\vec{p}}$ ҳаракат бўлгани учун уларнинг кўпайтмаси f ҳам ҳаракатдир. Шу билан бирга сирпанувчи симметриянинг (7) аналитик ифодасидан кўринадики ($\varepsilon = -1$), у иккинчи тур ҳаракатдир.

36- §. Ҳаракатлар таснифи (классификацияси)

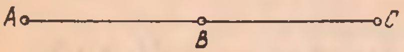
Бу параграфда ҳар қандай ҳаракат юқорида кўрилган беш турнинг биридан иборат эканини кўрсатамиз.

1- теорема. *Ҳар қандай биринчи тур ҳаракат ё параллел кўчириш ёки буриш, ёхуд марказий симметриядир.*

Исбот. F текисликдаги бирор биринчи тур ҳаракат бўлсин. A шу текисликдаги бирор нуқта, F ҳаракат A нуқтани B нуқтага, B нуқтани эса C нуқтага ўтказсин. У ҳолда AB кесма BC кесмага ўтади ва $\rho(A, B) = \rho(B, C)$. Бунда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмалар бир хил йўналишли (99- чизма). Текисликда

$\overrightarrow{AB}$ вектор қадар параллел кўчириш $T_{\overrightarrow{AB}}$ ни бажарамиз. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$ бўлгани учун $T_{\overrightarrow{AB}}$ ҳам A нуқтани B га, B нуқтани эса C нуқтага ўтказади. Шу билан бирга $T_{\overrightarrow{AB}}$ биринчи тур ҳаракатдир. Бундан $F = T_{\overrightarrow{AB}}$. Шундай қилиб, $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмалар бир хил йўналишли бўлганида F ҳаракат параллел кўчириш экан.



99-чизма

100-чизма

2) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмалар қарама-қарши йўналишли (100-чизма). Бу ҳолда $\rho(A, B) = \rho(B, C) \Rightarrow C = A$. O нуқта AB кесманинг ўртаси бўлсин.

Текисликда O нуқтага нисбатан симметрияни бажарсак, A нуқта B нуқтага, B нуқта эса $C = A$ нуқтага ўтади. O марказли симметрия биринчи тур ҳаракат. Бундан кўринадики, F ҳаракат ва у O марказли симметрия экан.

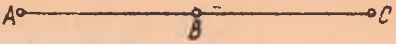
101-чизма

3) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмалар битта тўғри чизиқда ётмайди (101-чизма). $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмаларнинг ўрта перпендикулярларини ўтказамиз. Уларнинг кесишган нуқтаси O бўлсин. У ҳолда $AO = BO = CO$. Бу муносабат ва $AB = BC$ тенгликдан $\Rightarrow \triangle AOB = \triangle COB \Rightarrow$ $\Rightarrow (\widehat{AOB}) = (\widehat{BOC})$. Текисликда O нуқта атрофида $\alpha = (AOB)$ бурчакка бурамиз. Бу R_O^α да $R_O^\alpha(A) = B$, $R_O^\alpha(B) = C$. Шу билан бирга R_O^α биринчи тур ҳаракат ҳам. Бундан $\Rightarrow F = R_O^\alpha$. Демак, бу ҳолда F буришдир. ▲.

2-теорема. *Ҳар қандай иккинчи тур ҳаракат ёки тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш, ёки сирпанувчи симметрия бўлади.*

Исбот. F текисликда бирор иккинчи тур ҳаракат бўлиб, у текисликнинг ҳар қандай A нуқтасини B нуқтага, B нуқтасини эса C нуқтага ўтказсин. Бунда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

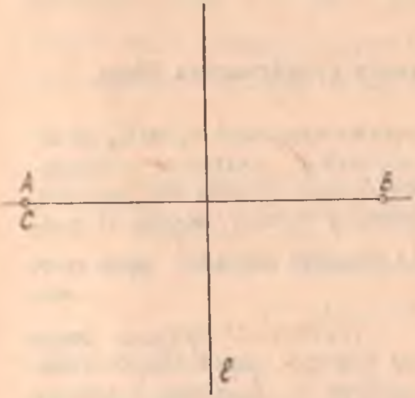
1) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмалар бир хил йўналишли (102-чизма). Ушбу алмаштиришни бажарайлик; аввало текисликда $AB = l$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришни бажарамиз, бунда $S_l(A) = A$,



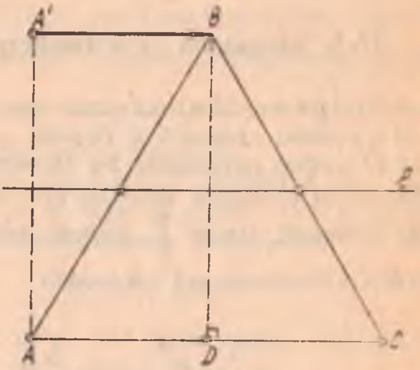
102- чизма

$S_l(B) = B$, $S_l(C) = C$. Сунгра $\overrightarrow{AB}$ вектор қадар параллел кўчирамиз. Бу алмаштириш A нуқтани B га, B нуқтани C га ўтказади. Бу икки алмаштиришнинг кўпайтмаси $T_{\overrightarrow{AB}} S_l$ сирпанувчи симметрия бўлади, у иккинчи тур ҳаракатдир. Демак, бу ҳолда F сирпанувчи симметриядан иборат.

2) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмалар қарама-қарши йўналишли (103-чизма) $\rho(A, B) = \rho(B, C)$ бўлгани учун C нуқта A нуқта устига тушади. AB кесманинг ўрта перпендикуляри l ни ўтказамиз. Текисликда l тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришни бажарсак, A нуқта B га, B нуқта C $(= A)$ нуқтага ўтади. Шу билан бирга S_l — иккинчи тур ҳаракат. Демак, бу ҳолда $F = S_l$ алмаштириш l ўқли симметриядир.



103- чизма



104- чизма

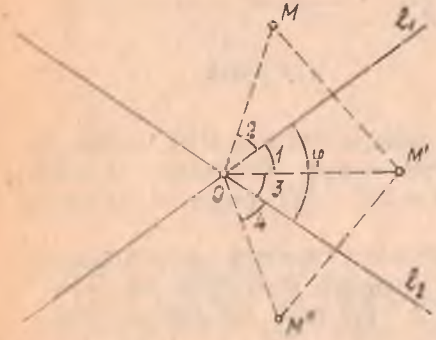
3) $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ кесмалар бир тўғри чизиқда ётмайди (104-чизма). Бу кесмаларнинг ўрталари орқали l тўғри чизиқни ўтказамиз. D нуқта AC кесманинг ўртаси бўлсин. $AB = BC \Rightarrow BD$ кесма AC кесмага перпендикуляр.

Текисликда l тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришни бажарсак, у A нуқтани A' нуқтага ўтказади. B нуқтани эса D нуқтага ўтказади, чунки l тўғри чизиқ $\triangle ABD$ нинг AB томони ўртасидан ўтади ва AD томонига параллел. $\overrightarrow{A'B} (= \overrightarrow{AD})$ вектор қадар параллел кўчириш A' нуқтани B нуқтага, D нуқтани C нуқтага ўтказади. Бу икки алмаштиришни кўпайтирсак, сирпанувчи симметрия ҳосил бўлиб, у A нуқтани B га, B нуқтани эса C нуқтага ўтказади. Демак, бу ҳолда F сирпанувчи симметриядир.

Шундай қилиб, текисликда ҳаракатларнинг ушбу таснифи ҳосил қилинади:

37- §. Ҳаракатни ўқли симметриялар кўпайтмасига ёйиш

1-теорема. *Агар иккита ўқли симметриянинг* l_1 *ва* l_2 *ўқлари O нуқтада кесишиб φ бурчак ҳосил қилса, уларнинг кўпайтмаси O нуқта атрофида 2φ бурчакка буриш бўлади ва, аксинча, текисликни O нуқта атрофида φ бурчакка буриш ўқлари O нуқтада кесишиб, ўзаро* $\frac{\varphi}{2}$ *бурчак ҳосил қилувчи иккита ўқли симметрия кўпайтмасига ажралади.*



105- чизма

Исбот. O нуқтада ўзаро φ бурчак ҳосил қилиб кесишувчи l_1, l_2 тўғри чизиқлар текислигида ихтиёрий M нуқта оламиз. M' нуқта текисликнинг l_1 ўқли симметрияда M нуқтанинг образи, M'' нуқта эса l_2 ўқли симметрияда M' нуқтанинг образи бўлсин (105- чизма).

Бу икки ўқли симметрияни кетма-кет бажарсак, M нуқта M'' нуқтага ўтади. Ўқли симметрия ҳаракат бўлгани учун қуйидагиларни ёза оламиз: $\rho(O, M)=\rho(O, M')$, $\rho(O,M')=$ $=\rho(O, M'')\Rightarrow\rho(O, M)=$ $=\rho(O, M'')$. Шунингдек, $\widehat{1}=\widehat{2}$ ва $\widehat{3}=\widehat{4}$, лекин $\widehat{1}+\widehat{3}=\varphi\Rightarrow$ $\Rightarrow\widehat{2}+\widehat{4}=\varphi$. Шундай қилиб, M нуқтани M'' нуқтага ўтказувчи S_{l_2}, S_{l_1} алмаштириш учун қуйидаги икки шарт бажарилади:

$$\rho(O,\ M) = \rho(O,\ M''),\ (M\widehat{O}M'') = 2\varphi.$$

Демак, S_{l_2}, S_{l_1} алмаштириш текисликда O нуқта атрофида 2φ бурчакка буришдан иборат.

Аксинча R_O^α текисликда O нуқта атрофида α бурчакка буриш бўлсин. O нуқта орқали шундай икки l_1, l_2 тўғри чизиқни ўтказамизки, улар орасидаги бурчак $(\widehat{l_1,\ l_2}) = \frac{\varphi}{2}$ бўлсин. Текисликни аввал l_1 тўғри чизиққа нисбатан, сўнгра l_2 тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришга дуч келтирамиз. Теореманинг биринчи қисмига кўра бу ўқли симметрияларнинг кўпайтмаси $S_{l_2} \cdot S_{l_1}$ алмаштириш текисликда O нуқта атрофида $2\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \varphi$ бурчакка буриш бўлади, бундан $\Rightarrow R_O^\alpha = S_{l_2} S_{l_1}$.

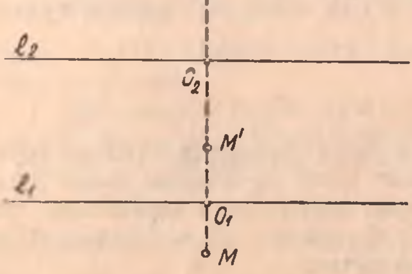
2-теорема. *Агар иккита ўқли симметриянинг ўқлари* l_1, l_2 *параллел бўлса, у ҳолда уларнинг кўпайтмаси узунлиги* $2\rho(l_1,\ l_2)$ *бўлган ва бу ўқларга перпендикуляр* $\vec{p} \neq \vec{0}$ *вектор қадар параллел кўчиришдир ва аксинча текисликни* $\vec{p} = \vec{0}$ *вектор қадар параллел кўчириш, ўқлари параллел ва ўқлари орасидаги масофа* $\frac{|\vec{p}|}{2}$ *бўлган иккита ўқли симметрия кўпайтмасига ажралади.*

Исбот. $l_1 \parallel l_2$ тўғри чизиқлар текислигида ихтиёрий M нуқта оламиз. Текисликда аввал l_1 тўғри чизиққа нисбатан, сўнгра l_2 тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришни бажарайлик.

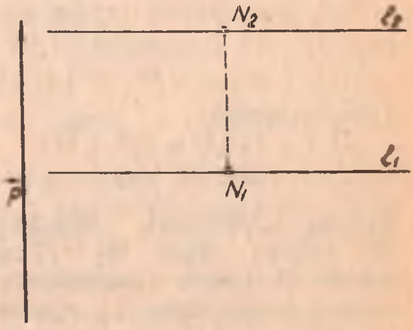
$$S_{l_1}(M) = M',\quad S_{l_2}(M') = M'';$$

бўлсин (106-чизма). S_{l_1}, S_{l_2} ни кетма-кет бажарамиз. Натижавий $S_{l_2} S_{l_1}$ алмаштириш M нуқтани M'' нуқтага ўтказади.

Ўқли симметрия таърифига кўра $\rho(O_1,\ M) = \rho(O_1,\ M')$, $\rho(O_2,\ M') = \rho(O_2,\ M'')$. Бу ерда O_1 нуқта MM' кесманинг, O_2 нуқта эса $M'M''$ кесманинг ўртаси:



106-чизма



107-чизма

$$\rho(M, M'') = \rho(M, O_1) + \rho(O_1, O_2) + \rho(O_2, M'') = \rho(O_1, M') + + \rho(O_1, O_2) + \rho(M', O_2) = 2\rho(O_1, O_2). \quad (8)$$

M нуқта l_1, l_2 тўғри чизиқлар билан чегараланган полосага тегишли бўлганда ҳам (8) тенгликнинг бажарилишига ишонч ҳосил қилиш мумкин. (8) дан кўриниб турибдики, текисликда $S_{l_2} S_{l_1}$ алмаштириш уни $2\rho(O_1, O_2)$ узунликдаги вектор қадар параллел кўчиришдан иборат.

Аксинча, $T_{\vec{p}}$ текисликда $\vec{p}$ вектор қадар параллел кўчириш бўлсин. Текисликда шундай N_1, N_2 нуқталарни оламизки, $\overrightarrow{N_1N_2} = \frac{1}{2}\vec{p}$ бўлсин. N_1, N_2 нуқталар орқали N_1N_2 тўғри чизиққа перпендикуляр l_1, l_2 тўғри чизиқларни ўтказамиз (107-чизма). У ҳолда $l_1 \parallel l_2$ ва $\rho(l_1, l_2) = \frac{1}{2}|\vec{p}|$ бўлади, S_{l_1}, S_{l_2} ни бажарсак, теореманинг биринчи қисмига кўра $S_{l_2} S_{l_1}$ алмаштириш текисликда $\vec{p}$ вектор йўналишида $2\left(\frac{1}{2}|\vec{p}|\right) = |\vec{p}|$ масофа қадар параллел кўчириш бўлади. Демак, $T_{\vec{p}} = S_{l_2} S_{l_1}$. ▲

38-§. Текисликда ҳаракатлар группаси ва унинг қисм группалари

D орқали текисликда барча ҳаракатлар тўпламини белгилайлик. F_1, F_2 шу D тўпламдан олинган ҳар қандай икки ҳаракат бўлсин. F_1 ҳаракат текисликдаги ҳар қандай M, N нуқталарни M', N' нуқталарга ўтказсин, F_2 ҳаракат эса M', N' нуқталарни M'', N'' нуқталарга ўтказсин. У ҳолда ҳаракат таърифига кўра

$$\rho(M, N) = \rho(M', N), \ \rho(M', N') = \rho(M'', N''). \quad (9)$$

F_1, F_2 алмаштиришларни кўпайтирсак (яъни кетма-кет бажарсак), текисликда F_2F_1 алмаштириш ҳосил бўлади. Бу алмаштиришда $F_1(M) = M''$, $F_1(N) = N''$ ва (9) га кўра $\rho(M, N) = \rho(M'', N'') \Rightarrow$ $\Rightarrow F_2F_1$ алмаштириш ҳаракатдир. F_1 ҳаракатга тескари F_1^{-1} алмаштириш M', N' нуқталарни M, N нуқталарга ўтказади ва $\rho(M, N) =$ $= \rho(M', N') \Rightarrow \rho(M', N') = \rho(M, N)$ га кўра F_1^{-1} ҳаракат бўлади. Шундай қилиб

1) F_1, $F_2 \in D \Rightarrow F_2F_1 \in D$.
2) $F_1 \in D \Rightarrow F_1^{-1} \in D$.

Бундан кўринадики, текисликдаги барча ҳаракатлар тўплами группа ташкил этади, бу группанинг қисм группалари билан танишамиз. D_1 орқали текисликдаги барча биринчи тур ҳаракатлар тўпламини белгилаймиз. D_1 тўплам D тўпламнинг қисм тўплами бўлади. $\forall F_1$, $F_2 \in D_1$ алмаштиришларни оламиз.

F_1 текисликдаги бирор $\mathcal{B}$ декарт реперини у билан бир хил ориентацияли $\mathscr{B}'$ декарт реперига ўтказади (биринчи тур ҳаракат таърифига кўра). F_2 эса $\mathscr{B}'$ ни у билан бир хил ориентацияли $\mathscr{B}''$ реперга ўтказади. F_1 ва F_2 нинг кўпайтмаси ҳаракат бўлиб, у $\mathscr{B}$ реперни $\mathscr{B}''$ реперга ўтказади ва $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}''$ реперлар бир хил ориентациялидир. Бундан $\Rightarrow F_2F_1$ — биринчи тур ҳаракат, $F_1 : \mathscr{B} \to \mathscr{B}' \Rightarrow$ $\Rightarrow F_1^{-1} : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}$ ва $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}$ реперлар бир хил ориентацияли, бундан F_1^{-1} нинг биринчи тур ҳаракатлиги ойдин бўлади. Шундай қилиб

1) $F_1, \ F_2 \in D_1 \Rightarrow F_2F_1 \in D_1$,

2) $F_1 \in D_1 \Rightarrow F_1^{-1} \in D_1$.

Демак, D_1 группа ташкил этади. Қисм группа таърифига кўра (32- § D_1 группа D группанинг қисм группасидир.

Энди D_2 текисликдаги барча иккинчи тур ҳаракатлар тўплами бўлсин.

Иккита F_1, $F_2 \in D_2$ алмаштиришни оламиз. $\mathscr{B}$ текисликдаги бирор декарт репери, $F_1 : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ ва $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар қарама-қарши ориентацияли бўлсин. $F_2 : \mathscr{B}' \to \mathscr{B}''$ ва $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}''$ реперлар қарама-қарши ориентацияга эга; F_1, F_2 алмаштиришларни кўпайтирсак, F_2F_1 алмаштириш ҳосил бўлиб, $F_2F_1 : \mathscr{B} \to \mathscr{B}''$ ва $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}''$ реперлар бир хил ориентацияли бўлади. Шунинг учун F_2F_1 — биринчи тур ҳаракат. Хуллас, D_2 тўплам группа ташкил этмайди.

$D_1(M_0)$ орқали текисликни M_0 нуқта атрофида барча буришлар тўпламини белгилаймиз. Ҳар бир буриш биринчи тур ҳаракат бўлгани учун $D_1(M_0)$ тўплам D_1 учун қисм тўпламдир. $\forall f_1, \ f_2 \in D_1(M_0)$ буришларни оламиз. f_1 алмаштириш M_0 нуқта атрофида α бурчакка, f_2 эса β бурчакка буриш бўлсин, яъни $f_1 = R^{\alpha}_{M_0}$, $f_2 = R^{\beta}_{M_0}$. Текисликнинг ихтиёрий M нуқтасини R^{α}_{M} буриш M' нуқтага ўтказсин. $R^{\beta}_{M_0}$ буриш эса M' нуқтани M'' нуқтага ўтказсин. У ҳолда $R^{\beta}_{M_0} R^{\alpha}_{M_0}$ алмаштириш M нуқтани M'' нуқтага ўтказади ва у M_0 нуқта атрофида $\beta + \alpha$ бурчакка буриш бўлади. $\forall R^{\alpha}_{M_0}$ буришга тескари f^{-1} алмаштириш M_0 нуқта атрофида $-\alpha$ бурчакка буриш бўлади. Шундай қилиб,

1) $R^{\alpha}_{M_0}, \quad R^{\beta}_{M_0} \in D_1(M_0) \Rightarrow R^{\beta}_{M_0} R^{\alpha}_{M_0} \in D_1(M_0)$;

2) $R^{\alpha}_{M_0} \in D_1(M_0) \Rightarrow f^{-1} = R^{-\alpha}_{M_0} \in D_1(M_0)$.

Демак, $D_1(M_0)$ тўплам группа ташкил этади, у D_1 группа учун қисм группадир.

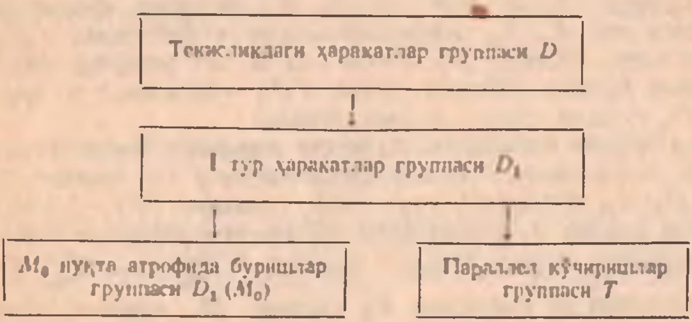
T текисликдаги барча параллел кўчиришлар тўплами бўлсин. Ҳар бир параллел кўчириш биринчи тур ҳаракат бўлгани учун (39- §) T тўплам D_1 тўпламнинг қисм тўпламидир. f_1, f_2 лар T тўпламнинг ҳар қандай икки алмаштириши ва f_1 текисликда $\vec{p}$ вектор қадар параллел кўчириш, f_2 эса текисликда $\vec{q}$ вектор қадар параллел кўчириш, яъни $f_1 = T_{\vec{p}}$, $f_2 = T_{\vec{q}}$ бўлсин. Ихтиёрий M нуқтани оламиз:

$$\left.\begin{aligned} T_{\vec{p}}: M \to M' \Rightarrow \overrightarrow{MM'} = \vec{p}, \\ T_{\vec{q}}: M' \to M'' \Rightarrow \overline{M'M''} = \vec{q}. \end{aligned}\right| \qquad (10)$$

У ҳолда $T_{\vec{q}} T_{\vec{p}}: M \to M''$ ва (10) га кўра $\overrightarrow{MM''} = \overrightarrow{MM'} + \overline{M'M''} = \vec{p} + \vec{q} \Rightarrow T_{\vec{q}} T_{\vec{p}}$ алмаштириш текисликда $\vec{p} + \vec{q}$ вектор қадар параллел кўчиришдир. $\forall f_1$ га тескари алмаштириш $f_1^{-1}: M' \to M$ ва $\overline{MM'} = \vec{p} \Rightarrow \overline{M'M} = -\vec{p} \Rightarrow f_1^{-1}$ алмаштириш текисликда $-\vec{p}$ вектор қадар параллел кўчириш экан.

Шундай қилиб, 1) $f_1, f_2 \in T \Rightarrow f_2, f_1 \in T$; 2) $f_1 \in T \Rightarrow f_1^{-1} \in T$ Демак, T группа бўлиб, у D_1 группанинг қисм группасидир.

Шундай қилиб, биз ҳаракатлар группаси ва унинг қисм группаларининг ушбу схемасини ҳосил қиламиз:



G бирор алмаштиришлар группаси, Ф текисликдаги бирор фигура бўлсин. Ф фигурани G группанинг барча алмаштиришларида ўзгармай қоладиган хоссаларини G группанинг *инвариант хоссалари* ёки *инвариантлари* дейилади. G_0 тўплам G группанинг қисм группаси бўлса, G группанинг барча инвариантлари G_0 нинг ҳам инвариантлари бўлади. Лекин G_0 қисм группанинг ўзига хос шундай инвариантлари бўладики, улар энди G группанинг инвариантлари бўлмайди. Юқорида баён этилган ҳаракатлар группаси ва унинг қисм группаларининг инвариантлари билан танишамиз.

Ҳаракатлар группаси D нинг асосий инварианти икки нуқта орасидаги масофадир.

Фигуранинг кесма, нур, тўғри чизиқ, бурчак бўлиши, тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбати, тўғри чизиқларнинг параллеллиги, бурчак ва юз катталиклари ҳаракатнинг инвариантларидир.

D группанинг барча инвариантлари унинг D_1 қисм группасининг (биринчи тур ҳаракатлар группасининг) ҳам инвариантлари бўлади. Бундан ташқари, D_1 группада бурчакнинг ориентацияси сақланади. Демак, D_1 группанинг ўзига хос инварианти бурчак ориентациясидир.

$D_1(M_0)$ ва T группалар D_1 группанинг қисм группалари бўлгани учун D_1 группанинг барча инвариантлари $D_1(M_0)$ группанинг, шунингдек, T группанинг ҳам инвариантлари бўлади.

$D_1(M_0)$ группанинг ўзига хос инварианти (M_0 нуқта ўз-ўзига ўтгани учун) M нуқтанинг M_0 марказгача бўлган масофаси $\rho(M_0, M)$ дир. T группанинг ўзига хос инварианти йўналишдир (чунки ҳар қандай параллел кўчириш нурни ўзи билан бир хил йўналишли нурга ўтказади).

39-§. Геометрик фигураларнинг симметрия группалари

Ф текисликдаги бирор фигура бўлсин. D_Φ орқали Ф фигурани ўз-ўзига ўтказадиган текисликдаги барча ҳаракатлар тўпламини белгилаймиз. Масалан, Ф фигура тенг ёнли ABC учбурчак (бунда $AB = BC$, $AC \neq AB$) ва BD тўғри чизиқ унинг симметрия ўқи бўлсин. Текисликда айнан алмаштириш ва BD ўқли симметрия $\Delta\ ABC$ ни ўз-ўзига ўтказади. Демак, $D_{\Delta ABC}$ иккита элементдан ташкил топган: бири E_0 айнан алмаштириш, иккинчиси BD ўқли симметрия.

$\forall f_1, f_2 \in D_\Phi$ ни олайлик. $f_1(\Phi) = \Phi$, $f_2(\Phi) = \Phi$ бўлгани учун $f_2 f_1(\Phi) = \Phi$ дейиш мумкин. $f_1(\Phi) = \Phi$, бундан $f_1^{-1}(\Phi) = \Phi$.

Шундай қилиб, 1) $f_1, f_2 \in D_\Phi \Rightarrow f_2 f_1 \in D_\Phi$, 2) $f_1 \in D_\Phi \Rightarrow f_1^{-1} \in D_\Phi$. Демак, D_Φ группа ташкил қилади.

Агар D_Φ группа E_0 айнан алмаштиришдан фарқли элементга эга бўлса, у ҳолда D_Φ ни Ф фигура *симметрияларининг группаси* дейилади. Агар D_Φ фақатгина E_0 айнан алмаштиришдан иборат, яъни $D_\Phi = \{E_0\}$ бўлса, у ҳолда Ф фигура *симметрияларга эга эмас* дейилади. Масалан, Ф фигура турли томонли ABC учбурчак бўлсин, текисликда айнан алмаштиришгина $\Delta\ ABC$ ни ўз-ўзига ўтказади. Демак, ихтиёрий $\Delta\, ABC$ симметрия элементларига эга эмас.

Агар бирор l ўқли симметрияда Ф фигура инвариант, яъни $S_l(\Phi) = \Phi$ бўлса, l тўғри чизиқ Ф *фигуранинг симметрия ўқи* дейилади, бу ҳолда Ф фигурани l тўғри чизиққа нисбатан *симметрик* деб айтамиз. Масалан, ромбнинг диагоналлари унинг симметрия ўқлари бўлади, чунки бу диагоналларнинг ҳар бирига нисбатан симметрик алмаштиришни бажарсак, ромб ўз-ўзига ўтади.

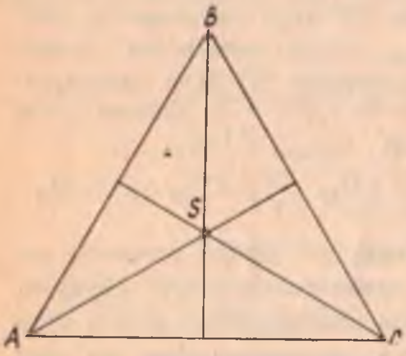
Агар бирор M_0 нуқтага нисбатан симметрик алмаштиришни қарасак ва унинг натижасида Ф фигура инвариант бўлса, M_0 нуқта Ф *фигуранинг симметрия маркази* дейилади, бу ҳолда Ф фигурани M_0 нуқтага нисбатан *симметрик* деб айтамиз. Масалан, параллелограмм диагоналларининг кесишган M_0 нуқтаси унинг симметрия марказидир.

Агар текисликда S нуқта атрофида $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ бурчакка буришда Ф фигура инвариант бўлса, S нуқта Ф фигуранинг *n-тартибли буриш маркази* дейилади, бу ерда n — бирдан катта ҳар қандай натурал сон. Масалан, тўғри тўртбурчак диагоналларининг кесишган

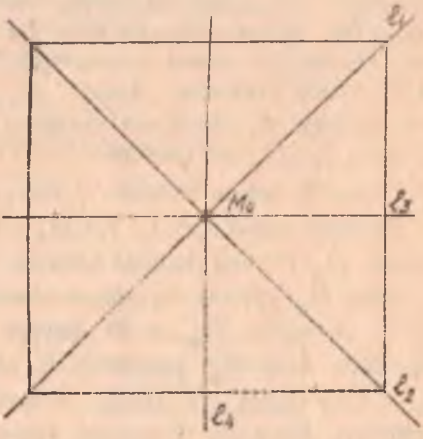
M_0 нуқтаси унинг 2-тартибли буриш марказидир, чунки M_0 нукта атрофида $\alpha = \frac{2\pi}{2} = \pi$ бурчакка буришда тўғри тўртбурчак инвариант бўлади. Ф фигура мунтазам кўпбурчак бўлганда буриш маркази S унинг марказидан иборатдир.

Ф фигуранинг симметрия ўқи, симметрия маркази ва n-тартибли буриш маркази унинг *симметрия элементлари* дейилади.

Мисоллар. 1) Ф мунтазам учбурчакнинг (108-чизма) симметрия элементлари учта симметрия ўқи AS, BS, CS ва учинчи тартибли буриш маркази S дан иборат $\left(\alpha = \frac{2\pi}{3} = 120°\right)$, бу ерда S — мунтазам учбурчакнинг маркази: симметрия группаси: $D_\Phi = \{E_0, AS, BS, CS, S\}$.



108-чизма



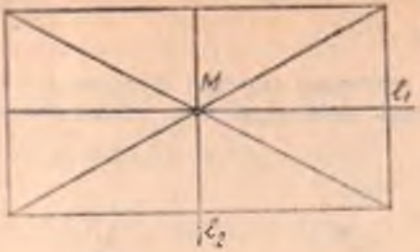
109-чизма

2) Ф квадратнинг (109-чизма) симметрия элементлари тўртта симметрия ўқи l_1, l_2, l_3, l_4, симметрия маркази M_0 ва иккинчи, тўртинчи тартибли буриш маркази $S = M_0$ дан иборат $\left(\alpha_1 = \frac{2\pi}{2} = 180^c, \alpha_2 = \frac{2\pi}{4} = 90°\right)$. Унинг симметрия группаси $D_\Phi = \{E_0, l_1, l_2, l_3, l_4, M_0, S\}$.

Вазифа. Тенг ёнли трапеция, ромб ва мунтазам олти бурчакнинг симметрия элементлари топилсин.

3) Ф тўғри тўртбурчакнинг (110-чизма) симметрия элементлари симметрия маркази M_0, иккита симметрия ўқи l_1, l_2 ва иккинчи тартибли буриш маркази $M_0 = S$ дир. Унинг симметрия группаси $D_\Phi = \{E_0, M_0, l_1, l_2, S\}$ бўлади.

4) Ф параллелограмм бўлганда (111-чизма) унинг симметрия элементи иккита марказ: бири симметрия маркази M_0, иккинчиси



110-чизма

111-чизма

иккинчи тартибли буриш маркази $M_0 = S$ дан иборат бўлиб, $D_\Phi = \{E_0, M_0, S\}$.

40-§. Ўхшашлик алмаштириши, гомотетия

$k > 0$ сон берилган бўлсин.

1-таъриф. Текисликнинг ҳар қандай икки M, N нуқтасига

$$\rho(M', N') = k\rho(M, N) \qquad (11)$$

шартни қаноатлантирувчи M', N'нуқталарини мос келтирадиган алмаштириш текисликда $k > 0$ *коэффициентли ўхшашлик алмаштириши* дейилади ва p^k кўринишда белгиланади. k сон *ўхшашлик коэффициенти* дейилади.

Текисликда ўхшашлик алмаштириши барча масофаларни $k > 0$ марта (қадар) ўзгартиради.

2-таъриф. Агар Ф фигурани унинг исталган икки нуқтаси орасидаги масофани $k > 0$ сон марта ўзгартирадиган қилиб Ф′ фигурага биектив акслантириш мавжуд бўлса, Ф′ фигура Ф фигурага k *коэффициентли ўхшаш* дейилади.

1-таърифданоқ, ўхшашлик алмаштириши ҳар қандай берилган фигурани ўзига ўхшаш фигурага ўтказиши равшан.

Агар ўхшашлик коэффициенти $k = 1$ бўлса, текисликда ҳаракат ҳосил қилинади. Демак, ҳаракат ўхшашлик алмаштиришининг хусусий ҳолидир.

Ўхшашлик алмаштиришига яна бир мисол сифатида гомотетия билан танишамиз. Текисликда S нуқта ва $k \neq 0$ сон берилган бўлсин.

3-таъриф. Текисликнинг ҳар бир M нуқтасига

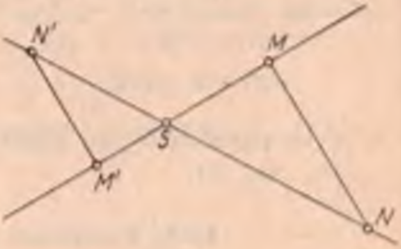
$$\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM} \qquad (12)$$

шартни қаноатлантирувчи M' нуқтани мос келтирадиган алмаштириш текисликда *k коэффициентли ва S марказли гомотетик алмаштириш*, *қисқача гомотетия* деб аталади. S нуқта *гомотетия маркази*, k сон *гомотетия коэффициенти* дейилади. S марказли ва k коэффициентли гомотетия H_S^k билан белгиланади.

Гомотетия маркази S ўзига-ўзига мос ҳисобланади. $k = 1$ коэффициентли гомотетия текисликда айнан алмаштириш бўлади, чунки $k = 1$ да $\overrightarrow{SM'} = \overrightarrow{SM}$, бундан $M' = M$.

Агар $k > 0$ бўлса, $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SM'}$ векторлар бир хил йўналишли бўлиб, мос M, M' нуқталар гомотетия марказидан бир томонда ётади (112- чизма).

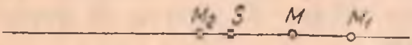
112- чизма



113- чизма

$k < 0$ бўлган ҳолда $\overrightarrow{SM}$, $\overrightarrow{SM'}$ векторлар қарама-қарши йўналишли ва мос M, M' нуқталар гомотетия марказидан турли томонда ётади (113- чизма).

114- чизмада берилган M нуқтани S марказга нисбатан $k = 2$ коэффициент бўйича гомотетик алмаштиришдан ҳосил бўлган M_1 нуқта $\overrightarrow{SM_1} = 2 \cdot \overrightarrow{SM}$ талабга жавоб беради ва SM тўғри чизиқда M нуқта билан S дан бир томонда ётади. M_2 нуқта M нуқтани S марказдан $k = -\frac{1}{2}$ коэффициент билан гомотетик алмаштиришдан ҳосил бўлган, у $\overrightarrow{SM_2} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{SM}$ талабга жавоб беради ва SM тўғри чизиқда M нукта билан S дан турли томонда ётади.



114- чизма

Берилган фигурани ташкил этувчи барча нуқталарни берилган S марказ ва берилган $k \neq 0$ коэффициент билан гомотетик алмаштиришдан ҳосил бўлган нуқталар тўплами берилган фигурага *гомотетик фигура* дейилади.

115- чизмада S марказли ва $k = -2$ коэффициентли H_S^{-2} гомотетияда берилган $ABCD$ трапецияга гомотетик $A'B'C'D'$ трапеция ясалган.

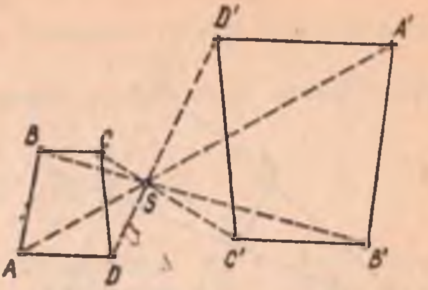
Гомотетиянинг ўхшаш алмаштириш эканини кўрсатамиз. H_S^k $(k \neq 0)$ гомотетия M нуқтани M' га, N нуқтани N' нуқтага ўтказсин, яъни

$$\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}, \quad \overrightarrow{SN'} = k\overrightarrow{SN}. \tag{13}$$

Векторларни қўшишнинг учбурчак қоидасига ва (13) га кўра

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{SN'} - \overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SN} - k\overrightarrow{SM} = k(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM}) = k\overrightarrow{MN}, \quad (14)$$

бундан $|\overrightarrow{M'N'}| = |k|\,|\overrightarrow{MN}|$, бу тенгликдан H_S^k гомотетиянинг $|k|$ коэффициентли ўхшаш алмаштириш экани келиб чиқади.



115- чизма

Гомотетия қуйидаги хоссаларга эга.

1°. Гомотетия тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбатини сақлайди.

Исбот. H_S^k гомотетия MN тўғри чизиққа тегишли L' нуқтани l нуқтага ўтказсин, яъни $H_S^k(L) = L'$ бўлсин. У ҳолда (14) муносабат сингари

$$\overrightarrow{N'L'} = k\overrightarrow{NL} \quad (15)$$

ни ҳосил қиламиз, бунда (14), (15) муносабатлардан $\frac{\overrightarrow{M'N'}}{\overrightarrow{N'L'}} = \frac{\overrightarrow{MN}}{\overrightarrow{NL}}$,

бундан эса $(M'L', N') = (ML, N)$. ▲

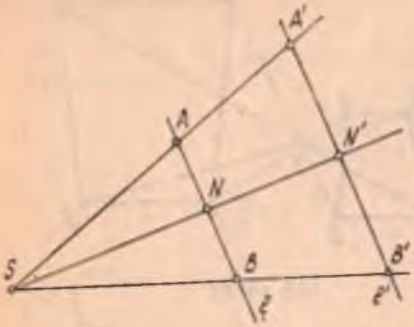
Бу хоссадан қуйидаги натижалар келиб чиқади: гомотетия кесмани кесмага, нурни нурга, тўғри чизиқни тўғри чизиққа алмаштиради.

2°. Гомотетияда тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа ўтади. Хусусий ҳолда гомотетия марказидан ўтувчи тўғри чизиқ ўз-ўзига ўтади.

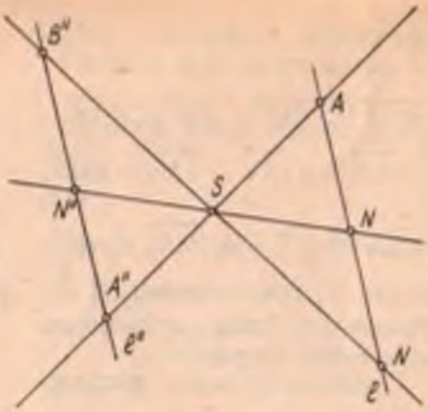
Исбот. H_S^k гомотетияда акслантирилаётган l тўғри чизиқ гомотетия марказидан ўтсин. Гомотетия таърифига кўра l тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий M нуқтага гомотетик M' нуқта шу l тўғри чизиқда ётади. Иккинчи томондан, l тўғри чизиқда ётувчи ихтиёрий M' нуқта учун шу l тўғри чизиқда шундай M нуқта топиладики, $H_S^k(M) = M'$ бўлади, демак, бу ҳолда $H_S^k(l) = l$.

Энди берилган l тўғри чизиқ гомотетия марказидан ўтмасин ва $k > 0$ бўлсин (116-*а* чизма). Берилган l тўғри чизиқнинг ихтиёрий A, B нуқталарини олиб, уларга гомотетик нуқталарни A', B' билан белгилаймиз. Гомотетия таърифидан: $\overrightarrow{SA'} = k\overrightarrow{SA}$ ва $\overrightarrow{SB'} = k\overrightarrow{SB}$. Булардан фойдаланиб, $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ тенгликни ёза оламиз. У ҳолда $\overrightarrow{A'B'} \parallel \overrightarrow{AB}$, бундан $A'B'$ ва AB тўғри чизиқларнинг параллеллиги келиб чиқади.

$A'B'$ тўғри чизиқнинг $AB = l$ тўғри чизиқ учун образ эканини кўрсатамиз (116-*а* чизма).



116- *а* чизма



116- *б* чизма

Бунинг учун AB тўғри чизиққа тегишли ҳар қандай N нуқтани оламиз. N' бу нуқтанинг H_S^k даги образи бўлсин, яъни $\overrightarrow{SN'} = k\overrightarrow{SN}$, у ҳолда $\overrightarrow{A'N'} = k\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{A'N'} \parallel \overrightarrow{AN}$, лекин $\overrightarrow{AN} \parallel \overrightarrow{AB}$,

$$\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow \overrightarrow{A'N'} \parallel \overrightarrow{A'B'} \Rightarrow N' \in A'B'.$$

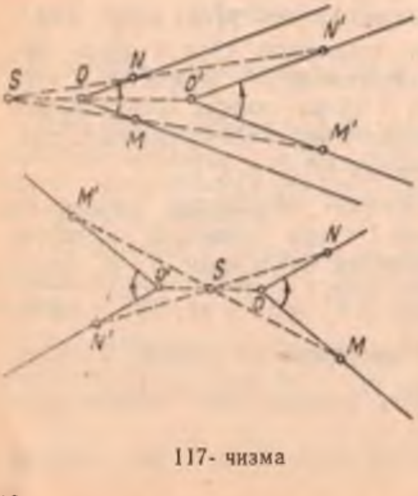
Демак, $l' = A'B'$ тўғри чизиқ $AB = l$ тўғри чизиқнинг образи экан. ▲

Берилган тўғри чизиқ гомотетия марказидан ўтмаса ва $k < 0$ бўлса, l тўғри чизиққа гомотетик фигура унга параллел l' тўғри чизиқ бўлади (116- *б* чизма). Бунинг ўринлилиги ҳам айнан юқоридаги каби кўрсатилади.

3°. Гомотетик алмаштиришда бурчакнинг катталиги ўзгармайди.

Исбот. $k > 0$ бўлганда алмашинувчи нур билан унинг образи бир хил йўналишли, $k < 0$ бўлганда улар қарама-қарши йўналишли бўлади. Бундан иккала ҳолда ҳам ҳар қандай MON бурчак ўзига конгруэнт ва у билан бир хил ориентацияли $M'O'N'$ бурчакка ўтади деган хулоса чиқарамиз (117- чизма).

4°. Гомотетияда тўғри чизиқларнинг параллеллиги сақланади.



117- чизма

Исбот. Агар $l \parallel m$ бўлса, $l' \parallel l$, $m' \parallel m$ бўлгани учун $l' \parallel m'$ бўлади. ▲

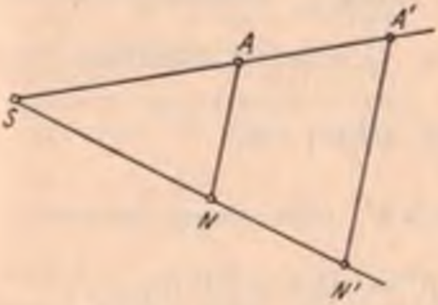
5°. Гомотетик алмаштиришда кесманинг узунлиги $|k|$ марта ўзгаради.

Исбот. H_S^k да $\forall$ AB кесманинг образи $A'B'$ кесма бўлсин. Гомотетия таърифига кўра

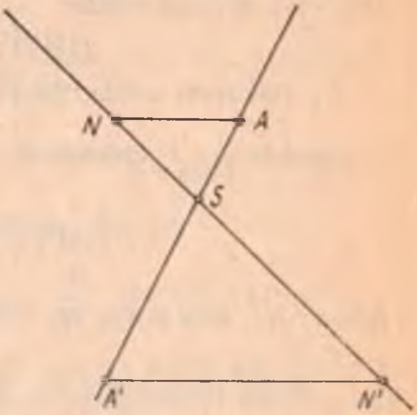
$$\overrightarrow{SA'} = k\,\overrightarrow{SA}, \quad \overrightarrow{SB'} = k\,\overrightarrow{SB},$$

бу тенгликлардан $\overrightarrow{A'B'} = k\,\overrightarrow{AB}$ муносабатни ёза оламиз. Бундан $k > 0$ бўлганда $A'B' = kAB$, $k < 0$ бўлганда $A'B' = |k|\,AB$. Демак, H_S^k да $\forall$ AB кесманинг узунлиги (яъни A, B нуқталар орасидаги масофа) $|k|$ марта ўзгаради.

Гомотетия унинг маркази ва коэффициентининг берилиши ёки гомотетия маркази ва бир жуфт мос нуқталарнинг берилиши билан ягона равишда аниқланади.



118-*а* чизма



118-*б* чизма

Гомотетиянинг маркази билан коэффициенти берилса, текисликнинг ҳар бир M нуқтасига гомотетик M' нуқта 3-таъриф асосида топилади. Агар гомотетия S — гомотетия маркази ва бир жуфт мос A, A' нуқталар билан берилса (118-*а*, *б* чизма), $\forall$ N нуқтага гомотетик N' нуқта қуйидагича топилади: гомотетия таърифига кўра S, A, A' нуқталар битта тўғри чизиқда ётади. AN тўғри чизиқни ўтказамиз. A' нуқтадан $A'N' \parallel AN$ тўғри чизиқни ўтказамиз. $A'N' \cap SN = N'$ изланган нуқта бўлади, чунки $\overrightarrow{SA'} \parallel \overrightarrow{SA}$ бўлгани учун $\frac{\overrightarrow{SA'}}{\overrightarrow{SA}} = k$ бўлсин десак, $\triangle SAN \sim \triangle SA'N'$ бўлганидан $\overrightarrow{SN'} = k\overrightarrow{SN}$.

41-§. Ўхшашлик алмаштириши — гомотетия билан ҳаракатнинг кўпайтмаси

Теорема. *$k > 0$ коэффициентли ўхшашлик алмаштириши шу коэффициентли гомотетия билан ҳаракатнинг кўпайтмасидан иборат.*

Исбот. P^k текисликни $k > 0$ коэффициентли ўхшаш алмаштириш, M', N' нуқталар текисликнинг M, N нуқталарини бу ўхшаш алмаштиришдаги образлари бўлсин, яъни

$$P^k(M) = M', \quad P^k(N'), = N', \text{ у ҳолда}$$

$$\rho(M', N') = k\rho(M, N). \tag{16}$$

Текисликда бирор S нуқтани оламиз ҳамда шу текисликда S марказли ва k коэффициентли H_S^k гомотетик алмаштиришни бажарамиз. Бу алмаштиришда $H_S^k(M) = M''$, $H_S^k(N) = N''$ бўлсин. Гомотетия таърифидан, $\overrightarrow{M''N''} = k\overrightarrow{MN}$, бундан

$$\rho(M'', N'') = k\rho(M, N). \tag{17}$$

(16), (17) муносабатлардан

$$\rho(M'N') = \rho(M'', N''). \tag{18}$$

H_S^k гомотетик алмаштиришга тескари f^{-1} алмаштириш текисликни S марказли ва $\frac{1}{k}$ коэффициентли $H_S^{\frac{1}{k}}$ гомотетик алмаштириш бўлиб,

$$H_S^{\frac{1}{k}}(M'') = M, \quad H_S^{\frac{1}{k}}(N'') = N.$$

Аввало $H_S^{\frac{1}{k}}$ алмаштиришни, сўнгра P^k алмаштиришни бажарайлик:

$$P^k(H_S^{\frac{1}{k}}(M'')) = P^k(M) = M', \quad P^k(H_S^{\frac{1}{k}}(N'')) = P^k(N) = N',$$

шу билан бирга $\rho(M'', N'') = \rho(M'; N')$, бундан $P^k H^k_S$ кўпайтма билан ифодаланган алмаштиришнинг ҳаракат эканини кўрамиз, яъни

$$P^k H_S^{\frac{1}{k}} = F \Rightarrow P^k = FH_S^k. \ ▲$$

Бу теоремага асосан ҳаракат ва гомотетия учун умумий бўлган хоссаларни ўхшашлик алмаштиришининг хоссалари деб қабул қилиш мумкин.

Бу хоссаларнинг баъзиларини келтирамиз:

1°. Ўхшашлик алмаштиришда тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади.

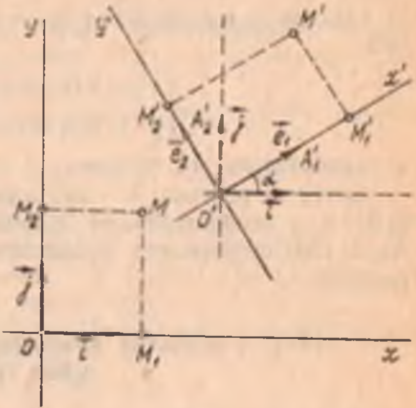
Бундан ўхшашлик алмаштиришда кесма кесмага, нур нурга, тўғри чизиқ тўғри чизиққа, бурчак бурчакка, ярим текислик ярим текисликка ўтади деган натижани ҳосил қиламиз.

2° Ўхшашлик алмаштириши бурчакни унинг ўзига конгруэнт бурчакка ўтказади.

3°. Ўхшашлик алмаштиришида параллел тўғри чизиқларнинг образлари ҳам параллел бўлади.

42- §. Ўхшашлик алмаштиришининг аналитик ифодаси

Текисликда $\mathscr{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперини оламиз. Текисликни $k > 0$ коэффициентли P^k ўхшашлик алмаштириши бу реперни шундай $\mathscr{B}' = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперга ўтказадики (119- чизма), бунда $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ ва $|\vec{e}_1| = |\vec{e}_2| = k$ бўлади (ўхшашлик алмаштириши таърифи ва 45- § даги 2°- хоссага асосан). M — текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' эса унинг P^k даги образи бўлсин. M нуқта биринчи реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлганда унинг M' образи иккинчи реперга нисбатан шу x, y координаталарга эга бўлади. Ҳақиқатан, фараз қилайлик, M' нуқта $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан x^*, y^* координаталарга эга бўлсин. $MM_1 \parallel OA_2$ ва $MM_2 \parallel OA_1$ тўғри чизиқларни ўтказамиз, бунда M_1 нуқта OA_1 тўғри чизиққа тегишли, у ҳолда



119- чизма

$$x = \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = -(M_1\ A_1,\ O),\quad y = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OA_2}} = -(M_2\ A_2, O).$$

$P^k(M_1) = M_1'$, $P^k(M_2) = M_2'$ бўлсин. Ўхшашлик алмаштиришида нуқтанинг тўғри чизиқда ётиши ва тўғри чизиқларнинг параллеллиги сақлангани учун:

M_1' нуқта $O'A_1'$ тўғри чизиққа тегишли, N_2 нуқта $O'A_2'$ тўғри чизиққа тегишли ва $M'M_1' \parallel O'A_2'$, $M'M_2' \parallel O'A_1' \Rightarrow x^* = \dfrac{\overrightarrow{O'M_1}}{\overrightarrow{O'A_1}} = -(M_1', A_1', O')$.

$$y^* = \frac{\overrightarrow{O'M_2}}{\overrightarrow{O'A_2}} = -(M_2'\ A_2'\ O').$$

Ўхшашлик алмаштиришида тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбати сақлангани учун $(M_1'A_1', O) = (M_1A_1, O_1)$, $(M_2A_2', O') = (M_2\ A_2,\ O) \Rightarrow$ $\Rightarrow x^* = x$, $y^* = y$. Демак, $\mathscr{B}'$ реперда $M' = P^k(M)$ нуқта ўша x, y координаталарга эга. $(\widehat{\vec{i}, \vec{e}_1}) = \alpha$ ва $\mathscr{B}$ реперга нисбатан $M'(x', y')$,

$O'(x_0, y_0)$ бўлсин. У ҳолда $\vec{i}, \vec{j}$ базисга нисбатан $\vec{e}_1(k\cos\alpha,\ k\sin\alpha)$, $\vec{e}_2(-\varepsilon k\sin\alpha,\ \varepsilon k\cos\alpha)$ (II боб, 19- § га қаралсин):

$$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{i} = y'\vec{j},\ \overrightarrow{OO'} = x_0\vec{i} + y_0\vec{j}. \qquad (19)$$

Бу ерда $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар бир хил (қарама-қарши) ориентацияли бўлганда $\varepsilon = 1$ $(\varepsilon = -1)$ бўлади ва (19) тенгликларни ҳисобга олиб, $\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}$ ва $\overrightarrow{O'M'} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ дан $x'\vec{i} + y'\vec{j} = [x_0 + k(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha)]\vec{i} + [y_0 + k(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha)]\vec{j}$
ёки

$$\begin{cases} x' = k(x\cos\alpha - \varepsilon y\sin\alpha) + x_0 \\ y' = k(x\sin\alpha + \varepsilon y\cos\alpha) + y_0 \end{cases} \qquad (20)$$

муносабатларга эга бўламиз.

Битта $\mathscr{B}$ реперда M' нуқтанинг x', y' координаталари M нуқтанинг x, y координаталари орқали (20) формулалар бўйича ифодаланади. (20) формулалар ўхшашлик алмаштиришининг аналитик ифодасидир.

43- §. Ўхшашлик алмаштиришлари группаси ва унинг қисм группалари

P орқали текисликнинг барча ўхшашлик алмаштиришлари тўпламини белгилайлик. $\forall P^{k}$, $P^{k_2} \in P$ ўхшашлик алмаштиришларни оламиз. M, N' текисликнинг ихтиёрий икки нуқтаси бўлсин. P^{k_1} ўхшашлик алмаштириши бу нуқталарни M', N' нуқталарга, P^{k_2} ўхшашлик алмаштириши M', N' нуқталарни M'', N'' нуқталарга ўтказсин. У ҳолда ўхшашлик алмаштириши таърифига кўра

$$\rho(M', N') = k_1\rho(M, N) \text{ ва } \rho(M'', N'') = k_2\rho(M', N'). \qquad (21)$$

Текисликда $P^{k_2} P^{k_1}$ алмаштириш M, N нуқталарни M'', N'' нуқталарга ўтказиши билан бирга (21) га кўра

$$\rho(M'', N'') = k_2 k_1 \rho(M, N) \qquad (22)$$

шартни ҳам қаноатлантиради. (22) муносабатдан $P^{k_2} P^{k_1}$ нинг $k_2\, k_1$ коэффициентли ўхшашлик алмаштириши деган натижага келамиз.

Текисликда ҳар қандай P^{k_1} ўхшашлик алмаштиришига тескари f^{-1} алмаштириш M', N' нуқталарни M, N нуқталарга ўтказади ва (21) дан

$$\rho(M, N) = \frac{1}{k_1}\rho(M', N'),$$

бундан f^{-1} алмаштириши $\frac{1}{k_1}$ коэффициентли ўхшашлик алмаштириши экани келиб чиқади. Шундай қилиб,

$$1)\ P^{k_1},\ P^{k_2} \in P \Rightarrow P^{k_2} P^{k_1} \in P,\quad 2)\ P^{k_1} \in P \Rightarrow f^{-1} = P^{\frac{1}{k_1}} \in P.$$

Демак, P группадир, биз уни *текисликнинг ўхшашлик алмаштиришлари группаси* деб атаймиз.

Ҳар бир ўхшашлик алмаштириши бурчакни ўзига конгруэнт бурчакка ўтказгани учун бурчак катталиги P группанинг асосий инвариантидир.

Энди P группанинг қисм группалари билан танишамиз.

1. Ҳар қандай ҳаракат ўхшашлик алмаштиришининг хусусий ҳоли ($k = 1$ бўлган ҳол) бўлгани учун текисликдаги ҳаракатлар группаси ўхшашлик алмаштиришлари группаси P нинг қисм группасидир.

Агар ўхшашлик алмаштириши бурчак ориентациясини сақласа (қарама-қаршисига ўзгартирса), у *биринчи тур* (*иккинчи тур*) *ўхшашлик алмаштириши* дейилади.

41- § даги теоремага кўра P^k ўхшашлик алмаштириши қуйидагича ёйилади:

$$P^k = F \cdot H^k_S.$$

Гомотетияда бурчак ориентацияси сақланади. Демак, ўхшашлик алмаштиришининг тури унинг ёйилмасидаги F ҳаракатнинг турига боғлиқ. F ҳаракат биринчи (иккинчи) тур бўлса, P^k ўхшашлик алмаштириши ҳам биринчи (иккинчи) тур бўлади.

2. P_0 текисликда барча биринчи тур ўхшашлик алмаштиришлари тўплами бўлсин. $\forall P_1,\ P_2 \in P$ ни оламиз.

$\angle MON$ текисликдаги ихтиёрий бурчак бўлсин

$$P_1(\angle MON) = \angle M'O'N' \Rightarrow \angle MON \equiv \angle M'O'N' \qquad (23)$$

ва улар бир хил ориентацияли, энди

$$P_2(\angle M'O'N') = \angle M''O'N'' \Rightarrow \angle M'O'N' = \angle M''O''N'', \qquad (24)$$

булар ҳам бир хил ориентацияли бўлади.

P_2P_1 алмаштириш $\angle MON$ ни $\angle M''O''N''$ га ўтказади; (23), (24) га кўра $\angle MON \equiv \angle M''O''N''$, шу билан бирга улар бир хил ориентацияли бўлади. Бундан P_2P_1 нинг биринчи тур ўхшашлик алмаштириши экан деган хулоса чиқади.

Шу каби ҳар қандай P_1 ўхшашлик алмаштиришига тескари P_1^{-1} алмаштиришнинг ўхшашлик алмаштириши эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

Шундай қилиб, 1) $P_1, P_2 \in P_0 \Rightarrow P_2P_1 \in P_0$, 2) $P_1 \in P_0 \Rightarrow P_1^{-1} \in P_0$. Демак, P_0 группа бўлиб, P группанинг қисм группаси. Ориентацияли бурчак катталиги бу группанинг асосий инвариантидир.

3. $H(S)$ текисликда S марказли барча гомотетиялар тўплами бўлсин. $H^{k_1}_S$, $H^{k_2}_S$ лар $H(S)$ тўпламнинг мос равишда k_1, k_2 коэффициентли икки гомотетияси, M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин. $H^{k_1}_S$ гомотетия M нуқтани M' нуқтага, $H^{k_2}_S$ гомотетия M' нуқтани M'' нуқтага ўтказсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{SM'} = k_1 \overrightarrow{SM} \qquad (25)$$

$$\overrightarrow{SM''} = k_2 \overrightarrow{SM'}. \qquad (26)$$

$H_S^{k_1}$, $H_S^{k_2}$ гомотетияларнинг кўпайтмасидан иборат $H_S^{k_2} H_S^{k_1}$ алмаштириш M нуқтани M'' нуқтага ўтказади ва (25), (26) тенгликларга кўра

$$\overrightarrow{SM''} = k_2 k_1 \overrightarrow{SM}.$$

Бундан $H_S^{k_2} H_S^{k_1}$ алмаштиришнинг $k_2 k_1$ коэффициентли гомотетия эканини кўрамиз.

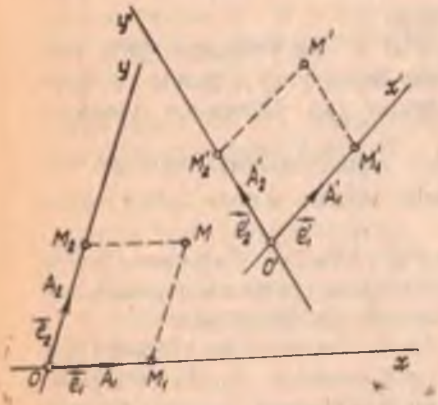
Шунингдек, текисликни $H_S^{k_1}$ гомотетияга тескари f^{-1} алмаштириш M' нуқтани M нуқтага ўтказиши билан бирга $\overrightarrow{SM} = \frac{1}{k_1} \overrightarrow{SM'}$ шартни ҳам қаноатлантиргани учун у $\frac{1}{k_1}$ коэффициентли $H_S^{\frac{1}{k_1}}$ гомотетиядир.

Шундай қилиб, 1) $H_S^{k_1}, H_S^{k_2} \in H(S) \to H_S^{k_2} H_S^{k_1} \in H(S)$.

2) $\forall H_S^{k_1} \in H(S) \Rightarrow f^{-1} = H_S^{\frac{1}{k_1}} \in H(S)$. Демак, $H(S)$ группа бўлиб, у P группанинг қисм группасидир. Ориентацияли бурчакнинг катталиги бу группанинг асосий инвариантидир.

44-§. Аффин алмаштириш

Текисликда ихтиёрий иккита $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathscr{B}' = (O' \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ аффин реперни оламиз. Текисликнинг ихтиёрий M нуқтаси $\mathscr{B}$ реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлсин (120- чизма)



120- чизма

Таъриф. Текисликнинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлган M нуқтасига $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан шу x, y координатали M' нуқтасини мос келтирадиган алмаштириш текисликда *аффин алмаштириш* дейилади. Уни $\mathscr{A}$ кўринишда белгилаймиз.

$\mathscr{A}$ текисликда аффин алмаштириш бўлса, $\mathscr{A}$: $M(x, y)_{\mathscr{B}} \to M'(x, y)_{\mathscr{B}'}$ бўлади. $\mathscr{B}$ реперга нисбатан унинг координаталар боши O ва координата векторларининг охирлари A_1, A_2 нуқталар ушбу координаталарга эга: $O(0, 0)$, $A_1(1, 0)$, $A_2(0, 1)$. Шу каби $\mathscr{B}'$ реперда $O'(0, 0)$, $A'_1(1, 0)$, $A'_2(0, 1)$ бўлгани учун текисликда $\mathscr{A}$ аффин алмаштириш O, A_1 A_2 нуқталарни мос ҳолда O', A'_1, A'_2 нуқталарга ўтказади: $\mathscr{A}(O) = O'$, $\mathscr{A}(A_1) = A'_1$, $\mathscr{A}(A_2) = A'_2$, яъни $\mathscr{A}(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$.

Текисликда бир жуфт $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ аффин реперни бериш билан $\mathscr{B}$ ни

$\mathcal{B}'$ га ўтказувчи $\mathcal{A}$ алмаштиришга эга бўлдик. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади. Текисликда аффин алмаштириш бир жуфт аффин репернинг берилиши билан тўлиқ аниқланади. Хусусий ҳолда $\mathcal{B}$ декарт репери, $\mathcal{B}'$ эса шундай реперки, бунда $\vec{e}_1' \perp \vec{e}_2'$ ва $|\vec{e}_1'| = |\vec{e}_2'| = k$ бўлса, бу $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ реперлар билан аниқланган $\mathcal{A} : \mathcal{B} \to \mathcal{B}'$ аффин алмаштириш k коэффициентли ўхшаш алмаштириш бўлади (42 -§). Демак, ўхшаш алмаштириш аффин алмаштиришнинг хусусий ҳолидир.

Аффин алмаштиришнинг хоссалари. Текисликда $\mathcal{B}$ аффин алмаштириш $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathcal{B} = (O_1', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ аффин реперлар билан берилган бўлсин.

Аффин алмаштиришнинг қатор хоссаларини кўрайлик.

1°. $\mathcal{A}$ алмаштиришда тўғри чизиқнинг образи тўғри чизиқ бўлади.

Исбот. Текисликда бирор l тўғри чизиқни қараймиз. l тўғри чизиқ $\mathcal{B}$ реперда $Ax + By + C = 0$ тенглама билан аниқланган бўлсин. $\forall M \in l$ нуқтанинг $\mathcal{B}$ реперга нисбатан координаталари x, y бўлсин. Текисликда аффин алмаштириш M нуқтани шундай M' нуқтага ўтказадики, $\mathcal{B}'$ реперга нисбатан $M'(x, y)$ бўлади. $\mathcal{B}'$ реперда барча $M'(x, y)$ нуқталарнинг координаталари $Ax + By + C = 0$ тенгламани қаноатлантиради. Бу тенглама тўғри чизиқни аниқлайди. Демак, l тўғри чизиқнинг образи l' — тўғри чизиқдир. ▲

2°. Аффин алмаштиришда параллел тўғри чизиқларнинг образлари параллел тўғри чизиқлар бўлади.

Исбот. l_1, l_2 тўғри чизиқлар

$$l_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0, \qquad (27)$$

$$l_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0 \qquad (28)$$

тенгламалар билан аниқланган ва $l_1 \parallel l_2$ бўлсин. У ҳолда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0 \qquad (29)$$

шарт бажарилади. l_1, l_2 тўғри чизиқларнинг текисликда $\mathcal{A}$ аффин алмаштиришдаги l_1', l_2' образлари 1°- хоссага асосан мос равишда шу (27), (28) тенгламалар билан ифодаланганидан улар учун ҳам параллеллик шарти бажарилади. Демак, $l_1 \parallel l_2 \Rightarrow l_1' \parallel l_2'$. ▲

Бу хоссадан ушбу натижага эга бўламиз: текисликдаги аффин алмаштиришда кесишувчи тўғри чизиқлар кесишувчи тўғри чизиқларга ўтади. Шу билан бирга, тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтаси улар образларининг кесишган нуқтасига ўтади.

3°. Аффин алмаштиришда тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади.

Исбот. M_1, M_2, M_3 лар l тўғри чизиқнинг турли учта нуқтаси бўлсин ва M_3 нуқта йўналган $\overline{M_1M_2}$ кесмани

$$\lambda = (M_1, M_2, M_3) = \frac{\overrightarrow{M_1M_3}}{\overrightarrow{M_3M_2}} \qquad (*)$$

нисбатда бўлсин. Агар M_1, M_2, M_3 нуқталар $\mathscr{B}$ реперда $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ координаталарга эга бўлса, аффин алмаштириш таърифига кўра уларнинг M_1', M_2', M_3' образлари $\mathscr{B}'$ реперда $M_1'(x_1, y_1)$, $M_2'(x_2, y_2)$, $M_3'(x_3, y_3)$ координаталарга эга бўлади. У ҳолда

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{M_1M_3}\,(x_3 - x_1,\ \ y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)\,\vec{e}_1 + (y_3 - y_1)\vec{e}_2,\\
&\overrightarrow{M_1'\,M_3'}\,(x_3 - x_1,\ y_3 - y_1) = (x_3 - x_1)\,\vec{e}_1' + (y_3 - y_1)\,\vec{e}_2',\\
&\overrightarrow{M_3M_2}\,(x_2 - x_3,\ y_2 - y_3) = (x_2 - x_3)\,\vec{e}_1 + (y_2 - y_3)\,\vec{e}_2,\\
&\overrightarrow{M_3'\,M_2}\,(x_2 - x_3,\ \ y_2 - y_3) = (x_2 - x_3)\,\vec{e}_1' + (y_2 - y_3)\,\vec{e}_2'.
\end{aligned} \tag{30}$$

(30) тенгликлар ва (*) дан кўринадики, $\overrightarrow{M_1M_3} = \lambda\,\overrightarrow{M_3M_2} \Rightarrow$ $\Rightarrow \overrightarrow{M_1'M_3'} = \lambda \overrightarrow{M_3'M_2'}$, яъни аффин алмаштириш тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбатини сақлайди, бу нисбат аффин алмаштиришнинг асосий инварианти бўлади. ▲

Бу хоссадан аффин алмаштиришда кесма кесмага, нур нурга, бурчак бурчакка, ярим текислик ярим текисликка ўтади деган натижа келиб чиқади. Шундай қилиб, $\mathscr{A}$ текисликда $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ аффин реперлар билан аниқланган аффин алмаштириш бўлса, у 1°, 2°, 3°-хоссаларга эга бўлади. Энди бунинг тескарисини исботлаймиз.

Теорема. *Агар текисликдаги бирор f алмаштиришда уч нуқтанинг оддий нисбати сақланса, у аффин алмаштириш бўлади.*

Исбот. Текисликда f алмаштириш тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбатини сақлагани учун бу алмаштиришда кесма кесмага, нур нурга, тўғри чизиқ тўғри чизиққа, бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқта бир тўғри чизиқда ётмаган уч нуқтага ўтади, шу билан бирга f натижасида ўзаро параллел тўғри чизиқларнинг образлари ҳам параллел бўлади.

Шунга кўра агар текисликда бирор $\mathscr{B} = (O, A_1, A_2)$ аффин реперни олсак ва текисликнинг ихтиёрий M нуқтаси бу реперга нисбатан x, y координаталарга эга бўлса, яъни

$$x = \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = -\frac{\overrightarrow{M_1O}}{\overrightarrow{OA_1}} = -(M_1\ A_1,\ O),\ \ y = \frac{\overrightarrow{OM_2}}{\overrightarrow{OA_2}} =$$

$$= -\frac{\overrightarrow{M_2P}}{\overrightarrow{OA_2}} = -(M_2\ A_2,\ O)$$

бўлса, у ҳолда

$$f:\begin{cases}
\mathscr{B} = (O,\ A_1,\ A_2) \to \mathscr{B}' = (O_1'\ A_1',\ A_2),\ \ M \to M',\\
M_1 \in OA_1 \to M_1' \in O'A_1',\ \ M_2 \in OA_2 \to M_2' \in O'A_2',\\
M_1M \parallel OA_2 \to M_1'M' \parallel O'A_2',\ \ M_2M \parallel OA_1 \to M_2'M' \parallel O'A_1'
\end{cases}$$

бўлади (бу ерда OA_1, $O'A_1'$, OA_2, $O'A_2'$, M_1M, $M_1'M'$, M_2M, $M_2'M'$ лар тўғри чизиқлардир).

M' нуқтанинг $\mathcal{B}$ реперга нисбатан координаталари x', y' бўлсин десак, у ҳолда

$$x' = \frac{\overrightarrow{O'M'_1}}{\overrightarrow{O'A_1'}} = -(M_1' A_1', O') = -(M_1 A_1, O) = \frac{\overrightarrow{OM_1}}{\overrightarrow{OA_1}} = x.$$

Худди шунингдек, $y' = y$ эканини кўрсатиш мумкин.

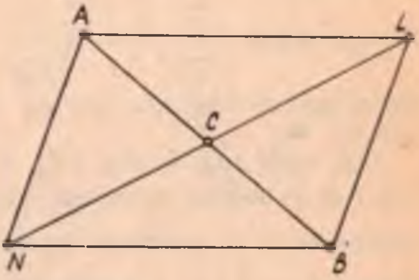
Демак, M нуқта $\mathcal{B}$ реперда x, y координаталарга эга бўлса, $M' = f(M)$ нуқта $\mathcal{B}'$ реперда шу x, y координаталарга эга бўляпти. Бундан f нинг аффин алмаштириш экани кўринади. ▲

1-лемма. *Текисликда тўғри чизиқни тўғри чизиққа ўтказадиган ҳар қандай f алмаштиришда параллел тўғри чизиқларнинг образлари параллел тўғри чизиқлар бўлади.*

Исбот. $a \parallel b$ $(a \neq b)$ ва $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ бўлсин. У ҳолда, $a' \parallel b'$, акс ҳолда $a' \cap b', = M'$ десак, f текисликда ўзаро бир қийматли акслантириш бўлгани учун $f(M) = M'$ ва $a \cap b = M$ бўлади, бу эса фаразга зиддир. Демак, $f: a \parallel b \to a' \parallel b'$. ▲

2-лемма. *Текисликда тўғри чизиқни тўғри чизиққа ўтказадиган ҳар қандай f алмаштириш кесманинг ўртасини шу кесма образининг ўртасига ўтказади.*

Исбот. AB кесма берилган ва C нуқта унинг ўртаси бўлсин. $f: \begin{matrix} A \to A' \\ B \to B' \end{matrix} \Rightarrow f(AB) = A'B'$ кесма. Диагонали AB кесмадан иборат бўлган ихтиёрий $ALBN$ параллелограмм ясаймиз (121-чизма). Бу параллелограммнинг иккинчи LN диагонали AB кесманинг ўртаси C дан ўтади, яъни $AB \cap LN = C$. 1-леммага кўра ҳосил қилинган параллелограммнинг образи иккита қарама-қарши учи A', B' нуқталар бўлган $A'L'B'N'$ параллелограммдир; бу параллелограмм диагоналларининг кесишган нуқтаси C нуқтанинг образи C' бўлади, чунки $AB \cap LN = C \Rightarrow A'B' \cup L'N' = C'$ ва икки тўғри чизиқ биттадан ортиқ бўлмаган нуқтада кесишгани учун $f(C) = C'$. Демак, C' нуқта $A'B'$ кесманинг ўртаси. ▲



121-чизма

Бундан қуйидаги натижа келиб чиқади. Агар C_1, C_2, . . . , C_{n-1} нуқталар AB кесмани n та тенг бўлакка бўлса, у ҳолда уларнинг f алмаштиришдаги C_1', C_2', . . . , C_{n-1}' образлари $A'B'$ кесмани n та тенг бўлакка бўлади, бу ерда

$$A' = f(A), \quad B' = f(B).$$

Теорема. *Тўғри чизиқни тўғри чизиққа ўтказадиган ҳар қандай f алмаштириш аффин алмаштиришдир.*

Исбот. f алмаштириш текисликдаги $\forall l$ тўғри чизиқни l' тўғри чизиққа ўтказсин. f нинг аффин алмаштириш эканини кўрсатиш учун бу алмаштиришда уч нуқтанинг оддий нисбати сақланишини кўрсатиш кифоя. A, B, C лар тўғри чизиқнинг турли учта нуқтаси, A', B', C' эса мос равишда бу нуқталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин, у ҳолда $A', B', C' \in l'$. C нуқта $\overline{AB}$ йўналган кесмани $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ нисбатда бўлсин (теоремани C нуқта A ва B нуқталар орасида ётган ҳол учун исботлаймиз). Фараз қилайлик. $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ рационал бўлсин, яъни $\lambda = \frac{p}{q}$, бу ерда p, q — бутун мусбат сонлар. AB кесмани $D_1, D_2, \ldots, D'_{p+q-1}$ нуқталар билан $p+q$ та тенг бўлакка бўламиз, $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{p}{q}$ бўлгани учун D_p нуқта C нуқта устига тушади. $D'_1, D'_2, \ldots, D'_{p+q-1}$ нуқталар $D_1, D_2, \ldots, D_{p+q-1}$ нуқталарнинг f алмаштиришдаги образлари бўлсин. У ҳолда 1-леммадан келиб чиққан натижага кўра $D'_1, D'_2, \ldots, D'_{p+q-1}$ нуқталар $\overline{A'B'}$ кесмани $p+q$ та тенг бўлакка бўлади:

$$\overrightarrow{A'D'_1} = \overrightarrow{D'_1D'_2} = \ldots = \overrightarrow{D'_{p-1}D'_p} = \overrightarrow{D'_pD'_{p+1}} = \ldots = \overrightarrow{D'_{p+q-1}B'}.$$

Шундай қилиб, $\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}} = \frac{p}{q} = \frac{\overrightarrow{A'C'}}{\overrightarrow{C'B'}}$ ёки $(AB, C) = (A'B', C')$, $\lambda = \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{CB}}$ сон иррационал бўлган ҳол ҳам шу тартибда исботланади ([14] га қаралсин). ▲

Бир жуфт (A_1, A_2, A_3), (A'_1, A'_2, A'_3) нуқталар учлигини қарайлик. Ҳар бир учликнинг нуқталари бир тўғри чизиқда ётмасин. Координаталар боши A_1 нуқта ва бирлик векторлари $\vec{e}_1 = \overrightarrow{A_1A_2}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{A_1A_3}$ бўлган $\mathcal{B} = (A_1, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ реперни, шунингдек, координаталар боши A'_1 нуқта ва бирлик векторлари $\vec{e}'_1 = \overrightarrow{A'_1A'_2}$, $\vec{e}'_2 = \overrightarrow{A'_1A'_3}$ бўлган $\mathcal{B}' = (A'_1, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$, реперни қараймиз. Бу реперлар билан улардан бирини иккинчисига ўтказувчи биргина аффин алмаштириш аниқланишини биз биламиз. Ҳар бир учликнинг нуқталари бир тўғри чизиқда ётмагани учун улар учбурчакларни аниқлайди. Демак, текисликда ихтиёрий икки $A_1A_2A_3$ ва $A'_1A'_2A'_3$ учбурчаклар берилса, улардан бирини иккинчисига ўтказувчи аффин алмаштириш мавжуд.

Таъриф. Агар текисликдаги икки фигурадан бирини иккинчисига ўтказадиган аффин алмаштириш мавжуд бўлса, бу фигуралар *аффин эквивалент фигуралар* дейилади.

Бу таърифга кўра текисликда берилган ҳар қандай икки учбурчак бир- бирига аффин эквивалент, шунингдек, берилган ҳар қандай икки параллелограмм аффин эквивалентдир.

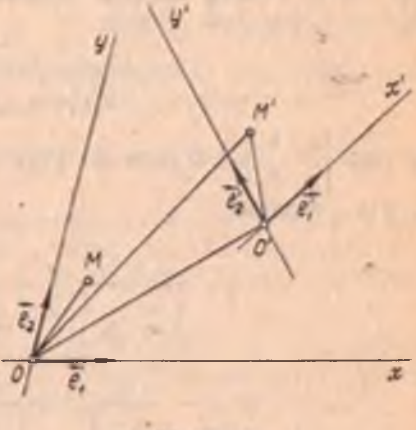
Энди ихтиёрий $ABCD$ туртбурчакни қараймиз. E унинг AC, BD диагоналларининг кесишган нуқтаси бўлсин. Аффин алмаштириш $ABCD$ тўртбурчакни шундай $A'B'C'D'$ тўртбурчакка ўтказадики, E нуқта AC ва BD кесмаларни қандай нисбатда бўлса, унинг E' образи $A'C'$ ва $B'D'$ кесмаларни ҳам худди шундай нисбатда бўлади, яъни (3- хоссага кўра)

$$(AC, E) = (A'C', E'), \quad (BD, E) = (B'D', E'). \tag{31}$$

Аксинча, иккита $ABCD$, $A'B\,C'D'$ тўртбурчак учун (31) бажарилса, улардан бирини иккинчисига ўтказадиган аффин алмаштириш мавжуд (теоремага қаранг). Демак, ихтиёрий иккита $ABCD$, $A'B'C'D'$ тўртбурчак аффин эквивалент бўлиши учун (31) шартнинг бажарилиши зарур ва етарли, бунда E, E' мос равишда бу тўртбурчаклар диагоналларининг кесишган нуқталари.

45- §. Аффин алмаштиришнинг аналитик ифодаси

Текисликда ихтиёрий иккита $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathscr{B}' = (O_1', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}')$ аффин реперни қараймиз (22- чизма). Улар текисликда бирор $\mathscr{A}(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$ алмаштиришни аниқлайди.



122- чизма

$\mathscr{B}$ реперга нисбатан M нуқтанинг координаталарини x, y билан, унинг $M' = \mathscr{A}(M)$ образининг координаталарини эса x', y' билан белгилаймиз. Аффин алмаштириш таърифига кўра M' нуқта $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан x, y координаталарга эга.

$\mathscr{B}'$ репернинг $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$ координата векторлари $\mathscr{B}$ реперга нисбатан $\vec{e}_1{}'(a_1, a_2)$, $\vec{e}_2{}'(b_1, b_2)$ координаталарга эга, яъни

$$\begin{cases} \vec{e}_1{}' = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2, \\ \vec{e}_2{}' = b_1\vec{e}_1 + b_2\vec{e}_2, \end{cases} \tag{32}$$

c_1, c_2 эса O' координаталар бошининг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{OM'} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2, \ \overrightarrow{O'M'} = x\vec{e}_1{}' + y\vec{e}_2{}', \ \overrightarrow{OO'} = c_1\vec{e}_1 + c_2\vec{e}_2. \tag{33}$$

Лекин

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'}. \tag{34}$$

(32), (33) тенгликларни эътиборга олсак, (34) тенгликдан ушбу муносабатни ҳосил қиламиз;

$$x'\vec{e_1}+y'\vec{e_2}=(a_1x+b_1y+c_1)\vec{e_1}+(a_2x+b_2y+c_1)\vec{e_2},$$

бундан

$$\begin{cases} x'=a_1x+b_1y+c_1, \\ y'=a_2x+b_2y+c_2. \end{cases} \tag{35}$$

$\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$ векторлар коллинеар бўлмагани учун (35) формулаларда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{36}$$

Шундай қилиб, текисликдаги $\mathscr{A}$ алмаштиришда $\mathscr{B}$ реперга нисбатан $M'=\mathscr{A}(M)$ нуқтанинг координаталари M нуқтанинг координаталари орқали (36) шарт бажарилганда (35) формулалар бўйича ифодаланади.

Аксинча, текисликни бирор f алмаштириш (35) формулалар билан аниқланган ва унда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлсин. Бу алмаштиришнинг аффин алмаштириш эканини кўрсатамиз. Шу мақсадда $\mathscr{B}$ реперга нисбатан $Ax+By+C=0$ тенглама билан аниқланган (бунда A, B нинг камида бири нолдан фарқли) бирор l тўғри чизиқни оламиз.

f алмаштириш l тўғри чизиқни l' фигурага ўтказади, l' фигура нинг тўғри чизиқ эканини кўрсатсак, мақсадга эришган бўламиз (35) ни қуйидагича ёзамиз:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y=x'-c_1, \\ a_2x+b_2y=y'-c_2, \end{cases}$$

бу ерда $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ x_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$ бўлгани учун бу система биргаликда, уни ечиб, x, y ни топамиз:

$$x=\frac{b_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}x'-\frac{b_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}y'-\left|\frac{\begin{matrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}\right|.$$

$$y=-\frac{a_2}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}x'+\frac{a_1}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}y'+\left|\frac{\begin{matrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{matrix}}{\begin{matrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{matrix}}\right|. \tag{37}$$

(37) дан x ва y нинг қийматларини $Ax+By+C=0$ га қўйиб ихчамласак,

$$\frac{(Ab_2-Ba_2)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}x'+\frac{(Ba_1-Ab_1)}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}y'+\frac{A\begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}+\frac{B\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}+C=0$$

ёки

$$(Ab_2 - Ba_2)\,x' + (Ba_1 - Ab_1)\,y' + \left(A\begin{vmatrix} b_1 c_1 \\ b_2 \ c_2 \end{vmatrix} + \right.$$

$$\left. + B\begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} + C\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}\right) = 0. \qquad (38)$$

(38) да $Ab_2 - Ba_2$, $Ba_1 - Ab_1$ сонларнинг камида бири нолдан фарқли, чунки акс ҳолда

$$Ab_2 - Ba_2 = 0, \ Ba_1 - Ab_1 = 0$$

тенгликлардан $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ бўлгани учун $A = B = 0$ келиб чиқади. Бу эса қилинган фаразга зид, чунки $A^2 + B^2 \neq 0$. Шундай қилиб (38) тенглама (ўзгарувчи x, y ларга нисбатан биринчи даражали бўлгани учун) тўғри чизиқнинг тенгламасидир. Демак, l' фигура—тўғри чизиқ.

Биз қуйидаги фактни исботлашга муваффақ бўлдик: ҳар қандай аффин алмаштириш координаталарда (35) чизиқли формулалар бўйича ифодаланади, бунда

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (*)$$

ва, аксинча (35) чизиқли формулалар (*) шартда ҳар вақт текисликдаги аффин алмаштиришни ифодалайди.

Аффин алмаштиришга мисоллар.

1. Текисликда шундай иккита $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аа $\mathscr{B}' = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2')$ аффин реперларни қарайлик, бунда $\vec{e}_1 = k\vec{e}_1$, $\vec{e}_2 = k\vec{e}_2$ бўлсин. Бу икки аффин репер бирор $\mathscr{A}$ аффин алмаштиришни аниқлайди, яъни $\mathscr{A} : \mathscr{B} \to \mathscr{B}'$; бу вақтда $\forall\ M$ ва $M' = \mathscr{A}(M)$ нуқталар учун

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \ \ \overrightarrow{OM'} = x\vec{e}_1{}' + y\vec{e}_2{}' = kx\,\vec{e}_1 + ky\,\vec{e}_2 = k\overrightarrow{OM}.$$

Ҳар қандай M, M' мос нуқталар жуфти учун $\overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$ шартни қаноатлантирадиган алмаштириш текисликда O марказли ва k коэффициентли гомотетия эди (40- §, 3- таъриф). Демак, гомотетия аффин алмаштиришдир.

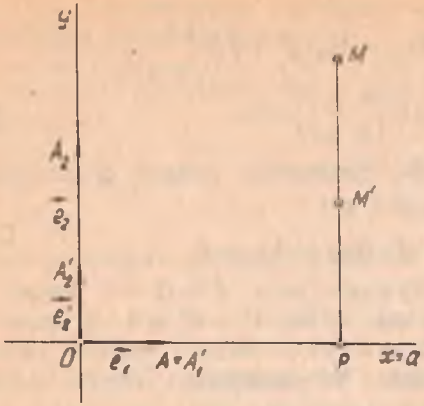
2. $\mathscr{A}$ алмаштириш $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ва $\mathscr{B}' = (O', \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ аффин реперлар билан аниқланган бўлсин. У ҳолда ҳар қандай M нуқта ва унинг $\mathscr{A}$ алмаштиришдаги M' образи учун

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \ \ \overrightarrow{O'M'} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M'};$$

лекин

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M'} = \overrightarrow{OO'}.$$

Ҳар қандай M, M' мос нуқталар жуфти учун $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OO'}$ шартни қаноатлантирадиган алмаштириш текисликда $\overrightarrow{OO'}$ вектор қадар-



123- чизма

параллел кўчириш эди (35-§ 1-банд). Демак, параллел кўчириш аффин алмаштиришдир.

3. Текисликда a тўғри чизиқ ва координаталар боши умумий бўлган шундай икки $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$, $\mathscr{B}' = (O, \vec{e}'_1, \vec{e}'_2)$ аффин реперни олайликки, $O \in a$, $\vec{e}_1 \parallel a$, $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1$, $\vec{e}'_2 = \lambda \vec{e}_2$ ва $\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2$ $(\lambda \neq 1)$ бўлсин (123- чизма).

Бундай икки аффин репер билан аниқланган $\mathscr{A}$ аффин алмаштиришда ҳар қандай мос M, $M' = \mathscr{A}(M)$ нуқталар жуфти учун

$$\overline{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, \quad \overline{OM'} = x\vec{e}'_1 + y\vec{e}'_2 = x\vec{e}_1 + \lambda y\vec{e}_2 \qquad (39)$$

муносабатларни ёза оламиз. (39) муносабатлардан кўринадики, $\mathscr{B}$ реперда M, M' нуқталар ушбу координаталарга эга: $M(x, y)$, $M'(x, \lambda y)$. Бундан эса $Ox = a$ тўғри чизиқнинг нуқталари $\mathscr{A}$ алмаштиришда қўзғалмас деган хулоса келиб чиқади.

$$\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{OM'} - \overrightarrow{OM} = (\lambda - 1)y\vec{e}_2 \Rightarrow \overrightarrow{MM'} \parallel \vec{e}_2 \Rightarrow MM' \perp Ox.$$

MM' тўғри чизиқ билан $Ox = a$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасини P билан белгилайлик.

$\mathscr{B}$ реперда $P(x, 0)$ бўлади, у ҳолда $\overrightarrow{MP} = -y\vec{e}_2$, $\overrightarrow{PM'} = \lambda y\vec{e}_2$, бу икки тенгликдан

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{\lambda}\overrightarrow{PM'} \text{ ёки } \overrightarrow{PM'} = \lambda\overrightarrow{PM}$$

муносабатга эга бўламиз. Шундай қилиб, қаралаётган $\mathscr{A}$ аффин алмаштириш ушбу хоссаларга эга:

1) $Ox = a$ тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси қўзғалмас;

2) Ox га тегишли бўлмаган ҳар бир M нуқтага мос M' нуқта учун ушбу икки шарт бажарилади:

а) $MM' \perp Ox = a$;

б) ҳар бир $P = MM' \cap Ox$ нуқта MM' кесмани бир хил $\left(-\frac{1}{\lambda}\right)$ нисбатда бўлади.

Шундай хоссаларга эга бўлган аффин алмаштиришни $\lambda < 1$ бўлганда текисликни $Ox = a$ *тўғри чизиққа қисиш*, $\lambda > 1$ бўлганда текисликни $Ox = a$ *тўғри чизиқдан чўзиш* деб аталади. Бунда λ *қисиш* ёки *чўзиш* коэффициентидир.

46-§. Текисликдаги аффин алмаштиришлар группаси ва унинг қисм группалари

A орқали текисликнинг барча аффин алмаштиришлари тўпламини белгилаймиз. $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ эса A тўпламдан олинган ихтиёрий икки аффин алмаштириш бўлсин. $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ текисликдаги бирор аффин репер, M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлиб, унинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари x, y бўлсин. $\mathscr{A}_1$ алмаштириш $\mathscr{B}$ ни $\mathscr{B}' = (O', \vec{e}_1', \vec{e}_2')$ аффин реперга, M нуқтани M' нуқтага ўтказсин, $\mathscr{A}_2$ эса $\mathscr{B}'$ реперни $\mathscr{B}'' = (O'', \vec{e}_1'', \vec{e}_2'')$ аффин реперга, M' нуқтани M'' нуқтага ўтказсин, у ҳолда аффин алмаштиришнинг таърифига кўра

$$M(x, y)_{\mathscr{B}} \Rightarrow M'(x, y)_{\mathscr{B}'}, \; M'(x, y)_{\mathscr{B}'} \Rightarrow M''(x, y)_{\mathscr{B}'}. \qquad (40)$$

$\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ алмаштиришларнинг $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$ кўпайтмаси ҳам текисликдаги алмаштиришдир. $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1 : M \rightarrow M''$, $\mathscr{B} \rightarrow \mathscr{B}''$ ва (40) га асосан $M(x, y)_{\mathscr{B}} \Rightarrow M''(x, y)_{\mathscr{B}''}$, бундан $\mathscr{A}_2\mathscr{A}_1$ нинг аффин алмаштириш эканлиги кўринади.

Текисликдаги $\forall\, \mathscr{A}_1$ аффин алмаштириш $\mathscr{B}$ реперни $\mathscr{B}'$ реперга, $\forall\, M(x, y)_{\mathscr{B}}$ нуқтани $M'(x, y)_{\mathscr{B}'}$ нуқтага ўтказганда унга тескари f^{-1} алмаштириш $\mathscr{B}'$ реперни $\mathscr{B}$ реперга ва $M'(x, y)_{\mathscr{B}'}$ нуқтани $M(x, y)_{\mathscr{B}}$ нуқтага ўтказади. Бундан f^{-1} нинг аффин алмаштириш эканлиги келиб чиқади. Шундай қилиб, $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2 \in A \Rightarrow \mathscr{A}_2\mathscr{A}_1 \in A$ ва $\mathscr{A}_1 \in A \Rightarrow f^{-1} = \mathscr{A}_1^{-1} \in A$. Группа таърифига кўра A тўплам группа ташкил этади. Уни текисликда *аффин алмаштиришлар группаси* дейилади. Бу группанинг асосий инварианти тўғри чизиқдаги уч нуқтанинг оддий нисбатидир. Текисликдаги ўхшаш алмаштиришлар группаси P аффин алмаштиришлар группасининг қисм группасидир (43-§).

47-§. Инверсия, унинг аналитик ифодаси ва хоссалари

Биз юқорида кўриб ўтган барча алмаштиришлар (аффин алмаштириш ва унинг хусусий ҳоллари, ўхшаш алмаштириш, ҳаракат) чизиқли алмаштиришлардир, чунки бу алмаштиришларда тўғри чизиқнинг образи тўғри чизиқ эди. Булардан ташқари, шундай алмаштиришлар ҳам борки, уларда тўғри чизиқнинг образи ҳар вақт тўғри чизиқ бўлавермайди. Бундай алмаштиришларга мисол сифатида инверсия билан танишамиз.

Текисликда O маркизли ва r радиусли (O, r) айланани оламиз.

Таъриф. (O, r) айлана ётган текисликнинг O дан бошқа[1] ҳар бир M нуқтасига OM нурда ётувчи ва

---

[1] $O = M$ бўлганда $\vec{OO}$ ноль векторнинг ҳар қандай векторга кўпайтмаси ноль вектор бўлиб, (41) шартни қаноатлантирувчи хеч қандай M нуқта мавжуд бўлмайди.

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = r^2 \qquad (41)$$

шартни қаноатлантирувчи M' нуқтани мос келтирадиган алмаштириш *инверсион алмаштириш* ёки *инверсия* дейилади. (O, r) айлана *инверсия айланаси*, унинг O маркази *инверсия маркази*, радиуси эса *инверсия радиуси* дейилади. (O, r) айланага нисбатан инверсияни u_O^r кўринишда белгиланади.

Инверсия таърифига кўра мос M, M' нуқталар битта OM нурда ётгани учун

$$\overrightarrow{OM}\uparrow\uparrow\overrightarrow{OM'} \Rightarrow \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = |\overrightarrow{OM}||\overrightarrow{OM'}|.$$

Шунга кўра (41) шартни $OM\cdot OM' = r^2$ кўринишда ёзиш ҳам мумкин.

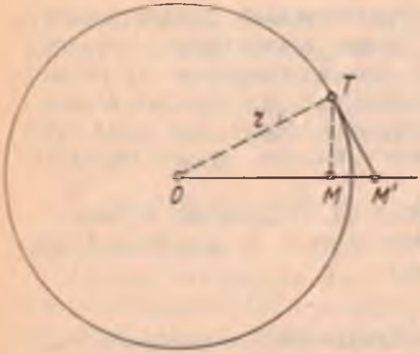
X бирор тўплам G_X унинг бирор алмаштиришлар тўплами бўлсин $f \in G_X$ ни олайлик. $f \neq E_0$ бўлсин. Бу шартда $ff = E_0$ бўлса, f *инволюцион алмаштириш* дейилади. Юқорида кўрилган алмаштиришлардан ўққа нисбатан симметрия, марказий симметрия инволюцион алмаштириш мисолларидир.

Инверсия ҳам инволюцион алмаштиришдир. Ҳақиқатан, (O, r) айланага нисбатан u_O^r инверсия M нуқтани M' нуқтага ўтказсин. Таърифга кўра 1) M' нуқта OM нурга тегишли, 2) $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} = r^2$. Шу айланага нисбатан иккинчи марта u_O^r инверсия M' нуқтани M'' нуқтага ўтказсин дейлик, у ҳолда 1) M'' нуқта OM' нурга тегишли, 2) $\overrightarrow{OM'}\cdot\overrightarrow{OM''} = r^2$ бўлиб,

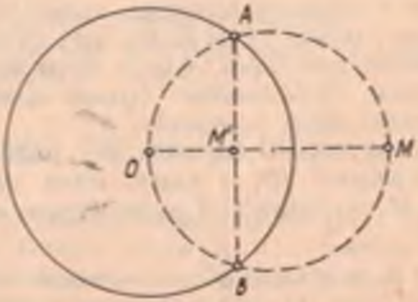
$$\overrightarrow{OM'}\cdot\overrightarrow{OM''} = \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OM'} \Rightarrow M'' = M \Rightarrow u_O^r\cdot u_O^r : M \Rightarrow M.$$

Демак, икки карра инверсия айнан алмаштириш демакдир.

Нуқтага инверсион нуқтани топиш. 1. Берилган M нуқта (O, r) инверсия айланаси билан аниқланадиган доирага тегишли бўлсин (124-чизма). M нуқта орқали OM нурга перпендикуляр қилиб l тўғри чизиқни ўтказамиз. $l \cap (O, r) = T$ бўлсин. T нуқтада



124- чизма



125- чизма

(O, r) айланага t уринмани ўтказамиз. Унинг OM нур билан кесишган нуқтаси M' бўлсин. M' нуқта M га инверсион мос нуқта бўлади, яъни $M' = u_O^r(M)$, чунки 1) M' нуқта OM нурга тегишли; 2) тўғри бурчакли OTM, OTM' учбурчаклар ўхшаш бўлгани учун

$$\frac{OM}{OT} = \frac{OT}{OM'} \Rightarrow OM \cdot OM' = OT^2 = r^2.$$

2. Берилган M нуқта (O, r) инверсия айланасига нисбатан ташқи нуқта бўлсин (II боб, 22-§ га қаралсин). Унга инверсион нуқта қуйидагича топилади. OM кесмани диаметр қилиб, ёрдамчи айлана чизилади (125-чизма). Икки айлананинг кесишган A, B нуқталарини туташтирувчи AB ватарнинг OM нур билан кесишган нуқтаси M' изланган нуқта бўлади. Ҳақиқатан, M' нуқта OM нурга тегишли ва ясалишига кўра $\triangle OAM$ тўғри бурчакли ҳамда AB ва OM тўғри чизиқлар перпендикуляр бўлгани учун $|OM| \cdot |OM'| = r^2$.

3. Агар берилган M нуқта инверсия айланасида ётса, унга мос нуқта шу нуқтанинг ўзи бўлади, чунки $M \in (O, r) \Rightarrow OM = r$, у ҳолда (41) ги асосан $OM' = r$ ва M' нуқта OM нурга тегишли эканига кўра $M' = M$. Демак, инверсия айланасининг ҳар бир нуқтаси бу инверсияда инвариант нуқта бўлади.

Инверсиянинг аналитик ифодаси. Координаталар боши инверсия айланасининг маркази сифатида бўлган ҳолни қарайлик.

M текисликнинг ихтиёрий нуқтаси, M' эса унинг u_O^r даги образи бўлсин. $\mathscr{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ реперга нисбатан $M(x, y)$, $M'(x', y')$ дейлик. x', y' координаталарни x, y орқали ифодалайлик. $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ векторлар коллинеар бўлгани учун

$$\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM} \ (\lambda \in R). \tag{42}$$

$$(41) \Rightarrow \lambda \overline{OM^2} = r^2 \Rightarrow \lambda = \frac{r^2}{\overrightarrow{OM}^2} \Rightarrow \overrightarrow{OM'} = \frac{r^2}{\overrightarrow{OM}^2} \cdot \overrightarrow{OM}; \tag{43}$$

$$(43) \Rightarrow x'\vec{i} + y'\vec{j} = \frac{r^2}{x^2 + y^2}(x\vec{i} + y\vec{j}) \Rightarrow \begin{cases} x' = \dfrac{x}{x^2 + y^2} r^2, \\ y' = \dfrac{y}{x^2 + y^2} r^2 \end{cases} \tag{44}$$

(44) инверсион алмаштириш формуласидир.

Инверсиянинг хоссалари. 1°. Текислик нуқталарини инверсион алмаштиришда: а) инверсия айланасининг нуқталари ўзи ўзига ўтади; б) инверсия айланаси ташқарисидаги нуқталар инверсия айланаси ичидаги нуқталарга, инверсия айланаси ичидаги (марказдан бошқа) нуқталар инверсия айланаси ташқарисидаги нуқталарга ўтади.

Исбот. Агар M нуқта инверсия айланасидан ташқарида ётса, у ҳолда $OM > r$ бўлиб

$$OM \cdot OM' = r^2 \tag{45}$$

муносабат ўринли бўлиши учун $OM' < r$ бўлиши, яъни M' нуқта (O, r) айлана ичида ётиши шарт. Агар M нуқта инверсия айланаси ичида ётса, $OM < r$ бўлиб, (45) муносабатга кўра $OM' > r$ бўлиши, яъни M' нуқта (O, r) айлана ташқарисида ётиши шарт. ▲

2°. Инверсия марказидан ўтувчи тўғри чизиққа инверсион мос фигура шу тўғри чизиқнинг ўзидир.

Исбот. l тўғри чизиқ инверсия маркази O дан ўтсин. $\forall M \in l$ нуқтага инверсион M' нуқта учун $M' \in OM$ (OM—нур) шарт бажарилгани сабабли $M' \in l$ бўлади $\Rightarrow l$ тўғри чизиқ ўз-ўзига ўтади. ▲

3°. Инверсия марказидан ўтмайдиган тўғри чизиққа мос фигура инверсия марказидан ўтувчи айлана бўлади.

Исбот. l тўғри чизиқ инверсия марказидан ўтмасин ва

$$Ax + By + C = 0 \quad (C \neq 0) \tag{46}$$

тенглама билан аниқланган бўлсин. Инверсиянинг (44) аналитик ифодасидан x, y ни x', y' орқали ифодалаймиз:

$$x'^2 + y'^2 = \frac{r^4x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{r^4y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{r^4}{x^2+y^2} \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{r^4}{x'^2+y'^2}.$$

Бундан

$$x = \frac{(x^2+y^2)}{r^2}x' = \frac{r^4 \cdot x'}{(x'^2+y'^2)r^2} = \frac{r^2}{x'^2+y'^2}x';$$

$$y = \frac{(x^2+y^2)\,y'}{r^2} = \frac{r^2}{x'^2+y'^2}y'. \tag{47}$$

(46) даги x, y ўрнига (47) дан $x = \frac{r^2}{x'^2+y'^2}x'$, $y = \frac{r^2}{x'^2+y'^2}y'$ қийматларни қўйиб, ихчамласак, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$C(x'^2 + y'^2) + r^2(Ax' + By') = 0$$

ёки

$$\left(x' + \frac{Ar^2}{2C}\right)^2 + \left(y' + \frac{Br^2}{2C}\right)^2 = \left(\frac{r^2\sqrt{A^2+B^2}}{2\,C}\right)^2.$$

Бу тенглама маркази $\left(-\frac{Ar^2}{2C'} - \frac{Br^2}{2C}\right)$ нуқтада радиуси $\frac{r^2\sqrt{A^2+B^2}}{2\,C}$ га тенг айланани ифодалайди, фақат ундан O нуқтани чиқариш керак. Шундай қилиб, инверсия маркази O дан ўтмаган тўғри чизиққа инверсион мос фигура инверсия марказидан ўтувчи (O нуқтасиз) айлана экан. ▲

Инверсиянинг инволюцион хоссага эгалиги сабабли инверсия маркази O дан ўтувчи (O нуқтасиз) айлананинг образи O нуқтадан ўтмайдиган тўғри чизиқдан иборат.

4°. Инверсия марказидан ўтмайдиган айланага мос фигура инверсия марказидан ўтмайдиган айланадир.

Исбот. (O', R) айланани қараймиз, унинг тенгламаси

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2 \tag{48}$$

бўлсин. Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x^2+y^2+ax+by+c=0, \qquad (49)$$

бу ерда

$$a=-2x_0,\ b=-2y_0,\ c=x_0^2+y_0^2-R^2.$$

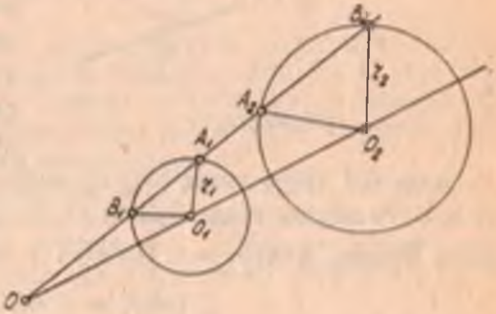
(49) айлана O нуқтадан ўтмасин, яъни $c\neq 0$ бўлсин. (49) айлананинг u_0^r даги образини топиш учун x, y нинг (47) дан аниқланган қийматларини (49) га қўйсак,

$$\left(\frac{r^2x'}{x'^2+y'^2}\right)^2+\left(\frac{r^2y'}{x'^2+y'^2}\right)^2+a\left(\frac{r^2}{x'^2+y'^2}\,x'\right)+b\left(\frac{r^2}{x'^2+y'^2}\,y'\right)+$$

$$+c=0\Rightarrow c(x'^2+y'^2)+r^2(ax'+by')+r^4=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x'^2+y'^2+\frac{r^2}{c}(ax'+by')+\frac{r^4}{c}=0.$$

Бу тенглама билан O нуқтадан ўтмайдиган айлана аниқланади. Демак, инверсия марказидан ўтмайдиган айлана инверсия марказидан ўтмайдиган айланага алмашинади. ▲



126- чизма

5°. $(O_2,\ r_2)$ айлана $(O_1,\ r_1)$ айлананинг u_0^r инверсиядаги образи бўлсин.

$A_1\in(O_1,\ r_1)$ нуқтани оламиз, $OA_1\cap(O_1,\ r_1)=\{A_1,\ B_1\}$ бўлсин (126-чизма). Агар $u_0^r(A_1)=A_2$, $u_0^2(B_1)=B_2$ бўлса, у ҳолда $\{A_2,\ B_2\}=OA_1\cap(O_2,\ r_2)$ бўлиб, O_1A_1 тўғри чизиқ O_2B_2 тўғри чизиққа ва O_1B_1 тўғри чизиқ O_2A_2 тўғри чизиққа параллел бўлади. $u_0^r(A_1)=A_2$, $u_0^r(B_1)=B_2$ бўлсин, у ҳолда $\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=r^2$, $\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=r^2$. Булардан

$$\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OA_2}=\overrightarrow{OB_1}\cdot\overrightarrow{OB_2}=r^2. \qquad (50)$$

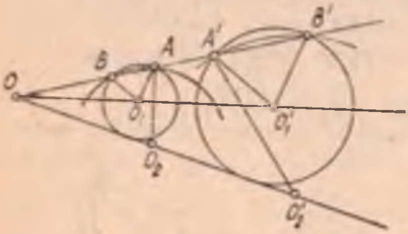
A_1, A_2, B_1, B_2 нуқталар битта тўғри чизиқда ётгани учун $\overrightarrow{OB_2}\parallel\overrightarrow{OA_1}$ ва $\overrightarrow{OA_2}\parallel\overrightarrow{OB_1}\Rightarrow\overrightarrow{OB_2}=\lambda\,\overrightarrow{OA_1}$ ва $\overrightarrow{OA_2}=\mu\,\overrightarrow{OB_1}$, у ҳолда (50) дан $\mu\,\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}=\lambda\overrightarrow{OA_1}\cdot\overrightarrow{OB_1}$, бундан $\lambda=\mu$ га эга бўламиз. $\overrightarrow{OB_2}=\lambda\,\overrightarrow{OA_1}$, $\overrightarrow{OA_2}=\lambda\,\overrightarrow{OB_1}$ тенгликлардан кўринадики, O марказли ва λ коэффициентли H_0^λ гомотетия ҳам $(O_1,\ r_1)$ айланани $(O_2,\ r_2)$ айланага ўтказади. Бунда $H_0^\lambda(A_1)=B_2$, $H_0^\lambda(B_1)=A_2$, $H_0^\lambda(O_1)=O_2$ бўлади. Гомотетияда тўғри чизиқ ўзига параллел тўғри чизиққа ўтгани учун

$$O_1A_1 \parallel O_2B_2, \; O_1B_1 \parallel O_2A_2. \tag{51}$$

(51) муносабат бир жуфт инверсион мос айланаларга тегишли ва бир тўғри чизиқда ётган икки жуфт мос нуқталар учун ўринли бўлган асосий хоссадир.

6°. Берилган икки чизиқ орасидаги бурчак[1] уларга инверсион мос чизиқлар орасидаги бурчакка конгруэнт бўлади.

Бу хоссани қаралаётган чизиқлар айланалар ёки тўғри чизиқлар бўлган ҳол учун исботлаймиз.



127- чизма

Исбот. Инверсия маркази O дан ўтмаган (O_1, r_1), (O_2, r_2) айланаларни қарайлик. u_O^r инверсияда (O_1, r_1), (O_2, r_2) айланаларнинг образлари мос равишда (O_1, r_1'), (O_2, r_2) айланалар бўлсин. Агар $A \in (O_1, r_1) \cap (O_2, r_2)$ ва $u_O^r(A) = A'$ бўлса, $A' \in (O_1, r_1) \cap (O_2, r_2)$ бўлади (127- чизма).

Агар OA тўғри чизиқ (O_1, r_1) айлана билан A, B нуқталарда кесишса, 5°- хоссага кўра O_1B ва $O_1'A'$ тўғри чизиқлар параллел бўлади. Бундан $\triangle OBO_1 \sim \triangle OA'O_1'$, у ҳолда

$$\angle OBO_1 \equiv \angle OA'O_1'. \tag{52}$$

$\triangle BO_1A$ тенг ёнли $\Rightarrow \angle ABO_1 \equiv \angle BAO_1$, у ҳолда

$$\angle OBO_1 \equiv O_1AA'. \tag{53}$$

(52), (53) дан

$$\angle O_1AA' \equiv \angle O_1' A'A \tag{54}$$

ва бу бурчаклар қарама- қарши йўналган.

Худди шу каби O_2B ва $O_2' A'$ тўғри чизиқлар параллел бўлганидан

$$\angle O_2AA' \equiv \angle O_2' A'A \tag{55}$$

эканини келтириб чиқариш мумкин, бу бурчаклар ҳам қарама- қарши йўналган. (54), (55) тенгликлардан $\angle O_1AO_2 \equiv \angle O_1' A'O_2$ ва улар қарама- қарши йўналган.

---

[1] *Икки чизиқ орасидаги бурчак* деб, бу чизиқларнинг кесишган нуқталарида уларга ўтказилган уринмалар орасидаги бурчакка айтилади. Агар икки чизиқ кесишмаса, улар орасидаги бурчак мавжуд эмас.

IV БОБ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР

23-§ да алгебраик чизиқ ва унинг тартиби тўғрисида тушунча келтирилган эди. 24 — 30-§ ларда биринчи тартибли алгебраик чизиқнинг хоссаларини унинг тенгламасига асосланиб текширдик. Бу бобда иккинчи тартибли алгебраик чизиқларнинг геометрик хоссаларини ўрганишга ўтамиз[1]. Айрим «айниган ҳолларни» (икки тўғри чизиққа айланиб кетиш, мавҳум чизиқлар ва ҳ. к.) назарга олмасак, иккинчи тартибли чизиқлар учтадир (эллипс, гипербола, парабола). Бу чизиқларнинг талай хоссалари қадимги Греция олимлари томониданоқ очилган эди (Менехм, Аполлоний ва бошқалар, эрамиздан олдинги IV — III асрлар). Бу чизиқлар астрономия, механика фанлари ва техникада кенг қўлланилади.

48-§. Эллипс

1. Таърифи, каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтасидан *фокуслар* деб аталувчи берилган икки F_1, F_2 нуқтагача бўлган масофалари йиғиндиси берилган PQ кесма узунлигига тенг бўлган барча нуқталар тўплами *эллипс* деб аталади. Берилган кесма узунлиги фокуслар орасидаги масофадан катта[2].

Берилган кесманинг узунлигини $2a\,(a>0)$ билан, фокуслар орасидаги масофани $2c\,(c>0)$ билан белгилайлик. Таърифга кўра[3] $a>c$.

Эллипсдаги ихтиёрий M нуқтанинг F_1 ва F_2 фокуслардан масофалари унинг *фокал радиуслари* дейилади ва мос равишда r_1, r_2 билан белгиланади, яъни

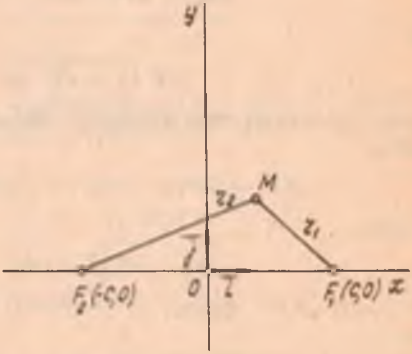
$$r_1=\rho(F_1, M) \text{ ва } r_2=\rho(F_2, M).$$

Эллипснинг таърифига кўра r_1, r_2 фокал радиусларнинг йиғиндиси ўзгармас бўлиб, берилган кесма узунлигига тенг, яъни

$$\rho(F_1, M)+\rho(F_2, M)=2a \text{ ёки}$$
$$r_1+r_2=2a. \qquad (1)$$

(1) тенглик эллипсга тегишли ихтиёрий нуқта учун ўринли бўлиб, уни координаталарда ифодалайлик.

Декарт реперини тенглама-



128- чизма

---

[1] Текисликдаги элементар аналитик геометрияда асосан 1- ва 2- тартибли алгебраик чизиқлар ўрганилади, холос.

[2] Берилган кесманинг узунлиги ($PQ=2a$) фокуслар орасидаги масофадан катта бўлмаган ҳолда эллипс мавжуд бўлмайди, чунки учбурчак қоидасига кўра $\rho(F_1, M)+\rho(F_2, M)>\rho(F_1, F_2)$ ҳолда эллипс кесмага айланади.

[3] $a=c$ ҳолда эллипс кесмага айланади.

нинг содда бўлишига имкон берадиган қилиб танлаймиз: абсциссалар ўқини фокуслар орқали F_2 дан F_1 га йўналтириб ўтказамиз. $F_1 F_2$ кесманинг ўрта перпендикулярини 128-чизмада кўрсатилган йўналишда ординаталар ўқи деб оламиз. Танланган бу $(O, \vec{i}, \vec{j})$ реперда F_1 ва F_2 нуқталарнинг координаталари мос равишда $(c, 0)$ ва $(-c, 0)$ бўлади.

Эллипсдаги ихтиёрий M нуқтанинг координаталарини x, y билан белгиласак, икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{(x-c)^2+y^2}, \\ r_2 &= \sqrt{(x+c)^2+y^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

r_1, r_2 нинг (2) муносабатлардаги қийматларини (1) тенгликка қўйиб, ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\sqrt{(x-c)^2+y^2} + \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a. \tag{3}$$

(3) тенглама танланган реперга нисбатан эллипснинг тенгламасидир, чунки $M(x, y)$ нуқтанинг координаталари бу тенгламани фақат M нуқта эллипсга тегишли бўлган ҳолдагина қаноатлантиради.

(3) тенгламани *каноник тенглама* деб аталувчи кўринишга келтирамиз.

(3) тенгламанинг биринчи ҳадини ўнг томонга ўтказиб, ҳосил бўлган тенгламанинг иккала томонини квадратга оширсак,

$$x^2+2cx+c^2+y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2.$$

Бундан

$$2cx = 4a^2 - 2cx - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}$$

ёки

$$a\sqrt{(x-c)^2+y^2} = a^2 - cx.$$

Ҳосил қилинган тенгламанинг иккала томонини яна квадратга оширамиз:

$$a^2x^2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2 = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

бундан

$$(a^2-c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2-c^2). \tag{4}$$

$a > c \Rightarrow a^2 > c^2$, демак, $a^2 - c^2 > 0$, бу мусбат сонни b^2 деб олайлик:

$$b^2 = a^2 - c^2, \tag{5}$$

у ҳолда (4) тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2. \tag{6}$$

(6) ни a^2b^2 га бўлиб, ушбу тенгламага эга бўламиз:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{7}$$

Энди (7) тенглама ҳақиқатан ҳам эллипсни ифодалашини исбот қиламиз, чунки эллипс тенгламаси (3) кўринишда олинган эди. (7) тенглама (3) тенгламани икки марта радикаллардан қутқариш билан ҳосил қилинди. Демак, (7) тенглама (3) тенгламанинг натижаси, бошқача айтганда, координаталари (3) ни қаноатлантирадиган ҳар бир нуқта (7) тенгламани ҳам қаноатлантиради. Лекин (3) тенглама- (7) тенгламанинг натижаси экани равшан эмас. (3) тенглама (7) тенгламанинг натижаси эканини кўрсатамиз.

$M_1(x_1, y_1)$ (7) тенгламани қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқта бўлсин, яъни

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{8}$$

M_1 нуқта учун $r_1 + r_2 = 2a$ тенгликнинг бажарилишини кўрсатамиз.

M_1 нуқтанинг фокал радиуслари,

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \tag{9}$$

$$r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}. \tag{10}$$

(8) тенгликдан $y_1^2 = b^2\left(1 - \frac{x_1^2}{a^2}\right)$, бу қийматни (9) ва (10) тенгликларга қўйиб,

$$r_1 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}\, x_1^2 - 2cx_1 + (b^2 + c^2)}.$$

$$r_2 = \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}\, x_1^2 + 2cx_1 + (b^2 + c^2)}$$

тенгликларга эга бўламиз. (5) муносабатдан $c^2 = a^2 - b^2$ ва $a^2 = b^2 + c^2$, шунинг учун юқоридаги тенгликлар ушбу кўринишни олади:

$$r_1 = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\, x_1 - a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}\, x_1 - a\right| = \left|a - \frac{c}{a}\, x_1\right|,$$

$$r_2 = \sqrt{\left(\frac{c}{a}\, x_1 + a\right)^2} = \left|\frac{c}{a}\, x_1 + a\right| = \left|a + \frac{c}{a}\, x_1\right|. \tag{11}$$

Юқоридаги сабабларга кўра $0 < \frac{c}{a} < 1$, (8) тенгликдан $\Rightarrow |x_1| \leqslant a$. У ҳолда $\frac{c}{a}|x_1| < a$, шунинг учун $a - \frac{c}{a}\, x_1 > 0$ ва $a + \frac{c}{a} x_1 > 0$. Буларни эътиборга олсак, (11) тенгликлар ушбу кўринишни олади:

$$r_1 = a - \frac{c}{a}\, x_1; \quad r_2 = a + \frac{c}{a}\, x_1. \tag{12}$$

(12) тенгликларни ҳадлаб қўшсак,

$$r_1 + r_2 = 2a$$

га эга бўламиз. Демак, координаталари (7) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар қандай $M_1(x_1, y_1)$ нуқта эллипсга тегишли.

(7) тенглама *эллипснинг каноник тенгламаси* дейилади.

(12) тенгликлардан ушбу хулоса келиб чиқади: эллипснинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасининг r_1, r_2 фокал радиуслари бу нуқтанинг абсциссаси орқали

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x \text{ ва } r_2 = a + \frac{c}{a}x \qquad (13)$$

кўринишда чизиқли ифодаланади.

Агар хусусий ҳолда $a = b$ бўлса, эллипснинг тенгламаси

$$x^2 + y^2 = a^2$$

кўринишни олади. Бу тенглама маркази коордичаталар бошида ва радиуси a га тенг айланани ифодалайди. Демак, айлана эллипснинг хусусий ҳоли. $a = b$ бўлганда $b^2 = a^2 - c^2$ дан $c = 0$. $c \neq 0$ бўлганда $a^2 - b^2 = c^2 \Rightarrow a > b$.

Мисол. Ҳар бир нуқтасидан $F_1(4, 0)$, $F_2(-4,0)$ нуқталаргача бўлган масофалар йиғиндиси 10 га тенг нуқталар тўпламининг тенгламасини топинг.

Ечиш. Изланаётган нуқталар тўплами берилишига кўра эллипсдир ва $2a = 10 \Rightarrow a = 5$, $c = 4$, $b^2 = a^2 - c^2$ муносабатдан $b^2 = 9$, $b = 3$. Демак, изланаётган эллипснинг каноник тенгламаси қуйидагича бўлади:

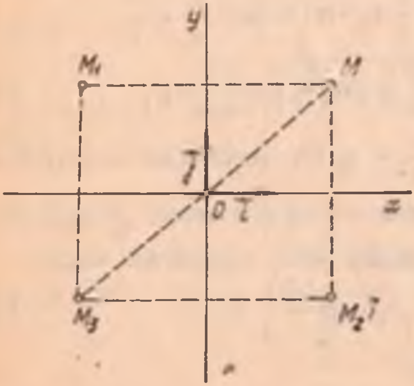
$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

2. Эллипс шакли. Эллипснинг $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (7) каноник тенгламаси бўйича шаклини ўрганамиз.

1. (7) тенгламадан кўринадики, эллипс иккинчи тартибли чизиқ.

2. Эллипс чегараланган чизиқ (агар фигуранинг барча нуқталари бирор доирага тегишли бўлса, уни *чегараланган фигура* деб аталади). (7) тенгламадан кўриниб турибдики, унинг чап томонидаги ифода доимо мусбат бўлиб, ҳар бир ҳад қуйидаги шартни қаноатлантириши керак: $\frac{x^2}{a^2} \leqslant 1$, $\frac{y^2}{b^2} \leqslant 1$. Бундан $|x| \leqslant a$, $|y| \leqslant b$.

Демак, (7) тенглама билан аниқланган эллипснинг барча нуқталари томонлари $2a$, $2b$ бўлган тўғри тўртбурчак ичига жойлашган.



129- чизма

3. (7) тенглама билан аниқланган эллипс координаталар ўқларига нисбатан симметрикдир. Ҳақиқатан, $M(x, y)$ шу эллипс-

нинг бирор нуқтаси бўлса, яъни x, y сонлар (7) тенгламани қаноатлантирса, у вақтда (7) тенгламада ўзгарувчи x, y нинг фақат квадратлари қатнашгани учун бу тенгламани $M_1(-x, y)$, $M_2(x, -y)$ ва $M_3(-x, -y)$ нуқталарнинг координаталари ҳам қаноатлантиради. M_1 нуқта Oy ўққа нисбатан, M_2 нуқта Ox ўққа нисбатан M нуқтага симметрикдир (129-чизма). Шунинг учун координата ўқлари эллипснинг симметрия ўқларидир. Симметрия ўқларининг кесишган нуқтаси $O(0, 0)$ *эллипснинг маркази* дейилади, фокуслар ётган ўқи унинг *фокал ўқи* дейилади.

4. Эллипснинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топамиз. Масалан, Ox ўқ билан кесишган нуқталарини топиш учун ушбу тенгламаларни биргаликда ечамиз:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \\ y = 0. \end{cases} \tag{14}$$

(14) системанинг иккинчи тенгламасидан $y = 0$ ни биринчи тенгламасига қўйсак, $x = \pm a$ ҳосил бўлади. Шундай қилиб, эллипс Ox ўқни $A_1(a, 0)$ ва $A_2(-a, 0)$ нуқталарда кесади. Шу сингари эллипснинг Oy ўқ билан кесишган $B_1(0, b)$ ва $B_2(0, -b)$ нуқталари топилади. Эллипснинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини унинг *учлари* дейилади. Эллипснинг тўртта учи бор, улар:

$$A_1,\ A_2,\ B_1,\ B_2.$$

A_1A_2 кесма ва унинг узунлиги $2a$ эллипснинг *катта ўқи*, OA_1 кесма ва унинг узунлиги a эса эллипснинг *катта ярим ўқи* дейилади. B_1B_2 кесма ва унинг узунлиги $2b$ *эллипснинг кичик ўқи*, OB_1 кесма ва унинг узунлиги b эса эллипснинг *кичик ярим ўқи* дейилади.

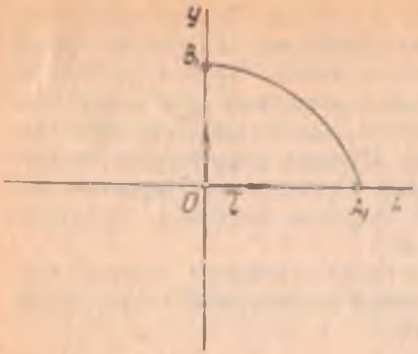
5. Энди (7) тенгламани y га нисбатан ечайлик:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ . \tag{15}$$

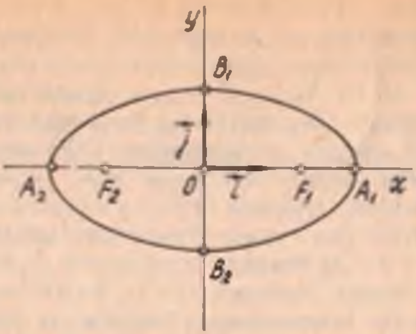
Эллипс координата ўқларининг ҳар бирига нисбатан симметрик бўлгани учун унинг биринчи координата чорагида ётган қисминигина текшириш етарли. Биринчи чоракдаги нуқталар учун $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ бўлиб, эллипснинг бу чоракдаги қисми учун

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\ . \tag{16}$$

Бундан (16) функциянинг монотон камаювчи эканлиги ва $a^2 - x^2 \geqslant 0$ бўлиши, яъни $a^2 \geqslant x^2$ ёки $|x| \leqslant a$ бўлиши бевосита кўринади. Демак, фақат биринчи чоракда иш кўраётганимиз учун $x \leqslant a$. Юқоридаги ҳолларни эътиборга олсак, эллипснинг биринчи чоракдаги қисмини 130-чизмада кўрсатилган B_1A_1 ёй деб тасаввур қилиш мумкин. Эллипснинг координата ўқларига нисбатан симметриклигидан фойдаланиб, унинг биринчи чоракда ҳосил қилинган қисми бўйича шаклини 131-чизмадагидек тасаввур қилиш мумкин (131-чизма).



130- чизма



131- чизма

Эслатма. Агар эллипснинг фокуслари ординаталар ўқида жойлашиб қолса, унинг каноник тенгламаси ҳам (7) кўринишда бўлади, бу ерда $b > a$.

3. Эксцентриситет. Таъриф. Эллипснинг фокуслари орасидаги масофанинг катта ўқининг узунлигига нисбати *эксцентриситет* дейилади ва эксцентриситет e ҳарфи билан белгиланади.

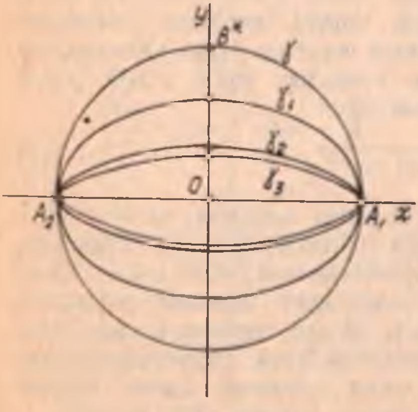
Таърифга кўра $e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}$ ҳамда $c < a \Rightarrow 0 < e < 1$.

Эллипснинг эксцентриситети унинг шаклини аниқлашда муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, (5) дан $c^2 = a^2 - b^2$, шунинг учун

$$e^2 = \frac{c^2}{a^2} = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2,$$

бундан

$$\frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}\ .$$



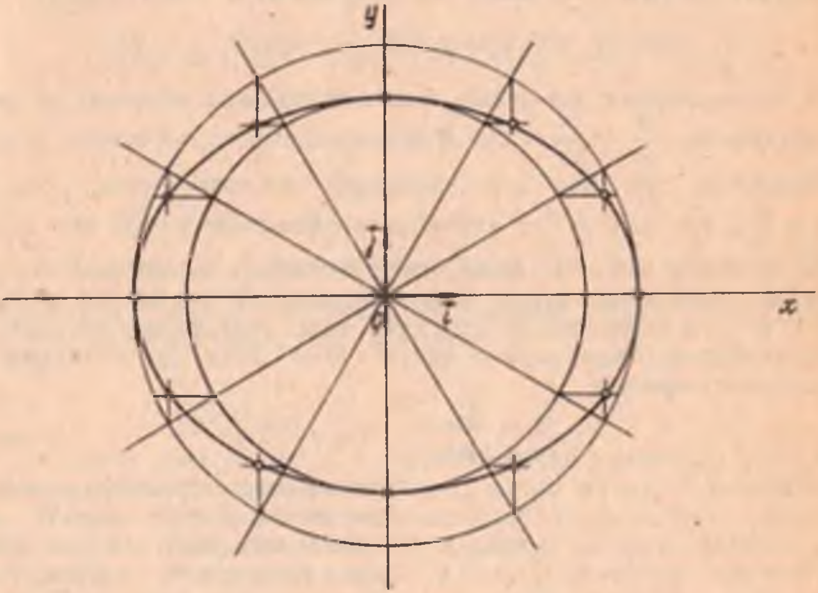
132- чизма

Эксцентриситет $e \to 1$ да (лекин $e < 1$) $\frac{b}{a} \to 0$ бўлиб (бу ерда a ўзгармайди деб фараз қилинади), b кичиклашади ва эллипс Ox ўққа қисила боради, аксинча $e \to 0$ бўлса, $\frac{b}{a} \to 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow b \to a$. Бу ҳолда эллипс айланага яқинлаша боради. 132- чизмада γ айлана ва γ_1, γ_2, γ_3 эллипслар тасвирланган бўлиб, e_1, e_2, e_3 бу эллипсларнинг эксцентриситетлари: $e_1 > e_2 > e_3$.

Мисол. 1) $16x^2 + 25y^2 - 400 = 0$; 2) $9x^2 + 25y^2 - 225 = 0$.

$16x^2 + 25y^2 = 400 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$; бу ерда $a_1 = 5$, $b_1 = 4$, $c_1 = \sqrt{25 - 16} = 3$, $e_1 = \frac{3}{5}$. $9x^2 + 25y^2 = 225 \Rightarrow \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow a_2 = 5$, $b_2 = 3$, $c_2 = \sqrt{25 - 9} = 4$;

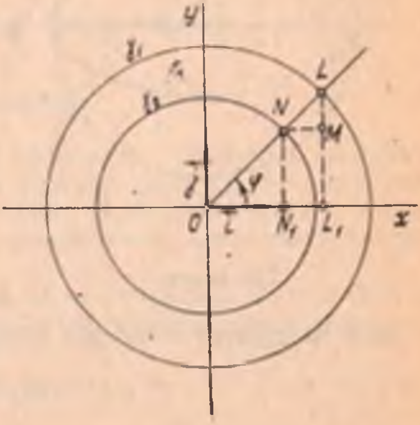
$e_2 = \frac{4}{5}$. $e_2 > e_1 \Rightarrow$ биринчи эллипс иккинчисига нисбатан ўзининг катта ўқига сиқилган, яъни чўзиқроқ.



4. Эллипснинг фокал радиуслари. (7) эллипсдаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтанинг фокал радиуслари (12) формулалар орқали ифодаланар эди. $\frac{c}{a} = e$ эканини эътиборга олсак, бу формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$r_1 = a - ex; \; r_2 = a + ex. \quad (17)$$

5. Эллипсни ясаш, параметрик тенгламалар. Каноник тенгламаси билан берилган эллипсни ясашни кўрсатай-



133- чизма

лик. Марказлари координаталар бошида ва $a > b$ радиусли иккита γ_1, γ_2 айлана чизамиз (133-чизма). Координаталар бошидан ихтиёрий нур чиқарайлик, унинг абсциссалар ўқига оғиш бурчаги φ бўлиб, γ_1, γ_2 айланалар билан кесишган нуқталари L, N бўлсин.

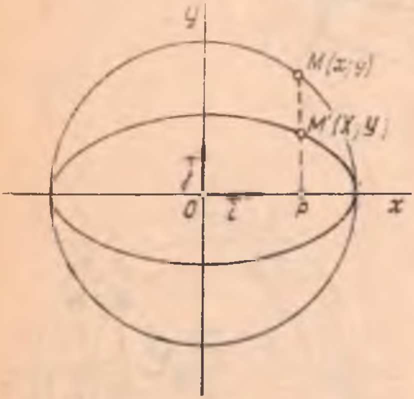
L, N нуқталардан Oy ўққа параллел l, m тўғри чизиқларни ўтказамиз. $l \cap Ox = L_1$, $m \cap Ox = N_1$ бўлсин. N нуқтадан Ox ўққа параллел тўғри чизиқ ўтказамиз, унинг l тўғри чизиқ билан кесишган M нуқтаси эллипснинг нуқтаси бўлади. Ҳақиқатан, M нуктанинг координаталарини x, y десак, ушбу муносабатни ҳосил қиламиз:

$$x = a\cos\varphi, \quad y = b\sin\varphi \quad \text{ёки} \quad \frac{x}{a} = \cos\varphi, \quad \frac{y}{b} = \sin\varphi,$$

бу тенгликларнинг ҳар иккала томонини квадратга оширамиз ва ҳадлаб қўшсак, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow M$ нуқта эллипснинг нуқтасидир. O дан чиқарилган ҳар бир нур эллипсдаги нуқтани беради. $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{3}{2}\pi$ қийматларга эллипснинг учлари мос келади. φ нинг $0 < \varphi < \pi$ оралиқдаги қийматларида эллипснинг Ox ўқ билан чегараланган юқори ярим текисликдаги нуқталари, φ нинг $\pi < \varphi < 2\pi$ қийматларида эса қуйи ярим текисликдаги нуқталари ҳосил бўлади. Фақат эллипс устида ётган $M(x, y)$ нуқталарнинг координаталаригина

$$\begin{cases} x = a\cos\varphi, \\ y = b\sin\varphi \end{cases} \quad 0 \leqslant \varphi < 2\pi \tag{A}$$

тенгламалар системасини қаноатлантиргани учун бу система эллипсни аниқлайди. (A) тенгламалар эллипснинг *параметрик тенгламалари* дейилади. Бу тенгламалар эллипсни юқорида кўрсатилган усулда ясаш учун асос вазифасини бажаради.



134-чизма

6. **Эллипс — айлананинг аффин образи.** **Теорема.** *Ҳар қандай эллипсни бирор айлананинг диаметрига қисиш алмаштиришдаги образи деб қараш мумкин.*

Исбот. Текисликдаги бирор $(O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперига нисбати маркази координаталар бошида ва радиуси a бўлган бирор айланани қараймиз (134-чизма):

$$x^2 + y^2 = a^2 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1. \tag{18}$$

Текисликни $k = \frac{b}{a}$ коэффициент билан Ox ўққа қисиш алмаштиришни бажарайлик (45-§). Натижада текисликнинг ҳар бир $M(x, y)$ нуқтаси шундай $M'(X, Y)$ нуқтага ўтадики, улар учун

$$\overrightarrow{PM'} = k\overrightarrow{PM} \tag{19}$$

бўлади, бунда MM' тўғри чизиқ Ox ўққа перпендикуляр ва $P = MM' \cap Ox$, M, M', P нуқталар бир хил абсциссага эга ва $P \in Ox$ бўлгани учун (19) муносабат координаталарда ушбу кўринишда бўлади:

$$(X - x)\vec{i} + (Y - 0)\vec{j} = k[(x - x)\vec{i} + (y - 0)\vec{j}]$$

ёки

$$\begin{cases} x = X \\ y = \frac{1}{k}Y. \end{cases} \tag{*}$$

Текисликни $k = \frac{b}{a}$ коэффициент билан Ox ўққа қисишда (18) айланага мос келган чизиқнинг тенгламасини топиш учун (*) дан x, y нинг қийматларини (18) га қўямиз:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{k^2a^2} = 1 \quad \text{ёки} \quad \frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1.$$

Бу тенглама ярим ўқлари a, b бўлган эллипсни ифодалайди. айланани диаметрига қисиш алмаштиришида айлана эллипсга алмашинади.

Тўғри чизиққа қисиш аффин алмаштириш бўлгани учун ҳар қандай эллипсни бирор айлананинг аффин образи деб қараш мумкин. ▲

Мисол. $x^2 + y^2 = 16$ айланани Ox ўққа қисиш натижасида $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$ эллипс ҳосил бўлган. Қисиш коэффициентини топинг.

Ечиш. Эллипс тенгламасидан: $a = 4$, $b = 3$, $k = \frac{b}{a} = \frac{3}{4}$.

49- §. Гипербола

1. Таърифи, каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтасидан *фокуслар* деб аталувчи берилган икки F_1, F_2 нуқтагача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати берилган кесма узунлигига тенг бўлган барча нуқталар тўплами *гипербола* деб аталади.

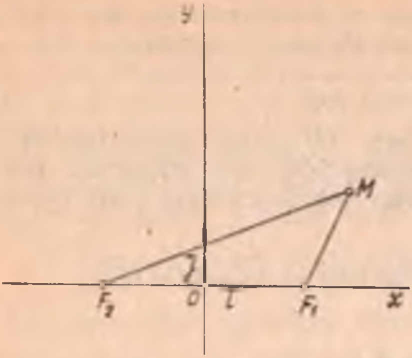
Гипербола таърифидаги берилган кесма узунлигини $2a\,(a > 0)$ билан, фокуслари орасидаги масофани $2c\,(c > 0)$ билан белгилаймиз.

Албатта

$$2a < 2c. \tag{*}$$[1]

---

[1] Учбурчак қоидасига кўра икки томон айирмаси учинчи томондан кичик. Биз $a = 0$ ва $a = c$ дан иборат «айниган» ҳолларни қарамаймиз.



135- чизма

Гиперболадаги M нуқтанинг F_1, F_2 гача масофалари унинг *фокал радиуслари* дейилади ва r_1, r_2 билан белгиланади, яъни

$$r_1 = \rho(F_1, M), \quad r_2 = \rho(F_2, M).$$

Гиперболанинг таърифига биноан

$$|r_1 - r_2| = 2a. \qquad (20)$$

(20) тенглик фақат гиперболада ётган M нуқталар учунгина ўринли. Бу тенгликни координаталарда ёзамиз. Бунинг учун декарт реперини эллипс билан иш кўрганимиздек қилиб танлаймиз (135-чизма).

Фокуслар орасидаги масофа $\rho(F_1, F_2) = 2c$ бўлгани учун олинган реперга нисбатан $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$. Шу реперга нисбатан гиперболадаги ихтиёрий M нуқтанинг координаталарини x, y билан белгилайлик: $M(x, y)$. У ҳолда

$$r_1 = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \qquad (21)$$

бўлиб, (20) ва (21) дан

$$\left|\sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2}\right| = 2a$$

ёки

$$r_1 - r_2 = \pm 2a \Longleftrightarrow \sqrt{(x-c)^2 + y^2} - \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a. \qquad (22)$$

Гиперболани ифодаловчи (22) тенгламани соддароқ кўринишга келтирайлик. (22) дан:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x+c)^2 + y^2}.$$

Бу тенгликнинг иккала томонини квадратга кўтариб, соддалаштирамиз:

$$\pm a\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = cx - a^2.$$

Бу тенгламани яна квадратга кўтариб, сўнгра соддалаштирсак,

$$(c^2 - a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2). \qquad (23)$$

$a^2 < c^2 \Rightarrow c^2 - a^2 > 0$; бу айирмани b^2 билан белгилаймиз:

$$b^2 = c^2 - a^2. \qquad (24)$$

У ҳолда (23) муносабатдан ушбу содда тенгламага келамиз:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad (25)$$

Демак, гипербола иккинчи тартибли чизиқдир. (25) тенглама гиперболани ифодаловчи (22) тенгламанинг натижаси, шунга кўра координаталари (22) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир $M(x, y)$ нуқта (25) тенгламани ҳам қаноатлантиради.

Энди бунинг тескарисини исбот қилайлик. $M_1(x_1, y_1)$ (25) ни қаноатлантирувчи ихтиёрий нуқта бўлсин, яъни

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} = 1. \tag{26}$$

M_1 нуқтанинг F_1, F_2 фокуслардан масофалари:

$$r_1 = \sqrt{(x_1 - c)^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{(x_1 + c)^2 + y_1^2}. \tag{27}$$

(26) тенгликдан $y_1^2 = \frac{b^2}{a^2}(x_1^2 - a^2)$. Бу қийматни (27) тенгликларга қўйиб, $b^2 = c^2 - a^2$ муносабатни эътиборга олсак,

$$r_1 = \pm\left(\frac{c}{a}x_1 - a\right), \tag{28}$$

$$r_2 = \pm\left(\frac{c}{a}x_1 + a\right) \tag{29}$$

тенгликларга эга бўламиз, r_1, r_2 мусбат сонлар, шунга кўра қавслар олдидаги ишораларни шундай танлаш керакки, (28) ва (29) тенгликларнинг ўнг томонлари ҳам мусбат бўлсин. (26) дан $\Rightarrow |x_1| \geqslant a$. Бундан ташқари, $c > a \Rightarrow \frac{c}{a} > 1$. У ҳолда, агар $x_1 \geqslant a$ бўлса, $\frac{c}{a}x_1 - a > 0$ ва $\frac{c}{a}x_1 + a > 0$ бўлиб, (28) ва (29) тенгликлардаги қавсларни + ишора билан оламиз, яъни

$$r_1 = \frac{c}{a}x_1 - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x_1 + a. \tag{30}$$

Булардан $r_1 - r_2 = \frac{c}{a}x_1 - a - \frac{c}{a}x_1 - a = -2a$; $x_1 \leqslant -a$ бўлса, $\frac{c}{a}x_1 - a < 0$ ва $\frac{c}{a}x_1 + a < 0$ бўлиб, (28), (29) тенгликлардаги қавсларни — ишора билан оламиз, яъни

$$r_1 = a - \frac{c}{a}x_1, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x_1;$$

булардан

$$r_1 - r_2 = a - \frac{c}{a}x_1 + a + \frac{c}{a}x_1 = 2a. \tag{31}$$

Демак, (25) тенгламадан (22) тенглама келиб чиқади. Шундай қилиб (25) тенглама гиперболанинг тенгламасидир. (25) тенглама гиперболанинг *каноник тенгламаси* дейилади.

(30) ва (31) тенгламалардан қуйидаги натижа келиб чиқади: гиперболадаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтанинг r_1, r_2 фокал радиуслари унинг x абсциссаси орқали

$$x > 0 \text{ бўлганда } r_1 = \frac{c}{a}x - a, \quad r_2 = \frac{c}{a}x + a, \tag{32}$$

$$x < 0 \text{ бўлганда } r_1 = a - \frac{c}{a}x, \quad r_2 = -a - \frac{c}{a}x \tag{33}$$

кўринишларда чизиқли ифодаланади.

Мисол. Гиперболанинг $F_1(10, 0)$, $F_2(-10, 0)$ фокусларини ва нуқталаридан бири $A(12, 3\sqrt{5})$ ни билган ҳолда унинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Бу ерда

$$r_1 = \rho(F_1, A) = \sqrt{4 + 45} = \sqrt{49} = 7,$$

$$r_2 = \rho(F_2, A) = \sqrt{484 + 45} = \sqrt{529} = 23.$$

$$|7 - 23| = 2a \Rightarrow a = 8.$$

Гипербола учун $b^2 = c^2 - a^2 = 100 - 64 = 36 \Rightarrow b = 6$. Демак,

$$\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{36} = 1.$$

2. Гипербола шакли. Гиперболанинг

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламасига асосланиб унинг шаклини аниқлаймиз.

Эллипс тенгламаси устида олиб борилган муҳокамаларни такрорлаб гиперболанинг координаталар боши, координата ўқларига нисбатан симметриклиги аниқланади.

Гипербола Ox ўқни $A_1(a, 0)$ ва $A_2(-a, 0)$ нуқталарда кесади. (25) тенглама билан аниқланган гипербола Oy ўқ билан кесишмайди. Ҳақиқатан (25) тенгламага $x = 0$ ни қўйсак, $-\frac{y^2}{b^2} = 1$. Равшанки, бу тенглик ҳақиқий сонлар соҳасида ўринли бўлмайди.

A_1, A_2 нуқталар *гиперболанинг учлари* дейилади. Шундай қилиб, гиперболанинг иккита учи бор экан. Гиперболанинг учлари орасидаги масофа унинг *ҳақиқий ўқи* дейилади.

Ординаталар ўқида O дан b масофада турувчи $B_1(O, b)$ ва $B_2(O, -b)$ нуқталарни белгилаймиз. $B_1B_2 = 2b$ ни гиперболанинг *мавҳум ўқи* дейилади.

Агар $M(x, y)$ нуқта гиперболада ётса, унинг учун (25) тенгламадан: $|x| \geqslant a$. Демак, $x = \pm a$ тўғри чизиқлар билан чегараланган $-a < x < a$ полосада гиперболанинг нуқталари йўқ.

(25) тенгламани y ординатага нисбатан ечамиз:

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}. \tag{34}$$

Бу тенгламадан кўринадики, x миқдор a дан $+\infty$ гача ортганда ва $-a$ дан $-\infty$ гача камайганда y миқдор $-\infty < y < +\infty$ ораликдаги қийматларни қабул қилади. Демак, гипербола икки қисмдан иборат бўлиб, улар *гиперболанинг тармоқлари* дейилади.

Гиперболанинг бир (ўнг) тармоғи $x \geqslant a$ ярим текисликда, иккинчи (чап) тармоғи $x \leqslant -a$ ярим текисликда жойлашган.

Эслатма. Агар гиперболанинг фокуслари ординаталар ўқида жойлашган бўлса, унинг каноник тенгламаси $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$ кўринишда бўлади.

3. Гипербола асимптоталари. Гиперболанинг шаклини яна ҳам аниқроқ тасаввур қилиш мақсадида текис (ясси) чизиқнинг[1] *асимптотаси* тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Агар $M \in \Gamma$ нуқта шу Γ чизиқ бўйлаб ҳаракатланиб борганида унинг *и* тўғри чизиққача бўлган масофаси нолга интилса, тўғри чизиқ Γ чизиқнинг *асимптотаси* дейилади.

Теорема. $y = \frac{b}{a}x$, $y = -\frac{b}{a}x$ *тўғри чизиқлар* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *гиперболанинг асимптоталаридир.*

Исбот. Гипербола координата ўқларига нисбатан симметрик бўлгани учун гиперболанинг биринчи чоракдаги қисминигина олиш етарли. Шу мақсадда $x \geqslant a$ да гиперболанинг биринчи чоракдаги қисмини аниқлайдиган

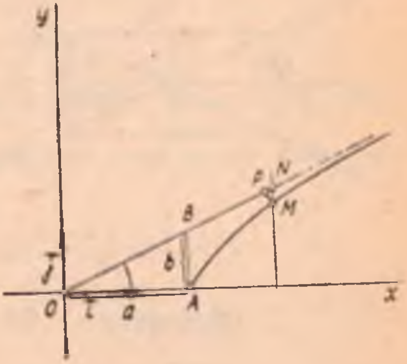
$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} \tag{35}$$

тенглама билан

$$y = \frac{b}{a}x \tag{36}$$

тенгламани солиштирамиз. $y = \frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ координаталар бошидан ўтади ва бурчак коэффициенти $k = \frac{b}{a}$. 136-чизмада тўғри чизиқнинг биринчи чоракдаги бўлаги тасвирланган бўлиб, унда $OA = a$, $AB = b$. Гипербола ва $y = \frac{b}{a}x$ тўғри чизиқда мос равишда жойлашган бир хил абсциссали $M(x, y)$, $N(x, Y)$ нуқталарни қараймиз. Бу икки нуқтанинг мос ординаталари:

$$y = +\frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}\,, \quad Y = \frac{b}{a}x$$



136- чизма

---

[1] Барча нуқталари битта текисликда ётган чизиқ *текис (ясси) чизиқ* деб аталади.

бўлади. MN кесманинг узунлигини ҳисоблаймиз:

$$Y = \frac{b}{a}x = \frac{b}{a}\sqrt{x^2} > \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2} = y \Rightarrow Y > y$$

ёки $Y - y > 0$, демак, $\rho(M, N) = Y - y$. Лекин

$$Y - y = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b}{a}\,\frac{(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

ёки

$$Y - y = \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Гиперболадаги M нуқтадан (36) тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг асоси P бўлсин, у ҳолда

$$\rho(M, P) < \rho(M, N) \Rightarrow \rho(M, P) < \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}.$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$ ифодани текширайлик. Унинг махражи чексиз ортиб борувчи икки мусбат қўшилувчининг йиғиндисидан иборат бўлиб, сурати эса ўзгармас ab миқдордир, демак,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0.$$

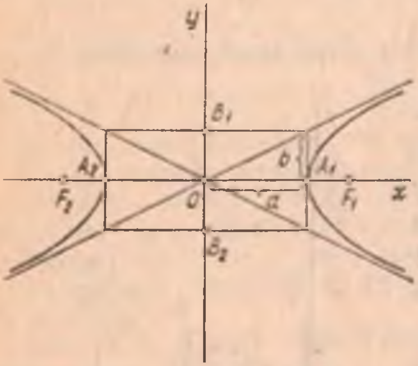
У ҳолда

$$\rho(M, P) < \rho(M, N) \text{ дан } \rho(M, P) \to 0.$$

Демак, гиперболадаги M нуқта гипербола бўйича ҳаракатланиб, унинг учидан етарлича узоқлашса, M нуқтадан (36) тўғри чизиққача бўлган масофа нолга интилади. Юқоридаги таърифга кўра гиперболанинг қаралаётган қисми учун (36) тўғри чизиқ асимптота бўлади.

Гиперболанинг координата ўқларига нисбатан симметриклигидан $y = -\frac{b}{a}x$ тўғри чизиқ ҳам гиперболанинг асимптотасидир. Шундай қилиб,

$$y = \frac{b}{a}x, \quad y = -\frac{b}{a}x \qquad (37)$$



137- чизма

тенгламалар билан аниқланадиган тўғри чизиқлар гиперболанинг асимптоталаридир (137- чизма).

Мисол. Асимптоталари $2x - y = 0$, $2x + y = 0$ тенгламалар билан берилган ва фокуслари марказдан 5 бирлик масофада бўлган гиперболанинг каноник тенгламасини тузинг.

Ечиш. Берилган тенгламаларни $y=2x$, $y=-2x$ кўринишда ёзиб олсак ҳамда (37) тенгламалар билан солиштирсак, $\frac{b}{a}=2$ ёки $b=2a$ бўлади. Фокуслар марказдан 5 бирлик масофада бўлгани учун $c=5$ бўлиб, $b^2=c^2-a^2$ тенгликдан фойдалансак, $4a^2=25-a^2$, бундан $a^2=5$, $a=\sqrt{5}$, у ҳолда $b=2\sqrt{5}$. Шуларга асосан гиперболанинг изланаётган тенгламаси:

$$\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{20}=1.$$

4. Тенг томонли гипербола. Ярим ўқлари тенг бўлган гипербола *тенг томонли* деб аталади.

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ тенгламада $a=b$ бўлганда:

$$x^2-y^2=a^2. \tag{38}$$

Тенг томонли гипербола асимптоталарининг тенгламалари $y=x$, $y=-x$ кўринишда бўлиб, улар ўзаро перпендикуляр ($k_1k_2=-1$). Бу асимптоталарни янги координата ўқлари сифатида қабул қилсак, тенг томонли гипербола тенгламаси ўрта мактаб курсида кўриладиган ихчам $xy=a$ кўринишни олади.

Ҳақиқатан, Ox ўқ учун $y=-x$ асимптотани, Oy ўқ учун эса $y=x$ асимптотани олсак, у ҳолда $\varphi=(\widehat{\vec{i},\vec{i}'})=-45°$.

Эски x, y координаталардан янги координаталарга ўтиш формулаларидан (II боб, 19-§):

$$x=\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}, \quad y=\frac{-x'+y'}{\sqrt{2}}.$$

Энди x, y координаталардан x', y' га ўтсак, тенг томонли гиперболанинг янги тенгламасини ҳосил қиламиз:

$$x'y'=\frac{a^2}{2} \text{ ёки } y'=\frac{a^2}{2x'}.$$

Мисол. $xy=2$ гипербола тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Координаталар бошини қўзғатмаган ҳолда координата ўқларини $+45°$ бурчакка бурамиз:

$$\left|\begin{aligned} x &= x'\cos 45°-y'\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y'),\\ y &= x'\sin 45°+y'\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'). \end{aligned}\right.$$

x, y нинг бу қийматларини $xy=2$ тенгламага қўямиз:

$$\frac{\sqrt{2}}{2}(x'-y')\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y')=2.$$

Соддалаштиргандан сўнг, ушбу каноник тенглама ҳосил бўлади:

$$x'^2 - y'^2 = 4.$$

5. Эксцентриситет. Гиперболанинг фокуслари орасидаги масофани ҳақиқий ўқининг узунлигига нисбати гиперболанинг *эксцентриситети* дейилади.

Эксцентриситетни эллипсдагидек e ҳарфи билан белгиласак.

$$e = \frac{2c}{2a} = \frac{c}{a}.$$

Гиперболада $c > a \Rightarrow e > 1$.

Эксцентриситет гипербола шаклини аниқлашда муҳим роль ўйнайди. Ҳақиқатан ҳам, $e = \frac{c}{a}$ дан $c = ea$, буни $b^2 = c^2 - a^2$ га қўйсак, $b^2 = a^2(e^2 - 1)$ ёки $\frac{b}{a} = \sqrt{e^2 - 1}$ бўлиб, бундан кўринадики, эксцентриситет e қанчалик кичик, яъни $e \to 1$ бўлса, $\frac{b}{a}$ шунчалик кичик, яъни $\frac{b}{a} \to 0$ бўлади (бу ерда a ўзгармайди деб фараз қилинади) ва гипербола ўзининг ҳақиқий ўқига сиқилган бўлади, аксинча, e катталашиб борса, $\frac{b}{a}$ ҳам катталашиб, гипербола тармоқлари кенгайиб боради. 138-чизмада γ_1, γ_2, γ_3 гиперболалар тасвирланган бўлиб, уларнинг e_1, e_2, e_3 эксцентриситетлари учун $e_1 < e_2 < e_3$.

138-чизма

Мисол. Тенг томонли гиперболанинг эксцентриситетини ҳисобланг.

Ечиш. Тенг томонли гиперболада $a = b$ бўлгани учун $b^2 = c^2 - a^2$ дан $c^2 = 2a^2$, бундан $c = \sqrt{2}a$. У ҳолда эксцентриситет:

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}.$$

6. Гиперболанинг фокал радиуслари. (25) гиперболадаги ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтанинг фокал радиуслари $x > 0$ бўлганда (32) формулалир орқали ва $x < 0$ да (33) формулалар орқали ифодаланар эди. $\frac{c}{a} = e$ эканини эътиборга олсак, бу формулалар ушбу кўринишни олади:

$$x > 0 \text{ бўлганда } r_1 = ex - a, \ r_2 = ex + a, \qquad (39)$$

$$x < 0 \text{ бўлганда } r_1 = a - ex, \ r_2 = -a - ex. \qquad (40)$$

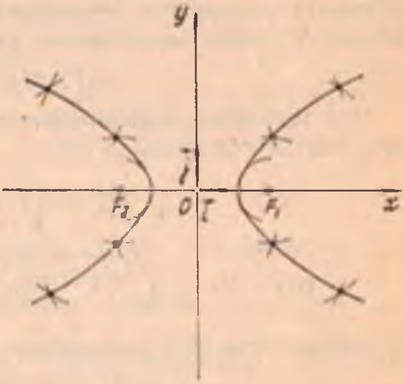
7. Гиперболани ясаш. Декарт реперида

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

тенгламаси бўйича гиперболани ясаш масаласини қарайлик. Аввало бу тенглама бўйича унинг $A_1(a,\ 0)$, $A_2(-a,\ 0)$ учларини ва $c^2 - a^2 = b^2$ муносабатдан фойдаланиб $F_1(C,\ 0)$, $F_2(-C,\ 0)$ фокусларини топамиз. F_1 фокусни марказ қилиб, ихтиёрий r_1 радиусли $S(F_1,\ r_1)$ айлана, F_2 фокусни марказ қилиб, $r_2 = r_1 + 2a$ радиусли $S(F_2,\ r_2)$ айлана чизамиз. Бу икки айлананинг кесишган нуқталари гиперболада ётади, чунки бу нуқталар учун

$$|r_2 - r_1| = |r_1 + 2a - r_1| = 2a.$$

Марказларнинг ўринлари алмаштирилса, гиперболанинг яна икки нуқтаси ҳосил бўлади. Шундай қилиб, r_1 нинг ҳар бир янги қиймати бўйича гиперболанинг тўртта нуқтасини ясаш мумкин.



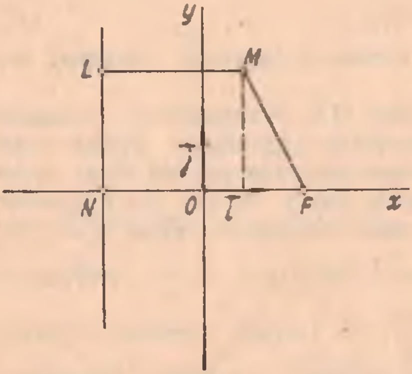
139- чизма

Шу усулда етарлича нуқталарни ясаб, уларни туташтирсак, гиперболанинг шакли 139- чизмадагидек тахмин қилинади.

50- §. Парабола

1. Таърифи. Каноник тенгламаси. Текисликда ҳар бир нуқтасидан берилган нуқтагача ва берилган тўғри чизиққача бўлган масофалари ўзаро тенг бўлган барча нуқталар тўплами *парабола* деб аталади. Берилган нуқта берилган тўғри чизиқда ётмайди деб олинади. Берилган нуқта *параболанинг фокуси*, берилган тўғри чизиқ эса *параболанинг директрисаси* дейилади.

Параболанинг фокуси ва директрисасини мос равишда F ва d билан, фокусдан директрисагача бўлган масофани p билан белгилаймиз. Таърифдан фойдаланиб, парабола тенгламасини келтириб чиқарайлик: бунинг учун декарт реперини қуйидагича танлаймиз: абсциссалар ўқи деб F нуқтадан ўтувчи ва d тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган тўғри чизиқни қабул қиламиз, унинг мусбат



140- чизма

йуналиши 140- чизмада кўрсатилгандек бўлиб, абсциссалар ўқининг d тўғри чизиқ билан кесишган нуқтаси N бўлсин. Ординаталар ўқини FN кесманинг ўртасидан ўтказамиз. Танланган реперда директриса тенгламаси $x = -\frac{p}{2}$, F фокус эса $+\frac{p}{2}$, 0 координаталарга эга бўлади.

Параболанинг ихтиёрий нуқтаси $M(x, y)$ бўлсин. M нуқтадан директрисага туширилган перпендикулярнинг асосини L билан белгилайлик. У ҳолда параболанинг таърифига кўра

$$\rho(F, M) = \rho(L, M). \tag{41}$$

(41) тенгликни координаталарда ифодалайлик. Икки нуқта орасидаги масофа формуласига кўра

$$\rho(F, M) = \sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2};$$

$$\rho(L, M) = \sqrt{\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + (y - y)^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|.$$

Бу қийматларни (41) муносабатга қўямиз:

$$\sqrt{\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2} = \left|x + \frac{p}{2}\right|. \tag{42}$$

(42) тенглама параболанинг танланган реперга нисбатан тенгламасидир, чунки уни фақат параболада ётган нуқталарнинг координаталаригина қаноатлантиради.

(42) тенгламани соддароқ кўринишга келтирамиз. Бунинг учун унинг иккала томонини квадратга кўтариб, ихчамлаймиз:

$$\left(x - \frac{p}{2}\right)^2 + y^2 = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 \text{ ёки } x^2 - px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 + y^2 =$$
$$= x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2,$$

бундан

$$y^2 = 2px. \tag{43}$$

(43) тенгламани (42) тенгламанинг натижаси сифатида келтириб чиқардик.

Энди ўз навбатида (42) тенгламани (43) тенгламанинг натижаси сифатида келтириб чиқариш мумкинлигини кўрсатамиз. Бунинг учун координаталари (43) тенгламани қаноатлантирадиган ҳар бир нуқта параболага тегишли эканини кўрсатиш кифоя. $M_1(x_1, y_1)$ нуқтанинг координаталари (43) тенгламани қаноатлантирсин, яъни $y_1^2 = 2px_1$ сонли тенглик бажарилсин. Шу билан бирга $x = -\frac{p}{2}$ тенгламага эга бўлган d тўғри чизиқ ва $F\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ нуқта берилган бўлсин. M_1 нуқтанинг F ва d дан бир хил масофада туришини кўрсатишимиз керак:

$$\rho(F,\ M_1) = \sqrt{\left(x_1 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_1^2}.$$

ва

$$\rho(L,\ M_1) = \left|x_1 + \frac{p}{2}\right|.$$

Бу тенгликларга $y_1^2 = 2px_1$ ни қўйсак,

$$\rho(F,\ M_1) = \sqrt{x_1^2 - px_1 + \frac{p^2}{4} + 2px_1} = \sqrt{\left(x_1 + \frac{p}{2}\right)^2} =$$

$$= \left|x_1 + \frac{p}{2}\right| = \rho(L,\ M_1).$$

Бундан $\Rightarrow M_1$ нуқта параболага тегишли. Демак, (43) парабола тенгламаси бўлиб, у *каноник тенглама* дейилади.

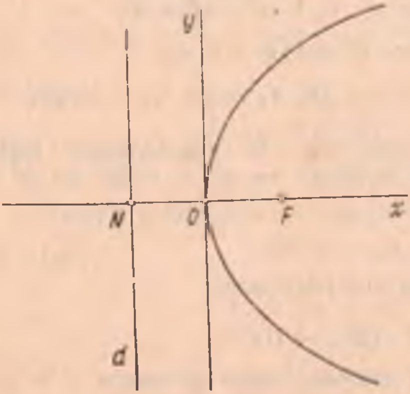
2. Парабола шакли. Параболанинг шаклини унинг (43) тенгламасига кўра текширамиз.

$y^2 \geqslant 0$ ва $p > 0$ бўлгани учун $y^2 = 2px$ тенгламада $x \geqslant 0$ бўлиши керак. Бундан (43) параболанинг барча нуқталари ўнг ярим текисликда жойлашганлиги келиб чиқади;

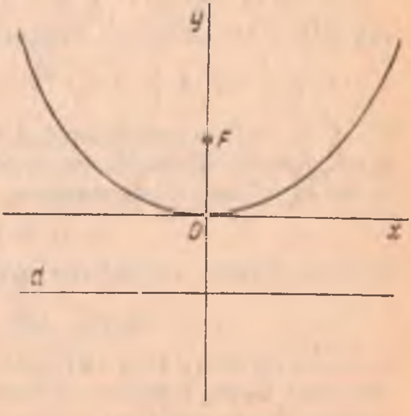
$x = 0$ да $(43) \Rightarrow y = 0 \Rightarrow$ парабола координаталар бошидан ўтади. Координаталар боши параболанинг *учи* дейилади;

x нинг ҳар бир $x > 0$ қийматига y нинг ишоралари қарама-қарши, аммо абсолют миқдорлари тенг бўлган икки қиймати мос келади. Бундан параболанинг Ox ўққа нисбатан симметрик жойлашганлиги аниқланади. Ox ўқ параболанинг *симметрия ўқи* дейилади. У шу билан бир вақтда параболанинг *фокал ўқи* ҳамдир.

$(43) \Rightarrow y = \pm\sqrt{2px}$. Бу тенгламадан кўринадики, x ортиб борса, $|y|$ ҳам ортиб боради, яъни $x \to +\infty$ да $|y| \to +\infty$. Кўрсатилган бу хоссаларга асосланиб параболанинг шаклини 141- чизмадагидек тахмин қилиш мумкин.

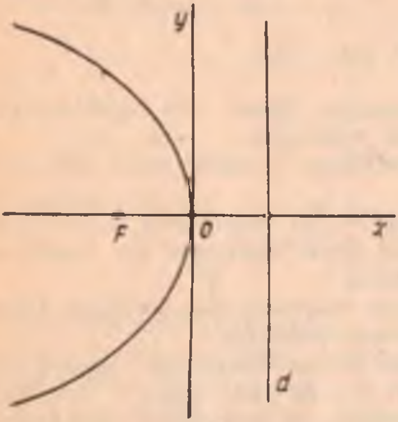


141- чизма

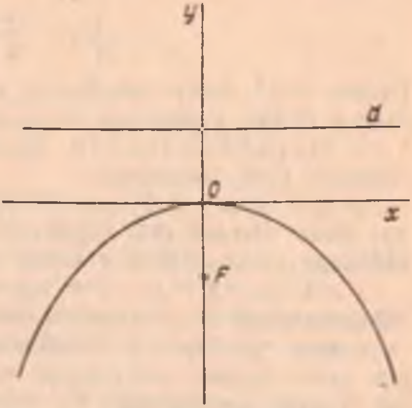


142- чизма

Параболанинг тенгламасини ҳосил килиш учун декарт реперини махсус танладик, яъни Ox уқни фокус орқали директрисага перпендикуляр қилиб ўтказдик. Агар декарт реперини бошқача усулда танласак, албатта, параболанинг тенгламаси ҳам (43) кўринишдан фарқли бўлади. Масалан, агар парабола координаталар системасига нисбатан 142- чизмада кўрсатилгандек жойлашган бўлса, унинг тенгламаси $x^2 = 2py$ кўринишда бўлади. 143 ва 144- чизмаларда тасвирланган параболанинг тенгламалари мос равишда $y^2 = -2px$, $x^2 = -2py$ кўринишда бўлади.



143- чизма



144- чизма

Мисол. $y^2=4x$ параболада фокал радиусининг узунлиги 26 бўлган нуқтани топинг.

Ечиш. Изланган $M(x, y)$ нуқта учун $\rho(F, M) = 26$. $y^2 = 4x \Rightarrow p = 2$, у ҳолда

$$F(1, 0);\ 26 = \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = \sqrt{(x-1)^2 + 4x}$$

ёки $676 = x^2 + 2x + 1$, бундан $x^2 + 2x - 675 = 0$.

$$x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 + 675} = -1 \pm 26,\ x_1 = 25,\ x_2 = -27.$$

$x_2 = -27$ илдиз ярамайди, чунки $y^2 = 4x$ параболадаги барча нуқталарнинг абсциссалари мусбат бўлиши керак. $x_1 = 25$ ни $y^2 = 4x$ га қўйиб, y ни топамиз:

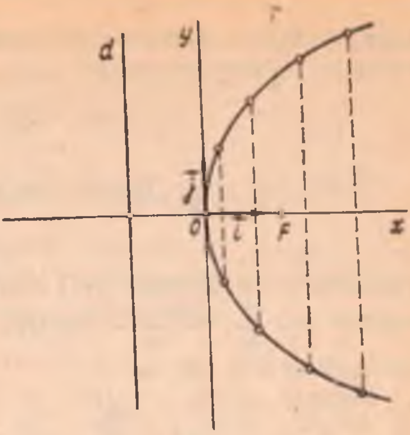
$$y_1 = +10,\ y_2 = -10.$$

Шундай қилиб, изланаётган нуқталар иккита экан:

$$M_1(25,\ 10),\quad M_2(25,\ -10).$$

3. Параболани ясаш. Парабола декарт реперида $y^2 = 2px$ тенглама билан берилган бўлсин. Аввало параболанинг фокусини ва директрисасини ясаймиз, бунинг учун Ox ўқда координаталар боши-

дан ўнгда ва чапда узунлиги $\frac{p}{2}$ га тенг бўлган OF ва OK кесмаларни оламиз. K нуқта орқали Ox ўққа перпендикуляр қилиб d тўғри чизиқни ўтказамиз. F нуқта параболанинг фокуси, d эса директрисаси бўлади (145- чизма). Фокусдан бошлаб параболанинг симметрия ўқига перпендикуляр ва ҳар бири олдингисидан $\frac{p}{2}$ масофада турувчи тўғри чизиқларни ўтказамиз. Ўтказилган тўғри чизиқларнинг ҳар биридан директрисагача бўлган масофани радиус қилиб, F марказли айлана чизамиз. Бу айлана тегишли тўғри чизиқни парабола ўқига симметрик бўлган икки нуқтада кесади. Булар параболанинг нуқталаридир. Бу жараённи кераклича давом эттириб, параболанинг кераклича нуқталарига эга бўламиз. Уларни туташтириб параболанинг графигини ҳосил қиламиз.



145- чизма

4. $y = ax^2 + bx + c$ тенглама билан берилган парабола.

Теорема. *Ушбу*

$$y = ax^2 + bx + c \tag{44}$$

тенглама симметрия ўқи ординаталар ўқига параллел ва учи $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ *нуқтада бўлган параболанинг тенгламасидир.*

Исбот. (44) тенгламанинг ўнг томонидан тўла квадрат ажратамиз.

$$y = a\left(x^2 + 2\cdot\frac{b}{2a}\,x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Бундан

$$y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2. \tag{45}$$

Декарт реперининг координаталар бошини $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ нуқтага

$$\left|\begin{array}{l} x = x' - \frac{b}{2a}, \\ y = y' + \frac{4ac - b^2}{4a} \end{array}\right.$$

формула бўйича параллел кўчирамиз. Янги реперда (45) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

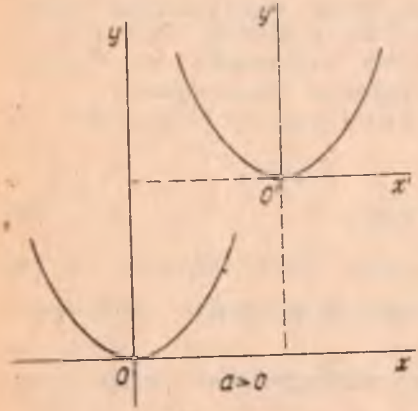
$$y' = ax'^2 \text{ ёки } x'^2 = \frac{1}{a} y'. \qquad (46)$$

Ушбу $p = \frac{1}{2|a|}$ белгилашни киритиш билан

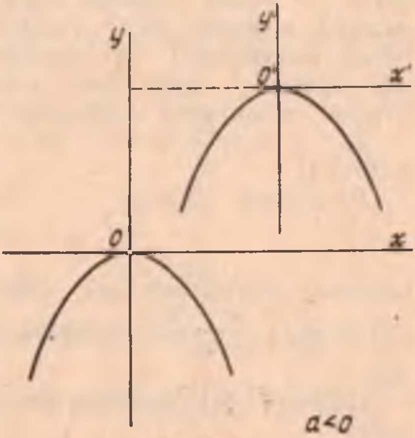
$$x'^2 = 2py' \qquad (47)$$

тенгламага эга бўламиз. (47) тенглама симметрия ўқи $O'y'$ ўқ ва учи $O'\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ нуқтада бўлган параболани ифодалайди. Бу ерда $O'y' \parallel Oy$. ▲

Шундай қилиб, $y = ax^2 + bx + c$ параболани ясаш учун $x^2 = \frac{1}{a} y$ параболани ясаб, унинг учини $O'\left(-\frac{b}{2a}. \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ нуқта устига тушгунча параллел кўчириш керак.



146-а чизма



146-б чизма

146-а ва б чизмада a параметр мусбат ва манфий бўлган ҳоллар учун $y = ax^2 + bx + c$ парабола тасвирланган.

Мисол. $y = \frac{1}{2} x^2 + 2x + 3$ парабола тенгламасини каноник кўринишга келтиринг ва янги координаталар бошининг координаталарини топинг.

Ечиш. Берилган тенгламани қуйидаги кўринишда ёзамиз:

$$y = \frac{1}{2} (x+2)^2 + 1 \text{ ёки } y - 1 = \frac{1}{2} (x+2)^2;$$

координаталар бошини $O'(-2, 1)$ нуқтага

$$\begin{cases} x = x' - 2, \\ y = y' + 1 \end{cases}$$

формула бўйича параллел кўчирамиз. Янги реперда парабола тенгламаси $y' = \frac{1}{2}x'^2$ ёки $x'^2 = 2y'$ каноник кўринишни олади. $O'(-2, 1)$ нуқта янги координаталар боши.

51- §. Эллипс ва гиперболанинг директрисалари

Таъриф. Эллипс (гипербола) нинг берилган F фокусига мос *директрисаси* деб, унинг фокал ўқига перпендикуляр ва марказидан шу F фокуси ётган томонда $\frac{a}{e}$ масофада турувчи тўғри чизиқни айтилади. Бу ерда a — эллипс (гипербола) нинг катта (ҳақиқий) ярим ўқи, e — эксцентриситети.

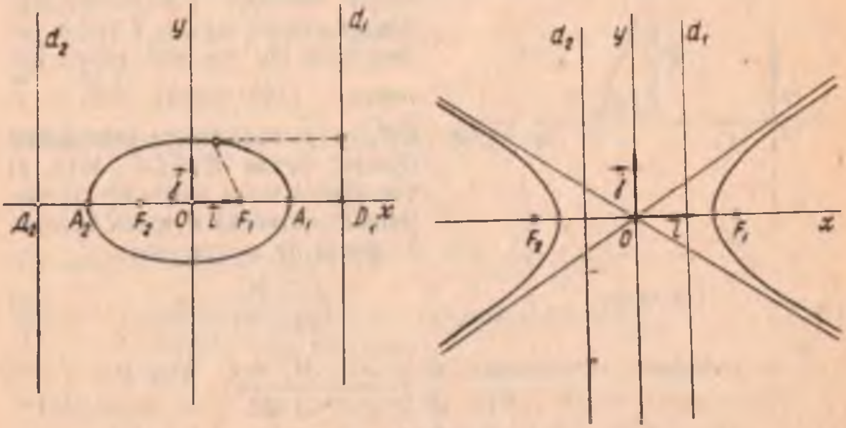
Директрисаларни d_1, d_2 билан белгилаймиз ҳамда уларни F_1, F_2 фокусларга мос *директрисалар* деб атаймиз. Директриса таърифига кўра эллипс (гипербола) нинг тенгламаси каноник кўринишни оладиган қилиб махсус танланган декарт реперида $F_1(c, 0)$, $F_2(-c, 0)$ фокусларга мос директрисалари

$$d_1 : x - \frac{a}{e} = 0,$$

$$d_2 : x + \frac{a}{e} = 0$$

тенгламаларга эга бўлади. Эллипс учун $e < 1 \Rightarrow \frac{a}{e} > a$, гипербола учун $e > 1 \Rightarrow \frac{a}{e} < a$. Демак, эллипснинг ҳам, гиперболанинг ҳам директрисалари уларни кесмайди (147- чизма).

Эллипс (гипербола) директрисаларининг аҳамияти қуйидаги теорема билан белгиланади.



147- чизма

Теорема. *Эллипс (гипербола) текисликдаги шундай нуқталар тупламики, бу нуқталарнинг ҳар биридан фокусгача булган масофани уша нуқтадан шу фокусга мос директрисагача булган масофага нисбати узгармас миқдор булиб, эллипс (гипербола) нинг эксцентриситети е га тенг.*

Исбот. Бирор эллипс (гипербола) берилган (147- чизмага қаранг) ва F_1 унинг фокуси, d_1 шу фокусга мос директрисаси булсин:

$$F_1(c,\ 0),\ d_1: x - \frac{a}{e} = 0.$$

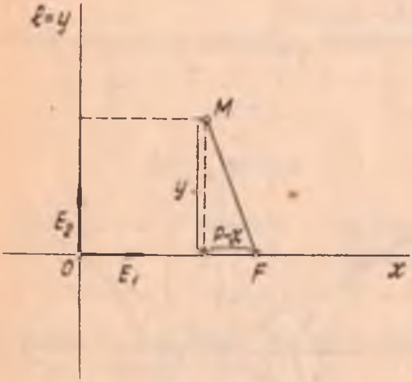
$M(x,\ y)$ эллипс (гипербола) нинг ихтиёрий нуқтаси булсин. Бу нуқтадан F_1 фокусгача булган масофа $\rho(F_1,\ M) = |a - ex|$ [48- §, (17) формула, 49- §, (39), (40) формулалар]. Шу нуқтадан d_1 директрисагача булган масофа

$$\rho(d_1,\ M) = \left| x - \frac{a}{e} \right| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\rho(F_1,\ M)}{\rho(d_1,\ M)} = \frac{|a - ex|}{\left|\frac{a}{e} - x\right|} = \frac{|a - ex|}{\frac{|a - ex|}{e}} = e. \ \blacktriangle$$

Эллипс ва гиперболанинг юқоридаги теорема билан ифодаланган хоссасини бу чизиқларни бошқача таърифлашга асос қилиб олиш мумкин. Ҳақиқатан, текисликда шундай нуқталар тупламини курамизки, бу нуқталарнинг ҳар биридан бирор F нуқтагача ва бирор l тугри чизиққача булган масофалар нисбати узгармас e га тенг булсин. Бундай нуқталар туплами $e < 1$ булган ҳолда эллипс, $e > 1$ булган ҳолда гипербола ва $e = 1$ булганда парабола булишини курсатамиз. Декарт реперини қуйидагича танлаймиз. F нуқтадан l тугри чизиққа утказилган перпендикулярни Ox уқ, l тугри чизиқни эса Oy уқ деб қабул қиламиз (148- чизма). $\overrightarrow{OE_1} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OE_2} = \vec{j}$ координата векторлари булсин, бунда $E_1 \in OF$. $M(x,\ y)$ текширилаётган нуқталар тупламининг ихтиёрий нуқтаси булсин. У ҳолда бу нуқта учун

$$\frac{\rho(F,\ M)}{\rho(l,\ M)} = e. \qquad (48)$$



148- чизма

$(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ репернинг танланишига кура $\rho(l,\ M) = x$. Агар $\rho(l,\ F) = p$ булсин десак, $\Rightarrow \rho(F,\ M) = \sqrt{(p - x)^2 + y^2}$. У ҳолда (48) $\Rightarrow$ $\Rightarrow \sqrt{(p - x)^2 + y^2} = ex$ ёки $x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 e^2 \Rightarrow x^2(1 - e^2) -$

$$-2px + p^2 + y^2 = 0. \tag{49}$$

а) $e = 1$ бўлса, $1 - e^2 = 0$ бўлиб, (49) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$y^2 = 2p\left(x - \frac{p}{2}\right).$$

O координаталар бошини $O'\left(\frac{p}{2},\ 0\right)$ нуқтага параллел кўчирайлик. Ушбу

$$x = \frac{p}{2} + X, \ y = Y$$

формулалар бўйича $(O, \ \vec{i}, \ \vec{j})$ декарт реперидан $(O', \ \vec{i}, \ \vec{j})$ декарт реперига ўтайлик, у ҳолда текширилаётган нуқталар тўпламининг тенгламаси $\mathscr{B}'$ реперда $Y^2 = 2pX$ кўринишга келиб, бу параболанинг каноник тенгламасидир. Қаралаётган нуқталар тўплами $e = 1$ да парабола экан.

б) $e \neq 1$ бўлса, $1 - e^2 \neq 0$, бу ҳолда (49) тенгламани қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$(1 - e^2)\left[x^2 - \frac{2p}{1 - e^2}\,x + \frac{p^2}{(1 - e^2)^2}\right] - \frac{p^2}{1 - e^2} + p^2 + y^2 = 0,$$

бундан

$$(1 - e^2)\left(x - \frac{p}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{p^2e^2}{1 - e^2}.$$

O координаталар бошини $x = \frac{p}{1 - e^2} + X$, $y = Y$, формулалар бўйича $O'\left(\frac{p}{1 - e^2},\ 0\right)$ нуқтага параллел кўчирсак, янги реперда қаралаётган нуқталар тўплами учун ушбу тенглама ҳосил бўлади:

$$(1 - e^2)X^2 + Y^2 = \frac{p^2e^2}{1 - e^2} \text{ ёки } \frac{X^2}{\frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{Y^2}{\frac{e^2p^2}{1 - e^2}} = 1. \tag{50}$$

$e < 1$ бўлганда $1 - e^2 > 0$ ва (50) тенглама

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

кўринишни олади, бунда $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2}$, $(-b)^2 = \frac{e^2p^2}{1 - e^2}$.

Бу ҳолда қаралаётган нуқталар тўплами эллипсдир. $e > 1$ бўлганда $1 - e^2 < 0$ бўлиб, (50) тенглама

$$\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$$

кўринишни олади, бунда $a^2 = \frac{e^2p^2}{(1 - e^2)^2}$, $(-b)^2 = \frac{e^2p^2}{1 - e^2}$.

Бу ҳолда қаралаётган нуқталар тўплами гиперболадир.

1- мисол. $x=\pm 8$ тўғри чизиқлар кичик ўқи 8 га тенг бўлган эллипснинг директрисаларидир. Шу эллипснинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Эллипснинг директрисалари $x=\pm\frac{a}{e}$ тенгламалар билан ифодаланади. Масала шартига кўра $\pm\frac{a}{e}=\pm 8$, бундан $\frac{a}{e}=8$, лекин $e=\frac{c}{a}$, у ҳолда $\frac{a^2}{c}=8$ ёки $a^2=8c$, кичик ўқ $2b=8\Rightarrow b=4$.

Эллипс учун $b^2=a^2-c^2$; a, b нинг қийматларини бу тенгликка қўйсак, $16=8c-c^2$ ёки $c^2-8c+16=0$, $c_{1,2}=4\pm\sqrt{16-16}=$ $=4$. $a^2=8c=8\cdot 4=32$, $a=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$. Эллипснинг тенгламаси: $\frac{x^2}{32}+\frac{y^2}{16}=1$.

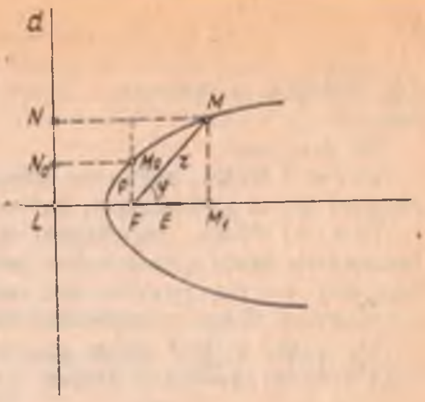
2- мисол. Директрисалари $x=\pm 3\sqrt{2}$ тенгламалар билан берилган ва асимптоталари орасидаги бурчак тўғри бурчак бўлган гиперболанинг тенгламасини тузинг.

Ечиш. Асимптоталарнинг ўзаро перпендикулярлигидан гиперболанинг тенг томонли экани, яъни $x^2-y^2=a^2$ тенглама билан ифодаланиши келиб чиқади. Гиперболанинг директрисалари $x=$ $=\pm\frac{a}{e}$ тенгламалар билан ифодаланади. Масала шартидан $\frac{a}{e}=$ $=3\sqrt{2}$, $e=\frac{c}{a}$ ни ҳисобга олсак, $\frac{a^2}{c}=3\sqrt{2}$, бундан $a^2=$ $=3\sqrt{2}c$; $b^2=c^2-a^2$ тенгликка кўра $a=b$ бўлгани учун $6\sqrt{2}c=$ $=c^2$ ёки $c=6\sqrt{2}$ га эга бўламиз. У ҳолда $a^2=3\sqrt{2}c=$ $=3\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}=36$, $a=6$; гипербола тенгламаси: $x^2-y^2=36$.

52- §. Иккинчи тартибли чизиқларнинг қутб координаталардаги тенгламалари

Биз бу ерда иккинчи тартибли чизиқлар (эллипс, гипербола ва парабола) нинг олдинги параграфда баён этилган хоссаларидан фойдаланиб, махсус танланган қутб координаталардаги тенгламасини келтириб чиқарамиз. Бизга айтилган чизиқлардан бирортаси: эллипс, гипербола ёки парабола берилган бўлсин (агар берилган чизиқ гипербола бўлса, унинг ўнг тармоғини қараймиз, чунки келтириб чиқариладиган қутб тенглама биз қараётган ҳолда гиперболанинг фақат битта тармоғини аниқлайди).

Берилган чизиқни γ билан белгилаймиз. F бу γ изиқнинг фокуси, d шу фокусга мос директрисаси бўлсин (149- чизма). (γ чизиқ гипербола бўлганда F ва d учун қаралаётган тармоғига яқин фокуси ва директрисаси олинади). Қутб координаталар системасини қуйидагича киритамиз. $FL \perp d$ тўғри чизиқни ўтказамиз, $\overrightarrow{FE} = \vec{i}$, $L = FL \cap d$ бўлсин, бунда E нуқта FL тўғри чизиқда ва F нуқтадан L нуқта ётмаган томонда ётади. F нуқтани қутб, FE нурни қутб ўқи деб қабул қиламиз. M_0 нуқта F нуқтада қутб ўқига ўтказилган перпендикулярнинг γ билан кесишган нуқтаси бўлсин. $\rho(M_0, F)$ масофани p билан белгилаймиз ва γ чизиқнинг *фокал параметри* деб атаймиз. Танланган қутб координаталар системасига нисбатан γ чизиқнинг ихтиёрий M нуқтасининг координаталарини r, φ билан белгилаймиз: $r = \rho(F, M)$, $\varphi = (\widehat{EFM})$. γ чизиқнинг 51-§ даги асосий хоссасига кўра



149- чизма

$$\frac{\rho(F, M)}{\rho(d, M)} = e.$$

$$\frac{\rho(F, M_0)}{\rho(d, M_0)} = e \Rightarrow \rho(d, M_0) = \frac{\rho(F, M_0)}{e} = \frac{\rho}{e}. \qquad (51)$$

Агар $\varphi > \frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) - r\cos(180° - \varphi) = \frac{\rho}{e} + r\cos\varphi.$$

Агар $\varphi < \frac{\pi}{2}$ бўлса,

$$\rho(d, M) = \rho(d, M_0) + \rho(F, M_1) = \frac{\rho}{2} + r\cos\varphi.$$

(M_1 нуқта M нуқтадан қутб ўқига туширилган перпендикулярнинг асоси.)

Демак, иккала ҳолда ҳам

$$\rho(d, M) = \frac{\rho}{2} + r\cos\varphi.$$

$\rho(d, M)$ нинг бу қийматини (51) га қўйсак,

$$\frac{r}{\frac{\rho}{e} + r\cos\varphi} = e$$

тенгликка эга бўламиз. Бундан

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}. \qquad (52)$$

(52) тенглама γ чизиқнинг *қутб координаталардаги тенгламасидир.*

Бу тенглама:

а) $e < 1$ бўлса, эллипсни аниқлайди. φ бу ҳолда $0 \leqslant \varphi < \pi$ оралиқдаги барча қийматларни қабул қилади;

б) $e = 1$ бўлса, параболани аниқлайди, φ бу ҳолда $0 < \varphi < \pi$ оралиқдаги барча қийматларни қабул қилади. $\varphi = 0$ қийматга параболанинг ҳеч бир нуқтаси мос келмайди;

в) $e > 1$ бўлса, гиперболани (биз қараётган тармоғини) аниқлайди[1].

Бу ҳолда φ нинг қайси оралиқда ўзгаришини текширамиз. $2\varphi_0$— асимптоталар орасидаги тармоқ жойлашган бурчак бўлсин, у ҳолда

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{b}{a} = \sqrt{\frac{c^2 - a^2}{a^2}} = \sqrt{e^2 - 1} \to \frac{\sin^2\varphi_0}{\cos^2\varphi_0} = e^2 - 1 \Rightarrow e^2\cos^2\varphi_0 = 1$$

ёки $\cos^2\varphi_0 = \frac{1}{e^2}$; $\varphi_0 < \frac{\pi}{2}$ бўлганидан $\cos\varphi_0 = \frac{1}{e}$.

(52) тенгламада $r > 0$ учун $1 - e\cos\varphi > 0$ ёки $\cos\varphi < \frac{1}{e} = \cos\varphi_0$ бўлиши керак. Бундан гиперболанинг қаралаётган тармоғидаги нуқталар учун $\varphi_0 < \varphi < 2\pi - \varphi_0$ тенгсизликлар бажарилади, деган натижа келиб чиқади. (52) тенгламадаги $p = \rho(M_0, F)$ сон *фокал параметр* дейилади. Парабола учун бу p фокал параметр унинг каноник тенгламасидаги p дан иборат. Эллипс (гипербола) учун p нинг маъносини, яъни ярим ўқлар орқали ифодасини топайлик. FM_0 тўғри чизиқ эллипс (гипербола) нинг фокал ўқига перпендикуляр бўлгани учун M_0, F нуқталар бир хил абсциссага эга. M_0 (x_0, y_0) координаталарга эга бўлсин десак, $x_0 = -c$ (гипербола бўлса, $x_0 = +c$). M_0 эллипс (гипербола) га тегишли бўлгани учун

$$\frac{x_0^2}{a^2} + \frac{y_0^2}{b^2} = 1 \left(\frac{x_0^2}{a^2} - \frac{y_0^2}{b^2} = 1\right) \text{ва } p = \rho(M_0, F) =$$

$$= \sqrt{(-c + c)^2 + y_0^2} = |y_0|$$

ни ҳисобга олсак, $\frac{c}{a^2} + \frac{p^2}{b^2} = 1$, бундан

$$p^2 = b^2\left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) = b^2\left(\frac{a^2 - c^2}{a^2}\right) = \frac{b^4}{a^2}.$$

Демак, эллипс (гипербола) да фокал параметр $p = \frac{b^2}{a}$ га тенг.

Мисол. $r = \frac{25}{13 - 12\cos\varphi}$ чизиқнинг декарт реперига нисбатан каноник тенгламасини ёзинг.

---

[1] Аналитик геометриядан муфассалроқ ёзилган китобларда гиперболанинг иккала тармоғини ифодаловчи тенглама келтирилади; бу тенгламанинг кўриниши (52) дан кам фарқ қилади (масалан, (5) га қаранг).

Ечиш. Берилган тенгламани (52) $r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$ кўринишга келтириш учун ўнг томонининг сурат ва махражани 13 га бўламиз:

$$r = \frac{\frac{25}{13}}{1 - \frac{12}{13}\cos\varphi},$$

буни (52) билан таққосласак, кўрамизки, $e = \frac{12}{13} < 1$, демак, эгри чизиқ эллипсдир. Унинг каноник тенгламасини ёзамиз. Тенгламадан $p = \frac{25}{13}$, лекин $p = \frac{b^2}{a}$ эди, бундан $\frac{b^2}{a} = \frac{25}{13}$, $b^2 = \frac{25}{13}$ a; $e = \frac{c}{a} = \frac{12}{13} \Rightarrow c = \frac{12}{13}$ a. b, a нинг бу қийматларини $b^2 = a^2 - c^2$ тенгликка қўйсак, $\frac{25}{13} \cdot a = a^2 - \frac{144}{169}$ a^2, бундан $\frac{25}{13} = \frac{25}{169}$ a ёки $a = 13$. $b^2 = \frac{25}{13}a = \frac{25}{13} \cdot 13 = 25$, $b = 5$ берилган эллипснинг каноник тенгламаси

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{25} = 1.$$

53-§. Иккинчи тартибли чизиқларнинг умумий тенгламаси

Текисликда бирор аффин (ёки декарт) реперда координаталари

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (53)$$

тенгламани қаноатлантирувчи нуқталар тўплами иккинчи тартибли чизиқ деб аталиши маълум[1] (23-§). Бунда a_{11}, a_{12}, a_{22}, a_{10}, a_{20}, a_{00} коэффициентлар ҳақиқий сонлар бўлиб, a_{11}, a_{12}, a_{22} лардан камида биттаси нолдан фарқлидир (бу шартни бундан буён $a_{11}^2 + a_{12}^2 + a_{22}^2 \neq 0$ кўринишда ёзамиз).

Биз 48—50-§ ларда учта чизиқ: эллипс, гипербола ва параболани ўргандик, бу чизиқлар ҳам иккинчи тартибли чизиқлардир, чунки (53) тенгламада $a_{11} = \frac{1}{a^2}$, $a_{22} = \frac{1}{b^2}$, $a_{00} = -1$ бўлиб, қолган барча коэффициентлар ноль бўлса, у эллипснинг каноник тенгламаси, шу шартларда яна $a_{22} = -\frac{1}{b^2}$ бўлса, (53) тенглама гиперболанинг каноник тенгламаси, $a_{10} = p$; $a_{22} = 1$ бўлиб, қолган коэффициентлар ноль бўлса, (53) тенглама параболанинг каноник тенгламасидир.

---

[1] Иккинчи тартибли чизиқларнинг умумий назариясини декарт реперида караймиз.

Қуйидаги табиий савол туғилади: текисликда қурилган бу чизиқлардан бошқа яна иккинчи тартибли чизиқлар борми? Бу саволга қуйида жавоб беришга ҳаракат қиламиз. Аввало шуни таъкидлаймиз: 23- § дан бизга маълумки, чизиқнинг тартиби координаталар системасининг олинишига боғлиқ эмас. Бундан фойдаланиб, координаталар системасини тегишлича танлаш ҳисобига барча иккинчи тартибли чизиқларни тула геометрик тавсифлаб чиқамиз. Иккинчи тартибли γ чизиқ $\mathscr{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперида (53) умумий тенгламаси билан ифодаланган булсин. Шундай реперни танлаймизки, унга нисбатан γ чизиқнинг (53) тенгламаси мумкин қадар содда — «каноник» куринишга эга булсин, яъни

1) узгарувчи координаталар купайтмаси қатнашган ҳад булмасин;

2) биринчи даражали ҳадлар сони энг оз булсин (иложи булса, улар бутунлай қатнашмасин);

3) мумкин булса, озод ҳад қатнашмасин.

Агар (53) тенгламада $a_{12} \neq 0$ булса, соддалаштиришни қуйидагича бажарамиз. $\mathscr{B}$ репернинг уқларини O нуқта атрофида ихтиёрий α бурчакка буриб, янги $\mathscr{B}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ декарт реперини ҳосил қиламиз. $\mathscr{B}$ репердан $\mathscr{B}'$ реперга утиш формулалари (19- §)

$$\begin{cases} x = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\ y = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha \end{cases} \tag{54}$$

дан x, y ни (53) га қуйсак ва ухшаш ҳадларини ихчамласак, γ чизиқнинг (53) тенгламаси $\mathscr{B}'$ реперда ушбу куринишни олади:

$$a'_{11}x'^2 + 2a'_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{10}x' + 2a'_{20}y' + a'_{00} = 0, \tag{55}$$

бунда:

$$\begin{aligned} a'_{11} &= a_{11}\cos^2\alpha + 2a_{12}\cos\alpha\sin\alpha + a_{22}\sin^2\alpha, \\ a'_{12} &= -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha, \\ a'_{22} &= a_{11}\sin^2\alpha - 2a_{12}\sin\alpha\cos\alpha + a_{22}\cos^2\alpha, \\ a'_{10} &= a_{10}\cos\alpha + a_{20}\sin\alpha,\ a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha + a_{20}\cos\alpha,\ a'_{00} = a_{00}. \end{aligned} \tag{56}$$

(56) белгилашлардан куринадики, (55) тенгламадаги a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} коэффициентлар (53) тенгламадаги a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларга ва α бурчакка боғлиқ, шу билан бирга a'_{11}, a'_{12}, a'_{22} нинг камида бири нолдан фарқли, чунки

$$\begin{vmatrix} \cos^2\alpha & 2\cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \\ -\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & \sin\alpha\ \cos\alpha \\ \sin^2\alpha & -2\sin\alpha\cos\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin 2\alpha & \sin^2\alpha \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2}\sin 2\alpha \\ \sin^2\alpha & -\sin 2\alpha & \cos^2\alpha \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin 2\alpha & \sin^2\alpha \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & \frac{1}{2}\sin 2\alpha \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos^2\alpha & \sin 2\alpha & 1 \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\cos^2\alpha\cos 2\alpha - \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha = \cos 2\alpha\,(2\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha) +$$
$$+ \sin^2 2\alpha = \cos 2\alpha \cdot \cos 2\alpha + \sin^2 2\alpha = 1 \neq 0.$$

α бурчакнинг ихтиёрийлигидан фойдаланиб, уни шундай танлаб оламизки, алмаштирилган (55) тенгламадаги a'_{12} коэффициент нолга тенг бўлсин, яъни

$$a'_{12} = -a_{11}\sin\alpha\cos\alpha + a_{12}\cos^2\alpha - a_{12}\sin^2\alpha + a_{22}\sin\alpha\cos\alpha =$$
$$= -(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha + (a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0$$

ёки

$$\frac{a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha}{\sin\alpha}. \tag{57}$$

(57) муносабатни бирор λ га тенглаб, уни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = 0, \\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\sin\alpha = 0. \end{cases} \tag{58}$$

Бу система бир жинсли, шунинг учун унинг детерминанти нолга тенг, яъни

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = 0 \tag{59}$$

бўлгандагина система нолдан фарқли ечимга эга бўлади.

(59) тенглама γ чизиқнинг *характеристик тенгламаси* дейилади.

(59) тенгламанинг илдизлари.

$$\lambda_{1,2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2)}}{2} = \frac{(a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{D}}{2}.$$

$a_{12} \pm 0$ бўлгани учун унинг дискриминанти:

$$D = (a_{11} + a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22} - a_{12}^2) = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2 > 0.$$

Демак, (59) тенгламанинг λ_1, λ_2 илдизлари турли ва ҳақиқийдир. (57) дан

$$\begin{cases} a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha = \lambda\cos\alpha, \\ a_{21}\cos\alpha + a_{22}\sin\alpha = \lambda\sin\alpha \end{cases} \tag{60}$$

тенгликларни ёза оламиз. Уларнинг ҳар бирини $\cos\alpha \neq 0$ га бўлиб ($\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2}$ ва $a'_{12} = -(a_{11}\cos\alpha + a_{12}\sin\alpha)\sin\alpha + (a_{21}\cos\alpha +$

$$+ a_{22}\sin\alpha)\cos\alpha = 0 \Rightarrow a_{12} = 0,$$

(яъни a_{12} азалдан 0 га тенг экан) ушбуни ҳосил қиламиз:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\lambda - a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{21}}{\lambda - a_{22}}. \tag{61}$$

(61) муносабатга навбат билан (59) характеристик тенгламанинг λ_1, λ_2 илдизларини қўямиз:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}, \quad \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}. \tag{62}$$

Виет теоремасига кўра (59) дан

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22}, \quad \lambda_1\lambda_2 = a_{11}a_{22} - a_{12}^2. \tag{63}$$

(63) ва (62) формулалардан ушбуга эга буламиз:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 \cdot \operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\lambda_1\lambda_2 - a_{11}(\lambda_1 + \lambda_2) + a_{11}^2}{a_{12}^2} = -1 \Rightarrow |\alpha_2 - \alpha_1| = \frac{\pi}{2}.$$

Шунга кўра $\operatorname{tg}\alpha$ Ox' ўқнинг $\mathscr{B}$ даги бурчак коэффициенти бўлганда $\operatorname{tg}\alpha_2 = \operatorname{tg}\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right)$ Oy' ўқнинг шу репердаги бурчак коэффициенти бўлади. У ҳолда Ox' ўқнинг $\vec{i}'$ бирлик векторининг координаталари бўлмиш $\cos\alpha_1$, $\sin\alpha_1$,

$$\sin\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1}}, \quad \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\alpha_1}}$$

формулалардан, Oy' ўқнинг $\vec{j}'$ бирлик векторининг координаталари $\cos\alpha_2$, $\sin\alpha_2$

$$\sin\alpha_2 = \sin\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha_1, \quad \cos\alpha_2 =$$

$$= \cos\left(\alpha_1 + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha_1$$

тенгликлардан аниқланади. $\lambda = \lambda_1$ бўлганда (60) дан

$$a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1 = \lambda_1\cos\alpha_1,$$
$$a_{21}\cos\alpha_1 + a_{22}\sin\alpha_1 = \lambda_1\sin\alpha_1,$$

у ҳолда

$$a'_{11} = (a_{11}\cos\alpha_1 + a_{12}\sin\alpha_1)\cos\alpha_1 + (a_{21}\cos\alpha_1 +$$
$$+ a_{22}\sin\alpha_1)\sin\alpha_1 = \lambda_1\cos\alpha_1\cos\alpha_1 + \lambda_1\sin\alpha_1\sin\alpha_1 = \lambda.$$

(56) муносабатда 1- ва 3- тенгликларни ҳадлаб қўшсак, $a'_{11} + a'_{22} = a_{11}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + a_{22}(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)$ ёки $(a'_{11} + a'_{22} = a_{11} + a_{22}$. (63) дан $a_{11} + a_{22} = \lambda_1 + \lambda_2$ ва $a'_{11} = \lambda_1$ эканини ҳисобга олсак, $a'_{22} = \lambda_2$ келиб чиқади. Шундай қилиб, координаталар системасини (62) формуладан аниқланувчи $\alpha = \alpha_1$ бурчакка (бу ерда α_1 янги Ox' ўқнинг эски Ox ўққа оғиш бурчаги) буриш билан $\mathscr{B} = (O, \vec{i}, \vec{j})$ репердан шундай $\mathscr{B}' = (O, \vec{i}', \vec{j}')$ реперга ўтиш мумкинки, унга нисбатан (53) тенглама соддалашиб, ушбу кўринишга эга бўлади:

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a'_{10} x' + 2a'_{20} y' + a_{00} = 0. \qquad (64)$$

Агар Ox' ўқнинг бурчак коэффициенти учун $\operatorname{tg}\alpha_2 = \frac{\lambda_2 - a_{11}}{a_{12}}$ ни қабул қилинса, у ҳолда $a'_{11} = \lambda_2$, $a'_{22} = \lambda_1$ эканини айнан юқоридаги каби кўрсатиш мумкин. Шуни айтиш лозимки, агар (53) тенгламада $a_{12} = 0$ бўлса, координаталар системасини буриш билан алмаштиришга ҳожат қолмайди.

Энди $\mathscr{B}' = (O, \vec{i}', \vec{j}'$ репердан шундай реперга ўтамизки, унга нисбатан γ чизиқнинг (64) тенгламасида биринчи даражали ҳадлар қатнашмасин. Бу ишни координаталар бошини кўчириш билан бажариш мумкин.

(64) тенгламада λ_1, λ_2 коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли, чунки агар $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ бўлса, (64) тенглама биринчи даражали тенгламага айланар эди. Демак, бу ерда қуйидаги уч ҳол бўлиши мумкин:

1. $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ $(\lambda_1 \lambda_2 \neq 0)$

Бу ҳолда $\lambda_1\lambda_2 = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \Rightarrow a_{11} a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$. (64) тенгламанинг чап томонидаги ҳадларни x', y' га нисбатан тўлиқ квадратга келтирамиз:

$$\lambda_1 \left(x'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{10}}{\lambda_1} x' + \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1^2}\right) + \lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2}\right) -$$

$$- \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} + a_{00} = 0,$$

бундан

$$\lambda_1 \left(x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}\right)^2 + \lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)^2 + a''_{00} = 0, \qquad (65)$$

бу ерда $a''_{00} = a_{00} - \frac{a'^2_{10}}{\lambda_1} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}$.

Энди $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ ни у қуйидаги формула билан аниқланадиган параллел кўчиришни бажарайлик:

$$\left| \begin{aligned} X &= x' + \frac{a'_{10}}{\lambda_1}, \\ Y &= y' + \frac{a'_{10}}{\lambda_2}. \end{aligned} \right. \qquad (*)$$

У ҳолда янги $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ репер ҳосил бўлиб, чизиқнинг тенгламаси соддалашади:

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a'_{00} = 0. \qquad \mathrm{I}$$

2. $\lambda_1 = 0\ (\lambda_2 \neq 0)$, $a'_{10} \neq 0$ ёки $\lambda_2 = 0\ (\lambda_1 \neq 0)$, $a'_{20} \neq 0$.

Бу ҳоллардан бирини кўрсатиш етарли; чунки

$$\begin{cases} x = y', \\ y = x' \end{cases}$$

алмаштириш ёрдамида уларнинг бирини иккинчисига келтириш мумкин.

Биринчи ҳолни қараймиз:

$\lambda_1 = 0 \; (\lambda_2 \neq 0)$ ни ҳисобга олиб, (64) тенгламанинг чап томонидаги ҳадларни y' га нисбатан тўлиқ квадратга келтирамиз:

$$\lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2^2} \right) + 2a'_{10} \left(x' + \frac{a_{00}}{2a'_{10}} - \frac{a'^2_{20}}{2a'_{10}\lambda_2} \right) = 0,$$

ёки

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + 2a'_{10} (x' + a') = 0,$$

бунда $a' = \frac{a_{00}}{2a'_{10}} - \frac{a'^2_{20}}{2a'_{10}\lambda_2}$ белгилашни киритдик.

Ушбу

$$\begin{cases} X = x' + a', \\ Y = y' + \dfrac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$$

формулалар бўйича координаталар системасини алмаштирамиз, яъни координаталар боши O ни $O'\left(-a', \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)$ нуқтага кўчирамиз. У ҳолда ҳосил бўлган $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ реперга нисбатан чизиқнинг тенгламаси ушбу содда кўринишни қабул қилади:

$$\lambda_2 Y^2 + 2a'_{10} X = 0. \qquad \text{II}$$

3. $\lambda_1 = 0$, $a'_{10} = 0$ ёки $\lambda_2 = 0$, $a'_{20} = 0$.

Бу ҳоллар ҳам бир-бирига ўхшаш бўлиб, шунинг учун уларнинг бирини қараш етарли.

Биринчи ҳолни қараймиз. $\lambda_1 = 0$, $a'_{10} = 0$ да (64) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$\lambda_2 y'^2 + 2a'_{20} y' + a_{00} = 0. \qquad (66)$$

бу ерда $\lambda_2 \neq 0$ бўлгани учун (66) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\lambda_2 \left(y'^2 + 2 \cdot \frac{a'_{20}}{\lambda_2} y' + \frac{a'^2_{10}}{\lambda_2^2} \right) - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2} + a_{00} = 0$$

ёки

$$\lambda_2 \left(y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \right)^2 + a''_{00} = 0,$$

бунда

$$a''_{00} = a_{00} - \frac{a'^2_{20}}{\lambda_2}.$$

Ушбу $\begin{cases} X = x' \\ Y = y' + \frac{a'_{20}}{\lambda_2} \end{cases}$ формулалар бўйича $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ репердан $(\vec{O}', \vec{i}', \vec{j}')$ реперга ўтамиз, яъни координаталар боши O ни $O'\left(0, \frac{a'_{20}}{\lambda_2}\right)$ нуқтага кўчирамиз. Янги реперда γ чизиқнинг содда тенгламаси ҳосил бўлади:

$$\lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0. \qquad \text{III}$$

Хулоса. Агар иккинчи тартибли γ чизиқ бирор декарт реперда (53) тенглама билан берилган бўлса, янги декарт реперини тегишлича танлаш билан γ нинг тенгламасини I, II, III тенгламаларнинг бирига келтириш мумкин.

54- §. Иккинчи тартибли чизиқларнинг таснифи (классификацияси)

Юқорида қаралган (I, II, III) кўринишдаги тенгламаларни муфассалроқ текширамиз.

I. $\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + a''_{00} = 0.$ I

I тенгламада $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, лекин a''_{00} — ихтиёрий. Қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин:

а) $a''_{00} \neq 0$. I дан:

$$-\frac{\lambda_1}{a''_{00}} x^2 - \frac{\lambda^2}{a''_{00}} y^2 = 1 \text{ ёки } \frac{x^2}{-\frac{a''_{00}}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{-\frac{a''_{00}}{\lambda_2}} = 1. \qquad (67)$$

Агар λ_1, λ_2 бир хил ишорали, a''_{00} эса улар билан қарама-қарши ишорали бўлса, у ҳолда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} > 0$, $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$.

Энди $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} = a^2$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = b^2$ белгилашни киритсак, (67) дан

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ни, яъни эллипснинг каноник тенгламаси ҳосил қилинади.

Агар λ_1, λ_2, a''_{00} нинг учаласи ҳам бир хил ишорали бўлса, у ҳолда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} < 0$, $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$, бу ерда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} = -a^2$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -b^2$ белгилашни киритсак, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$ тенгламага эга бўламиз. Бу тенгламани қаноатлантирувчи битта ҳам ҳақиқий нуқта мавжуд эмас, лекин бу тенглама эллипс тенгламасига ўхшашлаги сабабли, у *мавҳум эллипсни* аниқлайди, деб айтилади. Агар λ_1, λ_2 қарама-қарши ишорали ва $a''_{00} \neq 0$ бўлса, у ҳолда $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1}$ ва $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2}$ лар қарама-қарши ишорали бўлади. $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} > 0$, лекин $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} < 0$ бўлиб, уларни мос равишда a^2 ва $-b^2$ деб белгиласак, (67) тенглама $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ кўринишда бўлиб, бу гиперболанинг каноник тенгламасидир; худди шунга ўхшаш, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_1} < 0$, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$ бўлса, уларни ҳам мос равишда $-a^2$ ва b^2 деб белгиласак, (67) тенглама ушбу кўринишни олади: $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; бу ҳам гиперболанинг каноник тенгламасидир.

б) $a''_{00} = 0$ бўлсин. У ҳолда

$$I \Rightarrow \frac{x^2}{\frac{1}{\lambda_1}} + \frac{y^2}{\frac{1}{\lambda_2}} = 0. \tag{68}$$

λ_1, λ_2 қарама-қарши ишорали бўлса, тегишли белгилашни киритиш билан (68) ни ушбу кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ёки} \quad \left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 0. \tag{69}$$

(69) $\Rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 0$, $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$, бу тенгламалар координаталар бошида кесишувчи иккита ҳақиқий тўғри чизиқни аниқлайди. Агар λ_1, λ_2 бир хил ишорали, масалан, $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 < 0$ бўлса, у ҳолда $\frac{1}{\lambda_1} = -a^2$, $\frac{1}{\lambda_2} = -b^2$ белгилашни киритиш билан (68) ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad \text{ёки} \quad \left(\frac{x}{a} + i\frac{y}{b}\right)\left(\frac{x}{a} - i\frac{y}{b}\right) = 0 \Rightarrow \frac{x}{a} + i\frac{y}{b} = 0,$$

$$\frac{x}{a} - i\frac{y}{b} = 0,$$

бу тенгламаларнинг ҳар бири биринчи даражали бўлгани учун улар тўғри чизиқни аниқлайди, лекин бу икки тўғри чизиқ фақат битта ҳақиқий нуқтага эгадир (координаталар боши). Шунинг учун уларни битта ҳақиқий нуқтада кесишувчи иккита мавҳум тўғри чизиқ тенгламаси деб айтиш мумкин. Шундай қилиб, иккинчи тартибли γ чизиқнинг (59) характеристик тенгламасининг илдизлари $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$ бўлса, қуйидаги беш тур чизиқ ҳосил бўлади: эллипс, мавҳум эллипс, гипербола, кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқ, кесишувчи ҳақиқий икки тўғри чизиқ.

2. $\lambda_2 y^2 + 2a'_{10} x = 0$ (II)

тенглама билан берилган иккинчи тартибли чизиқларга ўтамиз. II тенгламада $\lambda_2 \neq 0$, $a'_{10} \neq 0$ бўлгани учун уни қуйидагича ёзиб оламиз: $y^2 = -2 \cdot \frac{a'_{10}}{\lambda_2} x$; $p = -\frac{a'_{10}}{\lambda_2}$ белгилашни киритсак, $y^2 = 2px$, бу параболанинг каноник тенгламасидир.

3. $\lambda_2 y^2 + a''_{00} = 0$ III

тенглама билан берилган иккинчи тартибли чизиқларни таснифлашга ўтамиз. Бу тенгламада $\lambda_2 \neq 0$, a''_{00} — ҳар қандай сон. Қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

а) $a''_{00} \neq 0 \cdot \lambda_2$ билан a''_{00} ҳар хил ишорали бўлса, $-\frac{a''_{00}}{\lambda_2} > 0$ бўлади. Тенгламани $\frac{a''_{00}}{\lambda_2} = -a^2$ фараз қилиб,

$$y^2 = a^2 \text{ ёки } (y-a)\ (y+a) = 0$$

га келтирамиз. Бу тенглама эса ўзаро параллел икки тўғри чизиқни аниқлайди. λ_2 билан a''_0 бир хил ишорали, яъни $\lambda_2 > 0$, $a'_{00} > 0$ ($\lambda_2 < 0$, $a''_{00} < 0$) бўлган ҳолда

$$\text{III} \Rightarrow y^2 = -a^2 \text{ ёки } (y - ia)(y + ia) = 0,$$

бу тенглама иккита мавҳум параллел тўғри чизиқни аниқлайди, деб юритилади.

б) $a''_{00} = 0$. У ҳолда III $\Rightarrow \lambda_2 y^2 = 0$ ва $\lambda_2 \neq 0$ бўлгани учун $y^2 = 0$ ёки $y = 0$, $y = 0 \Rightarrow$ икки карра олинган тўғри чизиқ ҳосил қилинади. Шундай қилиб, III тенглама билан берилган иккинчи тартибли чизиқ қуйидаги уч турга бўлинади: ҳақиқий параллел икки тўғри чизиқ, мавҳум параллел икки тўғри чизиқ, устма-уст тушувчи икки тўғри чизиқ.

I, II, III тенгламалар билан берилган иккинчи тартибли чизиқ қуйидаги тўққизта турга бўлинади:

Каноник тенгламалар	Чизиқларнинг номлари
1	2
1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$	эллипс
2. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$	мавҳум эллипс
3. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1$	гипербола
4. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	кесишувчи икки тўғри чизиқ
5. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b} = 0$	нуқта (координата бошида кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқ)
6. $y^2 = 2px$	парабола

1	2
7. $y^2 - a^2 = 0$	турли параллел икки тўғри чизиқ
8. $y^2 + a^2 = 0$	мавҳум параллел икки тўғри чизиқ
9. $y^2 = 0$	устма-уст тушган икки тўғри чизиқ

55-§. Иккинчи тартибли чизиқни унинг тенгламаси бўйича ясаш

Иккинчи тартибли чизиқ $(O, \vec{i}, \vec{j})$ декарт реперида (53) умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. Уни ясаш учун тенгламасини олдинги параграфда баён қилинган усуллар бўйича соддалаштирамиз:

1) (53) тенгламада $a_{12} \neq 0$ бўлса, чизиқнинг

$$\lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$$

характеристик тенгламасини тузамиз ва унинг илдизлари λ_1, λ_2 ни топамиз.

2. $\operatorname{tg} \alpha_1 = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}}$ формула бўйича $\operatorname{tg} \alpha_1$ ни, сўнгра

$$\sin \alpha_1 = \frac{\operatorname{tg} \alpha_1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}, \quad \cos \alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_1}}$$

ни ҳисоблаймиз. Бу билан реперни α_1 бурчакка буришдан ҳосил қилинадиган $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ репернинг $\vec{i}', \vec{j}'$ координата векторлари аниқланади:

$$\vec{i}' = \vec{i} \cos \alpha_1 + \vec{j} \sin \alpha_1, \quad \vec{j}' = -\vec{i} \sin \alpha_1 + \vec{j} \cos \alpha_1.$$

3) Янги реперда чизиқнинг тенгламаси

$$\lambda_1 x'^2 + \lambda_2 y'^2 + 2a_{10}' x' + 2a_{20}' y' + a_{00} = 0 \tag{64}$$

кўринишда бўлиб, бунда a_{10}', a_{20}' коэффициентлар ушбу формулалардан топилади:

$$a_{10}' = a_{10} \cos \alpha_1 + a_{20} \sin \alpha_1, \quad a_{20}' = -a_{10} \sin \alpha_1 + a_{20} \cos \alpha_1.$$

4) $\mathscr{B}'$ репернинг координаталар боши O ни 53-§ даги (*) формуладан топиладиган O' нуқтага кўчириш билан $\mathscr{B}'$ репердан $\mathscr{B}''$ реперга ўтамиз. $\mathscr{B}''$ реперда чизиқнинг тенгламаси каноник кўринишга келади. Агар (53) тенгламада $a_{12} = 0$ бўлса, соддалаштириш координаталар бошини кўчиришдан иборат, холос. Бу ишларни мисолларда кўрамиз.

1-мисол. Чизиқнинг ушбу $x^2 + 6xy + y^2 + 6x + 2y - 1 = 0$ тенгламасини каноник кўринишга келтириб, чизмасини ясанг.

Ечиш. Бу ерда: $a_{11} = 1$, $a_{12} = 3$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = 3$, $a_{20} = 1$, $a_{00} = -1$. $a_{12} = 3 \neq 0$; берилган тенгламани каноник ҳолда ёзиш учун қуйидаги ишларни бажарамиз:

1) характеристик тенгламани тузамиз: $\lambda^2 - 2\lambda - 8 = 0$, $\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1+8} = 1 \pm 3 \Rightarrow \lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$;

2) $\operatorname{tg} \alpha_1 = \dfrac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \dfrac{4 - 1}{3} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$,

$$\sin\alpha_1 = \frac{\operatorname{tg}\alpha_1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2},\quad \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha_1}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

3) $(O, \vec{i}, \vec{j})$ реперни $\alpha_1 = 45°$ бурчакка буришдан $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ репер ҳосил бўлади, унинг координата векторлари:

$$\vec{i}' = \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j},\qquad \vec{j}' = -\frac{\sqrt{2}}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{j}.$$

4) $a'_{10} = a_{10}\cos\alpha_1 + a_{20}\sin\alpha_1$, $a'_{20} = -a_{10}\sin\alpha_1 + a_{20}\cos\alpha_1$ формулалар бўйича a'_{10}, a'_{20} коэффициентларни топамиз:

$$a'_{10} = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2},\quad a'_{20} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}.$$

$\mathcal{B}'$ реперда чизиқнинг тенгламаси:

$$4x'^2 - 2y'^2 + 4\sqrt{2}x' - 2\sqrt{2}y' - 1 = 0.$$

5) Бу тенгламани координаталар боши O ни кўчириш билан соддалаштирамиз. Бунинг учун тенгламанинг чап томонидаги ҳадлардан x', y' га нисбатан тўла квадратлар ажратамиз;

$$\left(4x'^2 + \frac{4\sqrt{2}}{4}x' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 2\left(y'^2 + \frac{2\sqrt{2}}{2}y' +\right.$$

$$\left. + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 1 = 0,$$

$$4\left(x'^2 + \sqrt{2}x' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) - 2\left(y'^2 + \sqrt{2}y' + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right) -$$

$$-2 + 1 - 1 = 0,\quad 4\left(x' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2\left(y' + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 - 2 = 0;$$

$$\left|\begin{aligned} X &= x' + \frac{\sqrt{2}}{2} \\ Y &= y' + \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}\right. \Rightarrow \left|\begin{aligned} x' &= X + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \\ y' &= Y + \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Чизиқнинг тенгламаси каноник кўринишга келади:

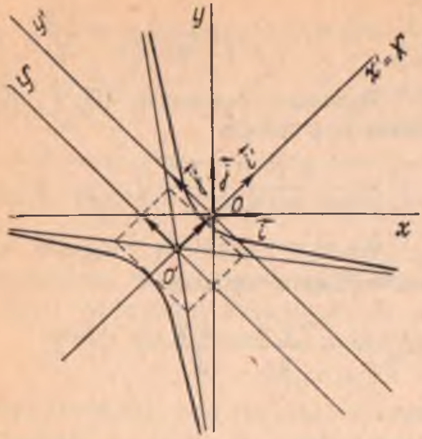
$$4X^2 - 2Y^2 = 2 \text{ ёки } \frac{4X^2}{2} - \frac{2Y^2}{2} = 1 \Rightarrow \frac{X^2}{\frac{1}{2}} - \frac{Y^2}{1} = 1.$$

Бу ерда $a = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $b = 1$; гиперболанинг каноник тенгламаси ҳосил қилинди. 150- чизмада бу гипербола ясалган.

2-мисол. $4x^2 - 4xy + y^2 - 2x - 14y + 7 = 0$.

Ечиш. Бу ерда: $a_{11} = 4$, $a_{12} = -2$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = -1$, $a_{20} = -7$, $a_{00} = 7$.

1) характеристик тенглама $\lambda^2 - 5\lambda = 0$, илдизлари:



150- чизма

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 5;$$

2) $\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{\lambda_1 - a_{11}}{a_{12}} = \frac{-4}{-2} = 2 \Rightarrow \sin\alpha_1 = \frac{2}{\sqrt{5}}, \cos\alpha_1 = \frac{1}{\sqrt{5}};$

3) $(O, \vec{i}, \vec{j})$ реперни $\operatorname{tg}\alpha_1 = 2$ дан аниқланадиган α_1 бурчакка буришдан ҳосил бўладиган $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ репернинг координата векторлари:

$$\vec{i}' = \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{j}, \quad \vec{j}' = -\frac{2\sqrt{5}}{5}\vec{i} + \frac{\sqrt{5}}{5}\vec{j};$$

4) $a'_{10} = -3\sqrt{5}, \ a_{20} = -\sqrt{5}.$

$\mathscr{B}'$ реперда чизиқнинг тенгламаси:

$$5y'^2 - 6\sqrt{5}x' - 2\sqrt{5}y' + 7 = 0;$$

5) энди координаталар бошини кўчирамиз. Бу тенгламанинг чап томонидаги ҳадлардан y' га нисбатан тўла квадрат ажратамиз:

$$5\left(y' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2 - 6\sqrt{5}\left(x' - \frac{\sqrt{5}}{5}\right) = 0;$$

$$\left| \begin{aligned} X &= x' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ Y &= y' - \frac{\sqrt{5}}{5}, \end{aligned} \right. \Rightarrow \left| \begin{aligned} x' &= X + \frac{\sqrt{5}}{5}, \\ y' &= Y + \frac{\sqrt{5}}{5}. \end{aligned} \right.$$

Чизиқнинг O ни $O'\left(\frac{\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$ нуқтага кўчиришдан ҳосил бўлган $(O', \vec{i}', \vec{j}')$ репердаги тенгламаси: $5Y^2 - 6\sqrt{5}X = 0$ ёки $Y^2 = \frac{6\sqrt{5}}{5}X$.

Бу тенглама 151-чизмада тасвирланган параболани ифодалайди.

3-мисол. $9x^2 + 16y^2 - 24xy + 30x - 40y - 25 = 0$.

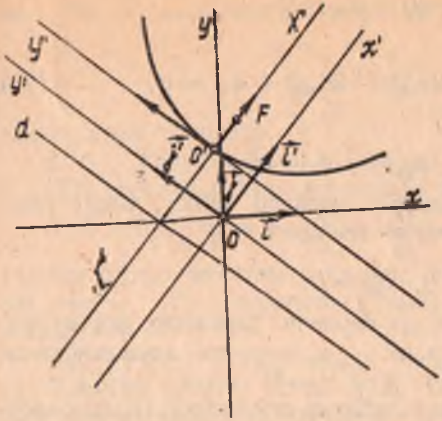
Ечиш. Бу ерда: $a_{11} = 9$, $a_{12} = -12$, $a_{22} = 16$, $a_{10} = 15$, $a_{20} = -20$, $a_{00} = -25$.

1) чизиқнинг характеристик тенгламаси:

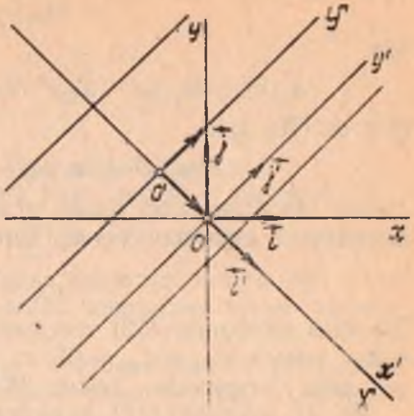
$\lambda^2 - 25\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 25, \ \lambda_2 = 0;$

2) $\operatorname{tg}\alpha_1 = -\frac{4}{3} \Rightarrow \sin\alpha_1 = -\frac{4}{5}, \ \cos\alpha_1 = \frac{3}{5};$

3) $(O, \vec{i}', \vec{j}')$ репернинг координата векторлари, $\vec{i}' = \frac{3}{5}\vec{i} -$



151- чизма



152- чизма

$-\frac{4}{5}\vec{j}, \ \vec{j'} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j};$

4) $a'_{10} = 25$, $a'_{20} = 0$ чизиқнинг тенгламаси $x'^2 + 2x' - 1 = 0$ кўринишида бўлади. Бундан

$$(x' + 1)^2 - 2 = 0;$$

5) координаталар боши O ни $\begin{cases} x' = X - 1, \\ y' = Y \end{cases}$ формулалар бўйича O' $(-1, 0)$ нуқтага кўчирсак, чизиқ тенгламаси $X^2 - 2 = 0$ кўринишини олади. Бу тенглама ординаталар ўқига параллел икки тўғри чизиқни аниқлайди (152- чизма).

56- §. Иккинчи тартибли чизиқ маркази

Биз 48- § да чизиқнинг симметрия маркази тушунчаси билан танишган эдик. Энди шу тушунчага асосланиб иккинчи тартибли чизиқнинг маркази тушунчасини киритамиз.

Таъриф. Иккинчи тартибли чизиқнинг симметрия маркази шу чизиқнинг *маркази* деб аталади.

Таърифга кўра M_0 чизиқнинг маркази бўлса, $\forall M \in \gamma$ нуқтага M_0 га нисбатан симметрик M' нуқта ҳам γ га тегишли бўлади. Иккинчи тартибли чизиқ

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \qquad (53)$$

умумий тенгламаси билан берилган бўлсин. Аввало қандай шарт бажарилганда координаталар боши марказ бўлишини аниқлаймиз.

Фараз қилайлик, $O(0, 0)$ нуқта чизиқнинг маркази бўлсин, у ҳолда марказ таърифига кўра $M(x, y) \in \gamma \Rightarrow M'(-x, -y) \in \gamma$ (чунки бу нуқталар O га нисбатан симметрикдир), яъни

$$a_{11}(-x)^2 + 2a_{12}(-x)(-y) + a_{22}(-y)^2 + 2a_{10}(-x) +$$

$$+ 2a_{20}(-y) + a_{00} = 0$$

ёки

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 - 2a_{10}x - 2a_{20}y + a_{00} = 0. \tag{70}$$

(53) ва (70) дан:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + a_{00} = 0.$$

Демак, координаталар боши чизиқнинг маркази бўлса, унинг тенгламасида 1-даражали ҳадлар иштирок этмайди:

$$a_{10} = 0, \ a_{20} = 0.$$

Аксинча чизиқнинг (53) тенгламасида биринчи даражали ҳадлар иштирок этмаса ($a_{10} = a_{20} = 0$). x, y ни $-x$, $-y$ га алмаштирганда тенглама ўзгармайди, демак, $M(x, \ y) \in \gamma \Rightarrow M'(-x, \ -y) \in \gamma$.

M, M' нуқталар $O(0, 0)$ нуқтага нисбатан симметрик. Бундан координаталар боши чизиқнинг марказидир.

Шундай қилиб, координаталар боши иккинчи тартибли чизиқнинг маркази бўлиши учун бу чизиқнинг тенгламасида x, y ларга нисбатан биринчи даражали ҳадлар иштирок қилмаслиги зарур ва етарли.

Энди чизиқнинг марказини қандай қилиб топиш йўлини кўрсатамиз. $M_0(x_0, \ y_0)$ нуқта чизиқнинг маркази бўлсин. Координаталар боши O (0, 0) ни M_0 нуқтага кўчирамиз:

$$\begin{cases} x = X + x_0, \\ y = Y + y_0. \end{cases} \tag{71}$$

Бунинг учун (71) дан x, y ни (53) га қўямиз:

$$a_{11}X^2 + 2a_{12}XY + a_{22}Y^2 + 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})X +$$
$$+ 2(a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})Y + F(x_0, \ y_0) = 0,$$

бу ерда

$$F(x_0, \ y_0) = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}. \tag{72}$$

Юқорида келтирилган зарурий ва етарли шартга кўра M_0 нуқта чизиқнинг маркази бўлиши учун қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\begin{cases} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10} = 0, \\ a_{12}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20} = 0. \end{cases} \tag{73}$$

Демак, чизиқ марказининг мавжудлиги масаласи (73) системанинг ечимини топиш масаласига келтирилди. Бу система коэффициентларидан ушбу детерминантларни тузамиз:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_1 = \begin{vmatrix} -a_{10} & a_{12} \\ -a_{20} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & -a_{10} \\ a_{21} & -a_{20} \end{vmatrix}.$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

1. $\delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0.$

(73) система биргина $(x_0, \ y_0)$ ечимга эга ва шунга мос ҳолда

биргина марказ мавжуд. Бундай чизиқни *марказли чизиқ* деб атаймиз. Чизиқ марказининг координаталари

$$x_0 = \frac{\delta_1}{\delta}, \quad y_0 = \frac{\delta_2}{\delta}$$

формуладан топилади.

2. $\delta = 0$ ва δ_1, δ_2 нинг камида бири нолдан фарқли.

(73) система битта ҳам ечимга эга эмас, чизиқ — марказсиз.

3. $\delta = \delta_1 = \delta_2 = 0 \Rightarrow \frac{a_{11}}{a_{12}} = \frac{a_{12}}{a_{22}} = \frac{a_{10}}{a_{20}} \Rightarrow$ (73) система биринчи даражали битта тенгламага келади. Унинг ечимлари чексиз кўп $\Rightarrow$ чизиқ чексиз кўп марказларга, аниқроғи, марказлар тўғри чизиғига эгадир.

Эслатма: (73) системани чизиқ тенгламасидан x, y га нисбатан хусусий ҳосила олиш йўли билан тузиш мумкин. Ҳақиқатан, (53) тенгламадан x га нисбатан ҳосила олсак,

$$2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{10}$$

ва y га нисбатан ҳосила олсак,

$$2a_{12}x + 2a_{22}y + 2a_{20}.$$

Декарт координаталар системасини тегишлича танлаш йўли билан иккинчи тартибли чизиқнинг (53) тенгламасини қуйидаги кўринишларнинг бирига келтирган эдик (53-§).

I. $\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0, \quad (\lambda_1 \neq 0,\ \lambda_2 \neq 0),$

II. $\lambda_2 Y^2 + 2a'_{10} X = 0, \quad (\lambda_2 \neq 0,\ a'_{10} \neq 0),$

III. $\lambda_2 Y^2 + a''_{00} = 0, \ (\lambda_2 \neq 0).$

I тенглама учун $\delta = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2 \neq 0$. Демак, фақат эллипс, мавҳум эллипс, гипербола, кесишадиган ҳақиқий иккита тўғри чизиқ, кесишадиган мавҳум иккита тўғри чизиқ марказли чизиқлардир.

II тенглама учун $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} -a'_{10} & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = -a'_{10}\lambda_2 \neq$ $\neq 0$, $\delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & -a'_{10} \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$ парабола марказсиз чизиқ экан.

III тенглама учун $\delta = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{vmatrix} = 0$, $\delta_2 =$ $= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$. Бундан кўринадики, иккинчи тартибли чизиқ иккита параллел тўғри чизиқларга ажралганда марказлар чизиғига эгадир, холос.

Мисол. $x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y - 4 = 0$ чизиқнинг марказини топинг.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = 1$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = 1$, $a_{20} = 1$, $a_{00} =$ 4. Берилган эгри чизиқ марказининг координаталари ушбу

$$x + y + 1 = 0, \; x + y + 1 = 0$$

тенгламалар системасининг ечимлари бўлади. Бу системанинг иккала тенгламаси бир хил, демак, система битта тенгламага келади, унинг ечимлари чексиз кўп $\Rightarrow$ берилган чизиқ марказлар тўғри чизиғига эга бўлиб, унинг тенгламаси $x + y + 1 = 0$.

57-§. Иккинчи тартибли чизиқнинг тўғри чизиқ билан кесишиши

Декарт реперида

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{10}x + 2a_{20}y + a_{00} = 0 \tag{53}$$

иккинчи тартибли чизиқ ва

$$\begin{cases} x = x_0 + a_1t, \\ y = y_0 + a_2t \end{cases} \tag{74}$$

тўғри чизиқ берилган бўлсин. Бу эгри чизиқнинг шу тўғри чизиқ билан кесишиш масаласига ўтамиз. (53) ва (74) дан:

$$a_{11}(x_0 + a_1t)^2 + 2a_{12}(x_0 + a_1t)(y_0 + a_2t) + a_{22}(y_0 + a_2t)^2 +$$
$$+ 2a_{10}(x_0 + a_1t) + 2a_{20}(y_0 + a_2t) + a_{00} = 0$$

ёки

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0. \tag{75}$$

Бу ерда қуйидаги белгилашлар киритилган:

$$P = a_{11}a_1^2 + 2a_{12}a_1a_2 + a_{22}a_2^2;$$
$$Q = a_{11}a_1x_0 + a_{12}a_1y_0 + a_{21}a_2x_0 + a_{22}a_2y_0 + a_{10}a_1 + a_{20}a_2 =$$
$$= a_1(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + a_2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}); \tag{76}$$
$$R = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00}.$$

(75) тенгламани ечиб, t нинг топилган қийматларини (74) га қўйсак, чизиқ билан тўғри чизиқнинг кесишган нуқталари топилади. Қуйидаги ҳолларни текширайлик.

1. $P \neq 0$. Бу ҳолда (75) тенглама иккита илдизга эга.

$$t_{1,2} = \frac{-Q \pm \sqrt{a^2 - RP}}{P}.$$

Бу ернинг ўзида учта ҳол бўлиши мумкин:

а) $D = Q^2 - PR > 0$; (75) тенглама иккита ҳақиқий турли илдизга эга — чизиқ билан тўғри чизиқ иккита ҳақиқий турли нуқталарда кесишади.

б) $D = Q^2 - PR < 0$; (75) тенглама иккита қўшма комплекс илдизга эга, шунинг учун (53) чизиқ билан (74) тўғри чизиқ иккита қўшма комплекс нуқталарда кесишади, демак, тўғри чизиқ билан (53) чизиқ умумий ҳақиқий нуқталарга эга бўлмайди.

в) $D = Q^2 - PR = 0$; (75) тенглама устма-уст тушган иккита илдизга эга — чизиқ билан тўғри чизиқ устма-уст тушган иккита нуқтада кесишади. Бу вақтда u тўғри чизиқ γ чизиққа *уринма* деб аталади.

2. $P = 0$. Бу ҳолда (75) тенглама

$$2Qt + R = 0 \tag{77}$$

кўринишни олади.

Ўз навбатида қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

а) $Q \neq 0$, R — ихтиёрий сон. (77) тенглама ягона илдизга эга:

$$t = -\frac{R}{2Q};$$

чизиқ билан тўғри чизиқ битта нуқтада кесишади.

б) $Q = 0$, $R \neq 0$. (77) тенглама ечимга эга эмас. Чизиқ тўғри чизиқ билан битта ҳам умумий ҳақиқий ёки мавҳум нуқтага эга эмас.

в) $Q = 0$, $R = 0$. бу ҳолда t нинг ҳар қандай қиймати (77) тенгламани қаноатлантиради $\Rightarrow$ чизиқ ва тўғри чизиқ чексиз кўп умумий нуқталарга эга, яъни (74) тўғри чизиқ барча нуқталари билан (53) чизиққа тегишли: $u \subset \gamma$. Шундай қилиб, (75) тенғламада $P = 0$ бўлса, γ чизиқ u тўғри чизиқ билан фақат битта умумий нуқтага эга ёки битта ҳам умумий нуқтага эга эмас, ёки $u \subset \gamma$.

Мисол. $x^2 - 2xy - 3y^2 - 4x - 6y + 3 = 0$ чизиқнинг $u: \begin{cases} x = t, \\ y = 5t - 5 \end{cases}$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталарини топинг.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = 1$, $a_{12} = -1$, $a_{22} = -3$, $a_{10} = -2$, $a_{20} = -3$, $a_{00} = 3$; $M_0(0, -5)$, $\vec{u}(1, 5) \Rightarrow a_1 = 1$, $a_2 = 5$. $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ нинг коэффициентлари: $P = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 5 - 3 \cdot 25 = -84$, $Q = 1 \cdot (1 \cdot 0 - 1 \cdot (-5) - 2) + 5 \cdot (-1 \cdot 0 - 3 \cdot (-5) - 3) = 3 + 60 = 63$. $R = 1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 \cdot 5 - 3 \cdot (-5)^2 - 4 \cdot 0 - 6 \cdot (-5) + 3 = -75 + 27 = -42$. Тенгламанинг дискриминанти: $D = Q^2 - RP = (63)^2 - (-84) \cdot (-42) = 3969 - 3528 = 441 > 0 \Rightarrow$ тўғри чизиқ γ ни иккита ҳақиқий нуқтада кесади: шу нуқталарни топайлик:

$$t_{1,2} = \frac{-63 \pm \sqrt{441}}{-84} = \frac{-63 \pm 21}{-84}; \quad t_1 = \frac{-63 \pm 21}{-84} = = \frac{42}{84} = \frac{1}{2};$$

$$t_2 = \frac{-63 - 21}{-84} = \frac{84}{84} = 1.$$

t нинг қийматларини тўғри чизиқ тенгламаларига қуйиб, $M_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{2}\right)$, $M_2(1, 0)$ нуқталарни ҳосил қиламиз.

58-§. Асимптотик йўналишлар. Уринма ва асимптоталар

Ноль бўлмаган ҳар бир $\vec{u}(a_1, a_2)$ вектор бирор йўналишини аниқлайди. $\vec{u}$ векторга параллел бўлган барча тўғри чизиқларни қарайлик.

Таъриф. Агар $\vec{u}$ векторга параллел ҳар бир u тўғри чизиқ γ иккинчи тартибли чизиқни биттадан ортиқ бўлмаган нуқтада кесса ёки $u \in \gamma$ бўлса, у ҳолда $\vec{u}$ вектор аниқлайдиган йўналиш иккинчи тартибли чизиққа нисбатан *асимптотик йўналиш*, $\vec{u}$ вектор эса *асимптотик йўналишнинг вектори* дейилади.

Бу таъриф ва 57-§ даги 2-ҳолга асосан $\vec{u}$ (a_1, a_2) вектор аниқлаган йўналишнинг γ чизиққа нисбатан асимптотик йўналиш бўлиши учун $P = 0$ бўлиши, буни очиб ёзсак,

$$a_{11} a_1^2 + 2a_{12} a_1 a_2 + a_{22} a_2^2 = 0 \tag{78}$$

тенгликнинг ўринли бўлиши зарур ва етарли. (73) тенгликни қуйидаги кўринишда ёзамиз ($a_1 \neq 0$):

$$a_{22} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^2 + 2a_{12} \left(\frac{a_2}{a_1}\right) + a_{11} = 0. \tag{79}$$

(79) тенгламада $\frac{a_2}{a_1}$ нисбат $\vec{u}$ векторнинг йўналишини, демак, асимптотик йўналишни аниқлайди. (79) дан

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)_{1;2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}}.$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

1) $\delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 < 0$; (79) тенглама иккита турли ҳақиқий илдизга эга. δ чизиқ иккита асимптотик йўналишга эга.

2) $\delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$; (79) тенгламанинг иккала илдизи тенг. γ чизиқ битта асимптотик йўналишга эга.

3) $\delta = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 > 0$; (79) тенглама ҳақиқий илдизларга эга эмас, γ чизиқ асимптотик йўналишга эга эмас.

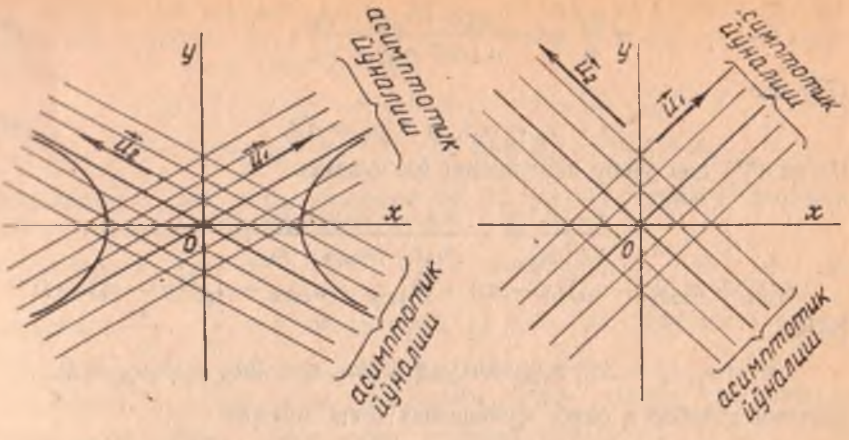
Юқорида олиб борилган муҳокамаларга таяниб, қуйидаги хулосага келамиз; гипербола ва ҳақиқий кесишувчи икки тўғри чизиқ иккита асимптотик йўналишга эга (153-*а* чизма). Иккита ҳақиқий ёки иккита мавҳум параллел тўғри чизиқ, устма-уст тушган икки тўғри чизиқ, парабола битта асимптотик йўналишга эга (153-*б* чизма).

Мисол. $4x^2 - 5xy + y^2 - 3x + 7 = 0$ чизиқ берилган. Асимптотик йўналишларнинг векторларини топинг.

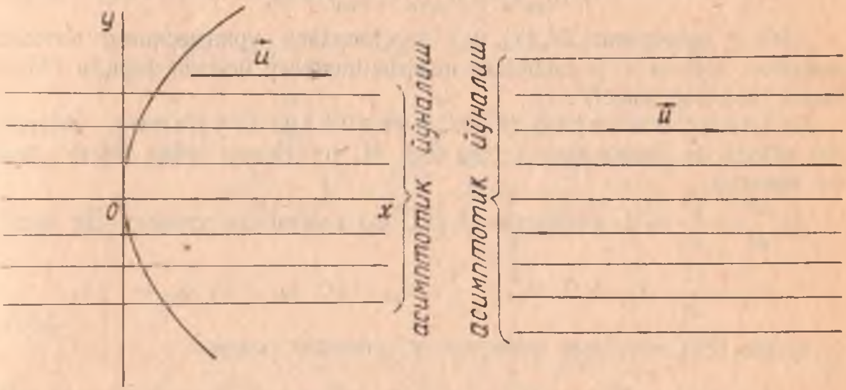
Ечиш. Бу ерда $a_{11} = 4$, $a_{12} = -\frac{5}{2}$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = -\frac{3}{2}$, $a_{20} = 0$, $a_{00} = 7$; асимптотик йўналиш (a_1, a_2) векторининг бурчак коэффициенти $\frac{a_2}{a_1}$:

$$\left(\frac{a_2}{a_1}\right)_{1,2} = \frac{-a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{22}} = \frac{\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 4}}{1} = \frac{5}{2} \pm \frac{3}{2}.$$

Бундан:



153-*а* чизма



153-*б* чизма

$$k_1 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_1 = \frac{5}{2} + \frac{3}{2} = 4; \quad k_2 = \left(\frac{a_2}{a_1}\right)_2 = \frac{5}{3} - \frac{3}{2} = 1.$$

Демак, берилган чизиқ иккита асимптотик йўналишга эга.

Иккинчи тартибли чизиққа уринма. Биз 57-§ нинг 1-бандида чизиқнинг уринмаси тушунчасини киритган эдик. Шунга асосланиб, уринма тенгламасини чиқарайлик.

Агар декарт реперида γ чизиқ (53) тенгламаси билан u тўғри чизиқ эса (74) параметрик тенгламалари билан берилган бўлса, қўйилган масала мазмунига асосан u тўғри чизиқ γ нинг M_0 нуқтасида[1] уринма бўлишлиги учун $t_1 = t_2 \Rightarrow M_0 = M$ бўлиши керак, бу эса (75) да $Q = 0$, $R = 0$ бўлганда юз беради. Q нинг ифодасидан:

$$Q = a_1 (a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}) + a_2 (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}) = 0 \Rightarrow$$

---

[1] M_0 нуқта γ учун марказ эмас деб фараз қилинади.

$$\Rightarrow \frac{a_1}{a_2} = -\frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}}.\ ^{1)} \qquad (*)$$

(75) дан

$$x - x_0 = a_1 t,\ \ y - y_0 = a_2 t. \qquad (**)$$

(*) ва (**) дан ушбу тенгламани ёза оламиз:

$$\frac{x - x_0}{y - y_0} = -\frac{a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20}}{a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10}};$$

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})(y - y_0) = 0.$$

Буни

$$R = a_{11}x_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + a_{22}y_0^2 + 2a_{10}x_0 + 2a_{20}y_0 + a_{00} = 0$$

эканини эътиборга олиб, қуйидагича ёзиш мумкин:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{10})x + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{20})y +$$
$$+ (a_{10}x_0 + a_{20}y_0 + a_{00}) = 0.$$

(80) γ чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасидаги уринмасининг *тенгламасидир*, чунки x, y олдидаги коэффициентлар нолдан фарқли (M_0— чизиқ маркази эмас!)[2].

Эллипс, гипербола ва параболага уринма. Эллипс, гипербола ва параболанинг ҳар бир M_0 нуқтасида тайин битта уринма мавжуд.

а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида уринма. Бу ерда:

$$a_{11} = \frac{1}{a^2},\ a_{12} = 0,\ a_{22} = \frac{1}{b^2},\ a_{10} = 0,\ a_{20} = 0,\ a_{00} = -1.$$

У ҳолда (80) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\left(\frac{1}{a^2}x_0 + 0\cdot y_0 + 0\right)x + \left(0\cdot x_0 + \frac{1}{b^2}y_0 + 0\right)y + (0\cdot x_0 + 0\cdot y_0 - 1) = 0$$

ёки

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Бу тенглама эллипснинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасидаги уринмасининг тенгламасидир.

б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболага $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида уринма. Айни эллипсдагига ўхшаш, гиперболанинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасидаги уринмаси $\frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$ тенглама билан ифодаланади (буни мустақил кўрсатинг).

---

[1] M_0 нуқта γ учун марказ эмас деб фараз қилинган, демак касрнинг сурат ва махражи бир вақтда нолга тенг эмас.

[2] M_0 нуқта чизиқ маркази бўлса, уринма тушунчаси бу ҳолда маъносини йўқотади.

в) $y^2 = 2px$ параболага $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида уринма. $y^2 = 2px$ парабола учун $a_{11} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{22} = 1$, $a_{10} = -p$, $a_{20} = a_{00} = 0$. У ҳолда (80) тенглама

$$(0 \cdot x_0 + 0 \cdot y_0 - p)\, x + (0 \cdot x_0 + 1 \cdot y_0 + 0)\, y +$$
$$+ (-px_0 + 0 \cdot y_0 + 0) = 0 \text{ ёки } yy_0 = p(x + x_0)$$

кўринишга келиб, у параболанинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасидаги уринмасининг тенгламаси бўлади.

Мисол. $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқнинг а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипсга, б) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболага, в) $y^2 = 2px$ параболага уринма бўлишлиги учун тегишли шартларни аниқланг.

Ечиш. а) тўғри чизиқ тенгламаси билан эллипс тенгламасини биргаликда ечамиз. Тўғри чизиқ тенгламасидан $y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$ ни эллипс тенгламасига қўйсак,

$$b^2x^2 + a^2\left(\frac{A^2}{B^2}x^2 + 2\frac{AC}{B^2}x + \frac{C^2}{B^2}\right) - a^2b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(b^2 + a^2 \cdot \frac{A^2}{B^2}\right)x^2 + 2a^2\frac{AC}{B^2}x + a^2\frac{C^2}{B^2} - a^2b^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_{1\,2} = \frac{-a^2\frac{AC}{B^2} \pm \sqrt{a^4\frac{A^2C^2}{B^4} - \left(b^2 + a^2\frac{A^2}{B^2}\right)\left(a^2\frac{C^2}{B^2} - a^2b^2\right)}}{b^2 + a^2\frac{A^2}{B^2}}.$$

Агар

$$a^4\,\frac{A^2C^2}{B^4} - \left(b^2 + a^2\frac{A^2}{B^4}\right)\left(a^2\frac{C^2}{B^2} - a^2b^2\right) = 0 \tag{81}$$

бўлса, у ҳолда $x_1 = x_2$ бўлиб, берилган тўғри чизиқ эллипсга уринади. (81) дан

$$-b^2\frac{C^2}{B^2} + b^4 + a^2b^2\,\frac{A^2}{B^2} = 0,$$

бунинг иккала томонини b^2 га бўлсак, $\Rightarrow b^2 + a^2\frac{A^2}{B^2} - \frac{C^2}{B^2} = 0$ ёки $A^2a^2 + B^2b^2 = C^2$, бу берилган тўғри чизиқнинг эллипсга уриниш шартидир.

б) айнан юқоридаги каби ишни бажариш билан берилган тўғри чизиқнинг $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболага уриниш шарти

$$A^2a^2 - B^2b^2 = C^2$$

эканига ишонч ҳосил қилиш мумкин.

в) берилган тўғри чизиқ тенгламасидан топилган $y = -\frac{A}{B}\,x -$

$-\frac{C}{B}$ ни $y^2 = 2px$ парабола тенгламасига қўйсак, $\frac{A^2}{B^2}x^2 + 2\left(\frac{AC}{B^2} - p\right)x + \frac{C^2}{B^2} = 0$ квадрат тенгламага эга бўламиз. Унинг илдизлари:

$$x_{1;\,2} = \frac{\left(p + \frac{AC}{B^2}\right) \pm \sqrt{\left(p - \frac{AC}{B^2}\right)^2 - \frac{A^2}{B^2} \cdot \frac{C^2}{B^2}}}{\frac{A^2}{B^2}}.$$

Бу ерда ҳам, агар

$$\left(p - \frac{AC}{B^2}\right)^2 - \frac{A^2}{B^2} \cdot \frac{C^2}{B^2} = 0 \tag{82}$$

бўлса, $x_1 = x_2$ бўлиб, берилган тўғри чизиқ параболага уринади. (82) дан $p\left(p - 2\frac{AC}{B^2}\right) = 0$, $p \neq 0$ бўлгани учун $p - 2\frac{AC}{B^2} = 0$, бундан ушбу тенгликка эга бўламиз:

$$p = -2\frac{AC}{B^2} \text{ ёки } pB^2 = 2AC,$$

бу берилган тўғри чизиқнинг параболага уриниш шартидир.

Асимптота. (Эгри) чизиқнинг асимптотасига юқорида таъриф берилган эди (49- §).

Бу таъриф бўйича асимптотани γ чизиқнинг чексиз узоқлашган нуқтасидаги (яъни $M_1 = M_{2\infty}$ нуқтадаги) уринмаси деб қараш мумкин. Буни эътиборга олсак:

1) (75) тенгламанинг t_1, t_2 илдизлари бир-бирига тенг ($t_1 = t_2$) ва $t_1 = t_2 = \infty$ бўлган ҳолда квадрат тенглама $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ нинг олдинги иккита P, Q коэффициенти нолга тенг бўлиши керак; ҳақиқатан, (75) да $t = \frac{1}{\gamma}$ десак, $\Rightarrow P + 2Q\lambda + R\lambda^2 = 0$; бу ерда $P = 0 \Rightarrow t_1 \to \infty$ ва $Q = 0 \Rightarrow t_2 \to \infty$. Йўналишнинг иккинчи тартибли γ чизиққа нисбатан асимптотик бўлиш шарти $P = 0$ эди. Бундан $\Rightarrow$ ҳар қандай асимптота асимптотик йўналишга эга.

Бу муҳокамаларни гиперболага татбиқ қилсак, гиперболанинг юқорида қаралган иккита асимптотаси $y = \pm\frac{b}{a}x$ ни ҳосил қиламиз, парабола учун эса асимптоталарнинг йўқлигини кўрамиз.

59- §. Иккинчи тартибли чизиқнинг диаметрлари

$\vec{u}$ (u_1, u_2) вектор (53) чизиққа нисбатан асимптотик бўлмаган йўналишнинг вектори бўлсин. $\vec{u}$ (u_1, u_2) векторга параллел бўлган барча тўғри чизиқларни қараймиз. Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бири (53) чизиқ билан иккита (турли ҳақиқий, устма-уст тушган ёки қўшма комплекс) нуқтада кесишиб, $\vec{u}$ векторга параллел ватарни ҳосил қилади. Ҳосил қилинган ҳар бир ватарнинг ўртаси ҳақиқий нуқта[1] бўлади.

$\vec{u}$ векторга параллел бўлган барча ватарлар ўрталарининг тўпламини $D_{\vec{u}}$ билан белгилаймиз ва унинг тенгламасини тузамиз. Шу мақсадда $D_{\vec{u}}$ тўпламнинг ихтиёрий $M(x, y)$ нуқтасини оламиз. M нуқтадан $\vec{u}(u_1, u_2)$ векторга параллел битта u тўғри чизиқ ўтади. M нуқтани бу тўғри чизиқнинг бошланғич нуқтаси десак, унинг параметрик тенгламалари

$$\begin{cases} X = x + u_1 t, \\ Y = y + u_2 t \end{cases} \tag{83}$$

кўринишда бўлади.

$M_1(X_1, Y_1)$, $M_2(X_2, Y_2)$ орқали (83) тўғри чизиқнинг γ чизиқ билан кесишган нуқталарини белгилаймиз:

$$\begin{cases} X_1 = x + u_1 t_1, \\ Y_1 = y + u_2 t_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} X_2 = x + u_1 t_2, \\ Y_2 = y + u_2 t_2, \end{cases} \tag{84}$$

бу ерда t_1, t_2 (83) билан (53) тенгламаларни биргаликда ечишдан ҳосил бўлган

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0 \tag{85}$$

квадрат тенгламанинг илдизларидир. $M(x, y)$ нуқта M_1M_2 кесманинг ўртаси бўлгани учун

$$x = \frac{X_1 + X_2}{2}, \quad y = \frac{Y_1 + Y_2}{2}.$$

(84) га асосан:

$$x = x + \frac{t_1 + t_2}{2} u_1, \quad y = y + \frac{t_1 + t_2}{2} u_2$$

ёки

$$\frac{t_1 + t_2}{2} u_1 = 0, \quad \frac{t_1 + t_2}{2} u_2 = 0.$$

Бу муносабатларда u_1, u_2 нинг камида бири нолдан фарқли, чунки $\vec{u} \neq \vec{0}$, у ҳолда $t_1 + t_2 = 0$ бўлади.

Иккинчи томондан, t_1, t_2 (85) квадрат тенгламанинг илдизлари, бу ҳолда Виет теоремасига кўра

$$t_1 + t_2 = Q \Rightarrow Q = 0,$$

яъни

$$u_1(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + u_2(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0. \tag{86}$$

Шундай қилиб, $D_{\vec{u}}$ тўпламнинг ихтиёрий нуқтаси $M(x, y)$ нинг

---

[1] Агар M_1 ва M_2 нуқталар қўшма комплекс, яъни $M_1(a + bi, c + di)$, $M_2(a - bi, c - di)$ бўлса, у ҳолда уларнинг ўртаси ҳақиқий $M(a, c)$ нуқта бўлади.

координаталари (86) ни қаноатлантиради. Шундай қилиб, (86) $D_{\vec{u}}$ тўпламнинг тенгламаси экан. Энди (86) тенгламасига кўра $D_{\vec{u}}$ тўпламнинг тўғри чизиқ эканини кўрсатамиз. (86) ни қуйидагича шакл ўзгартириб ёзамиз.

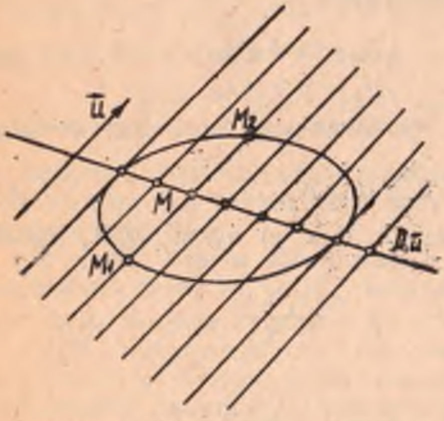
$$(a_{11}u_1 + a_{12}u_2)\,x + (a_{21}u_1 + a_{22}u_2)\,y + (a_{10}u_1 + a_{20}u_2) = 0. \qquad (87)$$

(87) да ўзгарувчи координаталар олдидаги коэффициентлардан камида бири нолдан фарқли, акс ҳолда

$$a_{11}u_1 + a_{12}u_2 = 0, \quad a_{21}u_1 + a_{22}u_2 = 0$$

дан

$$P = a_{11}u_1^2 + 2a_{12}u_1u_2 + a_{22}u_2^2 = (a_{11}u_1 + a_{12}u_2)\,u_1 +$$
$$+ (a_{21}u_1 + u_{22}u_2)\,u_2 = 0$$



154- чизма

бўлиб, бу зидликдир (чунки $\vec{u}$ — асимптотик йўналишнинг вектори). Бундан $\vec{u}$ векторга параллел барча ватарларнинг ўрталари тўплами тўғри чизиқ экан деган хулоса келиб чиқади (154- чизма). Бу тўғри чизиқни берилган (u_1, u_2) йўналишнинг ватарларига (ёки $\vec{u}$ йўналишга) *қўшма диаметр* дейилади. (86) ёки (87) тенглама бу диаметрнинг тенгламасидир. Параллел ватарларнинг йўналиши билан бу ватарларга қўшма бўлган диаметрнинг йўналишини берилган (53) чизиққа нисбатан *қўшма йўналишлар* дейилади.

Маълумки, иккинчи тартибли γ чизиқнинг маркази

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{10} = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{20} = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасидан аниқланар эди. Бу система билан (86) диаметр тенгламасидан γ чизиқнинг маркази диаметрга тегишли деган хулосага келамиз. Демак, марказли чизиқнинг барча диаметрлари унинг марказидан ўтади.

Агар γ чизиқ марказлар тўғри чизиғига эга бўлса, у γ нинг *диаметри ҳам* бўлади, бу ҳолда γ чизиқ ягона диаметрга эга бўлади. Марказсиз чизиқ биргина бўлиб, у ҳам параболадир.

Параболанинг диаметрларини текширамиз. Парабола $y^2 = 2px$ тенглама билан берилган бўлсин. (86) тенглама бу парабола учун ушбу кўринишни олади:

$$u_1(0\cdot x + 0\cdot y - 2p) + u_2(0\cdot x + 1\cdot y + 0) = 0$$

ёки

$$-2pu_1 + u_2y = 0, \tag{88}$$

бу ерда $u_2 \neq 0$; агар $u_2 = 0$ бўлса, (88) дан $2pu_1 = 0$, $p \neq 0$ бўлганидан $u_1 = 0$ бўлади, бу мумкин эмас, чунки

$$\vec{u}\,(u_1,\ u_2) \neq \vec{0}$$

тенгламанинг иккала қисмини u_2 га бўлиб, ушбуга эга бўламиз:

$$y + b = 0 \tag{89}$$

бу ерда $b = -2p\frac{u_1}{u_2}$ белгилашни киритдик. (89) тенглама $\vec{i}$ векторга параллел тўғри чизиқлар дастасини аниқлайди. $\vec{i}$ вектор 58-§ га кўра асимптотик йўналишнинг вектори ҳамдир.

Демак, парабола битта асимптотик йўналишга эга бўлиб, бу йўналишдаги ҳар бир тўғри чизиқ параболанинг диаметри бўлади. Демак, параболанинг барча диаметрлари ўзаро параллелдир.

Мисол. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ эллипсни $3x + 2y - 6 = 0$ тўғри чизиқ икки M_1, M_2 нуқтада кесиб ўтади. M_1M_2 ватарнинг ўртасидан ўтувчи диаметрни топинг.

Ечиш. Берилган эллипснинг маркази координаталар бошида. Демак, изланаётган диаметр координаталар бошидан ўтади. Ватарнинг ўртасини топиш учун эллипс билан тўғри чизиқнинг кесишган нуқталарини топамиз: $3x + 2y - 6 = 0$, $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ дан

$$\frac{x^2}{16} + \frac{\left(-\frac{3}{2}x + 3\right)^2}{12} = 1 \Rightarrow 3x^2 + 4\left(\frac{9}{4}x^2 - 9x + 9\right) = 48 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 12x^2 - 36x - 12 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x - 1 = 0,$$

$$x_{1;2} = \frac{3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{3 \pm \sqrt{13}}{2};$$

$$x_1 = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}; \quad x_2 = \frac{3 - \sqrt{13}}{2};$$

$$y = -\frac{3}{2}x + 3 \text{ дан } y_1 = -\frac{3}{2}\left(\frac{3 + \sqrt{13}}{2}\right) + 3,$$

$$y_2 = -\frac{3}{2}\left(\frac{3 - \sqrt{13}}{2}\right) + 3.$$

M_1M_2 ватарнинг ўртасини M_0 десак, унинг x_0, y_0 координаталари қуйидагича ҳисобланади:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{3 + \sqrt{13} + 3 - \sqrt{13}}{4} = \frac{3}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2} =$$

$$= \frac{-\frac{9}{2} + 6}{2} = \frac{3}{4}.$$

Изланган диаметр O ва M_0 нуқталардан ўтгани учун унинг тенгламаси:

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} = \frac{y}{\frac{3}{4}} \Rightarrow y = \frac{1}{2}x.$$

Қўшма диаметрлар. γ иккинчи тартибли марказли чизиқ, унинг асимптотик бўлмаган $\vec{u}\,(u_1,\ u_2)$ йўналишга қўшма диаметри $D_{\vec{u}}$ бўлсин. У ҳолда $D_{\vec{u}}$ (87) тенглама билан ифодаланади, γ чизиқнинг $D_{\vec{u}}$ диаметрга параллел ватарларини ўтказамиз. Барча бундай ватарлар ўрталарининг тўплами бирор $\vec{v}\,(v_1,\ v_2)$ йўналишга қўшма иккинчи бир $D_{\vec{v}}$ диаметрни беради, у $D_{\vec{u}}$ *диаметрга қўшма* деб аталади. $D_{\vec{v}}$ $\vec{v}$ йўналишга қўшма ва $D_{\vec{u}}$ га параллел барча ватарларнинг ўртаси бўлганидан $D_{\vec{u}}$ тўғри чизиқнинг $\vec{a}\,(-(u_1a_{12}+u_2a_{22}),$ $(u_1a_{11}+u_2a_{12})$ йўналтирувчи вектори $\vec{v}$ векторга коллинеар бўлади. Бундан ушбуни ёза оламиз:

$$\begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ -(u_1a_{12}+u_2a_{22}) & u_1a_{11}+u_2a_{12} \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{I боб, 8-§})$$

ёки

$$v_1(v_1a_{11}+u_2a_{12}) + v_2(u_1a_{12}+u_2a_{22}) = 0. \tag{90}$$

(90) тенглик $D_{\vec{v}}$ диаметрнинг $D_{\vec{u}}$ диаметрга қўшма бўлишлик шартидир. Энди $D_{\vec{v}}$ диаметрга қўшма бўлган диаметрни излаймиз. у $D_{\vec{w}}$ бўлсин. $D_{\vec{w}}$ бирор асимптотик бўлмаган $\vec{w}\,(w_1,\ w_2)$ йўналишга қўшма. У ҳолда $D_{\vec{v}}$ тўғри чизиқ (87) га асосан $\vec{b}\ (-(v_1a_{12}+$ $+v_2a_{22}),\ (v_1a_{11}+v_2a_{12})$ йўналтирувчи векторга эга ва $\vec{w} \parallel \vec{b}$ бўлади $\Rightarrow$

$$\Rightarrow w_1(v_1a_{11}+v_2a_{12}) + w_2(v_1a_{12}+v_2a_{22}) = 0. \tag{91}$$

(90) дан $\frac{v_2}{v_1} = -\frac{u_1a_{11}+u_2a_{12}}{u_1a_{12}+u_2a_{22}}$ ни топиб, уни (91) га қўйсак,

$$w_1\left(a_{11} - a_{12}\,\frac{u_1a_{11}+u_2a_{12}}{u_1a_{12}+u_2a_{22}}\right) + w_2\left(a_{12} - a_{22}\,\frac{u_1a_{11}+u_2a_{12}}{u_1a_{12}+u_2a_{22}}\right) = 0.$$

Бундан

$$w_1(a_{11}u_1a_{12} + a_{11}u_2a_{22} - a_{12}u_1a_{11} - a_{12}u_2a_{12}) +$$
$$+ w_2(a_{12}u_1a_{12} + a_{12}u_2a_{22} - a_{22}u_1a_{11} - a_{22}u_2a_{12}) = 0$$

ёки

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}^2)(w_1u_2 - w_2u_1) = 0. \tag{92}$$

$a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \neq 0$ (чунки γ чизиқ марказли) бўлганидан (92) дан,

$$w_1u_2 - w_2u_1 = 0 \Rightarrow \frac{w_2}{w_1} = \frac{u_2}{u_1} \Rightarrow D_{\vec{u}} = D_{\vec{w}}.$$

Демак, марказли γ чизиқнинг икки диаметридан бири иккинчисига қўшма бўлса, иккинчиси ҳам биринчисига қўшма бўлади. Шу сабабли бундай диаметрлар *ўзаро қўшма диаметрлар* деб аталади. Шундай қилиб, иккинчи тартибли γ чизиқнинг ўзаро қўшма диаметрлари унинг шундай икки диаметри бўладики, уларнинг ҳар бири иккинчисига параллел ватарларларнинг ўртасидан ўтади.

(90) муносабат икки диаметрнинг ўзаро қўшма бўлишлик шартидир. (90) муносабатни бошқача

$$a_{11}u_1v_1 + a_{12}v_1u_2 + a_{21}u_1v_2 + a_{22}v_2u_2 = 0$$

кўринишда ёзиш ҳам мумкин.

Агар γ марказсиз ёки марказлар тўғри чизиғига эга чизиқ бўлса, унга нисбатан барча асимптотик бўлмаган йўналишларнинг ҳар бирига қўшмаси биргина асимптотик йўналиш бўлади.

Параболанинг барча диаметрлари ўзаро параллел, параллел икки тўғри чизиққа ажралган γ чизиқ эса биргина диаметрга эга бўлгани учун парабола ҳам, параллел икки тўғри чизиқ ҳам ўзаро қўшма диаметрларга эга эмас.

Мисол. Ушбу $5x^2 + 4xy + 8y^2 - 32x - 56y + 80 = 0$ чизиқнинг шундай иккита қўшма диаметрини топиш керакки, уларнинг бири ординаталар ўқига параллел бўлсин.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = 5$, $a_{12} = 2$, $a_{22} = 8$, $a_{10} = -16$, $a_{20} = -28$, $a_{00} = 80$. Мос равишда $\vec{u}\ (u_1,\ u_2)$, $\vec{v}\ (v_1,\ v_2)$ йўналишларга қўшма бўлган $D_{\vec{u}}$ ва $D_{\vec{v}}$ диаметрларни қараймиз. (87) тенгламага кўра бу диаметрлар ушбу тенгламаларга эга бўлади:

$$D_{\vec{u}}: (5u_1 + 2u_2)\,x + (2u_1 + 8u_2)\,y - (16u_1 + 28u_2) = 0,$$

$$D_{\vec{v}}: (5v_1 + 2v_2)\,x + (2v_1 + 8v_2)\,y - (16v_1 + 28v_2) = 0.$$

$D_{\vec{u}}$, $D_{\vec{v}}$ диаметрларнинг бири, масалан, $D_{\vec{v}}$ диаметр Oy ўққа параллел бўлсин ва $D_{\vec{u}}$, $D_{\vec{v}}$ ўзаро қўшма бўлсин. Бу шартлар қуйидаги кўринишда ифодаланади:

$$2v_1 + 8v_2 = 0, \qquad (*)$$

чунки $D_{\vec{v}} \parallel Oy$ бўлгани учун унинг йўналтирувчи вектори $(-(2v_1 + 8v_2),\ 5v_1 + 2v_2)$ нинг биринчи координатаси нолга тенг бўлади.

$$5u_1v_1 + 2v_1u_2 + 2u_1v_2 + 8v_2u_2 = 0 \qquad (**)$$

(бу $D_{\vec{u}}$ ва $D_{\vec{v}}$ диаметрларнинг қўшмалик шарти). (*) дан $v_1 = -4v_2$, буни (**) га қўйсак,

$$-20u_1v_2 - 8v_2u_2 + 2u_1v_2 + 8v_2u_2 = 0 \Rightarrow 18u_1v_2 = 0 \Rightarrow v_2 \neq 0,$$

акс ҳолда $v_1 = 0$ бўлиб, $\vec{v} = \vec{0}$, бу эса мумкин эмас. У ҳолда $u_1 =$

$= 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ бўлгани учун $u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \neq 0$. Топилган бу қийматларни $D_{\vec{u}}$, $D_{\vec{v}}$ нинг тенгламаларига қўйсак,

$$D_{\vec{u}} : (5 \cdot 0 + 2u_2)\,x + (2 \cdot 0 + 8u_2)\,y - (16 \cdot 0 + 28u_2) = 0 \Rightarrow x +$$

$$+ 4y - 14 = 0,$$

$$D_{\vec{v}} : (-20v_2 + 2v_2)\,x + (-8v_2 + 8v_2)\,y - (-64v_2 + 28v_2) =$$

$$= 0 \Rightarrow x - 2 = 0.$$

60- §. Иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналишлари ва симметрия ўқлари

1-таъриф. $\vec{u}(u_1,\ u_2)$, $\vec{v}(v_1,\ v_2)$ векторлар билан аниқланган икки йўналиш ва иккинчи тартибли γ чизиқ учун ушбу

$$u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0$$

шарт бажарилса, $\vec{u}$, $\vec{v}$ йўналишлар γ га нисбатан *ўзаро қўшма йўналишлар* деб аталади.

2-таъриф. Бир вақтда қўшма ва ўзаро перпендикуляр бўлган йўналишлар иккинчи тартибли чизиқнинг *бош йўналишлари* дейилади.

Теорема.* *Иккинчи тартибли ҳар қандай чизиқ бир жуфт ҳақиқий бош йўналишга эга.*

Исбот. $\vec{u}(u_1,\ u_2)$, $\vec{v}(v_1,\ v_2)$ иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналишлари бўлса, ушбу шартлар бажарилади:

1) $u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0.$

Буни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a_{11} + a_{12}\frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1}\left(a_{21} + a_{22}\frac{v_2}{v_1}\right) = 0$$

ёки

$$a_{11} + a_{12}\left(\frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1}\right) + a_{22}\frac{u_2}{u_1}\frac{v_2}{v_1} = 0 \qquad (93)$$

(бу $\vec{u}$ ва $\vec{v}$ йўналишларнинг ўзаро қўшмалик шарти).

$\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{v_2}{v_1}$ сонлар $\vec{u}$, $\vec{v}$ йўналишларнинг бурчак коэффициентлари бўлиб, уларни қуйидагича белгилаймиз:

$$k = \frac{u_2}{u_1}, \quad k^* = \frac{v_2}{v_1},$$

у ҳолда (93) шарт

$$a_{11} + a_{12}(k + k^*) + a_{22}kk^* = 0 \qquad (94)$$

кўринишни олади.

2) $\frac{u_2}{u_1} \cdot \frac{v_2}{v_1} = -1$ ёки $kk^* = -1$ $\qquad (95)$

(бу $\vec{u}$, $\vec{v}$ йўналишларнинг ўзаро перпендикулярлик шарти).

(95), (94) дан $k + k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}$ муносабатга эга бўламиз, бундан

$$k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k. \qquad (96)$$

(96) тенгликни ҳисобга олганда (94) дан

$$a_{22} + a_{22} k \left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k \right) = 0 \Rightarrow a_{22} \left[1 + \frac{k (a_{22} - a_{11} - a_{12} k}{a_{12}} \right] =$$

$$= 0 \Rightarrow a_{12} k^2 + (a_{11} - a_{22}) k - a_{12} = 0 \qquad (97)$$

ёки

$$k^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} k - 1 = 0. \qquad (98)$$

(97) ёки (98) тенгламалардан γ чизиқнинг бош йўналишлари аниқланади. (97) дан

$$k_{1;2} = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a^2_{12}}}{2a_{12}}. \qquad (99)$$

Равшанки, (99) да дискриминант $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$. Бундан (97) тенгламанинг k_1, k_2 илдизлари ҳақиқий, шу билан бирга Виет теоремасига кўра (98) дар $k_1 k_2 = -1 \Rightarrow$ (дискриминант нолдан катта бўлганда) k_1, k_2 бурчак коэффициентли бош йўналишлар ўзаро перпендикуляр.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли ҳар қандай γ чизиқ бир жуфт ҳақиқий бош йўналишларга эга. Агар $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a^2_{12} = 0$ бўлса, $k_1 = k_2$, лекин дискриминант

$$a_{12} = 0, \ a_{22} - a_{11} = 0 \qquad (100)$$

бўлгандагина нолга тенг бўлади. Бу ҳолда (97) тенгламани k бурчак коэффициентининг ҳар қандай қиймати қаноатлантиради. Демак, бу ҳолда k бурчак коэффициент ихтиёрий бўлади. (100) шартга эътибор берсак, $a_{11} = 0$ бўлган ҳолда $\Rightarrow a_{22} = 0$, бу эса мумкин эмас, чунки a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли эди.

Демак, $a_{11} \neq 0$ да (100) муносабатдан $a_{11} = a_{22}$. γ чизиқнинг тенгламасини $a_{11} = a_{22}$ га бўлиб, ушбу

$$x^2 + y^2 + 2b_{10}x + 2b_{20}y + b_{00} = 0 \qquad (101$$

тенгламага эга бўламиз. Бу ерда

$$b_{10} = \frac{a_{10}}{a_{11}}, \quad b_{20} = \frac{a_{20}}{a_{11}}, \quad b_{00} = \frac{a_{00}}{a_{11}}.$$

(101) тенгламадан

$$(x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}$$

ёки

$$(x+b_{10})^2+(y+b_{20})^2=\left(\sqrt{b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}}\right)^2. \qquad (102)$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}>0$. Бу ҳолда (102) тенглама маркази $(-b_{10}, -b_{20})$ нуқтада ва радиуси $r=\sqrt{b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}}$ бўлган айланани аниқлайди.

2) $b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}=0$. Бу ҳолда (102) $\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+b_{10})^2+(y+b_{20})^2=0, \qquad (103)$$

бу тенгламани биргина $(-b_{10}, -b_{20})$ нуқта қаноатлантиради. (103) тенглама ҳақиқий $(-b_{10}, -b_{20})$ нуқтада кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқни аниқлайди.

3) $b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}<0$. Бу ҳолда (102) тенгламани текисликдаги бирорта ҳақиқий нуқтанинг координаталари қаноатлантирмайди — тенглама бу ҳолда мавҳум айланани аниқлайди деймиз.

Демак, бош йўналиш аниқ бўлмаса, яъни k ихтиёрий бўлса, иккинчи тартибли чизиқ ҳақиқий айлана ёки мавҳум айлана, ёки кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқдан иборат.

Шундай қилиб, айлана (ҳақиқий, мавҳум, кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқ) дан фарқли ҳар қандай иккинчи тартибли чизиқ бир жуфт бош йўналишга эга, айлана учун эса ўзаро перпендикуляр бўлган барча йўналишлар жуфти бош йўналишлардир.

Бош йўналишларга оид маълумотни характеристик тенглама ёрдамида ҳам ҳосил қилиш мумкин. (94) ва (95) тенгламалардан k^* ни аниқлаймиз. (94) дан

$$k^*=-\frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{12}+a_{22}k}.$$

(95) дан $k^*=-\frac{1}{k}$, бу икки тенгликдан,

$$\frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{12}+a_{22}k}=\frac{1}{k}$$

ёки

$$a_{11}+a_{12}k=\frac{a_{12}+a_{22}k}{k}=\lambda\Rightarrow\begin{cases}a_{11}+a_{12}k=\lambda,\\ a_{12}+a_{22}k=\lambda k\end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)+a_{12}k=0,\\ a_{12}+(a_{22}-\lambda)k=0.\end{cases} \qquad (104)$$

(104) системанинг биринчи тенгламасидан $k=-\frac{a_{11}-\lambda}{a_{12}}$, иккинчи тенгламасидан $k=-\frac{a_{12}}{a_{22}-\lambda}$. Бу икки тенгликдан

$$\frac{a_{11}-\lambda}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}-\lambda} \text{ ёки } \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

Бу γ чизиқнинг характеристик тенгламаси бўлиб, унинг дискриминанти $D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2 \geqslant 0$. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин.

1) $D = 0 \Leftrightarrow a_{11} - a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$, бундан $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, бу ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}$ бўлиб, (104) системада k ҳар қандай қийматни қабул қила олади. Маълумки, бу ҳолда γ чизиқ айлана бўлади ва ўзаро перпендикуляр бўлган ҳар икки йўналиш бу айланага нисбатан бош йўналишлардир.

2) $D > 0 \Rightarrow$ характеристик тенгламага турли ҳақиқий λ_1, λ_2 илдизларга эга. Бу ҳолда бир жуфт бош йўналиш мавжуд бўлиб, улар (104) системадаги икки тенгламанинг биридаги λ нинг ўрнига λ_1, λ_2 ни қўйиш билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, яьни чизиқ марказли бўлса, унга нисбатан бир жуфт бош йўналиш мавжуд. γ параболик типли чизиқ бўлганда $D = 0$ билан бирга характеристик тенглама илдизларининг бири нолга тенгдир. Лекин тенгламанинг иккинчи илдизи нолга тенг бўла олмайди, акс ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22} = 0$ ва $a_{12} = 0$ бўлиб, чизиқ тенгламасида ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали ҳадлар қатнашмай қолади. (104) да $\lambda = 0$ десак, параболик типли чизиқ учун:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

k нинг бу қиймати γ чизиққа нисбатан асимптотик йўналишни аниқлар эди. Шундай қилиб, параболик типли чизиқлар учун асимптотик йўналиш бош йўналишнинг биридир. Иккинчи бош йўналиш эса асимптотик йўналишга перпендикуляр бўлади ва у $kk^* = -1$ шартдан аниқланади, яъни

$$k^* = -\frac{1}{k} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналишга эга бўлган диаметри унинг *ўқи* дейилади. Демак, иккинчи тартибли чизиқнинг ўқи унинг симметрия ўқидир. Хуллас, айланадан бошқа ҳар қандай марказли чизиқ бир жуфт ўққа эга, айлана эса чексиз кўп жуфт ўқларга эга. Иккинчи тартибли чизиқнинг ўқи унинг бош йўналишга эга бўлган диаметри бўлгани учун 59- § даги (86) тенгламага кўра марказли чизиқнинг ўқи ушбу

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + k\,(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0 \qquad (105)$$

тенглама билан аниқланади $\left(\text{бу ерда } k = \frac{u_2}{u_1}\right)$. (105) тенгламадаги k

$$k^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}\,k - 1 = 0$$

тенгламадан топилади ((98) формулага қаранг).

Параболанинг барча диаметрлари ўзаро параллел, шунинг учун уларнинг ҳаммаси бош йўналишга эга. Лекин бу диаметрларнинг биттасигина ўзига перпендикуляр бўлган йўналишга қўшма, бинобарин, парабола биргина ўққа эга, у ҳам бўлса унинг симметрия ўқи-

$= 0$, $\vec{u} \neq \vec{0}$ бўлгани учун $u_1 = 0 \Rightarrow u_2 \neq 0$. Топилган бу қийматларни $D_{\vec{u}}$, $D_{\vec{v}}$ нинг тенгламаларига қўйсак,

$$D_{\vec{u}} : (5\cdot 0 + 2u_2)\,x + (2\cdot 0 + 8u_2)\,y - (16\cdot 0 + 28u_2) = 0 \Rightarrow x + 4y - 14 = 0,$$

$$D_{\vec{v}} : (-20v_2 + 2v_2)\,x + (-8v_2 + 8v_2)\,y - (-64v_2 + 28v_2) = 0 \Rightarrow x - 2 = 0.$$

60-§. Иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналишлари ва симметрия ўқлари

1-таъриф. $\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$ векторлар билан аниқланган икки йўналиш ва иккинчи тартибли γ чизиқ учун ушбу

$$u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0$$

шарт бажарилса, $\vec{u}$, $\vec{v}$ йўналишлар γ га нисбатан *ўзаро қўшма йўналишлар* деб аталади.

2-таъриф. Бир вақтда қўшма ва ўзаро перпендикуляр бўлган йўналишлар иккинчи тартибли чизиқнинг *бош йўналишлари* дейилади.

Теорема.* *Иккинчи тартибли ҳар қандай чизиқ бир жуфт ҳақиқий бош йўналишга эга.*

Исбот. $\vec{u}(u_1, u_2)$, $\vec{v}(v_1, v_2)$ иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналишлари бўлса, ушбу шартлар бажарилади:

1) $u_1(a_{11}v_1 + a_{12}v_2) + u_2(a_{21}v_1 + a_{22}v_2) = 0$.

Буни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a_{11} + a_{12}\frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1}\left(a_{21} + a_{22}\frac{v_2}{v_1}\right) = 0$$

ёки

$$a_{11} + a_{12}\left(\frac{v_2}{v_1} + \frac{u_2}{u_1}\right) + a_{22}\frac{u_2}{u_1}\,\frac{v_2}{v_1} = 0 \qquad (93)$$

(бу $\vec{u}$ ва $\vec{v}$ йўналишларнинг ўзаро қўшмалик шарти).

$\frac{u_2}{u_1}$, $\frac{v_2}{v_1}$ сонлар $\vec{u}$, $\vec{v}$ йўналишларнинг бурчак коэффициентлари бўлиб, уларни қуйидагича белгилаймиз:

$$k = \frac{u_2}{u_1}, \quad k^* = \frac{v_2}{v_1},$$

у ҳолда (93) шарт

$$a_{11} + a_{12}(k + k^*) + a_{22}kk^* = 0 \qquad (94)$$

кўринишни олади.

2) $\frac{u_2}{u_1}\cdot\frac{v_2}{v_1} = -1$ ёки $kk^* = -1$ (95)

(бу $\vec{u}$, $\vec{v}$ йўналишларнинг ўзаро перпендикулярлик шарти).

(95), (94) дан $k + k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}}$ муносабатга эга бўламиз, бундан

$$k^* = \frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k. \qquad (96)$$

(96) тенгликни ҳисобга олганда (94) дан

$$a_{22} + a_{22}k\left(\frac{a_{22} - a_{11}}{a_{12}} - k\right) = 0 \Rightarrow a_{22}\left[1 + \frac{k(a_{22} - a_{11} - a_{12}k}{a_{12}}\right] =$$

$$= 0 \Rightarrow a_{12}k^2 + (a_{11} - a_{22})k - a_{12} = 0 \qquad (97)$$

ёки

$$k^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}k - 1 = 0. \qquad (98)$$

(97) ёки (98) тенгламалардан γ чизиқнинг бош йўналишлари аниқланади. (97) дан

$$k_{1;2} = \frac{(a_{22} - a_{11}) \pm \sqrt{(a_{22} - a_{11})^2 + 4a^2_{12}}}{2a_{12}}. \qquad (99)$$

Равшанки, (99) да дискриминант $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a_{12}^2 \geqslant 0$. Бундан (97) тенгламанинг k_1, k_2 илдизлари ҳақиқий, шу билан бирга Виет теоремасига кўра (98) дар $k_1k_2 = -1 \Rightarrow$ (дискриминант нолдан катта бўлганда) k_1, k_2 бурчак коэффициентли бош йўналишлар ўзаро перпендикуляр.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли ҳар қандай γ чизиқ бир жуфт ҳақиқий бош йўналишларга эга. Агар $(a_{22} - a_{11})^2 + 4a^2_{12} = 0$ бўлса, $k_1 = k_2$, лекин дискриминант

$$a_{12} = 0, \quad a_{22} - a_{11} = 0 \qquad (100)$$

бўлгандагина нолга тенг бўлади. Бу ҳолда (97) тенгламани k бурчак коэффициентининг ҳар қандай қиймати қаноатлантиради. Демак, бу ҳолда k бурчак коэффициент ихтиёрий бўлади. (100) шартга эътибор берсак, $a_{11} = 0$ бўлган ҳолда $\Rightarrow a_{22} = 0$, бу эса мумкин эмас, чунки a_{11}, a_{12}, a_{22} коэффициентларнинг камида бири нолдан фарқли эди.

Демак, $a_{11} \neq 0$ да (100) муносабатдан $a_{11} = a_{22}$. γ чизиқнинг тенгламасини $a_{11} = a_{22}$ га бўлиб, ушбу

$$x^2 + y^2 + 2b_{10}x + 2b_{20}y + b_{00} = 0 \qquad (101$$

тенгламага эга бўламиз. Бу ерда

$$b_{10} = \frac{a_{10}}{a_{11}}, \quad b_{20} = \frac{a_{20}}{a_{11}}, \quad b_{00} = \frac{a_{00}}{a_{11}}.$$

(101) тенгламадан

$$(x + b_{10})^2 + (y + b_{20})^2 = b_{10}^2 + b_{20}^2 - b_{00}$$

ёки

$$(x+b_{10})^2+(y+b_{20})^2=\left(\sqrt{b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}}\right)^2. \tag{102}$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин:

1) $b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}>0$. Бу ҳолда (102) тенглама маркази $(-b_{10}, -b_{20})$ нуқтада ва радиуси $r=\sqrt{b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}}$ бўлган айланани аниқлайди.

2) $b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}=0$. Бу ҳолда $(102)\Rightarrow$

$$\Rightarrow (x+b_{10})^2+(y+b_{20})^2=0, \tag{103}$$

бу тенгламани биргина $(-b_{10}, -b_{20})$ нуқта қаноатлантиради. (103) тенглама ҳақиқий $(-b_{10}, -b_{20})$ нуқтада кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқни аниқлайди.

3) $b_{10}^2+b_{20}^2-b_{00}<0$. Бу ҳолда (102) тенгламани текисликдаги бирорта ҳақиқий нуқтанинг координаталари қаноатлантирмайди — тенглама бу ҳолда мавҳум айланани аниқлайди деймиз.

Демак, бош йўналиш аниқ бўлмаса, яъни k ихтиёрий бўлса, иккинчи тартибли чизиқ ҳақиқий айлана ёки мавҳум айлана, ёки кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқдан иборат.

Шундай қилиб, айлана (ҳақиқий, мавҳум, кесишувчи мавҳум икки тўғри чизиқ) дан фарқли ҳар қандай иккинчи тартибли чизиқ бир жуфт бош йўналишга эга, айлана учун эса ўзаро перпендикуляр бўлган барча йўналишлар жуфти бош йўналишлардир.

Бош йўналишларга оид маълумотни характеристик тенглама ёрдамида ҳам ҳосил қилиш мумкин. (94) ва (95) тенгламалардан k^* ни аниқлаймиз. (94) дан

$$k^*=-\frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{12}+a_{22}k}.$$

(95) дан $k^*=-\frac{1}{k}$, бу икки тенгликдан,

$$\frac{a_{11}+a_{12}k}{a_{12}+a_{22}k}=\frac{1}{k}$$

ёки

$$a_{11}+a_{12}k=\frac{a_{12}+a_{22}k}{k}=\lambda\Rightarrow\begin{cases}a_{11}+a_{12}k=\lambda,\\ a_{12}+a_{22}k=\lambda k\end{cases}$$

ёки

$$\begin{cases}(a_{11}-\lambda)+a_{12}k=0,\\ a_{12}+(a_{22}-\lambda)k=0.\end{cases} \tag{104}$$

(104) системанинг биринчи тенгламасидан $k=-\frac{a_{11}-\lambda}{a_{12}}$, иккинчи тенгламасидан $k=-\frac{a_{12}}{a_{22}-\lambda}$. Бу икки тенгликдан

$$\frac{a_{11}-\lambda}{a_{12}}=\frac{a_{12}}{a_{22}-\lambda} \quad \text{ёки} \quad \lambda^2-(a_{11}+a_{22})\lambda+a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0.$$

Бу γ чизиқнинг характеристик тенгламаси бўлиб, унинг дискриминанти $D = (a_{11} - a_{22})^2 + a_{12}^2 \geqslant 0$. Бу ерда икки ҳол бўлиши мумкин.

1) $D = 0 \Leftrightarrow a_{11} - a_{22} = 0$, $a_{12} = 0$, бундан $a_{11} = a_{22}$, $a_{12} = 0$, бу ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22}$ бўлиб, (104) системада k ҳар қандай қийматни қабул қила олади. Маълумки, бу ҳолда γ чизиқ айлана бўлади ва ўзаро перпендикуляр бўлган ҳар икки йўналиш бу айланага нисбатан бош йўналишлардир.

2) $D > 0 \Rightarrow$ характеристик тенгламага турли ҳақиқий λ_1, λ_2 илдизларга эга. Бу ҳолда бир жуфт бош йўналиш мавжуд бўлиб, улар (104) системадаги икки тенгламанинг биридаги λ нинг ўрнига λ_1, λ_2 ни қўйиш билан ҳосил қилинади. Шундай қилиб, $\lambda_1 \neq \lambda_2$, яъни чизиқ марказли бўлса, унга нисбатан бир жуфт бош йўналиш мавжуд. γ параболик типли чизиқ бўлганда $D = 0$ билан бирга характеристик тенглама илдизларининг бири нолга тенгдир. Лекин тенгламанинг иккинчи илдизи нолга тенг бўла олмайди, акс ҳолда $\lambda_1 = \lambda_2 = a_{11} = a_{22} = 0$ ва $a_{12} = 0$ бўлиб, чизиқ тенгламасида ўзгарувчиларга нисбатан иккинчи даражали ҳадлар қатнашмай қолади. (104) да $\lambda = 0$ десак, параболик типли чизиқ учун:

$$k = -\frac{a_{11}}{a_{12}} = -\frac{a_{12}}{a_{22}}.$$

k нинг бу қиймати γ чизиққа нисбатан асимптотик йўналишни аниқлар эди. Шундай қилиб, параболик типли чизиқлар учун асимптотик йўналиш бош йўналишнинг биридир. Иккинчи бош йўналиш эса асимптотик йўналишга перпендикуляр бўлади ва у $kk^* = -1$ шартдан аниқланади, яъни

$$k^* = -\frac{1}{k} = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}.$$

Иккинчи тартибли чизиқнинг бош йўналишга эга бўлган диаметри унинг *ўқи* дейилади. Демак, иккинчи тартибли чизиқнинг ўқи унинг симметрия ўқидир. Хуллас, айланадан бошқа ҳар қандай марказли чизиқ бир жуфт ўққа эга, айлана эса чексиз кўп жуфт ўқларга эга. Иккинчи тартибли чизиқнинг ўқи унинг бош йўналишга эга бўлган диаметри бўлгани учун 59- § даги (86) тенгламага кўра марказли чизиқнинг ўқи ушбу

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{10}) + k\,(a_{21}x + a_{22}y + a_{20}) = 0 \qquad (105)$$

тенглама билан аниқланади $\left(\text{бу ерда } k = \frac{u_2}{u_1}\right)$. (105) тенгламадаги k

$$k^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}}\,k - 1 = 0$$

тенгламадан топилади ((98) формулага қаранг).

Параболанинг барча диаметрлари ўзаро параллел, шунинг учун уларнинг ҳаммаси бош йўналишга эга. Лекин бу диаметрларнинг биттасигина ўзига перпендикуляр бўлган йўналишга қўшма, бинобарин, парабола биргина ўққа эга, у ҳам бўлса унинг симметрия ўқидир. Параболик чизиқлар учун ҳам уларнинг ўқи (105) тенгламадан аниқланади, фақат k бу ерда $k = \frac{a_{12}}{a_{11}} = \frac{a_{22}}{a_{12}}$ тенгликдан топилади.

Мисол. $3x^2 + 2xy + 3y^2 + 6x - 2y - 5 = 0$ чизиқнинг ўқларини топинг.

Аввало берилган чизиқ марказли ёки марказсиз эканини текширамиз. Бунинг учун

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

ни тузамиз (56- § га қаранг). Берилган чизиқ тенгламасидан $a_{11} = 3$, $a_{12} = 1$, $a_{22} = 3$, $a_{10} = 3$, $a_{20} = -1$, $a_{00} = -5$ бўлиб, $\delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 9 - 1 = 8 \neq 0$.

Демак, чизиқ марказли, у ҳолда унинг ўқи (105) га кўра

$$(3x + y + 3) + k(x + 3y - 1) = 0$$

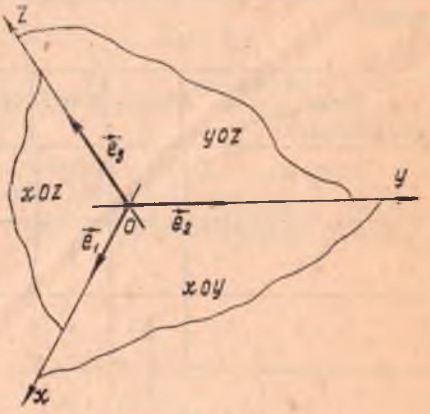
тенгламадан аниқланади. Тенгламадаги k ушбу $k^2 - 1 = 0$ нинг илдизларидир. Бундан $k_1 = 1$, $k_2 = -1$. k нинг ўрнига $k_1 = 1$, $k_2 = -1$ ни қўйиш билан берилган чизиқ ўқларининг $2x + 2y + 1 = 0$, $x - y + 2 = 0$ тенгламалари ҳосил бўлади.

II БЎЛИМ

I БОБ. ФАЗОДА КООРДИНАТАЛАР МЕТОДИ. ВЕКТОРЛАРНИНГ ВЕКТОР ВА АРАЛАШ КЎПАЙТМАСИ

1- §. Фазода координаталарнинг аффин системаси

Координаталар системаси текисликда қандай киритилган бўлса, фазода ҳам шу усулда киритилади. Аниқроғи, координаталарнинг аффин системаси (аффин репер) бирор O нуқта ва шу нуқтадан қўйилган маълум тартибда олинган учта нокомпланар $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар системасидан ибэрат, бу системани $\mathscr{B}(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ кўринишда белгилаймиз. O нуқтадан ўтиб, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ векторлар билан аниқланадиган тўғри чизиқлар мос равишда Ox, Oy, Oz деб белгилаб, улар *координата ўқлари*, биринчиси *абсциссалар ўқи*, иккинчиси *ординаталар ўқи* ва, ниҳоят, учинчиси *аппликаталар ўқи* деб аталади. Бу ўқларнинг ҳар иккитаси билан аниқланадиган учта текислик xOy, xOz, yOz деб белгилаб, улар *координата текисликлари деб* аталади (155- чизма).



155- чизма

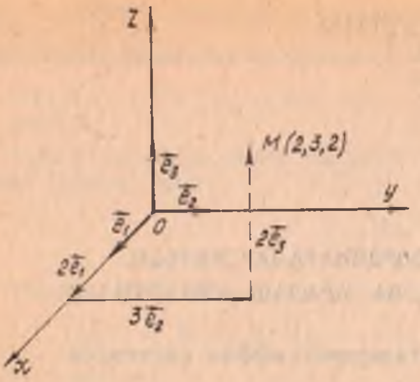
$\mathscr{B}$ система берилганда, фазодаги ҳар бир M нуқтага аниқ бир OM векторни доимо мос келтириш мумкин, яъни боши координаталар бошида, охири эса берилган M нуқтада бўлган векторни мос келтирилади.

$\overrightarrow{OM}$ векторнинг координаталари (x, y, z) бўлса, у ҳолда бу учта x, y, z сон M нуқтанинг аффин репердаги координаталари бўлади:

$$\overrightarrow{OM}(x, y, z) \Leftrightarrow M(x, y, z). \tag{1}$$

Демак, фазо нуқталари тўплами билан маълум тартибда олинган ҳақиқий сонлар учликлари тўплами орасида биектив мослик мавжуд.

Берилган нуқтанинг координаталарини топиш учун шу нуқта радиус-векторининг координаталарини топиш кифоя ва аксинча. Масалан, 156-чизмада координаталари (2; 3; 2) бўлган нуқтани ясаш усули кўрсатилган.



156-чизма

Умуман, $M(a, b, c)$ нуқтани ясаш учун, яъни

$$\overrightarrow{OM} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 \qquad (2)$$

векторнинг охирини топиш учун қуйидаги қоидадан фойдаланилади: координаталар бошидан Ox ўқ бўйича $a\vec{e}_1$ вектор, унинг охиридан Oy ўққа параллел ҳолда $b\vec{e}_2$ вектор қўйилади, сўнгра унинг охиридан $c\vec{e}_3$ вектор ясалса, шу векторнинг охири изланган нуқта бўлади.

Учта координата текислиги биргаликда фазони саккиз қисмга ажратади, уларнинг ҳар бири *октанталар* деб аталади. Қуйидаги жадвалда октанталар ва ундаги нуқта координаталарининг ишоралари берилган.

октанталар / координаталар	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
x	+	—	—	+	+	—	—	+
y	+	+	—	—	+	+	—	—
z	+	+	+	+	—	—	—	—

2-§. Кесмани берилган нисбатда бўлиш

Бирор аффин реперда $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ $(M_1 \neq M_2)$ нуқталар ва бирор ҳақиқий λ $(\lambda \neq -1)$ сон берилган бўлсин.

Таъриф. M нуқта учун

$$\overrightarrow{M_1M} = \lambda\ \overrightarrow{MM_2} \qquad (3)$$

шарт бажарилса, *M нуқта M_1M_2 кесмани λ нисбатда бўлади* дейилади.

M_1, M_2 нуқталарнинг координаталари орқали M нуқтанинг x, y, z координаталарини топайлик. (2) га асосан

$$\overrightarrow{M_1M} = \overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OM_1} = (x - x_1)\vec{e_1} + (y - y_1)\vec{e_2} + (z - z_1)\vec{e_3},$$

$$\overrightarrow{M_1M}(x - x_1,\ y - y_1,\ z - z_1).$$

$$\overrightarrow{MM_2} = \overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM} = (x_2 - x)\vec{e_1} + (y_2 - y)\vec{e_2} + (z_2 - z)\vec{e_3},$$

$$\overrightarrow{MM_2}(x_2 - x,\ y_2 - y,\ z_2 - z).$$

Бу ифодаларни (3) га қўйиб ва $\vec{e_1}$, $\vec{e_2}$, $\vec{e_3}$ нинг чизиқли эрклилигини эътиборга олсак,

$$x - x_1 = \lambda(x_2 - x),\ y - y_1 = \lambda(y_2 - y),\ z - z_1 = \lambda(z_2 - z).$$

Булардан

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},\quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},\ z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}. \qquad (4)$$

Берилган кесмани берилган нисбатда бўлувчи нуқтанинг координаталарини топиш формулалари шулардир. M нуқта M_1M_2 кесманинг ўртаси бўлса, (4) формулалар қуйидаги кўринишни олади:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\ z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \qquad (5)$$

Бу формулалар кесма ўртасининг координаталарини топиш формулаларидир.

Мисол. $\mathscr{B}(O, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3})$ аффин реперда $A(2,\ 3,\ -1)$, $B(3,\ 0,\ -1)$, $C(1,\ 1,\ 1)$ нуқталарни ясаб, ABC учбурчак оғирлик марказининг (медианаларининг кесишган нуқтаси) координаталарини топинг.

Ечиш.

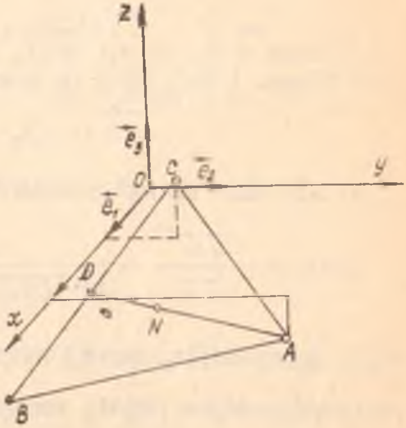
$$A(2,\ 3,\ -1) \Rightarrow \overrightarrow{OA}(2,\ 3,\ -1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OA} = 2\vec{e_1} + 3e_2 - \vec{e_3},$$

$$B(3,\ 0,\ -1) \Rightarrow \overrightarrow{OB}(3,\ 0,\ -1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OB} = 3\vec{e_1} - \vec{e_3},$$

$$C(1,\ 1,\ 1) \Rightarrow \overrightarrow{OC}(1,\ 1,\ 1) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{OC} = \vec{e_1} + \vec{e_2} + \vec{e_3}.$$

A, B, C нуқталарни ясаш натижасида 157- чизмадаги ABC учбурчак ҳосил қилинади. BC кесманинг ўртаси D нинг координаталарини топайлик:

$$x = \frac{3+1}{2} = 2,\ y = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2},$$



157- чизма

$$z = \frac{-1+1}{2} = 0, \ D\left(2, \frac{1}{2}, \ 0\right).$$

Медианаларнинг кесишган нуқтаси AD ни A дан бошлаб $\lambda = 2:1$ нисбатда бўлгани учун изланган N нуқта AD кесмани $\lambda = 2:1$ нисбатда бўлади, яъни

$$x = \frac{2+2\cdot 2}{1+2} = 2, \ y = \frac{3+2\cdot\frac{1}{2}}{1+2} = \frac{4}{3}, \ z = \frac{-1+2\cdot 0}{1+2} = -\frac{1}{3}.$$

$$N\left(2, \frac{4}{3}, \ -\frac{1}{3}\right).$$

3- §. Тўғри бурчакли декарт координаталар системаси

Аффин системанинг хусусий ҳолларидан бири тўғри бурчакли декарт системасидир.

Аффин системадаги базис векторлар ортонормаланган бўлса, яъни уларнинг ҳар иккитаси ўзаро перпендикуляр бўлиб, ҳар бири бирлик вектор бўлса, $(O, \ \vec{i}, \ \vec{j}, \ \vec{k})$ декарт репери ҳосил қилинади, бу ерда

$$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \tag{6}$$

$$\vec{i}\,\vec{j} = \vec{j}\,\vec{k} = \vec{i}\,\vec{k} = 0. \tag{7}$$

Бу реперда метрик характердаги масалаларни ечиш анча қулай,

а) $\vec{a} = (x_1, \ y_1, \ z_1)$ векторнинг узунлигини ҳисоблайлик. Векторнинг узунлиги I бўлим, I боб, 13- § га асосан

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}. \tag{8}$$

б) Икки $\vec{a}\,(x_1, \ y_1, \ z_1)$, $\vec{b}\,(x_2, \ y_2, \ z_2)$ векторнинг скаляр кўпайтмаси I бўлим, I боб, 13- § га асосан

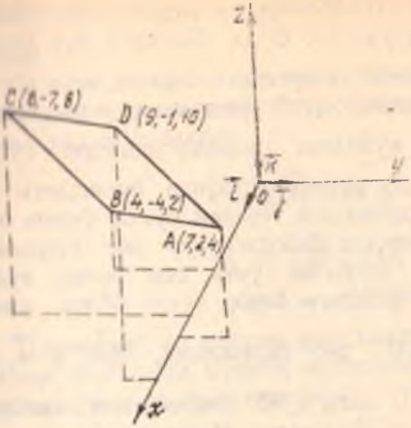
$$\vec{a}\,\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{9}$$

в) Шу икки вектор орасидаги бурчакнинг косинуси:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}\,\vec{b}|} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\ \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{10}$$

$M_1(x, \ y, \ z)$, $M_2(x_2, \ y_2, \ z_2)$ нуқталар берилган бўлса, улар орасидаги $\rho(M_1, \ M_2) = |\overrightarrow{M_1M_2}|$ масофани топиш мумкин:

$$\rho(M_1, \ M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \tag{11}$$



158- чизма

Мисол. $\mathscr{B}(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперда учлари $A(7, 2, 4)$, $B(4, -4, 2)$, $C(6, -7, 8)$, $D(9 -1, 10)$ нуқталарда бўлган тўртбурчакнинг квадрат эканлигини исботланг.

Ечиш. Аввало $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{DC}$ векторларнинг координаталарини топайлик:

$$\overrightarrow{AB}(-3, -6, -2),$$

$$\overrightarrow{DC}(-3, -6, -2),$$

булардан кўринадики, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$, демак, $ABCD$ тўртбурчак параллелограмм экан, унинг квадрат эканлигини кўрсатиш учун диагоналлари ўзаро тенг ва перпендикуляр эканлигини исботлаш керак (158- чизма). Ҳақиқатан ҳам, $\rho(A, C)$ ва $\rho(D, B)$ ни (11) формула бўйича ҳисобласак,

$$\rho(A, C) = \sqrt{(6-7)^2 + (-7-2)^2 + (8-4)^2} =$$

$$= \sqrt{1 + 81 + 16} = \sqrt{98},$$

$$\rho(D, B) = \sqrt{(4-9)^2 + (-4+1)^2 + (2-10)^2} =$$

$$= \sqrt{25+9+64} = \sqrt{98},$$

бундан

$$\rho(A, C) = \rho(D, B)$$

$\overrightarrow{AC}(-1, -9, 4)$, $\overrightarrow{DB}(-5, -3, -8)$ бўлгани учун (9) га асосан:

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{DB} = (-1)(-5) + (-9)(-3) + 4(-8) = 5 + 27 - 32 = 0,$$

демак,

$$\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{DB}.$$

4- §. Фазода координаталарнинг бошқа системалари

Фазода юқорида кўрилган аффин ва декарт системалари билан бир қаторда бошқа системалар ҳам мавжуд бўлиб, улардан баъзиларини кўриб чиқамиз.

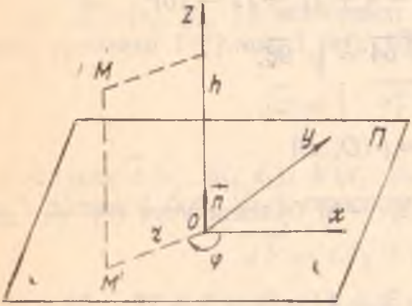
1. Цилиндрик координаталар. Бу система қуйидагича

ҳосил қилинади. Фазодаги бирор П текислик ва ундан тайин бир O нуқта олинади. П га тегишли ва учи шу O да бўлган l нур белгиланади ҳамда l нурнинг йўналишини аниқловчи $\vec{i}$ бирлик вектор олинади (яъни П да координаталарнинг қутб системаси киритилади). $\vec{n}$ бирлик вектор П нинг O дан қўйилган нормал вектори бўлса, $\vec{n}$ нинг учидан қараганда П ни шу вектор атрофида буришдаги ҳаракатнинг йўналиши соат мили ҳаракатига тескари бўлса, буриш бурчагини мусбат деб олинади. Бу вақтда фазодаги ҳар бир нуқтанинг ўрнини юқоридаги берилганларга нисбатан учта сон билан тўлиқ аниқлаш мумкин. Ҳақиқатан, M фазодаги бирор нуқта бўлса, унинг П даги ортогонал проекциясини M' деб белгиласак, $\overrightarrow{MM'} \parallel \vec{n}$, демак, $\overrightarrow{MM'} = h\vec{n}$. M' нуқтанинг П даги қутб системасига нисбатан координаталарини r, φ десак, (r, φ, h) сонлар M нуқтанинг *цилиндрик координаталари* деб аталади.

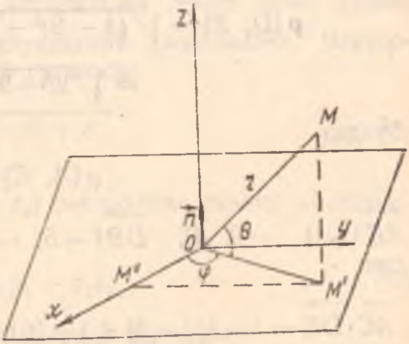
Декарт системасини 159- чизмада кўрсатилгандек қилиб танлаб олинса, M нуқтанинг декарт координаталари x, y, z ни шу нуқтанинг цилиндрик координаталари r, φ, h орқали ифодалаш мумкин:

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi, \quad z = h. \tag{12}$$

2. Сферик координаталар. П текисликда қутб координаталари системаси киритилади, $\vec{n} \perp П$ бирлик вектор қўйилади. Фазодаги ҳар бир M нуқтанинг ўрнини учта r, φ, θ сон билан аниқ-



159- чизма



160- чизма

лаш мумкин, бунда $r = |\overrightarrow{OM}|$, φ — бу M нуқтанинг П текисликдаги ортогонал проекцияси M' нинг қутб бурчаги, θ — бу $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{OM'}$ векторлар орасидаги бурчак, бу уч сон M нуқтанинг *сферик координаталари* дейилади ва $M(r, \varphi, \theta)$ кўринишда ёзилади. Биз $r > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ деб фараз қиламиз, бундан ташқари, xOy координаталар текислигидан «юқори» турган нуқталар учун $0 \leqslant \theta < \frac{\pi}{2}$ ва «қуйи» ярим фазога тегишли нуқталар учун $-\frac{\pi}{2} < \theta \leqslant 0$ олинади (160-чизма).

Координаталарнинг декарт системаси 160-чизмадагидек танлаб олинса, сферик ва декарт координаталарини боғловчи ушбу формулаларни топиш мумкин:

$$x = |\overrightarrow{OM'}|\cos\varphi = r\cos\theta\cos\varphi,$$

$$y = |\overrightarrow{OM'}|\sin\varphi = r\cos\theta\sin\varphi, \qquad (13)$$

$$z = |MM'| = r\sin\theta.$$

Цилиндрик ва сферик координаталар асосан механика, математик физика фанларида кўпроқ ишлатилади. Биз улардан чизиқлар ва сиртлар назариясида фойдаланамиз.

5- §. Аффин координаталарни алмаштириш

Фазодаги бирор нуқтанинг тайин бир системадаги координаталаридан бошқа системадаги координаталарига ўтишга тўғри келади. Биз шу масалани иккита аффин репер учун ҳал қиламиз. $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, $\mathscr{B}' = (O', \vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \vec{e}_3{}')$ аффин реперлар берилган бўлсин.

I ҳол. Реперларнинг бошлари ҳар хил бўлиб, базис векторлари мос равишда коллинеар бўлсин, яъни $O \neq O'$, $\vec{e}_1 \parallel \vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2 \parallel \vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3 \parallel \vec{e}_3{}'$ ҳамда O' нинг $\mathscr{B}$ га нисбатан координаталари a, b, c бўлсин (161-a чизма). У ҳолда фазодаги ихтиёрий M нуқтанинг $\mathscr{B}$ ва $\mathscr{B}'$ га нисбатан координаталари мос равишда x, y, z ва x', y', z' бўлса, шулар орасидаги боғланишни излаймиз:

$$M(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OM}(x, y, z) \Rightarrow \overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3,$$

$$M(x', y', z') \Rightarrow \overrightarrow{O'M}(x', y', z') \Rightarrow \overrightarrow{O'M} = x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}\,'_3,$$

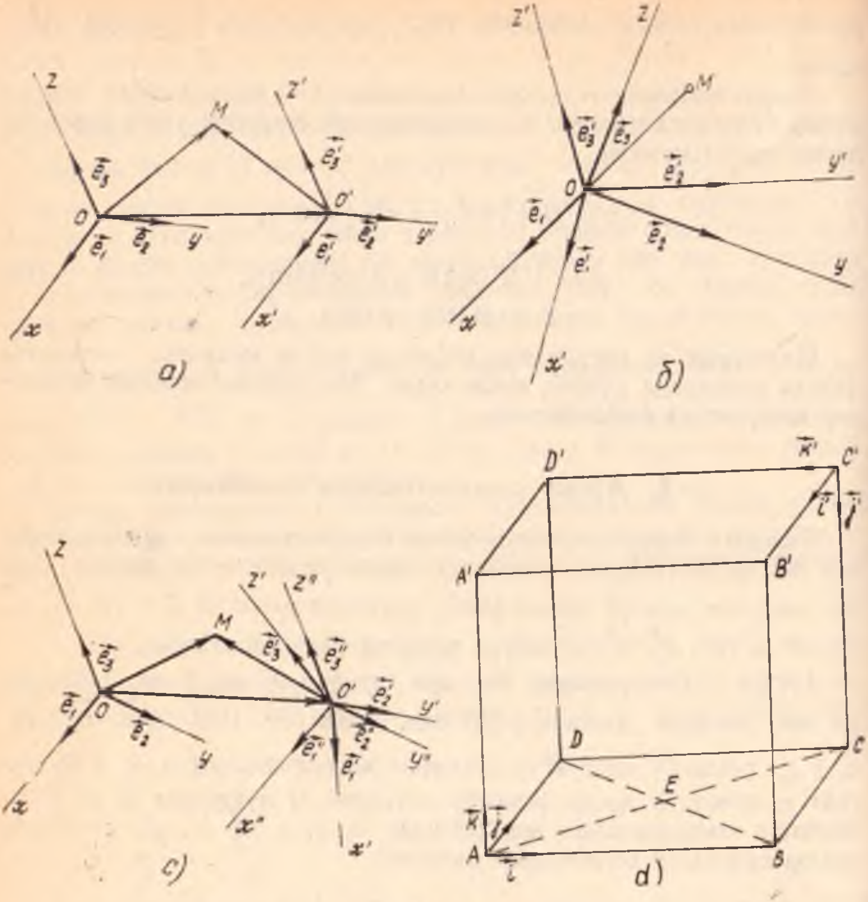
$$\overrightarrow{OO'}(a, b, c) \Rightarrow \overrightarrow{OO'} = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3.$$

Лекин $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$ бўлгани учун

$$x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3 = a\vec{e}_1 + b\vec{e}_2 + c\vec{e}_3 + x'\vec{e}_1{}' + y'\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}'.$$

Бундан ташқари, базис векторлар мос равишда коллинеар бўлгани учун

$$\vec{e}_1{}' = \lambda_1\vec{e}_1, \quad \vec{e}_2{}' = \lambda_2\vec{e}_2, \quad \vec{e}_3{}' = \lambda_3\vec{e}_3,$$



161- чизма

демак,

$$x\vec{e_1} + y\vec{e_2} + z\vec{e_3} = (\lambda_1 x' + a)\vec{e_1} + (\lambda_2 y' + b)\vec{e_2} + (\lambda_3 z' + c)\vec{e_3}. \qquad (14)$$

Бундан

$$x = \lambda_1 x' + a,\ y = \lambda_2 y' + b,\ z = \lambda_3 z' + c. \qquad (15)$$

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ бўлса, яъни базис векторлар мос равишда ўзаро тенг бўлса, (15) қуйидаги кўринишни олади:

$$x = x' + a,\ y = y' + b,\ z = z' + c. \qquad (16)$$

Бу формулалар баъзан *координаталар системасини параллел кўчириш формулалари* деб юритилади.

II ҳол. Реперларнинг бошлари бир хил, базис векторларнинг йўналишлари эса ҳар хил бўлсин, у ҳолда (161- *б* чизма)

$$O = O', \ \vec{e}_1{}' = a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3, \ \ \vec{e}_2{}' = a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_2,$$
$$\vec{e}_3{}' = a_{13}\vec{e}_1 + a_{23}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3$$

бўлсин. Энди

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{17}$$

матрицани тузамиз. Бу матрицани *бир базисдан иккинчи базисга ўтиш матрицаси* деб атаймиз, $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ базис векторлар бўлгани учун (17) матрицанинг детерминанти нолдан фарқлидир.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{18}$$

Акс ҳолда, детерминантнинг бир сатри қолган икки сатрининг чизиқли комбинациясидан иборат бўлиб, $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ ҳам чизиқли боғлиқ бўлар эди.

Фазода ихтиёрий M нуқтанинг $\mathscr{B}$ ва $\mathscr{B}'$ реперларга нисбатан координаталарини мос равишда x, y, z ва x', y', z' деб олсак,

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3,$$
$$\overrightarrow{OM} = x'\vec{e}_1{}' + y'\,\vec{e}_2{}' + z'\vec{e}_3{}',$$

яъни

$$x\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 = x'\,\vec{e}_1{}' + y'\,\vec{e}_2{}' + z'\,\vec{e}_3{}'.$$

Энди бу тенгликка $\vec{e}_1{}'$, $\vec{e}_2{}'$, $\vec{e}_3{}'$ нинг қийматларини қўйиб, $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$, $\vec{e}_3$ га нисбатан группаласак,

$$x\,\vec{e}_1 + y\,\vec{e}_2 + z\,\vec{e}_3 = (a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z')\,\vec{e}_1 + (a_{21}x' + a_{22}y' +$$
$$+ a_{23}z')\,\vec{e}_2 + (a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z')\,\vec{e}_3,$$

бундан

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z'. \end{aligned} \tag{19}$$

Ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \tag{20}$$

матрица *алмаштириш матрицаси* деб аталади. (20) ва (17) матрицалар ўзаро транспонирланган матрицалардир. Бу матрицалар квадрат матрицалар бўлгани учун уларнинг учинчи тартибли детерминантлари ўзаро тенг бўлиб, (18) га асосан (20) нинг детерминанти нолдан фарқлидир, демак, (19) ни x', y', z' га нисбатан ечсак,

$$\begin{aligned} x' &= a'_{11}x + a'_{12}y + a'_{13}z, \\ y' &= a'_{21}x + a'_{22}y + a'_{23}z, \qquad (21) \\ z' &= a'_{31}x + a'_{32}y + a'_{33}z \end{aligned}$$

ҳосил бўлиб, бунда

$$a'_{ik} = \frac{A_{ki}}{\det A}; \ (i, k = 1, 2, 3),$$

A_{ki} эса A матрица a_{ki} элементининг адъюнктидир, яъни алгебраик тўлдирувчисидир.

III ҳол. Реперлар фазода ихтиёрий вазиятда жойлашган. $\mathscr{B}$ репер берилган бўлиб, шу системага нисбатан $\mathscr{B}'$ репер элементларининг координаталари қуйидагича бўлсин:

$$O'(a, b, c), \quad \begin{aligned} \vec{e}'_1 &= a_{11}\vec{e}_1 + a_{21}\vec{e}_2 + a_{31}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_2 &= a_{12}\vec{e}_1 + a_{22}\vec{e}_2 + a_{32}\vec{e}_3, \\ \vec{e}'_3 &= a_{13}\vec{e}_1 + a_{25}\vec{e}_2 + a_{33}\vec{e}_3, \end{aligned} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0, \qquad (*)$$

$\mathscr{B}$ дан $\mathscr{B}'$ га ўтиш учун биз яна шундай учинчи $\mathscr{B}''(O'', \vec{e}''_1, \vec{e}''_2, \vec{e}''_3)$ аффин реперни қараймизки, у $\mathscr{B}$ ни $\overrightarrow{OO'}$ вектор қадар параллел кўчиришдан ҳосил бўлсин. У ҳолда фазодаги ихтиёрий M нуқтанинг координаталарини бу системаларга нисбатан мос равишда x, y, z; x'', y'', z'' ва $x'\, y'\, z'$ деб белгиласак (161- *с* чизма), $\mathscr{B}$ билан $\mathscr{B}''$ орасидаги боғланиш (16) га асосан

$$x = x'' + a, \ y = y'' + b, \ z = z'' + c, \qquad (22)$$

$\mathscr{B}''$ билан $\mathscr{B}'$ орасидаги боғланиш эса (21) га асосан

$$\begin{aligned} x'' &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z', \\ y'' &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z', \\ z'' &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z', \end{aligned}$$

буни (22) га қўйсак, изланаётган қуйидаги ифода ҳосил қилинади:

$$\begin{aligned} x &= a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' + a, \\ y &= a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' + b, \qquad (23) \\ z &= a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' + c. \end{aligned}$$

(23) ни x', y', z' га ((*) шарт ўринли бўлгани учун) нисбатан ҳам ечиш мумкин, демак, M нуқтанинг $\mathscr{B}$ га нисбатан координаталари маълум бўлса, шу нуқтанинг координаталарини $\mathscr{B}'$ га нисбатан ҳам топиш мумкин.

Бир аффин системадан иккинчи аффин системага ўтиш 12 та параметрга боғлиқдир, чунки (23) га шу алмаштиришни аниқлайдиган ушбу 12 та параметр киради: a, b, c, a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{31}, a_{32}, a_{33}.

Агар $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ декарт реперлари бўлса, уларни алмаштириш 12 та параметрга эмас, балки энг кўпи билан 6 та параметрга боғлиқ бўлиб қолади. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{e}_1 = \vec{i}$, $\vec{e}_2 = \vec{j}$, $\vec{e}_3 = \vec{k}$ ва $\vec{e}_1' = \vec{i}'$, $\vec{e}_2' = \vec{j}'$, $\vec{e}_3' = \vec{k}'$ бўлса, (6) ва (7) ни эътиборга олсак,

$$\begin{aligned} &a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1, \\ &a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1, \qquad (24) \\ &a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1, \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0, \\ &a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0, \\ &a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0. \end{aligned} \qquad (25)$$

Демак, (23) даги 12 та параметр (24) ва (25) даги 6 та шартни қаноатлантириши керак, у ҳолда жами 6 та ихтиёрий параметр қолади. «Алгебра ва сонлар назарияси» курсидан маълумки, (20) кўринишидаги квадрат матрицанинг элементлари (24) ва (25) шартларнинг барчасини қаноатлантирса, бундай матрица *ортогонал матрица* деб аталади. Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади: бир декарт реперидан иккинчи декарт реперига ўтиш матрицаси ортогонал матрицадан иборат.

1-мисол. Янги аффин репернинг боши эски реперга нисбатан $O'(0,\ 3,\ -1)$ нуқтада, базис векторлар $\vec{e}_1'(1,\ 3,\ 0)$, $\vec{e}_2'(0,\ -3,\ 1)$, $\vec{e}_3'(1,\ 1,\ -2)$ бўлса, бу реперларни алмаштириш формулаларини ёзинг:

Ечиш. Берилишига кўра:

$$\begin{aligned} &a = 0,\ b = 3,\ c = -1, \\ &a_{11} = 1,\ a_{21} = 3,\ a_{31} = 0, \\ &a_{12} = 0,\ a_{22} = -3,\ a_{32} = 1, \\ &a_{13} = 1,\ a_{23} = 1,\ a_{33} = -2. \end{aligned}$$

Бу қийматларни (23) га қўйсак,

$$\begin{aligned} x &= x' + z', \\ y &= 3x' - 3y' + z' + 3, \\ z &= y' - 2z' - 1. \end{aligned} \tag{26}$$

Энди эски базисдан янги базисга ўтиш формуласини топиш учун бу системани x', y', z' га нисбатан ечамиз:

$$\left\{ \begin{aligned} x' &= \frac{5}{8}\,x + \frac{1}{8}\,y + \frac{3}{8}\,z, \\ y' &= \frac{3}{4}\,x - \frac{1}{4}\,y + \frac{1}{4}\,z + 1, \\ z' &= \frac{3}{8}\,x - \frac{1}{8}\,y - \frac{3}{8}\,z. \end{aligned} \right.$$

2- мисол. Қирраси a га тенг бўлган $ABCDA'B'C'D'$ куб берилган. $\mathscr{B}(A, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ ва $\mathscr{B}'(C', \vec{i'}\ \ \vec{j'}, \vec{k'})$ декарт реперлари 161-∂ чизмада кўрсатилганидек аниқланган. Шу реперларни алмаштириш формулаларини ёзинг ҳамда E нуқтанинг координаталарини иккала реперда аниқланг.

Ечиш. Аввало C' нуқтанинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталарини топайлик.

$\overrightarrow{AB} = a\vec{i}$, $\overrightarrow{BC} = a\vec{j}$, $\overrightarrow{CC'} = a\vec{k}$,

$$\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} = a\vec{i} + a\vec{j} + a\vec{k}, \ C'(a, a, a).$$

Энди $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ нинг координаталарини топайлик, чизмадан $\vec{i'} = -\vec{j}$, $\vec{j'} = -\vec{k}$, $\vec{k'} = -\vec{i} \Rightarrow \vec{i'}(0, -1, 0)$, $\vec{j'}(0, 0, -1)$, $\vec{k'}(-1, 0, 0)$. $\vec{e'_1} = \vec{i'}$, $\vec{e'_2} = \vec{j'}$, $\vec{e'_3} = \vec{k'}$ десак, (23) формула қуйидаги кўринишни олади:

$$x = -z' + a, \ y = -x' + a, \ z = -y' + a. \qquad (\Delta)$$

Бу изланаётган формуладир.

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} = \frac{a}{2}\vec{i} + \frac{a}{2}\vec{j} \Rightarrow \mathscr{B} \text{ реперда } E\left(\frac{a}{2}, \ \frac{a}{2}, 0\right).$$

E нинг $\mathscr{B}'$ репердаги координаталарини топиш учун E нинг $\mathscr{B}$ даги координаталарини (Δ) даги x, y, z нинг ўрнига қўямиз:

$$\begin{aligned} \frac{a}{2} &= -z' + a, & & x' = \frac{a}{2}, \\ \frac{a}{2} &= -x' + a, & \text{ёки} \quad & y' = a, \\ 0 &= -y' + a & & x' = \frac{a}{2}, \end{aligned}$$

булардан

$$E\left(\frac{a}{2}, \ a, \ \frac{a}{2}\right).$$

6- §. Фазода ориентация

Фазода икки аффин репер берилган бўлиб, улар орасидаги боғланиш (23) формулалар билан аниқланган бўлсин.

Таъриф. (23) формулалардаги ўтиш матрицасининг детерминанти мусбат бўлса, у ҳолда $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ *реперлар бир исмли* деб аталади, акс ҳолда, яъни детерминант манфий бўлса, $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ *ҳар хил исмли реперлар* деб аталади.

5- § даги 2- мисолда олинган $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар ҳар хил исмлидир, чунки (Δ) нинг ўтиш матрицасининг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Худди шу параграфдан 1- мисолда топилган (□) алмаштириш ўтиш матрицасининг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 8 > 0$$

бўлгани учун бу реперлар бир исмлидир.

Бундан кўринадики, фазодаги барча аффин реперларни бир исмлилик тушунчасига асосланиб икки синфга ажратиш мумкин, бу синфларнинг бирига тегишли барча реперлар ўзаро бир исмли бўлиб, ҳар хил синфга тегишли икки репер бир исмли бўлмайди. Шу синфларнинг ҳар бири *ориентация* деб аталиб, ундаги реперлар *ориентирланган репер* деб юритилади, баъзан бу синфларни бир-биридан фарқлаш учун «ўнг» ориентация ёки «чап» ориентация деб ҳам юритилади. Репернинг ориентацияси маълум бўлган фазо *ориентирланган фазо* деб аталади.

7-§. Координаталарни боғловчи тенглама ва тенгсизликларнинг геометрик талқини

Биз I бўлимда икки ўзгарувчили биринчи ва иккинчи даражали тенглама ва тенгсизликнинг геометрик маъноси билан танишиб ўтганмиз. Шу тушунчаларни энди фазо учун умумлаштирамиз.

Фараз қилайлик, фазода бирор $\mathscr{B} = (\vec{O}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ аффин репер берилган бўлиб, $F(x, y, z)$ ифода ҳам берилган бўлсин (бу ифодада x, y, z ўзгарувчилардан камида биттаси иштирок этсин).

x_0, y_0, z_0 сонлар учун $F(x_0, y_0, z_0)$ ифода ҳақиқий сондан иборат бўлса, x_0, y_0, z_0 сонлар $F(x, y, z)$ ифоданинг аниқланиш соҳасига тегишли дейилади, бу сонлар учлиги эса берилган реперда фазодаги тайин битта нуқтани аниқлайди. Демак, $F(x, y, z)$ ифода аниқланиш соҳасининг геометрик маъноси фазодаги бирор геометрик фигурадан иборат, жумладан, бу фигура бутун фазодан, фазонинг бир қисмидан, бўш тўпламдан ва ҳ. к. лардан иборат бўлиши мумкин.

1- мисол. $F(x, y, z) = x^2 + 2y - z$. Бу ифода x, y, z нинг ҳар қандай ҳақиқий қийматларида маънога эга, демак, унинг аниқланиш соҳаси барча ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат бўлиб, у фазодаги барча нуқталар тўпламидир.

2- мисол. $F(x, y, z) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} - z$ ифода маънога эга бўлиши учун $x \neq 0$, $y \neq 0$ шарт бажарилиши керак, демак, бу ифоданинг аниқланиш соҳаси фазодаги xOz, yOz координата текисликларидан бошқа барча нуқталар тўпламини ташкил қилади.

3- мисол. $F(x, y, z) = \sqrt{-x^2 - y^2 - z^4}$ ифода фақатгина $x = y = z = 0$ учун ҳақиқий қийматга эга бўлиб, унинг фазодаги тасвири биттагина нуқтадан иборат.

Энди

$$F(x, y, z) = 0 \tag{26}$$

кўринишдаги тенгламани кўрайлик, бу тенгламани қаноатлантирувчи барча сонлар учлиги унинг ечимлари дейилиб, фазода бирор нуқталар тўпламини аниқлайди (шуни таъкидлаш зарурки; агар x, y, z нинг қабул қилиши мумкин бўлган барча қийматларида (26) тенглама қаноатлантирилса, у айниятдан иборат бўлиб қолади). Бундай тўпламни биз ҳозирча сирт деб атайлик (бу сиртнинг қониқарли таърифи эмас, албатта, сиртнинг қатъий математик таърифини топологияда берилади).

Энди сирт тенгламасининг таърифини берайлик.

Таъриф. Агар Φ сиртга тегишли ҳар бир нуқтанинг координаталари $F(x, y, z) = 0$ тенгламани қаноатлантириб, Φ га тегишли бўлмаган бирорта ҳам нуқтанинг координаталари уни қаноатлантирмаса, яъни $\forall (x_0, y_0, z_0) \in \Phi \Leftrightarrow F(x_0, y_0, z_0)$ бўлса, бу тенглама Φ *сиртнинг тенгламаси* деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, сиртнинг тенгламаси берилган бўлса, фазодаги ҳар бир нуқта шу сиртга тегишли ёки тегишли эмасми деган саволга ягона жавоб топилади. Буни аниқлаш учун нуқтанинг координаталарини тенгламадаги ўзгарувчилар ўрнига мос равишда қўйиб ҳисоблаш керак, агар тенглик ўринли бўлса, нуқта шу сиртга тегишли, акс ҳолда эса тегишли эмас.

1- мисол. Фазода $F(x, y, z) = x = 0$ тенглама билан аниқланувчи нуқталар тўпламини (сиртни) топайлик. Тенгламанинг берилишидан кўриниб турибдики (y ва z лар иштирок этмагани учун ихтиёрий сонлар деб олиш мумкин), изланаётган нуқталар тўпламининг ҳар бир нуқтаси учун унинг биринчи координатаси, яъни абсциссаси нолга тенгдир. Фазодаги бундай нуқталар тўплами yOz координаталар текислигидан иборатдир, демак, берилган тенглама билан аниқланган сирт yOz текисликдан иборат экан.

2- мисол. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ тенглама бўш тўпламни ифодалайди, чунки фазода координаталари бу тенгламани қаноатлантирувчи бирорта ҳам нуқта йўқ.

3- мисол. $F(x, y, z) = (x - a)^2 + (y - b^2) + (z - c)^2 - r^2 = 0$ тенглама маркази (a, b, c) нуқтада ва радиуси r га тенг сферани аниқлайди.

Энди $F(x, y, z) > 0$ (< 0) ифодани текширайлик. Бу ифода ҳам $F(x, y, z)$ функция аниқланиш соҳасининг шундай қисмини аниқлайдики, унинг барча нуқталарида ва фақат шу нуқталарда юқоридаги тенгсизлик ўринли бўлади. Буни мисолларда кўрайлик.

4- мисол. $F(x, y, z) = z > 0$. Бу тенгсизлик шундай нуқталар тўпламини аниқлайдики, у нуқталарнинг ҳар бирининг аппликатаси мусбат сондан иборат. Равшанки, бундай нуқталар тўплами xOy координаталар текислиги билан чегараланиб, аппликаталар ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олувчи ярим фазодир, xOy текислик нуқталари бунга кирмайди.

5. $F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 < 0$. Фазода бу тенгсизлик билан аниқланувчи нуқталар тўплами радиуси 1 бирликка тенг, маркази координаталар бошида бўлган сфера билан чегараланган ва шу сфера марказини ўз ичига олувчи фазо қисмидир.

Баъзан биргина тенглама ёки тенгсизлик билан аниқланадиган шаклгина эмас, балки тенгламалар системаси билан, ёки тенглама ва тенгсизликлар системаси билан, ёки фақат тенгсизликлар системаси билан аниқланадиган шаклларни текширишга тўғри келади, масалан,

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0 \end{cases}$$

система билан аниқланадиган шакл ҳар бир тенглама билан аниқланадиган шакллар кесишмасидан иборат шаклни аниқлайди, бундай шаклни биз ҳозирча чизиқ деб атайлик (чизиқнинг ҳам қатъий таърифи топологияда берилади); демак, фазодаги чизиқ умумий ҳолда икки сиртнинг кесишмаси деб қаралади.

6- мисол.

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = x = 0, \\ F_2(x, y, z) = y = 0. \end{cases}$$

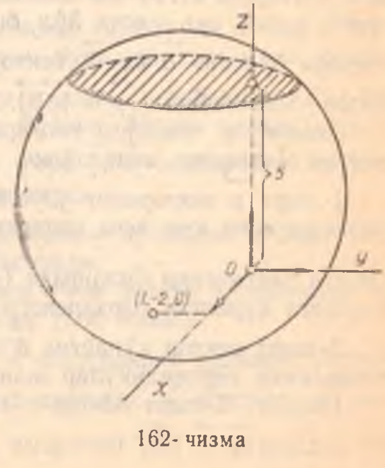
Бу система билан аниқланадиган чизиқ аппликаталар чизиғидир, чунки биринчи тенглама yOz текисликни, иккинчи тенглама эса xOz текисликни аниқлаб, уларнинг кесишмаси $yOz \cap xOz = Oz$ ни аниқлайди.

7- мисол.

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = z = 5, \\ F_2(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + z^2 - 36 = 0 \end{cases}$$

тенгламалар системасининг биринчи тенгламаси аппликатаси фақат 5 га тенг бўлган нуқталарни аниқлайди: бундай нуқталар тўплами Oz ўқнинг мусбат қисмини координаталар бошидан 5 бирлик масофада кесиб ўтиб, xOy текисликка параллел текисликдир (162- чизма).

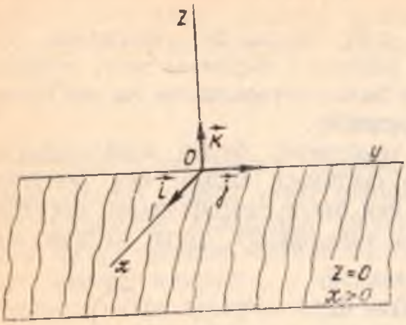
Иккинчи тенглама эса маркази (1, —2, 0) нуқтада ва радиуси 6 бирлик бўлган сферани аниқлайди. Демак, бу фигураларнинг кесишмаси $z = 5$ текисликдаги $(x-1)^2 + (y+2)^2 = 11$ тенглама билан аниқланувчи айланадир.



162- чизма

8- мисол.

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = z = 0, \\ F_2(x, y, z) = x \geqslant 0. \end{cases}$$



163- чизма

Бундаги биринчи тенглама xOy текисликни, иккинчи тенгсизлик эса yOz текислик билан аниқланувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олувчи ярим фазодир. Бу ярим фазонинг xOy текислик билан кесишмаси Oy тўғри чизиқ билан аниқланувчи ва абсциссалар ўқининг мусбат қисмини ўз ичига олган ярим текисликдир (163- чизма).

8- §. Икки векторнинг вектор кўпайтмаси ва унинг хоссалари. Учбурчакнинг юзи

Биз I бўлимда векторлар устида бажариладиган чизиқли амаллар (қўшиш, айириш, векторни сонга кўпайтириш) ва икки векторнинг скаляр кўпайтмаси тушунчалари билан иш кўрган эдик. Биз энди икки вектор устида бажариладиган янги амални—вектор кўпайтмани таърифлаймиз.

Таъриф. $\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг *вектор кўпайтмаси* деб қуйидаги учта шартни қаноатлантирадиган $\vec p$ векторга айтилади:

1. $|\vec p| = |\vec a||\vec b|\sin(\widehat{\vec a, \vec b})$.

2. $\vec p \perp \vec a$, $\vec p \perp \vec b$.

3. $\vec a$, $\vec b$, $\vec p$, векторлар умумий бошга келтирилиб, $\vec p$ нинг учидан $\vec a, \vec b$ векторлар ётган текисликка қаралганда $\vec a$ вектордан $\vec b$ вектор томонга қараб энг қисқа йўл билан бурилиш соат мили ҳаракатига тескари бўлсин. $\vec a$ ва $\vec b$ векторларнинг вектор кўпайтмасини $[\vec a\ \vec b]$ билан белгилаймиз: $\vec p = [\vec a\, \vec b]$.

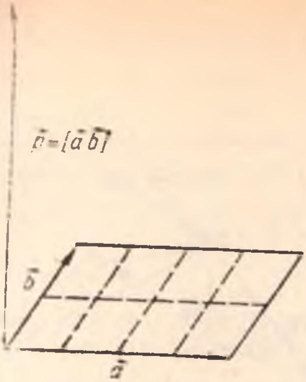
Аввало бу таърифда келтирилган уч шартдан ҳар бирининг геометрик маъносини аниқлайлик.

1- шарт $\vec p$ векторнинг узунлиги $\vec a$ ва $\vec b$ векторларга қурилган параллелограмм юзи неча квадрат бирлик бўлса, шунча узунлик бирлигига тенглигини билдиради (164- чизма) (чунки $|\vec a|\ |\vec b|\sin(\widehat{\vec a, \vec b})$ векторларга қурилган параллелограмм юзидир).

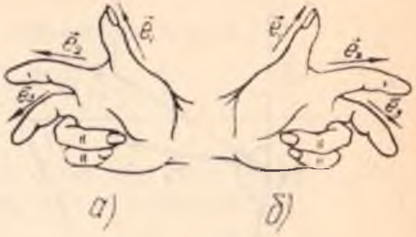
2- шарт вектор кўпайтма $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар билан аниқланадиган текисликка перпендикуляр эканлигини билдиради,

Ниҳоят, 3- шарт вектор кўпайтманинг йўналишини аниқлайди.

Одатда $\vec a$, $\vec b$, $[\vec a\vec b]$ векторлар учлигини *ўнг учлик* деб аташ қабул



164- чизма



165- чизма

қилинган (физикадан ўнг қўл қоидасини эсланг). У ҳолда $\vec a$, $\vec b$, $-[\vec a$, $\vec b]$ векторлар учлиги чап учликдир (физикадан чап қўл қоидасини эсланг, 165- чизма).

Вектор кўпайтма бир қатор хоссаларга эга бўлиб, биз шу хоссалар билан батафсил танишиб чиқамиз.

1°. Кўпайтувчи векторлардан камида биттаси ноль вектор ёки $\vec a \parallel \vec b$ бўлса, у ҳолда $[\vec a\ \vec b]=\vec 0$.

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, $\vec a \parallel \vec b$ бўлса, $(\widehat{\vec a,\ \vec b})=0^\circ$ ёки 180° бўлиб, биринчи шартга асосан $|\vec p\ = 0$ бўлади, модули нолга тенг вектор эса албатта ноль вектордир.

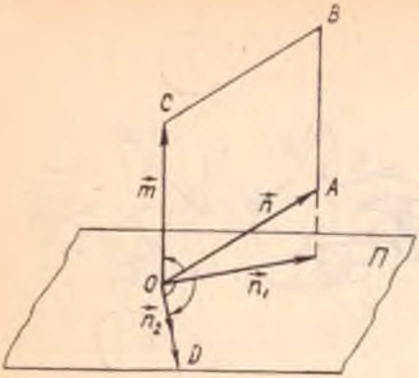
2°. $[\vec a\ \vec b]=-[\vec b\ \vec a]$, яъни вектор кўпайтма антикоммутативдир.

Исбот. Ҳақиқатан, вектор кўпайтма таърифининг 1 ва 2- шартларига асосан $[\vec a\ \vec b]$ ва $[\vec b\ \vec a]$ векторларнинг узунликлари тенг ва иккаласи ҳам битта текисликка перпендикуляр, йўналишлари эса учинчи шартга асосан $[\vec a\,\vec b]$ вектор учидан қаралганда $\vec a$ дан $\vec b$ вектор томонга қараб энг қисқа йўл билан бурилиш соат мили ҳаракатига тескари бўлса, $\vec b$ дан $\vec a$ вектор томонга қараб қисқа йўл билан бурилиш эса соат мили ҳаракати бўйича бўлиб қолади, демак, йўналиш аввалгига ўхшаш бўлиши учун $[\vec b\ \vec a]$ вектор $[\vec a\,\vec b]$ га нисбатан қарама-қарши йўналган бўлиши керак.

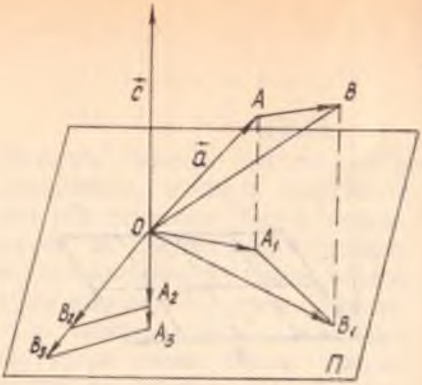
3°. $[(\vec a+\vec b)\,\vec c]=[\vec a\,\vec c]+[\vec b\,\vec c]$, яъни вектор кўпайтма қўшиш амалига нисбатан тақсимот қонунига бўйсунади.

Исбот. Бу хоссани исбот қилиш учун вектор кўпайтмани топишнинг бошқачароқ усулини кўрайлик (166- чизма)

Ўзаро коллинеар бўлмаган $\vec m$ ва $\vec n$ векторларни олайлик. Бу векторларнинг бошларини бир O нуқтага келтириб, O нуқтадан $\vec m$ век-



166- чизма



167- чизма

торга перпендикуляр бўлган П текисликни ўтказиб, $\vec{n}$ векторнинг П текисликдаги ортогонал проекцияси $\vec{n}_1$ ни ҳосил қиламиз, сўнгра $\vec{n}_1$ ни O нуқта атрофида 90° га шундай бурамизки, $\vec{m}$ нинг учидан қараганимизда буришнинг йўналиши соат милининг ҳаракати билан бир хил бўлсин, натижада $\vec{n}_2$ вектор ҳосил бўлади, у ҳолда

$$[\vec{m}\,\vec{n}] = |\vec{m}|\vec{n}_2, \qquad (*)$$

чунки: 1) $||\vec{m}|\vec{n}_2| = |\vec{m}||\vec{n}_2| = |\vec{m}||\vec{n}_1|$, бу эса $\vec{m}, \vec{n}$ га қурилган параллелограммнинг юзини аниқлайди;

2) $(|\vec{m}|\vec{n}_2) \perp \vec{n}$, $(|\vec{m}|\vec{n}_2) \perp \vec{m}$;

3) $\vec{m}, \vec{n}$ ва $|\vec{m}|\vec{n}_2$ векторлар учлиги ўнг учликни ҳосил қилади.

Энди 3°- хоссани исботлашга ўтайлик. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ векторлар берилган бўлсин. $\vec{c}$ нинг бошини O деб белгилаб, шу нуқтадан $\vec{c}$ га перпендикуляр П текисликни ўтказайлик, $\vec{a}$ нинг бошини ҳам O нуқтага келтириб $\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{OB}$ ни (167- чизма) ясаб ва $\triangle OAB$ ни П текисликка ортогонал проекциялаб, $\triangle OA_1B_1$ ни ҳосил қилайлик. $\triangle OA_1B_1$ ни П да O нуқта атрофида 90° га шундай бурайликки, бу буриш йўналиши $\vec{c}$ нинг учидан қаралганда соат мили ҳаракати бўйича бўлсин, натижада $\triangle OA_2B_2$ ҳосил бўлади. Шу учбурчакнинг ҳар бир томонини $|\vec{c}|$ га кўпайтириб, $\triangle OA_2B_2$ га ўхшаш $\triangle OA_3B_3$ ни ҳосил қиламиз. Юқорида исбот қилинган (*) га асосан:

$$\overrightarrow{OA_3} = |\vec{c}|\overrightarrow{OA_2} = [\vec{a}\,\vec{c}],$$

$$\overrightarrow{A_3B_3} = |\vec{c}|\,\overrightarrow{A_2B_2} = [\vec{b}\,\vec{c}],\ \overrightarrow{OB_3} = |\vec{c}|\,\overrightarrow{OB_2} = [(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}]. \qquad (**)$$

Бундан ташқари, бу чизмадан

$$\overrightarrow{OB_3} = \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{A_3B_3}, \qquad (***)$$

бундаги векторлар ўрнига (**) даги ифодаларни қўйсак,

$$[(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c}] = [\vec{a}\vec{c}] + [\vec{b}\,\vec{c}]$$

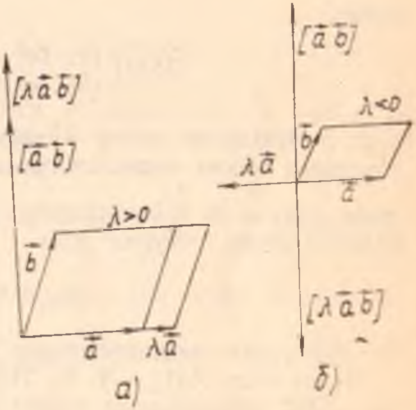
га эга бўламиз. ▲

Натижа. $[\vec{c}\,(\vec{a}+\vec{b})] = [\vec{c}\,\vec{a}] + [\vec{c}\,\vec{b}]$. Буни кўрсатиш учун исбот қилинган 3°- хоссага 2°- хоссани татбиқ қилиш кифоядир.

4. $\forall \lambda \in R$ учун $[\lambda\,\vec{a}\,\vec{b}] = \lambda\,[\vec{a}\,\vec{b}]$, яъни вектор кўпайтма скаляр кўпайтувчига нисбатан груҳлаш қонунига бўйсунади.

Исбот. $[\lambda\,\vec{a}\vec{b}]$ ва $\lambda\,[\vec{a}\vec{b}]$ векторларнинг модуллари тенгдир, йўналишлари эса $\lambda > 0$ бўлганда $[\vec{a}\,\vec{b}]$ вектор билан бир хил, $\lambda < 0$ да эса $[\vec{a}\,\vec{b}]$ нинг йўналишига қарама-қаршидир (168- *а*, *б* чизма).

Эслатма. 3°- хосса икки қўшилувчи вектор учунгина эмас, балки исталган сондаги қўшилувчилар учун ҳам ўринлидир, бундан ташқари, вектор кўпайтманинг ҳар бир вектори бир неча векторларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлса, уларни алгебрадаги кўпҳадни кўпҳадга кўпайтириш қоидаси бўйича очиш мумкин, бунда фақат векторлар тартибининг сақланишига эътибор бериш керак.



168- чизма

Энди декарт реперидаги базис векторларнинг вектор кўпайтмасини топайлик.

Вектор кўпайтманинг таърифига асосан,

$$[\vec{i}\ \vec{i}] = 0,\quad [\vec{j}\,\vec{j}] = 0,\quad [\vec{k}\ \vec{k}] = 0.$$

$|[\vec{i}\ \vec{j}]| = |\vec{i}|\,|\vec{j}|\sin 90° = 1\cdot 1\cdot 1 = 1$ ҳамда $\vec{i} \perp \vec{k}$, $\vec{j} \perp \vec{k}$ эканини эътиборга олсак, $[\vec{i}\ \vec{j}] = \vec{k}$. Шунга ўхшаш $[\vec{k}\,\vec{i}\,] = \vec{j}$, $[\,\vec{j}\,\vec{k}] = \vec{i}$ ҳам ўринли. 2° га асосан

$$[\vec{j}\ \vec{i}] = -\vec{k},\ [\vec{k}\ \vec{j}] = -\vec{i},\ [\,\vec{i}\ \vec{k}] = -\vec{j}.$$

Энди декарт реперида координаталари билан берилган $\vec{a}\,(x_1, y_1, z_1)$,

$\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$ векторлар вектор кўпайтмасининг координаталарини топайлик:

$$\vec{a} = x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k},$$

$$\vec{b} = x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}.$$

Вектор кўпайтманинг хоссаларини ҳамда базис векторларнинг вектор кўпайтмаларини эътиборга олсак,

$$[\vec{a}\,\vec{b}] = [x_1 \vec{i} + y_1 \vec{j} + z_1 \vec{k} \quad x_2 \vec{i} + y_2 \vec{j} + z_2 \vec{k}] =$$

$$= (y_1 z_2 - y_2 z_1)\vec{i} - (x_1 z_2 - x_2 z_1)\vec{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\vec{k} =$$

$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \vec{k},$$

демак,

$$[\vec{a}\,\vec{b}] \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \right). \qquad (27)$$

$\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторлар вектор кўпайтмасининг модули томонлари шу векторлардан иборат параллелограмм юзига тенг бўлганлиги учун унинг ярмиси шу $\vec{a}$ ва $\vec{b}$ векторларга қурилган учбурчакнинг юзига тенг бўлади, демак, учбурчак юзи

$$S_\triangle = \frac{1}{2} \left| [\vec{a}\,\vec{b}] \right|. \qquad (28)$$

Бу формулани координаталарда ёзмасдан, мисоллар кўра қолайлик.

1-мисол. $A(1, -1, 2)$, $B(2, 1 -1)$, $C(1, 0, 3)$ нуқталар берилган. ABC учбурчакнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. $\overrightarrow{AB}$ ва $\overrightarrow{AC}$ нинг координаталарини ҳисоблайлик, (27) га асосан

$$\overrightarrow{AB}(1, 2, -3),$$

$$\overrightarrow{AC}(0, 1, 1), \quad [\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}] \left(\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \right),$$

$$[\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}]\ (5, -1, 1),$$

$$\left| [\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}] \right| = \sqrt{5^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{27}.$$

$(28) \Rightarrow S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{27}$ кв. бирлик.

2-мисол. Учбурчакнинг учлари $A(5, -6, 2)$, $B(1, 3, -1)$, $C(1, -1, 2)$ нуқталарда. Унинг A учидан чиққан баландлигининг узунлигини топинг.

Ечиш. Аввалги мисолдагидек ҳисобласак,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2}\cdot 25 \text{ кв. бирлик.}$$

Энди BC томоннинг узунлигини ҳисоблайлик:

$$\rho(BC) = \sqrt{(1-1)^2+(-1-3)^2+(2+1)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

Агар A учдан чиққан баландликни h десак,

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} h\, |\overrightarrow{BC}| = \frac{1}{2} h\cdot 5.$$

У ҳолда $\frac{1}{2} h\cdot 5 = \frac{1}{2}\cdot 25$, бундан $h = 5$ узунлик бирлиги.

3-мисол. $\vec m$, $\vec n$ бирлик векторлар бўлиб, улар орасидаги бурчак 30° га тенг. $\vec a = \vec m - 2\vec n$, $\vec b = 2\vec m + 3\vec n$ векторларга қурилган параллелограммнинг юзини ҳисобланг.

Ечиш. $[\vec a\,\vec b] = [\vec m - 2\vec n\ \ 2\vec m + 3\vec n] = [\vec m\ \ 2\vec m] + [-2\vec n\ \ 2\vec m] + [\vec m\ \ 3\vec n] + [-2\vec n\ \ 3\vec n] = \vec 0 - 4[\vec n\,\vec m] + 3[\vec m\,\vec n] + 0 = 4[\vec m\,\vec n] + 3[\vec m\,\vec n] = 7[\vec m\,\vec n];$

$|[\vec a\,\vec b]| = |7[\vec m\,\vec n]| = 7|\vec m||\vec n|\sin 30^\circ = 7\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{2} = \frac{7}{2}$ кв. бирлик.

4-мисол Ихтиёрий $\vec a$ ва $\vec b$ векторлар учун ушбу айният исботлансин:

$$[\vec a\,\vec b]^2 + (\vec a\,\vec b)^2 = \vec a^2\vec b^2.$$

Исбот $\widehat{(\vec a\,\vec b)} = \varphi$ десак,

$$\vec a\,\vec b = |\vec a||\vec b|\cos\varphi,\quad |[\vec a\,\vec b]| = |\vec a||\vec b|\sin\varphi,$$

бу икки тенгликни квадратга кўтариб, ҳадлаб қўшсак,

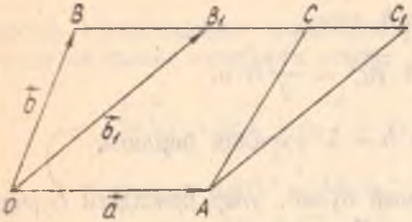
$$[\vec a\,\vec b]^2 + (\vec a\,\vec b)^2 = |\vec a|^2|\vec b|^2(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = \vec a^{\,2}\,\vec b^{\,2} = \vec a^2\vec b^2. \quad \blacktriangle$$

5-мисол. $\vec a + \vec b + \vec c = \vec 0$ бўлса, $[\vec a\,\vec b] = [\vec b\,\vec c] = [\vec c\,\vec a]$ исботлансин.

Исбот. $\vec a + \vec b + \vec c = \vec 0$ ни аввал $\vec b$ га, сўнгра $\vec c$ га вектор кўпайтирайлик: $[(\vec a + \vec b + \vec c)\vec b] = \vec 0$ ёки $[\vec a\,\vec b] + [\vec c\,\vec b] = \vec 0$, $[(\vec a + \vec b + \vec c)\vec c] = \vec 0$, ёки $[\vec a\,\vec c] + [\vec b\,\vec c] = \vec 0$, булардан $[\vec a\,\vec b] = -[\vec c\,\vec b] = [\vec b\,\vec c]$, $[\vec b\,\vec c] = -[\vec a\,\vec c] = [\vec c\,\vec a]$, демак,

$$[\vec a\,\vec b] = [\vec b\,\vec c] = [\vec c\,\vec a]. \quad \blacktriangle$$

Эслатма. $[\vec{a}\vec{x}]=\vec{p}$ векторли тенглама ечимга эгами деган савол туғилади, яъни $\vec{a}, \vec{p}$ лар берилса, юқоридаги шартни қаноатлантирувчи $\vec{x}$ вектор мавжудми?



169- чизма

Бунинг учун $\vec{a}$ векторни ва ихтиёрий $\vec{b}$ векторни олайлик (169- чизма). Бу икки векторнинг бошларини битта O нуқтага келтириб, $\vec{b}$ нинг охири B дан $\vec{a}$ га параллел тўғри чизиқ ўтказиб, унда ихтиёрий B_1 нуқтани олсак, $\vec{b}_1=\overrightarrow{OB_1}$ вектор ҳосил бўлади, у ҳолда $[\vec{a}\vec{b}]$ ва $[\vec{a}\,\vec{b}_1]$ векторларнинг йўналишлари бир хил бўлиб, модуллари тенг (чунки $OACB$ ва OAC_1B_1 параллелограммларнинг асослари ва баландликлари тенг бўлгани учун уларнинг юзлари ҳам тенг).

Демак, $[\vec{a}\vec{b}]=[\vec{a}\,\vec{b}_1]$ бўлиб, B_1 нуқталарнинг чексиз кўплигидан $\vec{b}_1$ вектор хоҳлаганча кўпдир. Бу эса берилган тенгламанинг чексиз кўп ечимлари борлигини билдиради. Бундан ташқари, векторлар устида бўлиш амалининг ўринли эмаслигига яна бир бор ишонч ҳосил қилдик. $[\vec{a}\,\vec{x}]=\vec{p}$ кўринишдаги тенглама фазода тўғри чизиқни, $\vec{a}\vec{x}=p$ тенглама эса текисликни аниқлайди, бу ерда $\vec{a}\,\vec{p}$ ва $\vec{a}, \vec{p}$ маълум, $\vec{x}$ номаълум. Буларнинг исботига биз тўхталмаймиз.

9- §. Уч векторнинг аралаш кўпайтмаси. Тетраэдрнинг ҳажми. Уч векторнинг компланарлик шарти

Учта $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ вектор берилган бўлсин.

Таъриф. Биринчи икки векторнинг вектор кўпайтмасидан иборат векторни учинчи векторга скаляр кўпайтиришдан ҳосил қилинган сон шу уч векторнинг *аралаш кўпайтмаси* деб аталади, яъни $[\vec{a}\vec{b}]\vec{c}$, бу кўпайтма $(\vec{a}\;\vec{b}\;\vec{c})$ кўринишда белгиланади.

Аввало аралаш кўпайтманинг геометрик маъноси билан танишайлик. $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, бир O нуқтадан қўйилган бўлиб, компланар бўлмасин ҳамда ўнг учликни ҳосил қилсин.

Қирралари шу берилган векторлардан иборат параллелепипедни ясасак, $|[\vec{a}\,\vec{b}]|$ миқдор шу параллелепипед асосининг юзини билди-

170- чизма

ради, таърифга асосан $[\vec a\,\vec b]\vec c = |[\vec a\,\vec b]||\vec c|\cos\varphi$, $\varphi = (\widehat{[\vec a,\ \vec b], \vec c})$ бўлиб, $|\vec c|\cos\varphi$ миқдор $\vec c$ нинг $[\vec a\,\vec b]$ вектор йўналишидаги тўғри чизиқдаги проекциясига тенг бўлиб, параллелепипеднинг баландлигидир: $|\vec c|\cos\varphi = h$ (170- *а* чизма). У ҳолда

$$[\vec a\,\vec b]\,\vec c = S_{ac}\cdot h = V, \tag{*}$$

бу сон эса параллелепипеднинг ҳажмини аниқлайди.

$\vec a, \vec b, \vec c$ лар чап учликдан иборат бўлса, $[\vec a\,\vec b]$ вектор билан $\vec c$ орасидаги бурчак $\varphi \geqslant \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\varphi \leqslant 0$ (170- *б* чизма). У ҳолда $[\vec a\ \vec b]\,\vec c = -V$, демак,

$$|[\vec a\ \vec b]\ \vec c| = V. \tag{29}$$

Биз қуйидагини исбот қилдик: уч векторнинг аралаш кўпайтмасидан иборат соннинг абсолют қиймати қирралари шу векторлардан иборат параллелепипед ҳажмига тенг.

Энди аралаш кўпайтманинг хоссалари билан танишайлик.

1°. $(\vec a\ \vec b\ \vec c) = (\vec b\ \vec c\ \vec a)$.

Ҳақиқатан ҳам, бу уч векторга қурилган параллелепипед ҳажмларининг абсолют қийматлари тенг, ундан ташқари, $\vec a, \vec b, \vec c$ учлик билан $\vec b, \vec c, \vec a$ учликнинг ориентациялари бир хил. Шунинг сингари $(\vec a\ \vec b\ \vec c) = (\vec b\ \vec c\,\vec a) = (\vec c\ \vec a\ \vec b)$.

2°. $(\vec a\ \vec b\,\vec c) = -(\vec b\ \vec a\,\vec c)$, чунки $(\vec a\ \vec b\,\vec c) = [\vec a\,\vec b]\,\vec c = -[\vec b\ \vec a]\vec c = -(\vec b\,\vec a\,\vec c)$, демак, $(\vec a\ \vec b\ \vec c) = -(\vec b\ \vec a\ \vec c)$, $(\vec b\ \vec c\ \vec a) = -(\vec c\ \vec b\ \vec a)$, $(\vec c\,\vec a\ \vec b) = -(\vec a\,\vec c\ \vec b)$.

3°. $((\vec a+\vec b)\vec c\,\vec d)=(\vec a\,\vec c\,\vec d)+(\vec b\,\vec c\,\vec d)$, чунки $((\vec a+\vec b)\vec c\,\vec d)=[\vec a+\vec b\,\vec c]\,\vec d=([\vec a\,\vec c]+[\vec b\,\vec c])\vec d=[\vec a\,\vec c]\,\vec d+[\vec b\,\vec c]\,\vec d=(\vec a\,\vec c\,\vec d)+(\vec b\,\vec c\,\vec d)$.

4°. $\forall\lambda\in R$ учун $(\lambda\vec a\,\vec b\,\vec c)=\lambda(\vec a\,\vec b\,\vec c)$, чунки $(\lambda\vec a\,\vec b\,\vec c)=[\lambda\vec a\,\vec b]\,\vec c=\lambda[\vec a\,\vec b]\,\vec c=\lambda(\vec a\,\vec b\,\vec c)$.

5°. $\vec a, \vec b, \vec c$ компланар бўлса, уларнинг аралаш кўпайтмаси нолга тенг, чунки уларга қурилган параллелепипед текисликда жойлашиб қолади, бундай параллелепипеднинг баландлиги нолга тенглигидан ҳажми ҳам нолга тенг; аксинча $(\vec a\,\vec b\,\vec c)=0\Rightarrow\vec a,\vec b,\vec c$ векторлар компланар. Ҳақиқатан ҳам $(\vec a\,\vec b\,\vec c)=0\Rightarrow[\vec a,\vec b]\,\vec c=0$ ёки $[\vec a\,\vec b]\perp\vec c$. Лекин вектор кўпайтманинг таърифига асосан $[\vec a\,\vec b]\perp\vec a$, $[\vec a\,\vec b]\perp\vec b$, бундан $[\vec a\,\vec b]$ векторнинг $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$ нинг ҳар бирига перпендикулярлиги келиб чиқади, демак, $\vec a$, $\vec b, \vec c$ компланар. ▲

Энди координаталари билан берилган учта векторнинг аралаш кўпайтмасини топайлик: $\vec a=x_1\vec i+y_1\vec j+z_1\vec k$, $\vec b=x_2\vec i+y_2\vec j+z_2\vec k$, $\vec c=x_3\vec i+y_3\vec j+z_3\vec k$.

8- § даги (27) га асосан

$$[\vec a\,\vec b]\left(\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}, -\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}\right).$$

$[\vec a\,\vec b]$ билан $\vec c$ векторнинг скаляр кўпайтмаси мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг:

$$[\vec a\,\vec b]\vec c=\begin{vmatrix}y_1&z_1\\y_2&z_2\end{vmatrix}x_3-\begin{vmatrix}x_1&z_1\\x_2&z_2\end{vmatrix}y_3+\begin{vmatrix}x_1&y_1\\x_2&y_2\end{vmatrix}z_3,$$

демак,

$$(\vec a\,\vec b\,\vec c)=\begin{vmatrix}x_1&y_1&z_1\\x_2&y_2&z_2\\x_3&y_3&z_3\end{vmatrix}. \qquad (30)$$

Бу формуланинг татбиқи сифатида учларнинг координаталари бўйича тетраэдр ҳажмини ҳисоблаш формуласини келтириб чиқарайлик.

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2\, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3),\ D(x_4, y_4, z_4)$$

нуқталар тетраэдрнинг учлари бўлсин.

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1),$$

$$\overrightarrow{AC}\,(x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1),$$

$$\overrightarrow{AD}\,(x_4-x_1,\ y_4-y_1,\ z_4-z_1).$$

Тетраэдрнинг ҳажми тетраэдрнинг бир учидан чиққан учта қиррасига қурилган параллелепипед ҳажмининг $\frac{1}{6}$ қисмига тенг бўлгани учун ҳамда (30) формулага асосан

$$V_{\text{тет.}}=\frac{1}{6}\,|(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD})|=\frac{1}{6}\ \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1\\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1\\ x_4-x_1 & y_4-y_1 & z_4-z_1 \end{vmatrix}. \qquad (31)$$

(31) формулани баъзан ундан кўра қулайроқ қуйидагича ҳолда ёзиш маъқулдир:

$$V_{\text{тет.}}=\frac{1}{6}\ \mathrm{mod}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\\ x_3 & y_3 & z_3 & 1\\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \qquad (32)$$

(31) ёки (32) формула изланган формуладир.

Энди қатор мисоллар кўрайлик.

1. $\vec a$, $\vec b$, $\vec c$—ихтиёрий векторлар ва α, β, γ — ихтиёрий ҳақиқий сонлар бўлса, $\alpha\vec a-\beta\vec b$, $\gamma\vec b-\alpha\vec c$, $\beta\vec c-\gamma\vec a$ векторларнинг компланар эканлиги исботлансин.

Исбот. Шу учта векторнинг $(\alpha\vec a-\beta\vec b\ \ \gamma\vec b-\alpha\vec c\ \ \beta\vec c-\gamma\vec a)$ аралаш кўпайтмасини ҳисоблайлик. Бунинг учун юқорида келтирилган 1° — 5°- хоссаларни назарда тутсак,

$$(\alpha\vec a-\beta\vec b\ \ \gamma\vec b-\alpha\vec c\ \ \beta\vec c-\gamma\vec a)=(\alpha\vec a\,(\gamma\vec b-a\vec c)\,(\beta\vec c-\gamma\vec a))-(\beta\vec b(\gamma\vec b-\alpha\vec c)(\beta\vec c-$$
$$-\gamma\vec a))=(\alpha\vec a\ \gamma\vec b\ \beta\vec c-\gamma\vec a)-(\alpha\vec a\ \alpha\vec c\ \beta\vec c-\gamma\vec a)-(\beta\vec b\ \gamma\vec b\ \beta\vec c-\gamma\vec a)+$$
$$+(\beta\vec b\ \alpha\vec c\ \beta\vec c-\gamma\vec a)=\alpha\gamma\beta\,(\vec a\ \vec b\ \vec c)-\alpha\gamma\gamma\,(\vec a\ \vec b\ \vec a)-\alpha\alpha\beta(\vec a\ \vec c\ \vec c)+$$
$$+\alpha\alpha\gamma\,(\vec a\ \vec c\ \vec a)-\beta\gamma\beta\,(\vec b\ \vec b\ \vec c)+\beta\gamma\gamma\,(\vec b\ \vec b\ \vec a)+\beta\alpha\beta\,(\vec b\ \vec c\ \vec c)-$$
$$-\beta\alpha\gamma\,(\vec b\ \vec c\ \vec a)=\alpha\beta\gamma\,(\vec a\ \vec b\ \vec c)-\alpha\beta\gamma\,(\vec a\ \vec b\ \vec c)=0.$$

Аралаш кўпайтмаси нолга тенг бўлгани учун 5° га асосан улар компланардир.

2. $\overrightarrow{AB}$ (2, 0, 0), $\overrightarrow{AC}$ (3, 4, 0), $\overrightarrow{AD}$(3, 4, 2) векторларга қурилган тетраэдр берилган. Қуйидагилар топилсин: а) тетраэдрнинг ҳажми, б) ABC ёқнинг юзи, в) D учдан туширилган баландлик, г) AB ва BC қирралар орасидаги φ_1 бурчак косинуси, д) ABC ва ADC ёқлар орасидаги φ_2 бурчак косинуси.

Ечиш. а) (31) формулага асосан

$$V_{\text{тет.}} = \frac{1}{6} \operatorname{mod} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 16 = \frac{8}{3}.$$

б) 8- § даги (28) га асосан

$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left| [\overrightarrow{AB}\, \overrightarrow{AC}] \right| = \frac{1}{2} \sqrt{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}^2} = 4.$$

в) Тетраэдрнинг ҳажми асосининг юзи билан асосга туширилган баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг: $V_{\text{тет.}} \frac{1}{3} \; S_{ac} \cdot h$:

а), б) ларни ҳисобга олсак, $\frac{\frac{8}{3}}{2} = \frac{1}{3} \cdot 4 \cdot h \Rightarrow h = 2.$

г) AB, BC қирралар орасидаги бурчак косинуси $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ векторлар орасидаги бурчак косинусига тенг бўлгани учун

$$\cos \varphi_1 = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{AB}|\, |\overrightarrow{BC}|} = \frac{2 \cdot 1 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 0}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}.$$

д) ABC ва ADC ёқлар орасидаги φ_2 бурчак шу ёқларга перпендикуляр векторлар орасидаги бурчакка тенг. ABC ёққа перпендикуляр вектор

$$\vec{p}^{1} = [\overrightarrow{AB}\, \overrightarrow{AC}] \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} \right) \Rightarrow p_1 (0, 0, 8).$$

ADC ёққа перпендикуляр вектор $\vec{p}_2 = [\overrightarrow{AC}\, \overrightarrow{AD}] (8, -6, 0)$, демак, $\cos \varphi_2 = \frac{\vec{p}_1 \vec{p}_2}{|\vec{p}_1|\, |\vec{p}_2|} = \frac{0 \cdot 8 + 0 \cdot (-6) + 8 \cdot 0}{\sqrt{8^2} \cdot \sqrt{100}} = 0 \Rightarrow$ бу ёқлар ўзаро перпендикуляр.

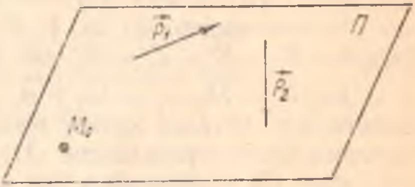
II БОБ. ТЕКИСЛИК ВА ФАЗОДАГИ ТЎҒРИ ЧИЗИҚ

Биз I бобда сирт тенгламаси тушунчасини киритиб, унга доир мисоллар кўрдик. Фазодаги энг содда сиртлардан бири текисликдир. Нуқта ва тўғри чизиқ билан бир қаторда текислик геометриянинг таърифланмайдиган асосий тушунчалари ҳисобланади. Биз текисликнинг фазодаги вазиятини тўлиқ аниқловчи баъзи миқдорлар ёрдамида, унинг турли кўринишли тенгламалари билан иш кўриб, текисликка оид қатор масалаларни қараб чиқамиз. Фазодаги тўғри чизиқ эса икки текисликнинг кесишган чизиғи деб қаралади.

10- §. Текисликнинг аффин репердаги турли тенгламалари

1. Ноколлинеар икки $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ вектор ва битта M_0 нуқта Π текисликнинг вазиятини тўла аниқлайди.

$\forall M \in \Pi$ нуқтани олайлик. У ҳолда $\overrightarrow{M_0M}$ вектор $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ векторлар билан компланар бўлади, демак, бу векторлар чизиқли боғлиқ бўлиб, бундан уларнинг координаталаридан тузилган учинчи тартибли детерминант нолга тенг бўлиши келиб чиқади (171-чизма), шуни координаталарда ёзайлик.



171- чизма

$$M_0\,(x_0,\ y_0,\ z_0),\ \ \vec{p_1}\,(a_1,\ b_1,\ c_1),\ \vec{p_2}\,(a_2,\ b_2,\ c_2) \tag{1}$$

бўлсин. M нинг координаталарини x, y, z деб белгиласак, $\overrightarrow{M_0M}\,(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ бўлиб, қуйидаги тенглама ҳосил бўлади:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{2}$$

Аксинча, (2) шарт бажарилса, M нуқта албатта Π текисликка тегишли бўлади. Демак, (2) Π нинг тенгламаси. Бу тенглама берилган нуқтадан ўтиб, берилган (ноколлинеар) икки векторга параллел бўлган текисликнинг *тенгламаси* деб юритилади.

Бундан ташқари, $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{p_1}$, $\vec{p_2}$ векторлар бир текисликда ётгани учун улар чизиқли боғлиқдир, яъни

$$\overrightarrow{M_0M} = u\vec{p_1} + v\vec{p_2},\ \ u,\ \ v \in R, \tag{3}$$

бу ерда u, v сонлар параметрлардир. (3) дан

$$\begin{array}{ll} x - x_0 = ua_1 + va_2, & x = a_1u + a_2v + x_0, \\ y = y_0 = ub_1 + vb_2, \Rightarrow & y = b_1u + b_2v + y_0, \\ z - z_0 = uc_1 + vc_2. & z = c_1u + c_2v + z_0. \end{array} \tag{4}$$

(4) *текисликнинг параметрик тенгламалари* деб аталади (u ва v га исталган қийматлар бериб, текисликнинг шу параметрларга мос нуқталарини топиш мумкин).

Энди (2) тенгламани қуйидагича ёзайлик:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0, \tag{5}$$

бундан

$$A = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}. \tag{6}$$

$(5) \Rightarrow Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$, бунда $-(Ax_0 + By_0 + {} + Cz_0) = D$ десак,

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{7}$$

тенглама ҳосил бўлади. (2) $\Longleftrightarrow$ (7) бўлгани учун (7) ҳам текисликнинг тенгламасидир. (6) да A, B, C ларнинг камида биттаси нолдан фарқли ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$), акс ҳолда $A = B = C = 0$ бўлса, (6) дан $a_1 = \lambda a_2$, $b_1 = \lambda b_2$, $c_1 = \lambda c_2 \Rightarrow \vec{p}_1 \parallel \vec{p}_2$, бу эса $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ ларнинг берилишига зид. Шундай қилиб, текислик аффин реперда (7) чизиқли тенглама билан ифодаланади. Бу хулосанинг тескариси ҳам ўринлидир, яъни (7) кўринишдаги ҳар қандай чизиқли тенглама фазодаги бирор аффин реперга нисбатан текисликни аниқлайди.

Ҳақиқатан, $Ax + By + Cz + D = 0$ $(A^2 + B^2 + C^2 \neq 0)$ тенглама бирор аффин реперда бирор нуқталар тўпламини аниқласин. Уч ўзгарувчини боғлаган бу тенгламанинг ечими чексиз кўпдир, уларнинг бири (x_0, y_0, z_0) бўлса, у ҳолда $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$, бундан ва (7) дан $\Rightarrow A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ — текислик тенгламасидир.

(7) тенглама *текисликнинг умумий тенгламаси* деб аталади.

2. Бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта текисликнинг вазиятини тўла аниқлайди. Шу маълумотларга кўра унинг тенгламасини тузайлик. Берилган нуқталар $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ бўлсин. Биз $M_0 = M_1$, $\vec{p}_1 = \overrightarrow{M_1M_2}$, $\vec{p}_2 = \overrightarrow{M_1M_3}$ десак, ҳамда $\overrightarrow{M_1M_2}(x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$, $\overrightarrow{M_1M_3}(x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1)$ ни эътиборга олсак, (2) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{8}$$

Уч нуқтадан ўтган текисликнинг тенгламаси шудир.

Агар текислик координаталар бошидан ўтмаса, у Ox, Oy, Oz ўқларни учта $M_1(a, 0, 0)$, $M_2(0, b, 0)$, $M_3(0, 0, c)$ нуқтада кесади, бу ерда a, b, c текисликнинг шу ўқлардан ажратган кесмаларидир. Бунга (8) кўринишли тенгламани татбиқ қиламиз:

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ -a & b & 0 \\ -a & 0 & c \end{vmatrix} = 0,$$

бундан

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{9}$$

бу тенглама *текисликнинг координата ўқларидан ажратган кесмалари бўйича тенгламаси* деб аталади.

Биз бу параграфда текисликнинг 6 хил кўринишдаги (2), (3), (4), (7), (8), (9) тенгламаларини кўрдик.

1-мисол. Текислик $A(2, 0, 3)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{p}_1(1, 0, 1)$, $\vec{p}_2(2, 1, 3)$ векторларга параллел бўлсин. Шу текисликнинг параметрик ва умумий тенгламаларини тузинг.

Ечиш. Берилганларни (4) кўринишдаги параметрик тенглама билан солиштирсак, $x_0 = 2$, $y_0 = 0$, $z_0 = 3$, $a_1 = 1$, $b_1 = 0$, $c_1 = 1$, $a_2 = 2$, $b_2 = 1$, $c_2 = 3$; буларни (4) га қўямиз:

$$x = u + 2v + 2,\ y = v,\ z = u + 3v + 3.$$

Энди текисликнинг (2) кўринишдаги тенгламасини ёзайлик:

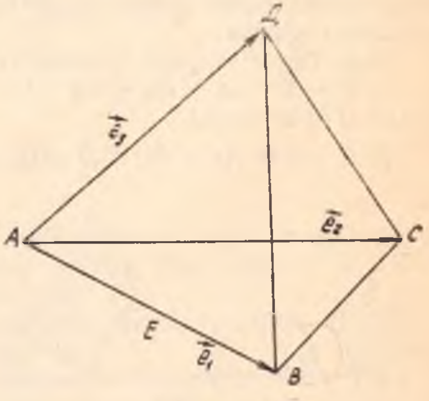
$$\begin{vmatrix} x-2 & y-0 & z-3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Бундан

$(z-3) + 2y - (x-2) - 3y = 0$

ёки $x + y - z + 1 = 0$.

2-мисол. $ABCD$ тетраэдр берилган. A учни координаталар боши ҳамда $\vec{e}_1 = \overrightarrow{AB}$, $\vec{e}_2 = \overrightarrow{AC}$, $\vec{e}_3 = \overrightarrow{AD}$ деб олиб, BDC ва EDC текисликлар тенгламаларини тузинг (бунда E нуқта AB қирранинг ўртаси) (172- чизма).



172- чизма

Ечиш. Берилишига кўра $B = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3) = (A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD})$ бўлиб, тетраэдрнинг учлари ва E нуқта бу реперга нисбатан қуйидаги координаталарга эга:

$$A(0, 0, 0),\ B(1, 0, 0),\ C(0, 1, 0),\ D(0, 0, 1),$$

$E\left(\frac{1}{2}; 0, 0\right)$,

у ҳолда BCD текисликнинг тенгламаси (8) га асосан

$$\begin{vmatrix} x-1 & y & z \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (x-1)+z+y=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+y+z-1=0.$$

Шунинг сингари EDC нинг тенгламасини тузамиз:

$$2x+y+z-1=0.$$

3-мисол. Текислик (2) ёки (7) тенглама билан, $\vec{p}$ вектор (α, β, γ) координаталари билан берилган бўлса, $\vec{p}$ векторнинг текисликка параллеллик шартини топинг.

Ечиш: $\vec{p} \parallel \Pi \Rightarrow (\vec{p}\ \vec{p}_1\vec{p}_2) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0.$

Бу детерминантни биринчи йўл элементлари бўйича ёйсак ва (6) ни эътиборга олсак,

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \tag{10}$$

Бу изланган шартдир.

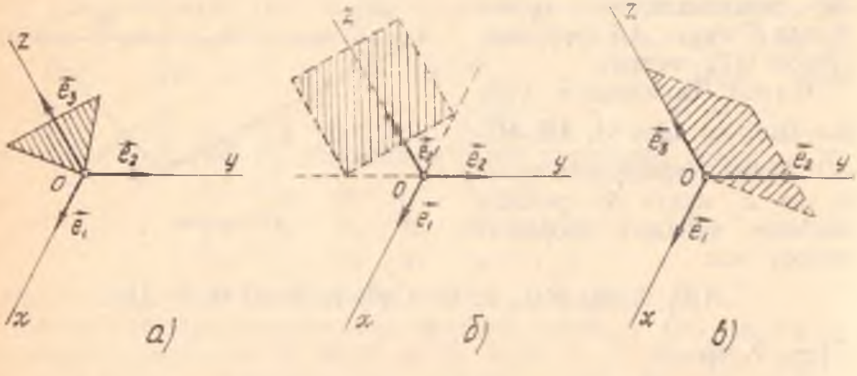
11-§. Текисликнинг умумий тенгламасини текшириш

Биз аввалги параграфда $Ax+By+Cz+D=0$ тенгламани текисликнинг умумий тенгламаси деб атадик ҳамда A, B, C, D параметрларнинг тайин қийматларида бу тенглама тайин текисликни ифодалашини кўрдик.

Энди баъзи хусусий ҳолларни кўриб чиқайлик.

1) $D=0 \Rightarrow Ax+By+Cz=0$ — текислик координаталар бошидан ўтади (173-*а* чизма).

2) $C=0 \Rightarrow Ax+By+D=0$ — бу текислик (10) га асосан $\vec{e}_3$ (0,



173-чизма

0, 1) векторга параллел бўлади, демак, Oz ўққа ҳам параллел (173-*б* чизма).

Шунга ўхшаш (7) да $B = 0$ (ёки $A = 0$) бўлса, текислик Oy ўққа (ёки Ox ўққа) параллелдир. Бундан қуйидаги умумий хулоса келиб чиқади: текисликнинг умумий тенгламасида қайси ўзгарувчи қатнашмаса, бу тенглама билан аниқланадиган текислик шу ўзгарувчи билан бир исмли координаталар ўқига параллелдир.

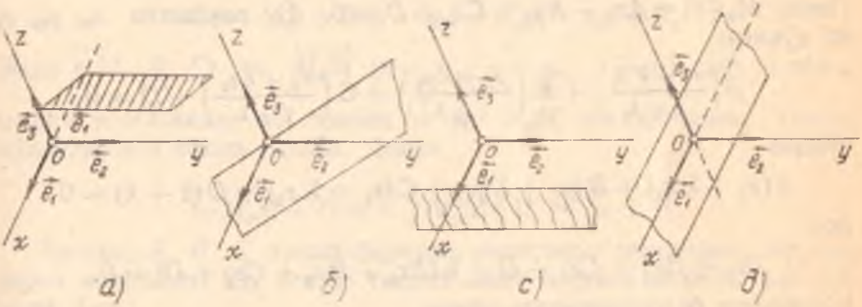
3) $C = D = 0 \Rightarrow Ax + By = 0$, $O \in \Pi$ ва $\Pi \parallel Oz \Rightarrow$ текислик Oz ўқдан ўтади (173- *в* чизма).

1-мисол. Бирор аффин реперга нисбатан қуйидаги текисликларнинг вазиятини аниқланг:

а) $x - z + 1 = 0$; б) $x + 2y + 3z = 0$;
в) $x - 2 = 0$; г) $2y - z = 0$.

Ечиш. а) $x - z + 1 = 0$, бу ерда $B = 0$, яъни 2- ҳол: текислик Oy ўққа параллел (174- *а* чизма).

б) $x + 2y + 3z = 0$, бу ерда $D = 0 \Rightarrow$ текислик координаталар бошидан ўтади (174- *б* чизма).



174- чизма

в) $x - 2 = 0$, бу ерда $B = C = 0$ текислик yOz текисликка параллел бўлиб, абсциссалар ўқини мусбат йўналишидан 2 бирлик кесма кесиб ўтади (174- *с* чизма).

г) $2y - z = 0$, бу ҳолда $A = D = 0$ бўлиб, текислик Ox ўқдан ўтади (174- *д* чизма).

Эслатма. Агар текислик тенгламаси берилиб, унинг бирор репердаги тасвирини чизиш талаб қилинса, умумий ҳолда қуйидагича иш кўрилади: тенгламада уч номаълум бўлгани учун улардан иккитасига ихтиёрий қийматлар бериш билан унинг чексиз кўп ечимларини топиш мумкин. Шу ечимлардан ихтиёрий учтасини олиб, координаталари шу сонлардан иборат (бу уч нуқта бир тўғри чизиқда ётмайдиган қилиб олинади) учта нуқта ясаймиз.

Текислик тасвирини чизишда кўпинча унинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топиш қулайдир, бунинг учун ўзгарувчиларнинг иккитасига ноль қийматлар бериб, учинчи ўзгарувчини берилган тенгламадан топилади ($D \neq 0$ шартда).

12- §. $Ax + By + Cz + D$ ишорасининг геометрик маъноси

$Ax + By + Cz + D = \delta$ бўлсин. $\delta = 0$ бўлган ҳолда тенглама бирор П текисликни аниқлайди. Табиийки, П га тегишли бўлмаган ҳар қандай нуқта учун $\delta \neq 0$. Маълумки, П текислик фазони икки қисмга ажратади, буларнинг бирини Φ_1, иккинчисини Φ_2 деб белгилайлик.

Теорема. $M_1(x_1, y_1, z_1) \in \Phi_1$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in \Phi_2$ *бўлса,* $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = \delta_{M_1}$, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = \delta_{M_2}$ *сонларнинг ишоралари ҳар хил бўлади.*

Исбот. Ҳақиқатан, бу вақтда M_1M_2 кесма П текислик билан бирор $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтада кесишиб, бу нуқта M_1M_2 кесмани бирор λ нисбатда ($\lambda > 0$, чунки $M_0 \in (M_1\ M_2)$) бўлади, яъни

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}.$$

Лекин $M_0 \in \Pi \Rightarrow Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$. Бу тенгликка x_0, y_0, z_0 ни қўямиз:

$$A\left(\frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}\right) + B\left(\frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}\right) + C\left(\frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda}\right) + D = 0,$$

бундан

$$A(x_1 + \lambda x_2) + B(y_1 + \lambda y_2) + C(z_1 + \lambda z_2) + D(1 + \lambda) = 0$$

ёки

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) = 0.$$

Юқоридаги белгилашимизга асосан:

$$\delta_{M_1} + \lambda\delta_{M_2} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{\delta_{M_1}}{\delta_{M_2}},$$

шартга кўра $\lambda > 0 \Rightarrow \delta_{M_1}$ ва δ_{M_2} сонлар ҳар хил ишоралидир. ▲

Бундан қуйидаги хулосага келамиз: Φ_1 нинг бирор нуқтаси учун $\delta > 0$ (ёки $\delta < 0$) бўлса, унинг қолган барча нуқталари учун ҳам $\delta > 0$ (ёки $\delta < 0$); Φ_2 учун ҳам шуларни айтиш мумкин.

Демак, текислик фазони икки ярим фазога ажратиб, шу текислик тенгламасидаги ўзгарувчилар ўрнига ярим фазолардан бирига тегишли барча нуқталарнинг координаталарини қўйганимизда ҳосил бўладиган сонларнинг ишоралари бир хилдир.

Мисол. $3x - y + 4z + 1 = 0$ тенглама билан аниқланадиган текислик учлари $M_1(1, 2, 1)$, $M_2(-1, 2, -5)$, $M_3(1, \sqrt{2}, 5)$ нуқталарда бўлган учбурчакнинг томонларидан қайси бирини кесади?

Ечиш.

$$\delta_{M_1} = 3 \cdot 1 - 2 + 4 \cdot 1 + 1 = 6 > 0,$$

$$\delta_{M_2} = 3\cdot(-1) - 2 + 4\,(-5) + 1 = -24 < 0.$$

$$\delta_{M_3} = 3\cdot 1 - \sqrt{2} + 4\cdot 5 + 1 = 24 - \sqrt{2} > 0.$$

Бундан кўринадики, $M_3 \in \Phi_1$, $M_1 \in \Phi_1$, $M_2 \in \Phi_2$ бўлиб, берилган текислик $M_1M_2M_3$ учбурчакнинг M_1M_2, M_2M_3 томонлари билан кесишади.

13- §. Декарт реперида текисликка доир баъзи масалалар

Биз 10- § да текисликнинг аффин репердаги тенгламаларини кўриб ўтдик. Декарт репери аффин репернинг хусусий ҳоли бўлгани учун аффин реперда чиқарилган тенгламалар декарт реперида ҳам ўз кучини сақлайди, лекин декарт реперида текисликка доир метрик характердаги масалаларни ечиш мумкин.

1. $Ax + By + Cz + D = 0$ тенглама аффин реперда текисликнинг умумий тенгламасидир, шу тенгламани декарт реперида қарасак, A, B, C параметрларнинг муҳим геометрик хоссаси аён бўлади.

Ҳақиқатан, берилган тенгламага эквивалент бўлган ушбу тенгламани олайлик:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Энди $\vec{n}(A,\ B,\ C)$ ва $\overrightarrow{M_0M}\ (x - x_0,\ \ y - y_0,\ \ z - z_0)$ деб олинса, охирги тенгликнинг чап томони $\vec{n}$ ва $\overrightarrow{M_0M}$ векторларнинг скаляр кўпайтмасини ифода қилади. Демак,

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{M_0M} = 0 \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{M_0M} \in \Pi\ \Rightarrow\ \vec{n} \perp \Pi.$$

Хуллас, A, B, C сонлар берилган текисликка перпендикуляр векторни аниқлайди. Шу вектор текисликнинг *нормал вектори* деб аталади. Биз

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{11}$$

тенгламани берилган $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтадан ўтиб, берилган $\vec{n}$ $(A,\ B,\ C)$ векторга перпендикуляр текисликнинг тенгламаси деб аташга ҳақлимиз.

Эслатма. Текисликнинг $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ тенгламасини вектор кўринишда ёзсак,

$$(\vec{r} - \vec{r}_0)\,\vec{n} = 0,\ (\text{бунда } \vec{r}(x,\ y,\ z),\ \ \vec{r}_0(x_0,\ y_0,\ z_0),$$

$$\vec{n}(A,\ B,\ C)\,)$$

ва уни ушбу

$$\vec{r}\,\vec{n} - \vec{r}_0\,\vec{n} = 0,\ \vec{r}_0\,\vec{n} = p,\ \vec{r}\,\vec{n} = p\ \ (p - \text{const})$$

шаклга келтирсак, векторлар алгебрасида «бўлиш» амалининг мавжуд эмаслигига ишонч ҳосил қиламиз. (қ. [1], 329- бет). Ҳақиқатан

$$\vec{r}\,\vec{n} = p \qquad (*)$$

тенгламада $\vec{n}$ вектор ва p скаляр маълум, $\vec{r}$ вектор эса номаълум ҳисобланса, бу тенгламанинг $\vec{r}$ га нисбатан ечими чексиз кўп — қутбдан қўйилган радиус-вектор охирлари тўплами текисликни «тўлдиради», ечим ягона эмас, демак, $\vec{a}\,\vec{x} = p$ кўринишли тенглама ечимга эга эмас (қ. [1], 388-бет).

2. Энди берилган нуқтадан берилган текисликкача бўлган масофани топиш масаласини қарайлик.

Таъриф. *Берилган M_1 нуқтадан берилган* П *текисликкача бўлган масофа* деб, шу нуқтадан текисликка туширилган перпендикуляр тўғри чизиқнинг текислик билан кесишган нуқтаси орасидаги масофага айтилади.

П текислик умумий тенглама билан берилган бўлиб, $M_1(x_1, y_1, z_1) \notin \Pi$ бўлсин. M_1 дан П га перпендикуляр тушириб, унинг асосини $M_0(x_0, y_0, z_0)$ десак, $M_0 \in \Pi$ бўлгани учун

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \qquad (12)$$

У ҳолда $\vec{n}\,(A, B, C)$ вектор П нинг нормал векторидир.

$$\vec{n} \parallel \overrightarrow{M_0M_1}, \text{ демак, } \overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{n} = |\overrightarrow{M_0M_1}|\,|\vec{n}|\cos(\widehat{\overrightarrow{M_0M_1}, \vec{n}}) =$$

$$= \rho(M_1, \Pi)\,|\vec{n}|\cdot(\pm 1),$$

бундан:

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|\overrightarrow{M_0M_1}\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}|}. \qquad (13)$$

$\overrightarrow{M_0M_1}(x_1 - x_0,\ y_1 - y_0,\ z_1 - z_0)$; (13) дан

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{(x_1 - x_0)A + (y_1 - y_0)B + (z_1 - z_0)C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} =$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Ax_0 + By_0 + Cz_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (14)$$

(12) га асосан

$$\rho(M_1, \Pi) = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (15)$$

Бу изланган формуладир. Хусусий ҳолда, координаталар бошидан текисликкача бўлган масофа:

$$\rho(0, \Pi) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (16)$$

1-мисол. $M_1(1, -2, 2)$ нуқтадан $2x + y + 2z - 7 = 0$ текисликкача бўлган масофани топинг.

Ечиш. (16) формулага асосан:

$$\rho(M_1,\ \Pi)=\frac{|Ax_1+By_1+Cz_1+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|2\cdot 1+(-2)+2\cdot 2-7|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=$$

$$=\frac{|-3|}{3}=1.$$

2-мисол. $SABC$ пирамиданинг S учи декарт реперининг бошида, ён ёқлари эса координата текисликларидан иборат. $SA:SB:SC=1:3:2$ шартни бажариб, пирамиданинг баландлиги $SH=6$ бўлса, ABC текисликнинг тенгламасини тузинг (A, B, C учларнинг координаталари мусбат).

Ечиш.

$$SA:SB:SC=1:3:2\Rightarrow SA=\lambda,\ SB=3\lambda,\ SC=2\lambda \tag{17}$$

десак, шартга кўра $\lambda>0$. ABC текисликни тенгламаси (9) га асосан:

$$\frac{x}{\lambda}+\frac{y}{3\lambda}+\frac{z}{2\lambda}=1 \quad \text{ёки} \quad x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z-\lambda=0.$$

Энди λ ни топайлик. Пирамиданинг SH баландлиги координаталар бошидан ABC текисликкача бўлган масофага тенг. (15) дан:

$$\rho(O,\ ABC)=SH=\frac{|-\lambda|}{\sqrt{1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2}}\qquad\frac{\lambda}{\frac{7}{6}}=\frac{6\lambda}{7};$$

$$SH=6\Rightarrow\frac{6\lambda}{7}=6\Rightarrow\lambda=7.$$

Изланган тенглама:

$$x+\frac{1}{3}y+\frac{1}{2}z-7=0.$$

14-§. Текисликларнинг ўзаро вазияти

1. Икки текисликнинг ўзаро вазияти. Бирор $\mathscr{B}=(O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ аффин реперга нисбатан Π_1, Π_2 текисликлар умумий тенгламалари билан берилган бўлсин.

$$\Pi_1:\ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0,$$
$$\Pi_2:\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0. \tag{18}$$

Икки текислик ё тўғри чизиқ орқали кесишади, ёки улар ўзаро параллел бўлиб, умумий нуқтага эга эмас, ёки устма-уст тушади. Бу ҳолнинг қай бири юз беришини билиш учун Π_1, Π_2 га тегишли тенгламалар системасини текширамиз. Аввало қуйидаги матрицаларни тузиб оламиз:

$$M=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1\\ A_2 & B_2 & C_2\end{pmatrix},\ M^*=\begin{pmatrix}A_1 & B_1 & C_1 & D_1\\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2\end{pmatrix}.$$

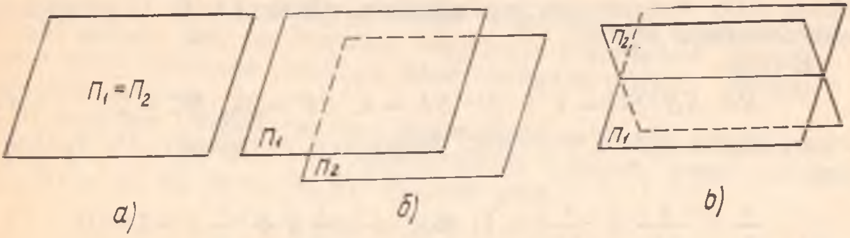
M матрицанинг рангини r, кенгайтирилган M^* матрицанинг рангини эса r^* деб белгилайлик. Бу ерда қуйидаги ҳоллар бўлиши мумкин.

1. Π_1, Π_2 текисликлар устма-уст тушса, уларнинг тенгламаларида

$$A_1 = \lambda A_2,\ B_1 = \lambda B_2,\ C_1 = \lambda C_2,\ D_1 = \lambda D_2,$$

яъни

$$r = r^* = 1. \qquad (19)$$

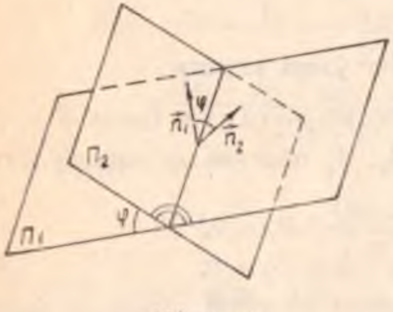


175- чизма

Аксинча, (19) шартлар ўринли бўлса, (18) тенгламалар эквивалент бўлиб, $\Pi_1 = \Pi_2$, демак, $\Pi_1 = \Pi_2 \Longleftrightarrow r^* = r = 1$ (175- *а* чизма).

2. Π_1, Π_2 лар ҳар хил, лекин параллел бўлса, у ҳолда (19) шартлардан биринчи учтаси бажарилади, лекин $D_1 \neq \lambda D_2$ (175- *б* чизма), бу вақтда $r^* = 2$, $r = 1$.

3. $r^* = r = 2$ бўлган ҳолда тенгламалар системаси биргаликда бўлади, бошқача айтганда, Π_1, Π_2 текисликлар умумий нуқтага эга, демак, улар бирор тўғри чизиқ бўйича кесишади (175- *с* чизма).



176- чизма

Метрик характерли масалалардан бири икки текислик орасидаги бурчакни топиш масаласидир.

Икки текислик кесишганда тўртта икки ёқли бурчак ҳосил бўлиб, улардан ўзаро вертикал бўлганлари тенг (176- чизма). Демак, иккита ҳар хил бурчак ҳосил бўлиб, буларнинг бири иккинчисини π га тўлдиради. Шунинг учун шу икки бурчакдан бирини топсак кифоя. Икки ёқли бу икки бурчакдан бирининг чизиқли бурчаги берилган текисликларнинг $\vec{n}_1(A_1,\ B_1,\ C_1)$, $\vec{n}_2(A_2,\ B_2,\ C_2)$ нормал векторлари орасидаги бурчакка тенг бўлади (мос томонлари ўзаро перпендикуляр бўлган бурчаклар тенгдир).

Π_1, Π_2 орасидаги бурчакни φ десак,

$$\cos\varphi = \cos\,(\widehat{\vec{n}_1,\ \vec{n}_2}) = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (20)$$

Бурчак косинуси маълум бўлса, бурчакнинг ўзини ҳисоблаш осондир.

2. Учта текисликнинг ўзаро вазияти. Бирор аффин реперда текисликлар умумий тенгламалар билан берилган бўлсин.

$$\begin{aligned} \Pi_1 &: A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ \Pi_2 &: A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ \Pi_3 &: A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{aligned} \qquad (21)$$

Бу уч текисликнинг ўзаро вазиятини аниқлаш бу тенгламалар системасини текширишни тақозо қилади. Берилган тенгламаларнинг коэффициентларидан қуйидаги матрицаларни тузамиз:

$$M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix},\quad M^* = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицаларнинг рангларини мос равишда r, r^* деб белгилайлик. Равшанки, $1 \leqslant r \leqslant 3$, $1 \leqslant r^* \leqslant 3$ ҳамда $r \leqslant r^*$.

Қуйидаги ҳолларни айрим-айрим кўриб ўтамиз:

1. $r = 3$, $r^* = 3$. Бу вақтда юқоридаги учта тенглама биргаликда бўлиб, ягона ечимга эгадир, демак, берилган учта текислик битта умумий нуқтага эга (117-*а* чизма).

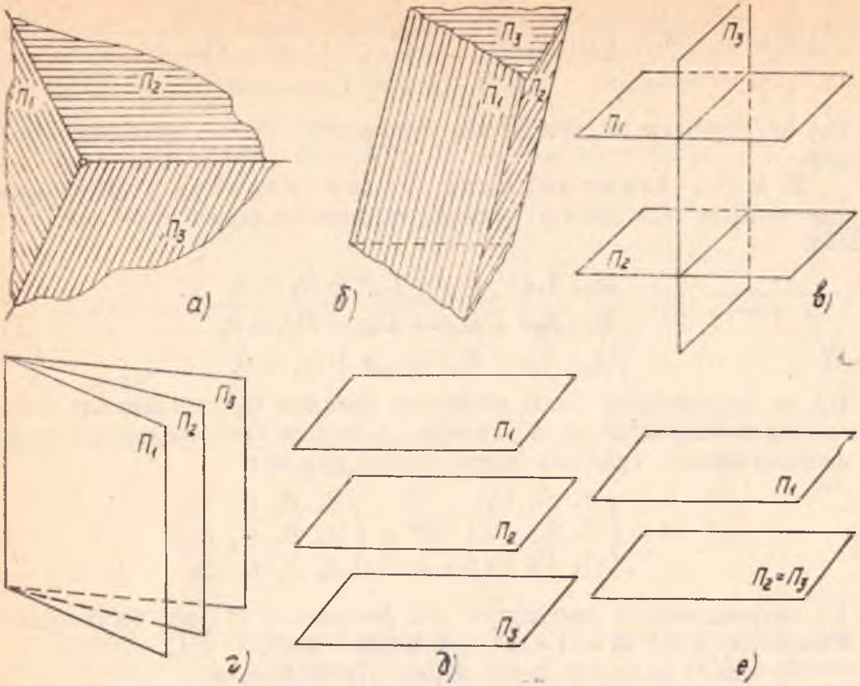
2. $r = 2$, $r^* = 3$. M, M^* матрицаларнинг ранглари ўзаро тенг бўлмагани учун берилган система ечимга эга эмас, демак, текисликларнинг учаласига тегишли нуқта мавжуд эмас. Лекин бу вақтда қуйидаги икки ҳол бўлиши мумкин.

а) M матрицанинг ихтиёрий иккита сатрининг элементлари пропорционал эмас, у ҳолда учта текисликнинг ҳар иккитаси кесишиб, ҳосил бўлган учта тўғри чизиқ параллелдир (177-*б* чизма).

б) M матрицанинг тайин икки сатри элементлари пропорционал бўлса, шу сатрларга мос текисликлар параллел бўлиб, учинчи текислик уларни албатта кесиб ўтади (177-*в* чизма).

3. $r = 2$, $r^* = 2$. Бу вақтда M, M^* матрицаларнинг фақат икки сатри элементлари пропорционал бўлмасдан, қолган битта сатри шу икки сатр элементларнинг чизиқли комбинациясидан иборат бўлади, демак, учала текислик битта тўғри чизиқ орқали кесишади (177-*г* чизма).

4. $r = 1$, $r^* = 2$. Бу ҳолда система биргаликда бўлмайди, демак, Π_1, Π_2, Π_3 лар умумий нуқтага эга эмас. Лекин $r^* = 2$ бўлгани учун қуйидаги хулосани чиқарамиз: Π_1, Π_2, Π_3 дан иккитаси параллел бўлиб (умумий нуқтасиз), учинчиси булардан бири билан устма-уст тушади (177-*е* чизма), ёки уларнинг учаласи параллел (умумий нуқтасиз) (177-*д* чизма).



177-чизма

5. $r = 1$, $r^* = 1$. Бу вақтда берилган тенгламалар системаси чексиз кўп ечимга эга бўлиб, у система фақат битта чизиқли эркли тенгламадан иборат бўлиб қолади, демак, Π_1, Π_2, Π_3 текисликларнинг учаласи устма-уст тушиб қолади.

1-мисол. Декарт реперида $\Pi_1 : 2x + 5y + 4z + 15 = 0$ ва $\Pi_2 : 6x - 3z + 2 = 0$ текисликлар берилган. Бу текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг ҳамда улар орасидаги бурчакни ҳисобланг.

Ечиш. Берилган тенгламаларнинг коэффициентларидан қуйидаги матрицалар тузамиз:

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 6 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 & 15 \\ 6 & 0 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = -30 \Rightarrow r = 2 \text{ ва } r^* = 2.$$

Демак, берилган текисликлар кесишади.

Энди (20) формула бўйича шу текисликлар орасидаги бурчакни топайлик: $\vec{n}_1(2,\ 5,\ 4)$, $\vec{n}_2(6,\ 0,\ -3)$;

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 6 + 5 \cdot 0 + 4(-3)}{\sqrt{2^2 + 5^2 + 4^2} \cdot \sqrt{6^2 + 0^2 + (-3)^2}} = \frac{12 - 12}{\sqrt{45} \cdot \sqrt{45}} = 0 \Rightarrow \varphi =$$

$$= 90^\circ \Rightarrow \Pi_1 \perp \Pi_2.$$

2-мисол. Аффин реперда берилган

$$\Pi_1 : 2x - y + z - 4 = 0,$$
$$\Pi_2 : x + y - z - 2 = 0,$$
$$\Pi_3 : 2x - y + 3z - 6 = 0 \qquad (*)$$

текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг ҳамда уларнинг кесишмасини топинг.

Ечиш.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & -6 \end{pmatrix}$$

матрицаларни тузиб, уларнинг рангларини ҳисоблайлик:

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 6 \neq 0 \Rightarrow r = 3,$$

демак, $r^* = 3$. Юқорида кўрилган 1-ҳолга асосан бу текисликлар битта нуқтада кесишади. Шу нуқтани топайлик, унинг учун (*) системани ечамиз. Системадаги биринчи ва иккинчи тенгламаларни қўшсак,

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2,$$

у ҳолда иккинчи ва учинчи тенгламаларга $x = 2$ ни қўйсак,

$$y - z = 0,$$
$$-y + 3z - 2 = 0.$$

Бундан $2z - 2 = 0 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow y = 1$. Текисликлар (2, 1, 1) нуқтада кесишади.

3-мисол. Аффин реперда берилган

$$\Pi_1 : x + y - z + 1 = 0,$$
$$\Pi_2 : x + y - z = 0,$$
$$\Pi_3 : -x - y + z - 1 = 0$$

текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг.

Ечиш.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Бу матрицаларнинг рангларини ҳисобласак,

$$r = 1, \quad r^* = 2.$$

Бундан кўринадики, бу текисликлардан иккитаси, аниқроғи Π_1, Π_3 устма-уст тушади, лекин $\Pi_1 \parallel \Pi_2$, $\Pi_2 \parallel \Pi_3$ ($\Pi_1 \cap \Pi_3 \neq \varnothing$, $\Pi_2 \cap \Pi_3 = \varnothing$).

15-§. Текисликлар дастаси ва боғлами

Бирор аффин реперда кесишувчи иккита текислик берилган бўлсин:

$$\Pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \ \Pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

бунда $M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}$ матрицанинг ранги 2 га тенг. Маълумки, икки текисликнинг кесишмаси тўғри чизиқдан иборат, уни $\Pi_1 \cap \Pi_2 = u$ деб олайлик. Π_1 нинг тенгламасини λ га $(\lambda \neq 0)$, Π_2 нинг тенгламасини μ га $(\mu \neq 0)$ кўпайтириб, қўшсак,

$$\lambda (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0$$

ёки

$$(\lambda A_1 + \mu A_2)x + (\lambda B_1 + \mu B_2)y + (\lambda C_1 + \mu C_2)z + \lambda D_1 + \mu D_2 = 0. \quad (22)$$

Бунда x, y, z нинг коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқлидир, акс ҳолда $\lambda A_1 + \mu A_2 = 0$, $\lambda B_1 + \mu B_2 = 0$, $\lambda C_1 + \mu C_2 = 0$ бўлса, булардан

$$A_1 : A_2 = B_1 : B_2 = C_1 : C_2 = -(\mu : \lambda) \quad (23)$$

бўлиб, M матрицанинг ранги 2 дан кичик бўлар эди, бу эса фаразга зиддир. Демак, (22) чизиқли тенглама бирор Π' текисликни аниқлайди. Шуниси диққатга сазоворки, u тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтасининг координаталари берилган системани қаноатлантиргани учун у координаталар (22) ни ҳам қаноатлантиради. λ ва μ га ҳар хил қийматлар бериш билан (22) тенглама орқали аниқланадиган ва u тўғри чизиқни ўз ичига олувчи текисликлар ҳосил бўлади. Бундай текисликлар тўплами *u ўқли текисликлар дастаси* ва (22) эса *даста тенгламаси* дейилади. Равшанки, фазода u га тегишли бўлмаган нуқта берилса, бу нуқтадан u ўқли дастага тегишли битта текислик ўтади.

Бирор Π текисликка параллел бўлган фазодаги барча текисликлар тўплами ҳам *текисликлар дастаси* дейилади. Бундай дастанинг берилиши учун шу дастага тегишли тайин битта текисликнинг берилиши кифоядир. Ҳақиқатан ҳам, $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ шундай дастага тегишли тайин бир текислик бўлса, у ҳолда $Ax + By + Cz + \lambda = 0$ тенглама шу дастанинг тенгламаси бўлади. λ га турли қийматлар бериш билан Π га параллел текисликлар топилади. Хусусий ҳолда $\lambda = D$ бўлганда Π текисликнинг ўзи ҳосил бўлади.

Фазодаги ихтиёрий нуқтадан дастага тегишли фақат битта текислик ўтади.

Энди текисликлар боғлами тушунчасига тўхталамиз.

Таъриф. Фазодаги тайин M_0 нуқтадан ўтган барча текисликлар тўплами *текисликлар боғлами* деб аталади. M_0 нуқта *боғламнинг маркази* деб аталади.

Марказининг берилиши билан боғлам тўла аниқланади. Марказ $M_0(x_0, \ y_0, \ z_0)$ берилган бўлса, боғлам тенгламасини тузайлик. $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$ текисликни M_0 нуқтадан ўтказсак,

$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$ бўлади, бу айниятни $Ax + By + Cz + D = 0$ тенгламадан ҳадлаб айирсак,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \qquad (24)$$

Бу тенглама M_0 нуқтадан ўтган текисликни ифодалайди, A, B), C га ҳар хил қийматлар (албатта учаласи бир вақтда ноль бўлмаган) бераверсак, боғламга тегишли текисликлар ҳосил қилинади. Шунинг учун (24) ни маркази M_0 нуқтадаги боғлам тенгламаси деб айтиш мумкин.

Боғлам марказидан ўтмайдиган ихтиёрий тўғри чизиқ орқали шу боғламга тегишли фақат битта текислик ўтади. Боғламни битта нуқтада кесишган учта текислик ҳам аниқлаб бера олади, чунки бундай ҳолда боглам маркази маълум (берилган учта текисликнинг кесишган нуқтаси).

Таъриф. Фазодаги тайин u тўғри чизиққа параллел бўлган барча текисликлар тўплами *текисликларнинг марказсиз боғлами*, тўғри чизиқ эса *боғлам йўналтирувчиси* дейилади.

Марказсиз боғламни йўналтирувчи тўғри чизиқ тўла аниқлайди. Масалан, u берилса, унга айқаш бўлган тўғри чизиқ орқали шу боғламга тегишли фақат битта текислик ўтади. Бу боғламнинг асосий хоссаларидан бири шуки, u га параллел бўлмаган ҳар бир тўғри чизиқ орқали боғламга тегишли фақат битта текислик ўтади (чунки u билан бу тўғри чизиқ ўзаро айқаш тўғри чизиқлар бўлиб, уларнинг бири орқали иккинчисига параллел фақат битта текислик ўтади). u тўғри чизиқнинг йўналтирувчи $\vec{u}$ вектори ҳам марказсиз текисликлар боғламини тўла аниқлайди.

1-мисол. $4x - y + 3z - 1 = 0$, $x + 5y - z + 2 = 0$ текисликлар аниқлаган марказли даста берилган, бу дастанинг (1, 1, 1) нуқтадан ўтувчи текислигини топинг.

Ечиш. Даста тенгламасини ёзамиз:

$$\lambda(4x - y + 3z - 1) + \mu(x + 5y - z + 2) = 0. \qquad (25)$$

Шартга кўра

$$\lambda(4 - 1 + 3\cdot 1 - 1) + \mu(1 + 5\cdot 1 - 1 + 2) = 0 \text{ ёки } \lambda = -\frac{7}{5}\mu.$$

Булардан:

$$-\frac{7}{5}\mu(4x - y + 3z - 1) + \mu(x + 5y - z + 2) = 0;$$

$$-7(4x - y + 3z - 1) + 5(x + 5y - z + 2) = 0$$

ёки

$$-23x + 32y - 26z + 17 = 0.$$

2-мисол. $x + 4y - 2z + 5 = 0$ текислик билан аниқланадиган марказсиз даста берилган. Шу дастага тегишли ва (2, —1, 3) нуқтадан ўтувчи текисликни топинг.

Ечиш. Дастанинг тенгламасини ёзамиз: $Ax + By + Cz + \lambda = 0$.

Текисликларнинг параллеллик шартига асосан бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин: $x+4y-2z+\lambda=0$. Бу текислик $(2, -1, 3)$ нуқтадан ўтади: $2+4\cdot(-1)-2\cdot3+\lambda=0\Rightarrow\lambda=8$. Изланган текислик: $x+4y-2z+8=0$.

3-мисол. Текисликларнинг марказли боғлами битта нуқтада кесишадиган

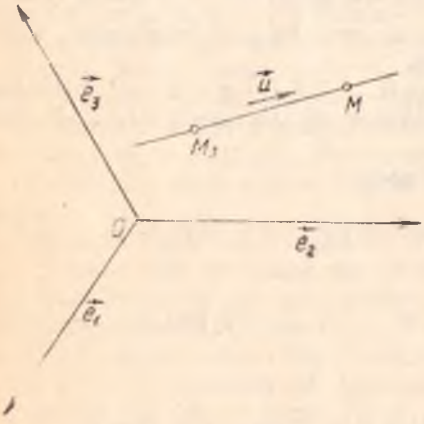
$$x+y-z+2=0,$$
$$4x-3y+z-1=0,$$
$$2x+y-5=0$$

текисликлар ёрдамида берилган. Шу боғламга тегишли ҳамда xOz текисликка параллел текисликни топинг.

Ечиш. Боғлам маркази берилган учта текисликнинг кесишган нуқтаси бўлади: $(1, 3, 6)$.

Энди $(1, 3, 6)$ нуқтадан ўтиб, $y=0$ текисликка параллел текислик тенгламасини $Ax+By+Cz+D=0$ кўринишда излаймиз. Бу текислик $y=0$ текисликка параллел бўлгани учун $A=C=O$, $B=1$ бўлиб, $y+D=0$; бу текислик шартга кўра $(1, 3, 6)$ нуқтадан ўтади, яъни $3+D=0$, $D=-3$. Изланган текислик: $y-3=0$.

16-§. Фазодаги тўғри чизиқ



178-чизма

1. Фазодаги тўғри чизиқ ўзининг нуқтаси ва шу чизиққа параллел бирор $\vec{u}\neq\vec{0}$ вектор билан тўла аниқланади (178-чизма).

$(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ реперда M_0 (x_0, y_0, z_0), $\vec{u}(l, m, n)$ бўлсин. Тўғри чизиқнинг ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтасини олайлик:

$$\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{u}\Rightarrow\overrightarrow{M_0M}=t\vec{u}\,(t\in R). \tag{26}$$

$\overrightarrow{OM_0}=\vec{r}_0$, $\overrightarrow{OM}=\vec{r}$ десак ҳамда $\overrightarrow{M_0M}=\overrightarrow{OM}-\overrightarrow{OM_0}$ ни ҳисобга олсак, (26) ни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{r}=\vec{r}_0+t\vec{u}. \tag{27}$$

(27) тенглама *тўғри чизиқнинг векторли тенгламаси* деб аталади, t га ҳар хил қийматлар бериш билан тўғри чизиққа тегишли нуқтанинг радиус-вектори топилади.

$\overrightarrow{M_0M}(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ ва (26) дан

$$\begin{array}{lll} x-x_0=t\cdot l, & & x=x_0+t\cdot l, \\ y-y_0=t\cdot m, & \text{ёки} & y=y_0+t\cdot m, \\ z-z_0=l\cdot n & & z=z_0+t\cdot n. \end{array} \qquad (28)$$

Бу (28) тенгламалар системаси тўғри чизиқнинг *параметрик* тенгламалари деб юритилади. M_0 — берилган нуқта, $\vec{u}$ эса u нинг *йўналтирувчи вектори* деб аталади.

Агар $l\cdot m\cdot n\neq 0$ бўлса, у ҳолда $(28)\Rightarrow t=\frac{x-x_0}{l}$, $t=\frac{y-y_0}{m}$, $t=\frac{z-z_0}{n}$, булардан

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}. \qquad (29)$$

Бу тенгламалар *тўғри чизиқнинг каноник тенгламалари* деб аталади.

2. Тўғри чизиқнинг икки нуқтаси унинг фазодаги вазиятини тўла аниқлайди: фараз этайлик, $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқталардан u тўғри чизиқ ўтсин $(M_1\neq M_2)$. Олдинги банддаги M_0 нуқта ўрнига M_1 ва $\vec{u}=\overrightarrow{M_1M_2}$ олинса, (29) га асосан:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \qquad (30)$$

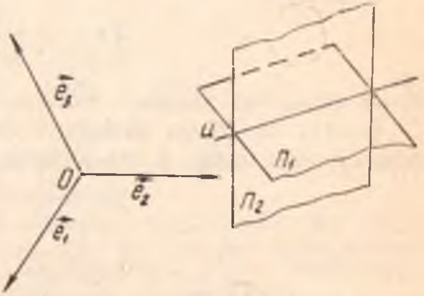
Берилган икки нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг тенгламалари (30) дир.

3. Фазодаги ҳар бир тўғри чизиқни икки текисликнинг кесишиш чизиги деб қараш мумкин. Шунга мувофиқ,

$$\begin{array}{l} \Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ \Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{array} \qquad (31)$$

тенгламалар системаси $\Pi_1\nparallel\Pi_2\Rightarrow A_1:B_1:C_1\neq A_2:B_2:C_2$ шарт бажарилганда тўғри чизиқни аниқлайди (179- чизма).

Тўғри чизиқнинг юқорида қурилган (27) — (30) тенгламаларининг биридан қолганларига ўтиш мумкин. Лекин у (31) кўринишдаги тенгламалари билан берилса, каноник кўринишга бевосита ўтиш мумкин эканлиги очиқдан-очиқ равшан эмас. Биз ҳозир шу масалага тўхталамиз. Каноник тенгламаларни ёзиш учун тўғри чизиқнинг битта нуқтаси ва йўналтирувчи векторини билиш керак. (31) уч номаълумли икки тенглама, демак, ўзгарувчилардан бирига, масалан, z га $z=z_0$ қиймат бериб ва ҳосил қилинган икки номаълумли иккита тенгламани



179- чизма

ечиб, $x = x_0$, $y=y_0$ қийматларни топамиз (бунда биз $\begin{vmatrix}A_1 & A_2\\ B_1 & B_2\end{vmatrix}\neq 0$ деб фараз қилдик). Натижада (x_0, y_0, z_0) нуқта (31) тўғри чизиққа тегишли бўлади, у ҳолда (31) ни қуйидагича ёзиб олсак бўлади.

$$A_1(x-x_0)+B_1(y-y_0)+C_1(z-z_0)=0,$$
$$A_2(x-x_0)+B_2(y-y_0)+C_2(z-z_0)=0.$$

Бу системадан қуйидагиларни топамиз:

$$x-x_0=\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}t,\ y-y_0=\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}t,\ z-z_0=\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}t.$$

Булардан

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}. \qquad (32)$$

Агар (31) тенгламаларни декарт реперида қарасак, $\vec{n}_1(A_1, B_1, C_1)$ вектор Π_1 текисликнинг $\vec{n}_2(A_2, B_2, C_2)$ вектор Π_2 текисликнинг нормал вектори бўлади. (32) тенгламалардаги махражларда турган ифодалар Π_1, Π_2 текисликлар нормал векторларининг вектор кўпайтмасининг мос координаталаридан иборат, яъни $\vec{u}=[\vec{n}_1, \vec{n}_2]$.

1-мисол. $M_0(1, 0, -4)$ нуқтадан ўтадиган ва $\vec{u}(1, -3, 2)$ векторга параллел тўғри чизиқнинг параметрик ва каноник тенгламаларини ёзиб, унинг учта нуқтасини топинг.

Ечиш. Бу ерди $x_0=1$, $y_0=0$, $z_0=-4$ ва $l=1$, $m=-3$, $n=2$; тегишли тенгламалар қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned}x&=1+t,\\ y&=-3t,\\ z&=-4+2t;\end{aligned}\qquad \frac{x-1}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z+4}{2}.$$

Энди шу тўғри чизиқнинг M_0 дан ташқари яна икки нуқтасини топиш учун t га иккита қиймат берамиз:

$$t=1\Rightarrow x=2,\ y=-3,\ z=-2,\ M_1(2, -3, -2),$$
$$t=-1\Rightarrow x=0,\ y=3,\ z=-6,\ M_2(0, 3, -6).$$

2-мисол.

$$\left.\begin{aligned}2x-y+z-4&=0,\\ x+y+5z-2&=0\end{aligned}\right\}$$

тўғри чизиқнинг каноник тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. Бу тўғри чизиқнинг бирор нуқтасини топамиз, $z=0$ деб фараз қилиш билан ҳосил қилинган

$$\begin{cases}2x-y-4=0,\\ x+y-2=0\end{cases}$$

системадан $x=2$, $y=0\Rightarrow M_0(2, 0, 0)$.

Энди йўналтирувчи векторнинг координаталарини топамиз. Бу ерда

$$A_1 = 2,\ B_1 = -1,\ C_1 = 1,\ A_2 = 1,\ B_2 = 1,\ C_2 = 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -6,\ m = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} = -9,\ n = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3.$$

Бу қийматларни (32) га қўямиз:

$$\frac{x-2}{-6} = \frac{y}{-9} = \frac{z}{3} \quad \text{ёки} \quad \frac{x-2}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{-1}.$$

17-§. Икки тўғри чизиқнинг ўзаро вазияти. Икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Тўғри чизиқлар боғлами

Фазода u_1, u_2 тўғри чизиқлар бирор аффин реперда ушбу параметрик тенгламалари билан берилган бўлсин:

$$u_1: \begin{aligned} x &= x_1 + l_1 t, \\ y &= y_1 + m_1 t, \\ z &= z_1 + n_1 t, \end{aligned} \qquad u_2: \begin{aligned} x &= x_2 + l_2 t, \\ y &= y_2 + m_2 t \\ z &= z_2 + n_2 t, \end{aligned}$$

бу ерда $\vec{u}_1(l_1,\ m_1,\ n_1)$, $\vec{u}_2(l_2,\ m_2,\ n_2)$.

Фазода икки тўғри чизиқ ўзаро параллел, кесишувчи ва айқаш бўлиши мумкин. Шу ҳолатларни айрим-айрим кўрайлик.

1. $u_1 \parallel u_2 \Rightarrow \vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2 \Leftrightarrow \frac{l_1}{l_2} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}$. (33)

2. $u_1 \cap u_2 \neq \varnothing$, яъни u_1, u_2 тўғри чизиқлар кесишсин. Бу ҳолда бу икки тўғри чизиқ бир текисликка тегишли бўлиб, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\overrightarrow{M_1M_2}$ векторлар компланар, яъни $(\vec{u}_1\vec{u}_2\,\overrightarrow{M_1M_2}) = 0$ ёки

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (34)$$

(34) тенглик u_1, u_2 тўғри чизиқларнинг бир текисликка тегишлилик шартидир.

Агар (34) шарт бажарилиб, (33) бажарилмаса, u_1, u_2 лар битта нуқтада кесишади.

3. u_1 ва u_2 кесишмаса ҳамда параллел бўлмаса, улар айқаш, демак, айқаш икки тўғри чизиқ учун

$$\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \end{vmatrix} \neq 0. \qquad (35)$$

u_1, u_2 тўғри чизиқларнинг декарт реперида қарасак, метрик характерли баъзи масалаларни ҳал қилиш мумкин.

4. Фазодаги икки тўғри чизиқ орасидаги бурчак. Икки тўғри чизиқ орасидаги *бурчак* деб, бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторлари орасидаги бурчакка айтилади.

Параметрик тенгламалари билан берилган u_1, u_2 тўғри чизиқлар учун $\vec{u}_1(l_1, m_1, n_1)$, $\vec{u}_2(l_2, m_2, n_2)$ бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларидир, демак,

$$\cos(\widehat{u_1, u_2}) = \frac{l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}}. \qquad (36)$$

Бурчакнинг косинуси маълум бўлса, бу бурчакни топиш осондир.

$$(\widehat{u_1, u_2}) = \frac{\pi}{2} \text{ бўлса, } u_1 \perp u_2 \text{ бўлиб, } (36) \Rightarrow l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (37)$$

Бу шарт икки тўғри чизиқнинг перпендикулярлик шартидир.

5. Фазодаги айқаш икки u_1, u_2 тўғри чизиқнинг умумий перпендикулярини топиш масаласини қарайлик. Икки айқаш тўғри чизиқ битта умумий перпендикулярга эгадир.

u_1, u_2 тўғри чизиқларнинг тенгламалари параметрик кўринишда берилган бўлсин, у ҳолда уларнинг умумий перпендикулярининг йўналтирувчи вектори $\vec{u} = [\vec{u}_1 \ \vec{u}_2]$ вектордан иборат, $\vec{u}$ вектор ва u_1 тўғри чизиқ билан аниқланадиган текисликни Π_1 билан, $\vec{u}$ вектор ва u_2 тўғри чизиқ билан аниқланадиган текисликни Π_2 билан белгиласак, бу текисликларнинг кесишмасидан ҳосил қилинган тўғри чизиқ изланган тўғри чизиқдир.

Аниқ мисолда бу тенгламалар содда кўринишда бўлади. Шунинг учун биз бу ерда кўриниши анча мураккаб тенгламани келтирмаймиз.

1-мисол. Қуйидаги тўғри чизиқларнинг ўзаро вазиятини аниқланг:

$$u_1: \begin{aligned} x &= 1 + 2t, \\ y &= 7 + t \\ z &= 3 + 4t \end{aligned} \qquad u_2: \begin{aligned} x &= 6 + 3t, \\ y &= -1 - 2t, \\ z &= -2 + t. \end{aligned}$$

Ечиш. u_1 тўғри чизиқда: $M_1(1, 7, 3)$, $\vec{u}_1(2, 1, 4)$; u_2 тўғри чизиқда; $M_2(6, -1, -2)$, $\vec{u}_2(3, -2, 1)$. Энди (34) шартни текширамиз:

$$(\vec{u}_1 \vec{u}_2 \overrightarrow{M_1 M_2}) = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & -2 & 1 \\ 5 & -8 & -5 \end{vmatrix} = 20 - 96 + 5 + 40 + 16 + 15 = 0,$$

демак, бу тўғри чизиқлар бир текисликка тегишли.

2-мисол. Ушбу икки тўғри чизиқ орасидаги бурчакни топинг (декарт реперида).

$$u_1: \begin{aligned} y + 1 &= 0, \\ x + 2z - 1 &= 0 \end{aligned} \qquad u_2: \begin{aligned} x &= 0, \\ z - 1 &= 0. \end{aligned}$$

Ечиш. Бу тўғри чизиқларнинг йўналтирувчи векторларини топамиз:

$$\vec{u}_1\left(\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right), \quad \vec{u}_1\left(\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix},\right.$$

$\left.\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\right)$, $\vec{u}_1(2, 0, -1)$, $\vec{u}_2 \left(\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right)$, $\vec{u}_2(0, -1, 0)$,

демак, $\vec{u}_2 = -\vec{j}$.

(36) га асссан $\cos\varphi = \cos(\widehat{u_1, u_2}) = 0 \Rightarrow \varphi = 90° \Rightarrow u_1 \perp u_2$.

3-мисол. $u_1: \frac{x-2}{4} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-1}{1}$; $u_2: \frac{x+4}{2} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+2}{-3}$ айқаш тўғри чизиқлар умумий перпендикулярининг тенгламасини тузинг.

Ечиш. $\vec{u}_1(4, 1, -1)$, $\vec{u}_2(2, -2, -3)$ векторларнинг вектор кўпайтмаси $\vec{u} = [\vec{u}_1\ \vec{u}_2]$ изланган тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори бўлади:

$$\vec{u}\left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -3 & 2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \right), \quad \vec{u}(-5, 10, -10).$$

$\vec{u}_1$, $\vec{u}$, $M_1(2, -1, 1)$ орқали аниқланувчи текислик тенгламаси (2) га асосан

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z-1 \\ 4 & 1 & -1 \\ -5 & 10 & -10 \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } y + z = 0.$$

$\vec{u}_2$, $\vec{u}$, $M_2(-4, 2, -2)$ билан аниқланувчи текислик тенгламаси эса

$$\begin{vmatrix} x+4 & y-2 & z+2 \\ 2 & -2 & -3 \\ -5 & 10 & -10 \end{vmatrix} = 0 \text{ ёки } 10x + 7y + 2z + 30 = 0.$$

Демак, изланган тўғри чизиқ тенгламаси:

$$\begin{cases} y + z = 0. \\ 10x + 7y + 2z + 30 = 0. \end{cases}$$

Энди тўғри чизиқлар боғлами ҳақида фикр юритамиз.

Таъриф. Фазодаги тайин M_0 нуқтадан ўтган барча тўғри чизиқлар тўплами *M_0 марқазли тўғри чизиқлар боғлами* деб аталади. $M_0(x_0, y_0\ z_0)$ марказли боғлам ушбу

$$x = x_0 + lt, \ y = y_0 + mt, \ z = z_0 + nt$$

параметрик тенгламалар билан ифодаланади, бу ерда l, m, n боғламдаги ҳар бир тўғри чизиқ учун тайин қийматларға эга.

Фазода M_0 нуқтадан фарқли бирор M нуқта берилса, шу M нуқтадан боғламга тегишли фақат битта тўғри чизиқ ўтади.

Таъриф. Агар фазода тайин u тўғри чизиқ берилган бўлса, унга параллел барча тўғри чизиқлар тўплами *параллел тўғри чизиқлар боғлами* деб аталади.

18-§. Фазода тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро вазияти

Декарт реперида u тўғри чизиқ параметрик тенгламалари билан, П текислик умумий тенгламаси билан берилган бўлсин:

$$u: \begin{cases} x = x_0 + lt \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{cases} \quad (38) \qquad \vec{u}\,(l,\ m,\ n),$$

$$\Pi : Ax + By + Cz + D = 0 \quad (39) \quad \vec{n}\,(A,\ B,\ C).$$

Аввало, тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишиш нуқтасини топиш масаласига тўхталайлик: бунинг учун берилган тенгламаларни система деб қараш керак. (38) ва (39) дан

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D + t\,(Al + Bm + Cn) = 0. \tag{40}$$

$Al + Bm + Cn \neq 0$ шартда

$$t = -\frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{Al + Bm + Cn} \tag{41}$$

бўлади. t нинг бу қийматини (38) га қўйсак, изланган нуқта топилади. Лекин

$$Al + Bm + Cn = 0 \tag{41'}$$

шарт бажарилса, яъни $\vec{u} \perp \vec{n}$ бўлса, u тўғри чизиқ П га параллел бўлади. Аксинча, $u \parallel \Pi \Rightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$.

Демак, $\vec{u} \cdot \vec{n} = Al + Bm + Cn = 0$ шарт тўғри чизиқ билан текисликнинг параллеллигини билдиради.

$$u \perp \Pi \Rightarrow \vec{u} \parallel \vec{n} \Rightarrow \frac{l}{A} = \frac{m}{B} = \frac{n}{C}, \tag{42}$$

бу (42) шарт тўғри чизиқнинг текисликка перпендикулярлигини билдиради.

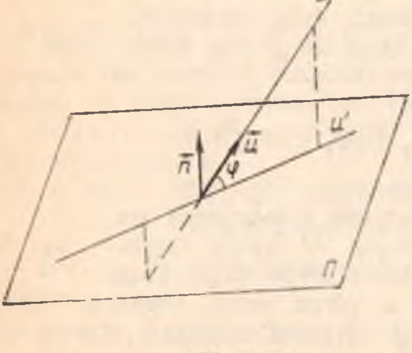
$u \in \Pi$ бўлган ҳол учун тўғри чизиқ билан текислик ўзаро вазиятининг хусусий ҳолидир. Бу вақтда (41′) шарт бажарилиб, ундан ташқари $M_0 \in \Pi$ бўлиши лозим, яъни

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{43}$$

Демак, $u \subset \Pi \Leftrightarrow$ (41′), (43).

Энди тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчакни топиш формуласини берамиз.

Таъриф. *Тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак* деб, тўғри чизиқ билан унинг шу текисликдаги ортогонал проекцияси орасидаги бурчакка айтилади (180-чизма). Биз $0 \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}$ деб фараз қиламиз.



180- чизма

180-чизмадан кўринадики, φ нинг ўрнига $(\widehat{\vec{n}, \vec{u}})$ бурчакни қабул қилиш мумкин. Бу бурчак $\frac{\pi}{2} - \varphi$ га ёки $\frac{\pi}{2} + \varphi$ га тенг. Демак, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$, шунинг учун

$$\sin\varphi = \left|\cos(\widehat{\vec{n}, \vec{u}})\right| = \frac{|Al + Bm + Cn|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C_2} \cdot \sqrt{l^2 + m^2 + n^2}}. \qquad (44)$$

1-мисол. Ушбу

$$x = 1 + 2t,$$
$$y = 3t,$$
$$z = -2 + t$$

тўғри чизиқ билан $2x - y + z + 1 = 0$ текисликнинг кесишиш нуқтасини топинг.

Ечиш. Тўғри чизиқ тенгламаларидаги x, y. z нинг қийматларини текислик тенгламасига қўямиз:

$$2(1 + 2t) - 3t + (-2 + t) + 1 = 0 \text{ ёки } t = -\frac{1}{2}.$$

У ҳолда $x = 1 + 2\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -2 - \frac{1}{2} = -\frac{5}{2}$; изланган нуқта $\left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$.

2-мисол. $\frac{x+3}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+1}{2}$ тўғри чизиқ билан $4x + 2y + 2z - 5 = 0$ текислик орасидаги бурчакни топинг.

Ечиш. $\vec{u}(1, -2, 2)$, $\vec{n}(4, 2, 2)$,

$$\sin\varphi = \frac{|4 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 2 \cdot 2|}{\sqrt{4^2 + 2^2 + 2^2} \cdot \sqrt{1^3 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{4}{\sqrt{24} \cdot \sqrt{9}} =$$

$$= \frac{\sqrt{6}}{9} \Rightarrow \varphi = \arcsin\frac{\sqrt{6}}{9}.$$

3-мисол. $P(7, 9, 7)$ нуқтадан $\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ тўғри чизиққача бўлган масофани топинг.

Ечиш. Нуқтадан тўғри чизиққача бўлган масофани топиш учун биз формула берганимиз йўқ, бундай масала қуйидагича осон ҳал қилинади:

а) берилган нуқтадан ўтиб, берилган тўғри чизиққа перпендикуляр текислик тенгламаси тузилади;

б) шу текислик билан берилган тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси топилади;

в) бу топилган нуқта билан берилган нуқта орасидаги масофа топилади.

Шу йўсинда масалани ечишга киришамиз.

а) $P\ (7,\ 9,\ 7)$ нуқтадан ўтиб, $\vec{n}=\vec{u}\,(4,\ 3,\ 2)$ векторга перпендикуляр текисликнинг тенгламасини тузамиз: $4\,(x-7)+3\,(y-9)+2\,(z-7)=0$ ёки

$$4x+3y+2z-69=0, \qquad (*)$$

б) берилган тўғри чизиқ тенгламасини параметрик кўринишда ёзамиз: $x=2+4t$, $y=1+3t$, $z=2t$ ва буларни (*) тенгламага қўямиз:

$$4\,(2+4t)+3\,(1+3t)+2\cdot 2t-69=0,$$
$$29t-58=0,$$
$$t=2$$

$$\left.\begin{aligned} x&=2+4\cdot 2=10,\\ y&=1+3\cdot 2=7,\\ z&=2\cdot 2=4 \end{aligned}\right\}\Rightarrow Q\ (10,\ 7,\ 4)$$ нуқта тўғри чизиқ билан текисликнинг кесишган нуқтасидир.

$$\rho\,(P,\ Q)=\sqrt{(10--7)^2+(7-9)^2+(4-7)^2}=\sqrt{9+4+9}=22.$$

III БОБ. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ СИРТЛАР ВА УЛАРНИ ҚАНОНИК ТЕНГЛАМАЛАРИ БЎЙИЧА ЎРГАНИШ

19-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизиқ ва текислик билан кесишиши

Биз I бобда сирт тенгламаси ҳақидаги тушунча билан танишган эдик.

Таъриф. Бирор аффин реперда иккинчи тартибли алгебраик тенглама билан аниқланадиган нуқталар тўплами *иккинчи тартибли сирт* деб аталади:

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0, \qquad (1)$$

бунда

$$a_{11}^2 + a_{22}^2 + a_{33}^2 + a_{12}^2 + a_{13}^2 + a_{23}^2 \neq 0, \quad a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4. \qquad (2)$$

Аввало, бу сиртнинг бирор u тўғри чизиқ билан кесишиши масаласини кўриб чиқайлик. Фараз қилайлик, u тўғри чизиқ S сирт қаралаётган аффин реперда қуйидаги параметрик тенгламалар билан берилган бўлсин:

$$\begin{aligned} & x = x_0 + lt, \\ u: \ & y = y_0 + mt, \\ & z = z_0 + nt. \end{aligned} \qquad (3)$$

S билан u нинг кесишмасини топиш учун уларнинг тенгламаларини биргаликда ечиш керак. Шунинг учун (3) даги x, y, z нинг қийматларини (1) га қўямиз:

$$a_{11}(x_0 + lt)^2 + a_{22}(y_0 + mt)^2 + a_{33}(z_0 + nt)^2 + 2a_{12}(x_0 + lt)(y_0 + \\ + mt) + 2a_{13}(x_0 + lt)(z_0 + nt) + 2a_{23}(y_0 + mt)(z_0 + nt) + \\ + 2a_{14}(x_0 + lt) + 2a_{24}(y_0 + mt) + 2a_{34}(z_0 + nt) + a_{44} = 0.$$

Қавсларни очиб, ўхшаш ҳадларни ихчамласак, t га нисбатан ушбу квадрат тенглама ҳосил бўлади:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \qquad (4)$$

бунда:

$$\begin{aligned} P &= a_{11}l^2 + a_{22}m^2 + a_{33}n^2 + 2a_{12}lm + 2a_{23}mn + 2a_{13}nl, \\ Q &= l(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}) + m(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + \\ &+ a_{23}z_0 + a_{24}) + n(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}), \qquad (5) \\ R &= a_{11}x_0^2 + a_{22}y_0^2 + a_{33}z_0^2 + 2a_{12}x_0y_0 + 2a_{13}x_0z_0 + 2a_{23}y_0z_0 + \\ &+ 2a_{14}x_0 + 2a_{24}y_0 + 2a_{34}z_0 + a_{44}. \end{aligned}$$

(5) дан кўриниб турибдики, P коэффициент u тўғри чизиқнинг

(x_0, y_0, z_0) нуқтасига боғлиқ бўлмасдан, u нинг фақат йўналтирувчи векторигагина боғлиқдир.

Таъриф. Йўналтирувчи векторлари $P=0$ шартни қаноатлантирадиган барча тўғри чизиқлар берилган сиртга нисбатан *асимптотик йўналишга эга бўлган тўғри чизиқлар* дейилади, йўналтирувчи векторларни эса *асимптотик йўналишли векторлар* дейилади.

Агар u тўғри чизиқ S сиртга нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлмаса (яъни $P \neq 0$ бўлса), у ҳолда (4) квадрат тенглама иккита t_1, t_2 илдизга эга бўлади, бунда t_1, t_2 иккита турли ҳақиқий сон бўлса, тўғри чизиқ сирт билан иккита умумий нуқтага эгадир.

t_1, t_2 қўшма комплекс сонлар бўлса, у ҳолда тўғри чизиқ сирт билан иккита мавҳум умумий нуқтага эга, $t_1 = t_2$ да тўғри чизиқ сирт билан устма-уст тушадиган иккита умумий нуқтага эга бўлиб, бу вақтда тўғри чизиқ сиртга *уринади* дейилади.

Агар u тўғри чизиқ S сиртга нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлса (яъни $P=0$ бўлса), у ҳолда (4) дан

$$2Qt + R = 0 \tag{6}$$

бўлиб, бу ерда турли ҳоллар юз бериши мумкин.

а) $Q \neq 0$, $(6) \Rightarrow t = -\frac{R}{2Q}$ бўлиб, u тўғри чизиқ S сирт билан битта нуқтада кесишади.

б) $Q = 0$, лекин $R \neq 0$ бўлса, (6) тенглама маънога эга эмас, бу ҳол S сирт билан u тўғри чизиқнинг кесишмаслигини билдиради.

с) $Q = 0$, $R = 0$ бўлса, (6) тенглама t нинг ҳар қандай қийматида ўринли, бу эса u тўғри чизиқнинг ҳамма нуқталари S га тегишли, яъни тўғри чизиқ S сиртнинг таркибида эканлигини билдиради (бундай тўғри чизиқ S сиртнинг *ясовчиси* деб аталади). Энди $P \neq 0$ бўлиб, $t_1 = t_2$ ҳолга қайтайлик, бу ҳолда u тўғри чизиқ S сиртга уринма деб аталган эди. Бу вақтда u тўғри чизиқнинг (x_0, y_0, z_0) нуқтаси сифатида шу уриниш нуқтасини олсак, бу нуқта S га ҳам тегишли бўлгани учун (5) дан $R=0$. У ҳолда (4) дан

$$Pt^2 + 2Qt = 0 \text{ ёки } t(Pt + 2Q) = 0.$$

Бу тенгламанинг битта илдизи $t_1 = 0$, иккинчиси эса $t_2 = -\frac{2Q}{P}$ дир.

Равшанки, $t_1 = t_2 = 0$ бўлиши учун $Q = 0$ бўлиши зарур ва етарлидир, яъни

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})\,l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})\,m + \\ + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})\,n = 0. \tag{7}$$

Бу тенглик u тўғри чизиқ S сиртга нисбатан асимптотик йўналишга эга бўлмаганда унинг S сиртга (x_0, y_0, z_0) нуқтада уриниши учун йўналтирувчи $\vec{u}$ вектор координаталарини қаноатлантириши керак бўлган шартдир. Равшанки, (7) ни қаноатлантирувчи l, m, n лар чексиз кўпдир (чунки уч номаълумли битта тенгламадир), демак M_0 нуқтада сиртга уринувчи чексиз кўп тўғри чизиқлар мавжуд. Бу уринмалардан бирига тегишли ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтани олни, $\overrightarrow{M_0 M}\,(x-x_0,\ y-y_0,\ z-z_0)$ вектор шу уринманинг йўналтирувчи вектори бўлади, у ҳолда унинг координаталари (7) шартни қаноатлантириши керак:

$$(a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14})(x-x_0)+(a_{21}x_0+a_{22}y_0+$$
$$+a_{23}z_0+a_{24})(y-y_0)+(a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+$$
$$+a_{34})(z-z_0)=0. \qquad (8)$$

Шундай қилиб, сиртнинг M_0 нуқтасига ўтказилган ҳар бир уринма тўғри чизиқдаги ихтиёрий нуқтанинг координаталари (8) ни қаноатлантириши керак. (8) тенглама x, y, z га нисбатан чизиқли тенглама бўлгани учун у M_0 нуқтадан ўтувчи бирор текисликни аниқлайди, худди шу текислик S сиртнинг M_0 нуқтасига ўтказилган *уринма текислиги* деб аталади. Демак, иккинчи тартибли сиртнинг бирор нуқтасига ўтказилган барча уринма тўғри чизиқлар тўплами бир текисликка тегишли бўлиб, бу текислик сиртнинг шу нуқтасига ўтказилган уринма текисликдан иборат. Шундай қилиб, (8) тенглама иккинчи тартибли сиртнинг $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасига ўтказилган уринма текислик тенгламасидир.

Агар (8) даги $(x-x_0)$, $(y-y_0)$, $(z-z_0)$ нинг коэффициентлари бир вақтда нолга тенг, яъни

$$a_{11}x_0+a_{12}y_0+a_{13}z_0+a_{14}=0,$$
$$a_{21}x_0+a_{22}y_0+a_{23}z_0+a_{24}=0,$$
$$a_{31}x_0+a_{32}y_0+a_{33}z_0+a_{34}=0 \qquad (9)$$

бўлса, уринма текислик ноаниқдир.

Бу (9) шартларни қаноатлантирувчи $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқта сиртнинг *махсус нуқтаси* деб аталади. Демак, сиртнинг махсус нуқтасида унинг уринма текислиги аниқланмаган бўлади.

Энди иккинчи тартибли сирт билан текисликнинг кесишиш масаласига ўтайлик.

S иккинчи тартибли сирт ва П текислик берилган бўлсин. Аффин реперни шундай танлаб оламизки, $\Pi = xOy$ бўлсин, у ҳолда шу реперда П текислик

$$z=0 \qquad (10)$$

тенглама билан аниқланади. S сиртнинг тенгламаси эса шу реперда умумий ҳолда, яъни (1) кўринишда бўлсин. (1) ва (10) тенгламаларни биргаликда ечсак,

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{14}x+2a_{24}y+a_{44}=0. \qquad (11)$$

S сиртга ва П текисликка тегишли бўлган барча нуқталар (11) тенгламани қаноатлантиради.

Қуйидаги ҳоллар юз бериши мумкин. 1) $a_{11}^2+a_{12}^2+a_{22}^2\neq 0$, бу вақтда умуман олганда (11) тенглама $z=0$ текисликда иккинчи тартибли чизиқни аниқлайди.

2) $a_{11}=a_{12}=a_{22}=0$, бу ерда: а) a_{14} ёки a_{24} дан камида биттаси нолдан фарқли бўлса, (11) тенглама $2a_{14}x+2a_{24}y+a_{44}=0$

кўринишда бўлиб, $z = 0$ текисликда тўғри чизиқни аниқлайди, демак, бу ҳолда S сирт билан П текислик тўғри чизиқ бўйича кесишади;

б) $a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0 \Rightarrow (1)$ тенглама $z(2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + 2a_{34}) = 0$ кўринишда бўлиб, у $z = 0$, $2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33}z + a_{34} = 0$ текисликларга ажралиб кетади (равшанки, бу вақтда берилган П текислик шу сирт таркибида бўлади);

с) $a_{14} = a_{24} = 0$, $a_{14} \neq 0 \Rightarrow (11)$ тенгламадан $a_{44} = 0$ келиб чиқиб, зидлик рўй беради, бу эса S сирт билан П текислик бирорта ҳам умумий нуқтага эга эмаслигини билдиради.

Шундай қилиб, иккинчи тартибли сиртнинг текислик билан кесими:

а) иккинчи тартибли чизиқдан:

б) битта тўғри чизиқдан;

с) текисликдан (бу вақтда сирт иккита текисликка ажралиб, берилган текислик шу текисликлардан бири бўлади);

д) бўш тўпламдан (яъни сирт билан теислик битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмайди) иборат экан.

1-мисол. $x^2 - xy + zy - 5z = 0$ сирт билан $\frac{x-10}{7} = \frac{y-5}{3} = \frac{z}{-1}$ тўғри чизиқнинг кесишган нуқталарини топинг.

Ечиш. Берилган тўғри чизиқ тенгламасини параметрик кўринишда ёзамиз: $x = 10 + 7t$, $y = 5 + 3t$, $z = -t$, буларни берилган сирт тенгламасига қўйсак, $(10 + 7t)^2 - (10 + 7t)(5 + 3t) - t(5 + 3t) + 5t = 0$. Бу тенгламани соддалаштирсак,

$$t^2 + 3t + 2 = 0,$$

бу квадрат тенгламанинг илдизлари: $t_1 = -1$, $t_2 = -2$. Бу қийматларни тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларидаги t нинг ўрнига қўйсак,

$$t_1 = -1 \text{ да } x = 10 + 7(-1) = 3,\ y = 5 + 3(-1) = 2,$$
$$z = -(-1) = 1;$$
$$t_2 = -2 \text{ да } x = 10 + 7(-2) = -4,\ y = 5 + 3(-2) = -1,$$
$$z = -(-2) = 2.$$

Демак, изланган нуқталар: (3, 2, 1) ва (—4, —1, 2).

2-мисол. $x^2 - y^2 - 2x + z - 3 = 0$ сиртнинг (1, 1, 5) нуқтасидаги уринма текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш: Бу ерда: $a_{11} = 1$, $a_{22} = -1$, $a_{33} = 0$, $a_{12} = 0$, $a_{13} = 0$,

$$a_{23} = 0,\ a_{14} = -1,\ a_{24} = 0,\ a_{34} = \frac{1}{2},\ a_{14} = -3,$$

$$x_0 = 1,\ y_0 = 1,\ z_0 = 5.$$

Буларни (8) га қўйсак,

$$-(y - 1) + \frac{1}{2}(z - 5) = 0 \text{ ёки } 2y - z + 3 = 0,$$

бу изланган уринма текислик тенгламасидир.

3-мисол. $x^2+3y^2-4xz-2yz+z-6=0$ сиртнинг $z=0$ текислик билан кесимини топинг.

Ечиш: $z=0$ ни берилган сирт тенгламасига қўйсак,

$$x^2+3y^2-6=0.$$

Буни соддароқ ҳолга келтирамиз:

$$\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1,$$

демак, кесимда ярим ўқлари $\sqrt{6}$ ва $\sqrt{2}$ бўлган эллипс ҳосил қилинади.

20-§. Сферик сирт

I бобда сирт тенгламаси тушунчасини берганимизда сфера таърифини бериб, унинг қуйидаги каноник тенгламасини декарт реперида келтириб чиқарган эдик:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2, \tag{12}$$

бунда $(a,\ b,\ c)$ — сфера маркази, R — сфера радиуси.

(12) ни қуйидагича ёзамиз:

$$x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+a^2+b^2+c^2-R^2=0. \tag{12'}$$

Бундан: 1) сферанинг иккинчи тартибли сирт эканлигини кўрамиз,

2) (12′) да xy, xz, yz кўпайтмалар қатнашган ҳадлар йўқлигини, 3) x^2, y^2, z^2 олдидаги коэффициентларнинг 1 га тенглигини кўриб турибмиз.

Энди (1) да $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$ ва $a_{11}=a_{22}=a_{33}$ деб фараз қилинса,

$$a_{11}x^2+a_{11}y^2+a_{11}z^2+2a_{14}x+2a_{24}y+2a_{34}z+a_{44}=0 \tag{13}$$

тенглама сферани ифода қиладими деган саволга жавоб излайлик. $a_{11}\neq 0$ га бўлиб юбориб,

$$\frac{2a_{14}}{a_{11}}=A,\ \frac{2a_{24}}{a_{11}}=B,\ \frac{2a_{34}}{a_{11}}=C,\ \frac{a_{44}}{a_{11}}=D$$

белгилашларни киритсак,

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0. \tag{14}$$

Бу тенгламани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$x^2+Ax+\left(\frac{A}{2}\right)^2-\left(\frac{A}{2}\right)^2+y^2+By+\left(\frac{B}{2}\right)^2-\left(\frac{B}{2}\right)^2+z^2+Cz+$$

$$+\left(\frac{C}{2}\right)^2-\left(\frac{C}{2}\right)^2+D=0,$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B^2}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2+D-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}-\frac{C^2}{4}=0$$

ёки

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2-4D). \quad (15)$$

Қуйидаги ҳолларни қараб чиқайлик:

а) $A^2+B^2+C^2-4D>0$; бу ҳолда

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2,$$

бу тенглама эса маркази $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ нуқтада ва радиуси $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ га тенг сфера тенгламасидир.

б) $A^2+B^2+C^2-4D=0$, бу ҳолда (15) тенглама

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

кўринишда бўлиб, уни қаноатлантирувчи фақат битта $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ нуқта мавжуддир.

с) $A^2+B^2+C^2-4D<0$. Бундан кўринадики, фазода (15) ни қаноатлантирувчи битта ҳам нуқта мавжуд эмас. Умумийликни бузмаслик учун бу вақтда (15) тенглама *мавҳум сферани аниқлайди* деймиз.

Демак, (14) тенглама фақатгина $A^2+B^2+C^2-4D>0$ шартда сферани аниқлайди.

1-мисол. $2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-5=0$ сферанинг маркази ва радиусини топинг.

Ечиш. Тенгламадан:

$$x^2+y^2+z^2-x+2y+z-\frac{5}{2}=0,$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+2y+1-1+z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}=0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-4=0.$$

Демак, сферанинг маркази $\left(\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ нуқтада, радиуси эса 2 га тенг.

2-мисол. $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ сферанинг $M(3, \sqrt{2}, 1)$ нуқтасида унга ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш. (8) тенгламага a_{ij} $(i, j=1, 2, 3, 4)$ нинг қийматларини қўйиб, уринма текислик тенгламасини ёзиш ҳам мумкин эди, лекин биз бу ерда бошқача йўл тутамиз. Бу ерда, сфера маркази $O'(2, 0, 0)$ нуқтада, радиуси эса 2 га тенг. Сферанинг M нуқтада ўтказилган уринма текислиги сфера радиусига перпендикулярлиги сабабли $\overrightarrow{MO'}$ вектор уринма текисликнинг нормал вектори бўлади. Аммо

$\overrightarrow{MO'}(-1, -\sqrt{2}, -1)$ демак. изланган текислик тенгламаси (II боб, 13-§):

$$-1(x-3)-\sqrt{2}(y-\sqrt{2})-1(z-1)=0$$

ёки

$$x+\sqrt{2y}+z-6=0.$$

21-§. Иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар

Бирор П текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ҳамда шу текисликка параллел бўлмаган u тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Таъриф. u тўғри чизиққа параллел ҳамда L чизиқ билан кесишувчи фазодаги барча тўғри чизиқлар тўплами *иккинчи тартибли цилиндрик сирт* деб аталади.

Таърифда қатнашаётган L чизиқ шу цилиндрик сиртнинг *йўналтирувчиси*, тўғри чизиқлар эса унинг *ясовчилари* дейилади.

Таърифдан фойдаланиб, аффин реперда S цилиндрик сирт тенгламасини келтириб чиқарайлик. Соддалик учун, йўналтирувчи чизиқни xOy текисликда оламиз:

$$L: F(x, y)=0. \tag{16}$$

u тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{u}(l, m, n)$ (181-чизма).

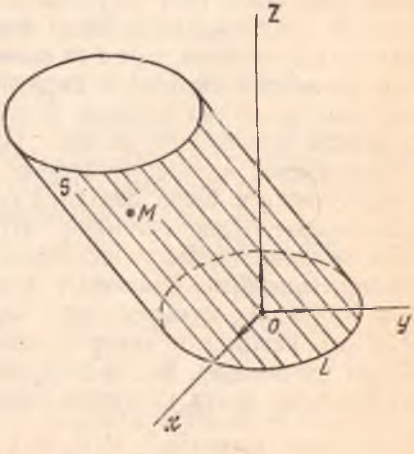
Ихтиёрий $M(x, y, z)\in S$ нуқтани оламиз. Шу M нуқтадан ўтган ясовчининг xOy текислик билан кесишган нуқтаси $N(x_1, y_1, 0)$ бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{MN}(x_1-x, y_1-y, -z)$ ва $\overrightarrow{MN}\parallel\vec{u}$, яъни $\overrightarrow{MN}=\lambda\vec{u}$. Бундан: $x_1-x=\lambda l$, $y_1-y=\lambda m$, $-z=\lambda n$ ($n\neq 0$, чунки $\vec{u}\nparallel xOy$). $-z=\lambda n$ дан λ ни топиб, олдинги икки тенгликка қўямиз:

$$x_1=x-\frac{l}{n}z,\quad y_1=y-\frac{m}{n}z. \tag{17}$$

Аммо $N\in L\Rightarrow F(x_1, y_1)=0$, демак,

$$F\left(x-\frac{l}{n}z,\ y-\frac{m}{n}z\right)=0. \tag{18}$$

Шундай қилиб, (18) тенглама цилиндрик сиртнинг тенгламасидир.



181- чизма

Демак, йўналтирувчиси $F(x, y)=0$ кўринишдаги тенглама билан берилган, ясовчилари эса (l, m, n) векторга параллел цилиндрик сирт тенглама-

сини ҳосил қилиш учун (16) даги x, y ўрнига мос равишда $x - \frac{l}{n} z$, $y - \frac{m}{n} z$ ифодаларни қўйиш керак экан. $u \parallel Oz$ дан иборат хусусий ҳолда $\vec{u} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u}\,(0,\ 0,\ n)$ ва (18) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$F(x, y) = 0. \tag{19}$$

Ажойиб хулосага келдик: ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндрик сирт тенгламаси йўналтирувчи тенгламасининг ўзгинасидир.

Масалан, xOy текисликда эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламаси билан берилган бўлса, бу тенглама фазода ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндрик сиртдан иборат.

Иккинчи тартибли цилиндрик сирт $\mathscr{B} = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ аффин реперда берилган бўлсин: равшанки, бу тенглама иккинчи даражалидир, сиртнинг ясовчиларига параллел бўлмаган П текислик билан кесимини текширайлик.

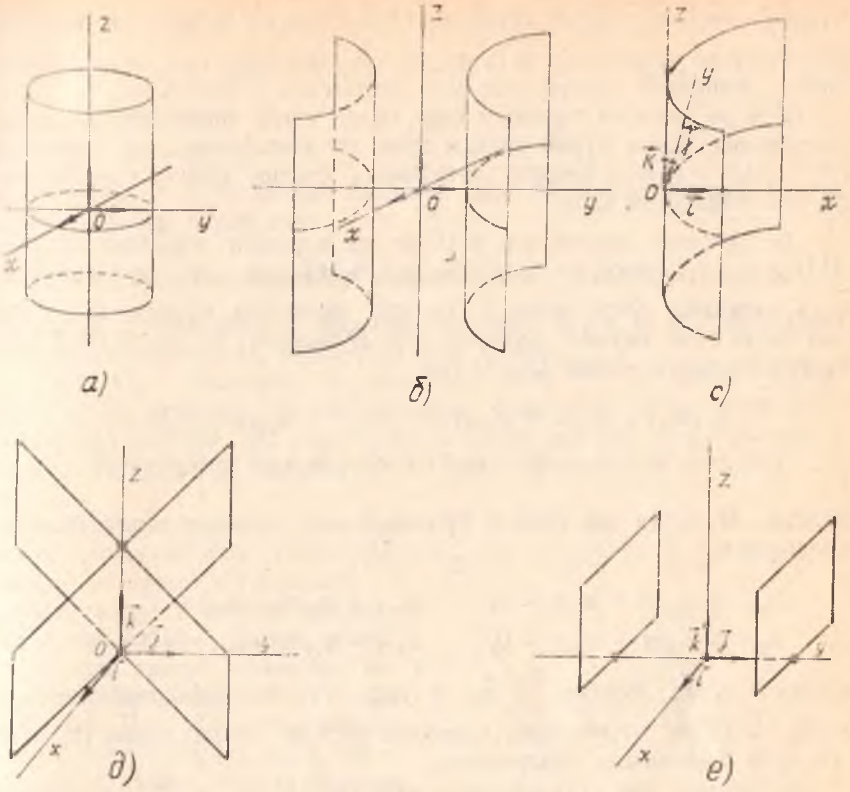
Янги $\mathscr{B}' = (O', \vec{e}_1', \vec{e}_2', \vec{e}_3')$ аффин реперни шундай танлаб оламизки, O нуқта билан $\vec{e}_1'$, $\vec{e}_2'$ базис векторлар П да жойлашсин, $\vec{e}_3'$ эса u га параллел бўлсин. У ҳолда $\mathscr{B}$ дан $\mathscr{B}'$ га ўтишда тенгламанинг даражаси сақлангани учун S сирт $\mathscr{B}'$ да ҳам иккинчи тартибли цилиндрик сиртни аниқлайди, лекин бу тенгламада учинчи ўзгарувчи z' қатнашмайди ($O'z' \parallel \vec{u}$ бўлгани учун).

Унинг $\mathscr{B}'$ репердаги тенгламасини умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0. \tag{20}$$

Демак, S билан П нинг кесишмасидан ҳосил бўлган геометрик образ умумий ҳолда (20) тенглама билан аниқланади. Бу (20) тенглама эса П текисликдаги иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасидир, шу иккинчи тартибли чизиқнинг турига қараб иккинчи тартибли цилиндрни синфларга ажратиш мумкин. Бундан ташқари, (20) билан аниқланадиган чизиқни S нинг йўналтирувчиси сифатида қабул қилсак ҳам бўлади. Демак, иккинчи тартибли цилиндрнинг йўналтирувчилари: эллипс, гипербола, парабола, иккита кесишувчи тўғри чизиқ, иккита ўзаро параллел (устма-уст тушмаган) тўғри чизиқлардан иборат бўлиши мумкин. Йўналтирувчилари шу чизиқлардан иборат иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар мос равишда *эллиптик цилиндр*, *гиперболик цилиндр*, *параболик цилиндр*, *иккита кесишувчи текислик*, *иккита ўзаро параллел текислик* (устма-уст тушмаган) деб юритилади (охирги иккитаси баъзан *айниган цилиндр* деб ҳам юритилади). Бу цилиндрларнинг тенгламасини декарт реперида (каноник ҳолга келтириб) ёзамиз:

Эллиптик цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (182-a чизма).



182- чизма

Гиперболик цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (182-*б* чизма).

Параболик цилиндр $y^2 = -2px$ (182-*с* чизма).

Икки кесишувчи текислик $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (182-*д* чизма).

Икки параллел текислик $x^2 - a^2 = 0$ $(a \neq 0)$ (182-*е* чизма).

Мисол. Йўналтирувчиси (xOy) текисликда $x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$ тенглама билан аниқланувчи, ясовчилари (1, 0, 1) векторга параллел цилиндрик сирт тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Берилганларга асосан: $F(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$, $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $l = 1$, $m = 0$, $n = 1$. У ҳолда бу сирт тенгламаси:

$$F(x - z, y) = (x - z)^2 + 2(x - z)y - 3y^2 - (x - z) = 0.$$

Энди иккинчи тартибли сирт

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (1)$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}(A^2+B^2+C^2-4D). \qquad (15)$$

Қуйидаги ҳолларни қараб чиқайлик:

а) $A^2+B^2+C^2-4D>0$; бу ҳолда

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2,$$

бу тенглама эса маркази $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$ нуқтада ва радиуси $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ га тенг сфера тенгламасидир.

б) $A^2+B^2+C^2-4D=0$, бу ҳолда (15) тенглама

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

кўринишда бўлиб, уни қаноатлантирувчи фақат битта $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$ нуқта мавжуддир.

с) $A^2+B^2+C^2-4D<0$. Бундан кўринадики, фазода (15) ни қаноатлантирувчи битта ҳам нуқта мавжуд эмас. Умумийликни бузмаслик учун бу вақтда (15) тенглама *мавҳум сферани аниқлайди* деймиз.

Демак, (14) тенглама фақатгина $A^2+B^2+C^2-4D>0$ шартда сферани аниқлайди.

1-мисол. $2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-5=0$ сферанинг маркази ва радиусини топинг.

Ечиш. Тенгламадан:

$$x^2+y^2+z^2-x+2y+z-\frac{5}{2}=0,$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+2y+1-1+z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}=0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-4=0-$$

Демак, сферанинг маркази $\left(\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2}\right)$ нуқтада, радиуси эса 2 га тенг.

2-мисол. $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ сферанинг $M(3,\ \sqrt{2},\ 1)$ нуқтасида унга ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш. (8) тенгламага a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ нинг қийматларини қўйиб, уринма текислик тенгламасини ёзиш ҳам мумкин эди, лекин биз бу ерда бошқача йўл тутамиз. Бу ерда, сфера маркази $O'(2,\ 0,\ 0)$ нуқтада, радиуси эса 2 га тенг. Сферанинг M нуқтада ўтказилган уринма текислиги сфера радиусига перпендикулярлиги сабабли $\overrightarrow{MO'}$ вектор уринма текисликнинг нормал вектори бўлади. Аммо

$\overrightarrow{MO'}(-1, -\sqrt{2}, -1)$ демак. изланган текислик тенгламаси (II боб, 13-§):

$$-1(x-3)-\sqrt{2}(y-\sqrt{2})-1(z-1)=0$$

ёки

$$x+\sqrt{2y}+z-6=0.$$

21-§. Иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар

Бирор П текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ҳамда шу текисликка параллел бўлмаган u тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Таъриф. u тўғри чизиққа параллел ҳамда L чизиқ билан кесишувчи фазодаги барча тўғри чизиқлар тўплами *иккинчи тартибли цилиндрик сирт* деб аталади.

Таърифда қатнашаётган L чизиқ шу цилиндрик сиртнинг *йўналтирувчиси*, тўғри чизиқлар эса унинг *ясовчилари* дейилади.

Таърифдан фойдаланиб, аффин реперда S цилиндрик сирт тенгламасини келтириб чиқарайлик. Соддалик учун, йўналтирувчи чизиқни xOy текисликда оламиз:

$$L: F(x, y)=0. \tag{16}$$

u тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{u}(l, m, n)$ (181-чизма).

Ихтиёрий $M(x, y, z)\in S$ нуқтани оламиз. Шу M нуқтадан ўтган ясовчининг xOy текислик билан кесишган нуқтаси $N(x_1, y_1, 0)$ бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{MN}(x_1-x, y_1-y, -z)$ ва $\overrightarrow{MN}\parallel\vec{u}$, яъни $\overrightarrow{MN}=\lambda\vec{u}$. Бундан: $x_1-x=\lambda l$, $y_1-y=\lambda m$, $-z=\lambda n$ ($n\neq0$, чунки $\vec{u}\nparallel xOy$). $-z=\lambda n$ дан λ ни топиб, олдинги икки тенгликка қўямиз:

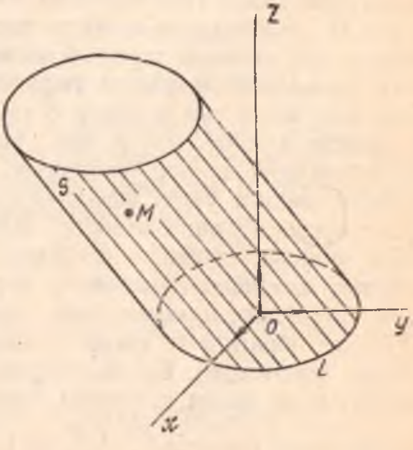
$$x_1=x-\frac{l}{n}z,\quad y_1=y-\frac{m}{n}z. \tag{17}$$

Аммо $N\in L\Rightarrow F(x_1, y_1)=0$, демак,

$$F\left(x-\frac{l}{n}z,\ y-\frac{m}{n}z\right)=0. \tag{18}$$

Шундай қилиб, (18) тенглама цилиндрик сиртнинг тенгламасидир.

Демак, йўналтирувчиси $F(x, y)=0$ кўринишдаги тенглама билан берилган, ясовчилари эса (l, m, n) векторга параллел цилиндрик сирт тенглама-



181-чизма

сини ҳосил қилиш учун (16) даги x, y ўрнига мос равишда $x - \frac{l}{n} z$, $y - \frac{m}{n} z$ ифодаларни қўйиш керак экан. $u \parallel Oz$ дан иборат хусусий ҳолда $\vec{u} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u}\,(0,\ 0,\ n)$ ва (18) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$F(x,\ y) = 0. \tag{19}$$

Ажойиб хулосага келдик: ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндрик сирт тенгламаси йўналтирувчи тенгламасининг ўзгинасидир.

Масалан, xOy текисликда эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламаси билан берилган бўлса, бу тенглама фазода ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндрик сиртдан иборат.

Иккинчи тартибли цилиндрик сирт $\mathscr{B} = (0,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ аффин реперда берилган бўлсин: равшанки, бу тенглама иккинчи даражалидир, сиртнинг ясовчиларига параллел бўлмаган П текислик билан кесимини текширайлик.

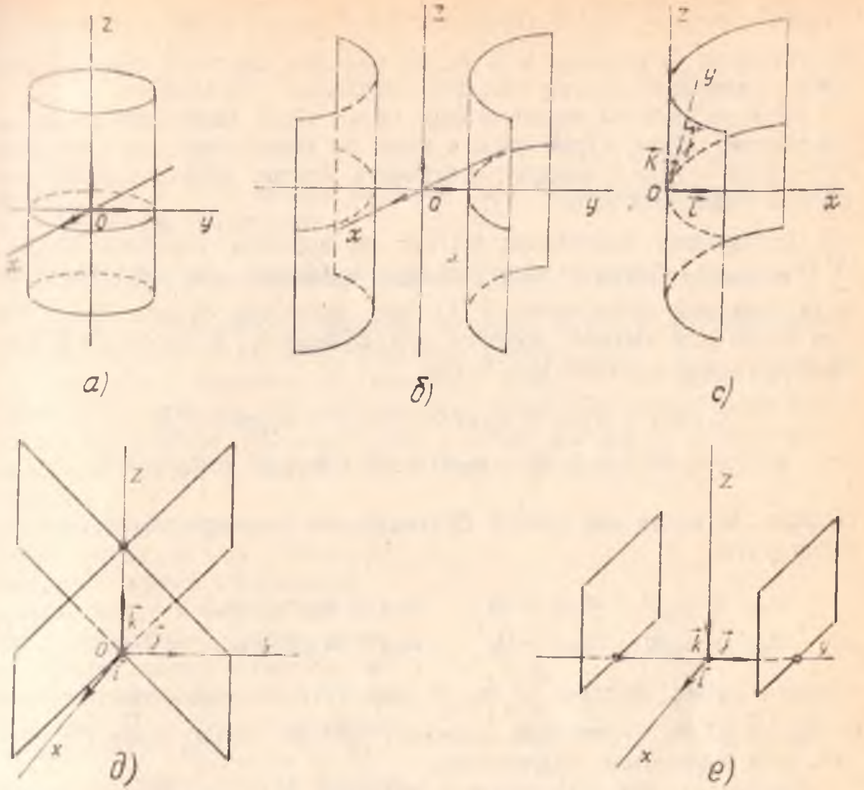
Янги $\mathscr{B}' = (O',\ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3)$ аффин реперни шундай танлаб оламизки, O нуқта билан $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ базис векторлар П да жойлашсин, $\vec{e}\,'_3$ эса u га параллел бўлсин. У ҳолда $\mathscr{B}$ дан $\mathscr{B}'$ га ўтишда тенгламанинг даражаси сақлангани учун S сирт $\mathscr{B}'$ да ҳам иккинчи тартибли цилиндрик сиртни аниқлайди, лекин бу тенгламада учинчи ўзгарувчи z' қатнашмайди ($O'\ z' \parallel \vec{u}$ бўлгани учун).

Унинг $\mathscr{B}'$ репердаги тенгламасини умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a'_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \tag{20}$$

Демак, S билан П нинг кесишмасидан ҳосил бўлган геометрик образ умумий ҳолда (20) тенглама билан аниқланади. Бу (20) тенглама эса П текисликдаги иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасидир, шу иккинчи тартибли чизиқнинг турига қараб иккинчи тартибли цилиндрни синфларга ажратиш мумкин. Бундан ташқари, (20) билан аниқланадиган чизиқни S нинг йўналтирувчиси сифатида қабул қилсак ҳам бўлади. Демак, иккинчи тартибли цилиндрнинг йўналтирувчилари: эллипс, гипербола, парабола, иккита кесишувчи тўғри чизиқ, иккита ўзаро параллел (устма-уст тушмаган) тўғри чизиқлардан иборат бўлиши мумкин. Йўналтирувчилари шу чизиқлардан иборат иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар мос равишда *эллиптик цилиндр*, *гиперболик цилиндр*, *параболик цилиндр*, *иккита кесишувчи текислик*, *иккита ўзаро параллел текислик* (устма-уст тушмаган) деб юритилади (охирги иккитаси баъзан *айниган цилиндр* деб ҳам юритилади). Бу цилиндрларнинг тенгламасини декарт реперида (каноник ҳолга келтириб) ёзамиз:

Эллиптик цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (182-*а* чизма).



182- чизма

Гиперболик цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (182-б чизма).

Параболик цилиндр $y^2 = -2px$ (182-с чизма).

Икки кесишувчи текислик $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (182-д чизма).

Икки параллел текислик $x^2 - a^2 = 0$ $(a \neq 0)$ (182-е чизма).

Мисол. Йўналтирувчиси (xOy) текисликда $x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$ тенглама билан аниқланувчи, ясовчилари (1, 0, 1) векторга параллел цилиндрик сирт тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Берилганларга асосан: $F(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$, $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $l = 1$, $m = 0$, $n = 1$. У ҳолда бу сирт тенгламаси:

$$F(x - z,\ y) = (x - z)^2 + 2(x - z)y - 3y^2 - (x - z) = 0.$$

Энди иккинчи тартибли сирт

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{1}{4}\left(A^2+B^2+C^2-4D\right). \qquad (15)$$

Қуйидаги ҳолларни қараб чиқайлик:

а) $A^2+B^2+C^2-4D>0$; бу ҳолда

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}\right)^2,$$

бу тенглама эса маркази $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$ нуқтада ва радиуси $R=\frac{1}{2}\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}$ га тенг сфера тенгламасидир.

б) $A^2+B^2+C^2-4D=0$, бу ҳолда (15) тенглама

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0$$

кўринишда бўлиб, уни қаноатлантирувчи фақат битта $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$ нуқта мавжуддир.

с) $A^2+B^2+C^2-4D<0$. Бундан кўринадики, фазода (15) ни қаноатлантирувчи битта ҳам нуқта мавжуд эмас. Умумийликни бузмаслик учун бу вақтда (15) тенглама *мавҳум сферани аниқлайди* деймиз.

Демак, (14) тенглама фақатгина $A^2+B^2+C^2-4D>0$ шартда сферани аниқлайди.

1-мисол. $2x^2+2y^2+2z^2-2x+4y+2z-5=0$ сферанинг маркази ва радиусини топинг.

Ечиш. Тенгламадан:

$$x^2+y^2+z^2-x+2y+z-\frac{5}{2}=0,$$

$$x^2-x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}+y^2+2y+1-1+z^2+z+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}-\frac{5}{2}=0,$$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+(y+1)^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-4=0.$$

Демак, сферанинг маркази $\left(\frac{1}{2},\ -1,\ -\frac{1}{2}\right)$ нуқтада, радиуси эса 2 га тенг.

2-мисол. $(x-2)^2+y^2+z^2=4$ сферанинг $M(3,\ \sqrt{2},\ 1)$ нуқтасида унга ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзинг.

Ечиш. (8) тенгламага a_{ij} $(i,\ j=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ нинг қийматларини қўйиб, уринма текислик тенгламасини ёзиш ҳам мумкин эди, лекин биз бу ерда бошқача йўл тутамиз. Бу ерда, сфера маркази $O'(2,\ 0,\ 0)$ нуқтада, радиуси эса 2 га тенг. Сферанинг M нуқтада ўтказилган уринма текислиги сфера радиусига перпендикулярлиги сабабли $\overrightarrow{MO'}$ вектор уринма текисликнинг нормал вектори бўлади. Аммо

$\overrightarrow{MO'}(-1, \ -\sqrt{2}, \ -1)$ демак. изланган текислик тенгламаси (II боб, 13-§):

$$-1(x-3)-\sqrt{2}(y-\sqrt{2})-1(z-1)=0$$

ёки

$$x+\sqrt{2y}+z-6=0.$$

21-§. Иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар

Бирор П текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ҳамда шу текисликка параллел бўлмаган u тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Таъриф. u тўғри чизиққа параллел ҳамда L чизиқ билан кесишувчи фазодаги барча тўғри чизиқлар тўплами *иккинчи тартибли цилиндрик сирт* деб аталади.

Таърифда қатнашаётган L чизиқ шу цилиндрик сиртнинг *йўналтирувчиси*, тўғри чизиқлар эса унинг *ясовчилари* дейилади.

Таърифдан фойдаланиб, аффин реперда S цилиндрик сирт тенгламасини келтириб чиқарайлик. Соддалик учун, йўналтирувчи чизиқни xOy текисликда оламиз:

$$L: F(x, \ y)=0. \tag{16}$$

u тўғри чизиқнинг йўналтирувчи вектори $\vec{u}(l, \ m, \ n)$ (181-чизма).

Ихтиёрий $M(x, \ y, \ z) \in S$ нуқтани оламиз. Шу M нуқтадан ўтган ясовчининг xOy текислик билан кесишган нуқтаси $N(x_1, \ y_1, \ 0)$ бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{MN}(x_1-x, \ y_1-y, \ -z)$ ва $\overrightarrow{MN} \parallel \vec{u}$, яъни $\overrightarrow{MN}=\lambda\vec{u}$. Бундан: $x_1-x=\lambda l, \ y_1-y=\lambda m, \ -z=\lambda n \ (n\neq 0,$ чунки $\vec{u} \nparallel xOy)$. $-z=\lambda n$ дан λ ни топиб, олдинги икки тенгликка қўямиз:

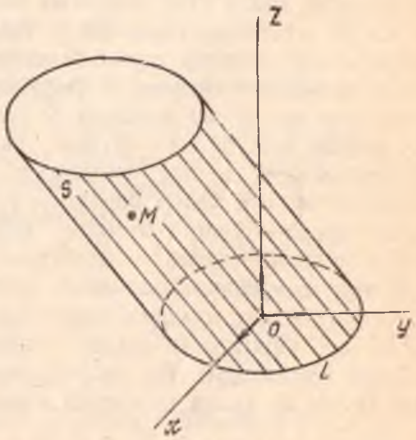
$$x_1=x-\frac{l}{n}z, \ y_1=y-\frac{m}{n}z. \tag{17}$$

Аммо $N \in L \Rightarrow F(x_1, \ y_1)=0$, демак,

$$F\left(x-\frac{l}{n}z, \ y-\frac{m}{n}z\right)=0. \tag{18}$$

Шундай қилиб, (18) тенглама цилиндрик сиртнинг тенгламасидир.

Демак, йўналтирувчиси $F(x, y)=0$ кўринишдаги тенглама билан берилган, ясовчилари эса $(l, \ m, \ n)$ векторга параллел цилиндрик сирт тенглама-



181-чизма

сини ҳосил қилиш учун (16) даги x, y ўрнига мос равишда $x - \frac{l}{n} z$, $y - \frac{m}{n} z$ ифодаларни қўйиш керак экан. $u \parallel Oz$ дан иборат хусусий ҳолда $\vec{u} \parallel \vec{e}_3 \Rightarrow \vec{u}\,(0,\ 0,\ n)$ ва (18) тенглама ушбу кўринишни олади:

$$F(x,\ y) = 0. \qquad (19)$$

Ажойиб хулосага келдик: ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндрик сирт тенгламаси йўналтирувчи тенгламасининг ўзгинасидир.

Масалан, xOy текисликда эллипс $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ тенгламаси билан берилган бўлса, бу тенглама фазода ясовчилари Oz ўққа параллел цилиндрик сиртдан иборат.

Иккинчи тартибли цилиндрик сирт $\mathscr{B} = (0,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \vec{e}_3)$ аффин реперда берилган бўлсин: равшанки, бу тенглама иккинчи даражалидир, сиртнинг ясовчиларига параллел бўлмаган П текислик билан кесимини текширайлик.

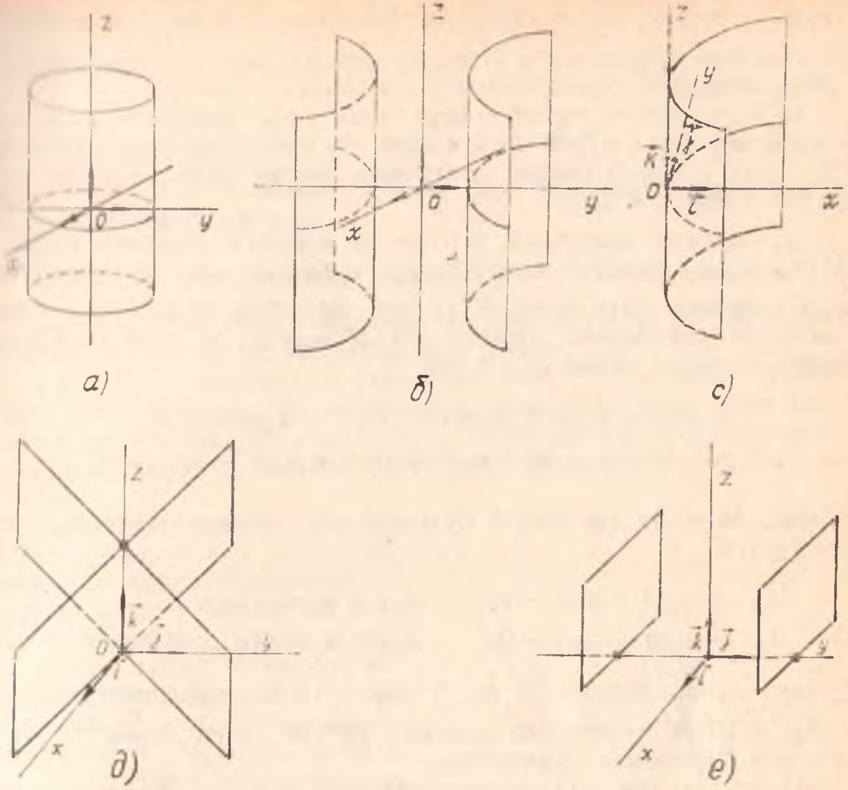
Янги $\mathscr{B}' = (O',\ \vec{e}\,'_1,\ \vec{e}\,'_2,\ \vec{e}\,'_3)$ аффин реперни шундай танлаб оламизки, O нуқта билан $\vec{e}\,'_1$, $\vec{e}\,'_2$ базис векторлар П да жойлашсин, $\vec{e}\,'_3$ эса u га параллел бўлсин. У ҳолда $\mathscr{B}$ дан $\mathscr{B}'$ га ўтишда тенгламанинг даражаси сақлангани учун S сирт $\mathscr{B}'$ да ҳам иккинчи тартибли цилиндрик сиртни аниқлайди, лекин бу тенгламада учинчи ўзгарувчи z' қатнашмайди ($O'z' \parallel \vec{u}$ бўлгани учун).

Унинг $\mathscr{B}'$ репердаги тенгламасини умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$a'_{11}x'^2 + 2a_{12}x'y' + a'_{22}y'^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \qquad (20)$$

Демак, S билан П нинг кесишмасидан ҳосил бўлган геометрик образ умумий ҳолда (20) тенглама билан аниқланади. Бу (20) тенглама эса П текисликдаги иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасидир, шу иккинчи тартибли чизиқнинг турига қараб иккинчи тартибли цилиндрни синфларга ажратиш мумкин. Бундан ташқари, (20) билан аниқланадиган чизиқни S нинг йўналтирувчиси сифатида қабул қилсак ҳам бўлади. Демак, иккинчи тартибли цилиндрнинг йўналтирувчилари: эллипс, гипербола, парабола, иккита кесишувчи тўғри чизиқ, иккита ўзаро параллел (устма-уст тушмаган) тўғри чизиқлардан иборат бўлиши мумкин. Йўналтирувчилари шу чизиқлардан иборат иккинчи тартибли цилиндрик сиртлар мос равишда *эллиптик цилиндр*, *гиперболик цилиндр*, *параболик цилиндр*, *иккита кесишувчи текислик*, *иккита ўзаро параллел текислик* (устма-уст тушмаган) деб юритилади (охирги иккитаси баъзан *айниган цилиндр* деб ҳам юритилади). Бу цилиндрларнинг тенгламасини декарт реперида (каноник ҳолга келтириб) ёзамиз:

Эллиптик цилиндр $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (182-a чизма).



182- чизма

Гиперболик цилиндр $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$ (182-*б* чизма).

Параболик цилиндр $y^2 = -2px$ (182-*c* чизма).

Икки кесишувчи текислик $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ (182-*д* чизма).

Икки параллел текислик $x^2 - a^2 = 0$ $(a \neq 0)$ (182-*e* чизма).

Мисол. Йўналтирувчиси (xOy) текисликда $x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$ тенглама билан аниқланувчи, ясовчилари (1, 0, 1) векторга параллел цилиндрик сирт тенгламасини ёзинг.

Ечиш. Берилганларга асосан: $F(x, y) = x^2 + 2xy - 3y^2 - x = 0$, $\vec{u} = (1, 0, 1)$, $l = 1$, $m = 0$, $n = 1$. У ҳолда бу сирт тенгламаси:

$$F(x - z, y) = (x - z)^2 + 2(x - z)y - 3y^2 - (x - z) = 0.$$

Энди иккинчи тартибли сирт

$$S: a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + \\ + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

умумий тенглама билан берилган бўлса, қандай шарт бажарилганда бу тенглама ясовчилари $\vec{u}\,(l, m, n)$ векторга параллел иккинчи тартибда цилиндрик сиртни аниқлаш масаласига тўхталайлик.

12-§ да иккинчи тартибли сирт билан тўғри чизиқнинг кесишиш масаласини тўлиқ кўриб чиққан эдик, бу масаланинг ҳал қилиниши $Pt^2 + 2Qt + R = 0$ квадрат тенгламага боғлиқ бўлиб, уни биз муфассал текширган эдик.

(1) сиртнинг ясовчилари $\vec{u}\,(l, m, n)$ векторга параллел бўлсин. $M\,(x_1, y_1, z_1)$ фазодаги ихтиёрий нуқта бўлсин, M нуқтадан ўтиб $\vec{u}$ га параллел тўғри чизиқ ё (1) сирт таркибида бўлади, ёки у билан битта ҳам умумий нуқтага эга бўлмайди. У ҳолда 19-§ даги б) ёки с) ҳолга асосан $Q = 0$ ёки

$$x_1\,(a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n) + y_1\,(a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n) +$$
$$+ z_1\,(a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n) + (a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n) = 0$$

бўлади. M нуқта ҳар қандай бўлганда ҳам шу шарт доимо бажарилиши учун

$$\begin{aligned} a_{11}l + a_{12}m + a_{13}n &= 0, & a_{31}l + a_{32}m + a_{33}n &= 0, \\ a_{21}l + a_{22}m + a_{23}n &= 0, & a_{41}l + a_{42}m + a_{43}n &= 0 \end{aligned} \qquad (21)$$

бўлиши лозим. Аксинча l, m, n лар (21) ни қаноатлантирсин, у ҳолда $\vec{u}\,(l, m, n)$ векторга параллел бўлган тўғри чизиқ (1) нинг ясовчиси эканлигини исботлаймиз.

Ҳақиқатан ҳам, (1) сиртнинг ихтиёрий $M\,(x_1, y_1, z_1)$ нуқтасини олайлик, у нуқтада $\vec{u}$ га параллел қилиб ўтказилган u' тўғри чизиқ (6) нинг ясовчиси эканини кўрсатайлик, u' нинг параметрик тенгламалари қуйидагича бўлсин:

$$x = x_1 + lt,\ y = y_1 + mt,\ z = z_1 + nt$$

Бу қийматларини (1) га қўйсак ҳамда (21) ни ва (5) и эътиборга олсак, $P = Q = 0$ бўлади. M нуқта (6) га тегишли бўлгани учун (9) дан $R = 0$ эканлиги келиб чиқади, демак, 19-§ даги с) ҳолга асосан u тўғри чизиқ (1) нинг ясовчиси экан.

Қуйидаги муҳим хулосага келдик: (1) тенглама билан аниқланувчи сирт ясовчилари $\vec{u}\,(l, m, n)$ векторга параллел бўлган цилиндрик сирт бўлиши учун (21) шартларнинг барчаси бажарилиши зарур ва етарли экан.

Мисол. $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$ тенглама билан аниқланган сиртнинг цилиндрик сирт эканлигини исботланг.

Ечиш. (6) билан солиштирсак: $a_{11} = 1,\ a_{22} = 1,\ a_{33} = 2,\ a_{12} = = 1,\ a_{34} = 2,\ a_{13} = a_{23} = a_{14} = a_{24} = a_{44} = 0.$ (21) системани тузамиз:

$$l + m = 0,$$

$$l + m = 0, \Rightarrow n = 0, \; l = -m, \; l = 1 \text{ десак}, \; m = -1,$$

$$n = 0,$$

$$2n = 0,$$

демак, $\vec{u}\,(1, -1, 0)$ вектор берилган сирт ясовчилари учун йўналтирувчи вектор бўлар экан.

22-§. Иккинчи тартибли конус сиртлар. Конус кесимлари

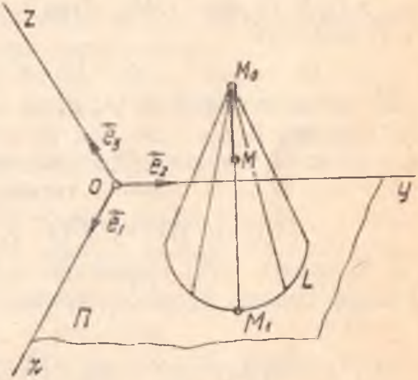
Бирор П текисликда L иккинчи тартибли чизиқ ва бу текисликка тегишли бўлмаган M_0 нуқта берилган бўлсин.

Таъриф. Фазодаги M_0 нуқтадан ўтиб, L ни кесиб ўтувчи барча тўғри чизиқлар тўплами *иккинчи тартибли конус сирт* (ёки *конус*) деб аталади. M_0 конус *учи*, L чизиқ эса конус *йўналтирувчиси*, конусни ҳосил қилувчи тўғри чизиқлар унинг *ясовчилари* деб аталади.

Конус ясовчилари маркази конус учида бўлган тўғри чизиқлар боғламига тегишлидир.

Энди конус тенгламасини келтириб чиқарайлик. Аффин реперни шундай танлаб оламизки, конуснинг йўналтирувчиси ётган текислик $\Pi = xOy$ текисликдан иборат бўлиб, $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқта эса фазонинг xOy да ётмаган ихтиёрий нуқтаси бўлсин (183-чизма).

$$L : F(x, y) = 0. \qquad (22)$$



183-чизма

Конуснинг ихтиёрий $M(x, y, z)$ нуқтасини олайлик, у ҳолда $M_0 M$ тўғри чизиқ конуснинг ясовчиси бўлиб, L билан (яъни xOy текислик билан) кесишган нуқтаси $M_1(x_1, y_1, 0)$ бўлсин. M_0, M, M_1 нуқталар бир тўғри чизиқда ётгани учун $\overrightarrow{M_0M_1} \parallel \overrightarrow{M_0M}$ ёки $\overrightarrow{M_0M_1} = \lambda \overrightarrow{M_0M} \Rightarrow$

$$x_1 - x_0 = \lambda(x - x_0), \; y_1 - y_0 = \lambda(y - y_0), \; 0 - z_0 = \lambda(z - z_0)$$

ёки

$$x_1 = x_0 + \lambda(x - x_0), \; y_1 = y_0 + \lambda(y - y_0), \; z_0 + \lambda(z - z_0) = 0.$$

Сўнгги тенгликдан λ ни топиб, аввалги икки тенгликка қўямиз:

$$x_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} \cdot z_0, \quad y_1 = y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0. \qquad (23)$$

$$M_1 \in L \Rightarrow F(x_1, y_1) = 0$$

ёки

$$F\left(x_0+\frac{x-x_0}{z_0-z}\,z_0,\quad y_0+\frac{y-y_0}{z_0-z}\cdot z_0\right)=0. \tag{24}$$

Равшанки, конусга тегишли барча нуқталарнинг координаталари (24) ни қаноатлантиради, конусга тегишли бўлмаган ҳеч қандай нуқтанинг координаталари (24) ни қаноатлантирмайди, демак, (24) ифода конус тенгламасидир.

Конуснинг учи координаталар бошидан иборат бўлган ҳолни текширайлик. Бунинг учун аввало алгебрадан функциянинг бир жинслилиги тушунчасини эслайлик: агар исталган t учун $F(xt,\ yt,\ zt)=t^kF(x,\ y,\ z)$ шарт бажарилса, $F(x,\ y,\ z)$ функция k- даражали бир жинсли функция деб аталар эди, масалан, $F(x,\ y,\ z)=x^2-y^2+z^3$ функция иккинчи даражали бир жинсли функциядир:

$$F(tx,\ ty,\ tz)=(tx)^2-(ty)^2+(tz)^2=t^2(x^2-y^2+z^2)=$$
$$=t^2F(x,\ y,\ z). \tag{25}$$

$$F(x,\ y,\ z)=0$$

бир жинсли тенглама бўлиб, бирор S сиртни аниқласин ҳамда $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)\in S$ бўлсин, OM_1 тўғри чизиқни ўтказамиз, унинг параметрик тенгламалари:

$$x=tx_1,\ y=ty_1,\ z=tz_1. \tag{26}$$

OM_1 нинг ихтиёрий $M(x,\ y,\ z)$ нуқтасини олайлик, (26) га асосан $M(tx_1,\ ty_1,\ tz_1)$.

Энди M нуқтанинг координаталарини (25) га қўйиб, $F(x,\ y,\ z)$ нинг бир жинсли эканини эътиборга олайлик:

$$F(tx,\ ty,\ tz)=t^kF(x,\ y,\ z)=0;\ \text{демак,}\ OM_1\subset S.$$

Хулоса. (25) кўринишдаги бир жинсли тенглама учи координаталар бошида бўлган конуснинг тенгламасидан иборат.

Агар

$$F(x,\ y)=a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x+2a_{23}y+a_{33}=0$$

бўлса, конуснинг учи сифатида, соддалик учун, $M_0(0,\ 0,\ 1)$ ни олсак, (24) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2a_{13}x(1-z)+2a_{23}y(1-z)+$$
$$+a_{33}(1-z)^2=0. \tag{27}$$

Энди (1) кўринишдаги тенглама қайси шартларда конусни аниқлаши мумкин деган саволга ўтайлик.

S конуснинг учи $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтада дейлик. Ихтиёрий $\vec{u}\ (l,\ m,\ n)$ векторни олиб (бу вектор асимптотик йўналишга эга бўлмасин), M нуқтадан $\vec{u}$ га параллел u тўғри чизиқ ўтказайлик, унинг параметрик тенгламалари:

$$X=x_0+lt,\ Y=y_0+mt,\ Z=z_0+nt, \tag{28}$$

(28) билан (1) нинг кесишиш нуқтасини изласак, (4) тенглама ҳосил бўлади. $M_0\in S$ бўлса, (5) $\Rightarrow R=0$. У ҳолда

$$(4) \Rightarrow Pt^2 + Qt = 0. \tag{29}$$

Конуснинг таърифига асосан u тўғри чизиқ S га тўлиқ тегишли ёки фақат битта M умумий нуқтага эга, бу деган сўз (29) тенглама чексиз кўп ечимга эга ёки фақат битта $t = 0$ га эгадир, (29) дан кўриниб турибдики, бу шартлар бажарилиши учун $Q = 0$ бўлиши керак, буни ёйиб ёзсак,

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})\, l + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24})\, m + \\ + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})\, n = 0. \tag{30}$$

Бу шарт асимптотик йўналишга эга бўлмаган ҳар қандай $\vec{u}$ вектор учун бажарилганлигидан:

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0, \end{aligned} \tag{31}$$

$M_0 \in S$ ни ҳамда (31) ни эътиборга олсак,

$$(1) \Rightarrow a_{41}x_0 + a_{42}y_0 + a_{43}z_0 + a_{44} = 0. \tag{32}$$

Демак, (1) тенглама конусни ифодалаганда конус учининг координаталари (31), (32) шартларни қаноатлантириши керак.

Аксинча, (1) тенглама берилган бўлса ҳамда бирор M_0 нуқта учун (31), (32) шартлар бажарилса, берилган тенглама учи M_0 нуқтадаги конусни ифодалайди. Ҳақиқатан ҳам, M_0 нинг координаталарини (1) га қўйиб ҳисобласак ҳамда (31), (32) ни эътиборга олсак, $M_0 \in S$ эканига ишонч ҳосил қиламиз.

Энди M_0 нуқтадан ихтиёрий (28) тўғри чизиқни ўтказиб, у билан S нинг кесишган нуқтасини топишга ҳаракат қилсак, (4) тенгламада $Q = R = 0$ бўлиб, $Pt^2 = 0$. Бундан u тўғри чизиқ S билан фақат битта M_0 нуқтада кесишади ёки бу тўғри чизиқ S га тўлиқ тегишли деган хулоса чиқади, демак, S конусдир.

Хуллас, S сирт учи M_0 нуқтада бўлган конусдан иборат бўлишлиги учун M_0 нинг координаталари (31), (32) шартларни қаноатлантириши зарур ва етарли.

(31), (32) дан қуйидаги матрицаларни тузамиз:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}. \tag{33}$$

Маълумки, (31), (32) даги тенгламаларнинг биргаликда бўлиши учун бу матрицалар рангларининг тенг бўлиши етарли ва зарурдир.

Шунинг учун (1) тенглама конусни ифодалаши учун (33) матрицалар рангларининг тенг бўлиши кифоя.

Агар (1) тенглама конусни ифодаласа, у ҳолда (33) матрицалар рангларининг энг каттаси 3 га тенг, демак, конус учун

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0 \qquad (34)$$

шарт бажарилиши керак.

Энди декарт реперида берилган конуснинг баъзи текисликлар билан кесимини текширайлик. Бу реперда иккинчи тартибли конуснинг энг содда тенгламаси

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \left(\text{ёки} \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0, \ -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \right.$$
$$\left. + \frac{z^2}{c^2} = 0 \right) \qquad (35)$$

кўринишда бўлади, ҳақиқатан ҳам, бу тенглама иккинчи даражали бир жинсли тенглама бўлгани учун у юқорида чиқарилган хулосага асосан учи координаталар бошида бўлган конусни аниқлайди. Шуниси диққатга сазоворки, (35) конусни танлаб олинган баъзи текисликлар билан кессак, кесимда иккинчи тартибли чизиқларнинг ҳамма турини ҳосил қилиш мумкин.

1. $z = h\,(h > 0)$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{h^2}{c^2}$ ёки $\frac{x^2}{\left(a\,\frac{h}{c}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(b\,\frac{h}{c}\right)^2} = 1$ эллипс ҳосил бўлади.

2. $y = h\ (h > 0)$ текислик билан кессак, кесимда

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\frac{h^2}{b^2} \ \text{ёки} \ -\frac{x^2}{\left(a\,\frac{h}{b}\right)^2} + \frac{z^2}{\left(c\,\frac{h}{b}\right)^2} = 1$$

гипербола ҳосил бўлади.

3. $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h\ (h > 0)$ текислик билан кесимини текширайлик, бунинг учун

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \\ \frac{x}{a} - \frac{z}{c} = h \end{cases}$$

системани ечамиз. Биринчи тенгламани қуйидагича ёзиб, $\left(\frac{x}{y} - \frac{z}{c}\right) \times \left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right) + \frac{y^2}{b^2} = 0$ иккинчи тенгламани ҳисобга олсак, $\frac{y^2}{b^2} = -h\left(\frac{x}{a} + \frac{z}{c}\right)$. Энди бунга иккинчи тенгламадан z ни топиб қўйсак, $y^2 = -b^2h\left(2\frac{x}{a} - h\right)$ тенглама ҳосил бўлиб, у параболани аниқлайди.

4. $y = 0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ тенглама билан аниқланувчи кесишувчи иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади.

5. $\frac{x}{a} - \frac{z}{c} = 0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{y^2}{b^2} = 0$ ёки $y^2 = 0$ тенглама билан аниқланувчи устма-уст тушган иккита тўғри чизиқ ҳосил бўлади. Бу хулосалар иккинчи тартибли чизиқларнинг конус кесимлари деб аталиши боисидир.

1-мисол. Декарт реперида йўналтирувчиси xOy текисликдаги $x^2 - 2y^2 = 1$ гиперболадан иборат, учи $(-1, 2, 1)$ нуқтадаги конус тенгламасини тузинг.

Ечиш. $F(x, y) = x^2 - 2y^2 - 1 = 0$, $x_0 = -1$, $y_0 = 2$, $z_0 = 1$.

(14) га асосан x ни $\frac{x+1}{1-z} - 1 = \frac{x+z}{1-z}$ билан, y ни $\frac{y-2}{1-z} + 2 = \frac{y-2z}{1-z}$ билан алмаштирсак, $\left(\frac{x+z}{1-z}\right)^2 - 2\left(\frac{y-2z}{1-z}\right)^2 - 1 = 0$ бўлиб, уни соддалаштирсак, конус тенгламаси ҳосил қилинади:

$$x^2 - 2y^2 - 8z^2 + 8yz + 2xz + 2z - 1 = 0.$$

2-мисол. Аффин реперда берилган

$$x^2 - 5z^2 + 3xy + 2yz - 7x - 6y - 2z + 10 = 0$$

сиртнинг конус эканлигини исботланг ва учининг координаталарини топинг.

Ечиш. Бу ерда $a_{11} = 1$, $a_{22} = 0$, $a_{33} = -5$, $a_{12} = \frac{3}{2}$, $a_{13} = 0$, $a_{23} = 1$, $a_{14} = -\frac{7}{2}$, $a_{24} = -3$, $a_{34} = -1$, $a_{44} = 10$. Бу қийматларни (31) ва (32) га қўямиз:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 + \frac{3}{2}y_0 - \frac{7}{2} = 0, \\ \frac{3}{2}x_0 + z_0 - 3 = 0, \\ y_0 - 5z_0 - 1 = 0, \\ -\frac{7}{2}x_0 - 3y_0 - z_0 + 10 = 0, \end{array}\right| \qquad (*)$$

бу системадан (33) матрицаларни тузиб, рангларини ҳисобласак, иккаласиники ҳам 3 га тенг, демак, сирт конусдир, (*) тенгламалар системаси биргаликда, шу системани ечсак, $x_0 = 2$, $y_0 = 1$, $z_0 = 0$ бўлиб, (2, 1, 0) нуқта конус учидир.

23-§. Айланма сиртлар

П текисликда бирор l чизиқ ва u тўғри чизиқ берилган бўлсин.

Таъриф. L чизиқнинг u тўғри чизиқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган Ф фигура *айланма сирт* деб аталади (яъни L ни u атрофида 2π бурчакка буришдан ҳосил бўлган фиғура). Бунда L айланма сиртнинг *меридиани*, u *айланиш ўқи* деб аталади.

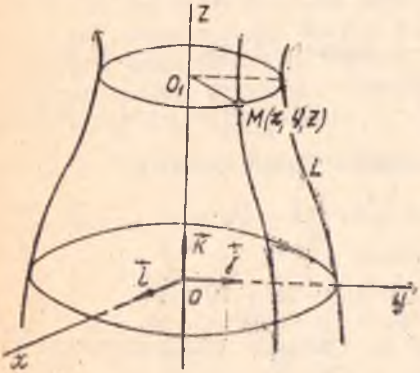
Равшанки, L нинг ҳар бир нуқтаси u атрофида айланишида бирор айланани ҳосил қилиб, бу айлананинг маркази u тўғри чизиқда бўлади.

Энди айланма сиртнинг тенгламасини келтириб чиқариш билан шуғулланайлик. Бу ишларни декарт реперида кўриб, П ни бирор координаталар текислиги деб, u тўғри чизиқни эса координата ўқларидан бири (яъни П да ётган икки координата ўқидан бири) деб оламиз.

Масалан, $П = yOz$ ва $u = Oz$ ҳамда

$$L: F(y, z) = 0 \qquad (36)$$

бўлсин. L чизиқнинг Oz ўқ атрофида айланишидан 184- чизмадагидек Ф сирт ҳосил қилинган дейлик. $M(x, y, z)$ шу сиртга тегишли ихтиёрий нуқта бўлсин. M нуқтадан Oz га перпендикуляр текислик ўтказсак, кесимда маркази $O_1 \in Oz$ нуқтада бўлган бирор айлана ҳосил қилинади, у айлана L чизиқ билан $M_1(0, y_1, z)$ нуқтада кесишсин. У ҳолда O_1 нинг координаталари $(0, 0, z)$. Кесим айланадан иборат бўлгани учун



184- чизма

$$\rho(O_1, M) = \rho(O_1, M_1). \qquad (37)$$

Бу масофаларни ҳисоблайлик:

$$\rho(O_1, M) = \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\rho(O_1, M_1) = \sqrt{(0-0)^2 + (y_1 - 0)^2 + (z-z)^2} = \sqrt{y_1^2} = |y_1|,$$

буларни (37) га қўйсак, $|y_1| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ёки $y_1 = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$.

Энди $M_1 \in L \Rightarrow F(y_1, z) = 0$ ёки

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \qquad (38)$$

Демак, Ф га тегишли ҳар бир нуқтанинг координаталари (38) ни қаноатлантиради. Лекин $M \notin Ф$ бўлса, (37) шарт бажарилмайди, демак, (38) ҳам ўринли эмас. Шунинг учун (38) ни Ф нинг тенгламаси дея оламиз. Шу (38) тенгламага асосланиб, L нинг бошқа координата ўқлари атрофида айланишидан ҳосил қилинган айланма сирт тенгламасини осонгина ёзиш мумкин: масалан, L нинг Oy ўқ атрофида айланишидан ҳосил этилган сирт тенгламаси:

$$F(y, \ \pm\sqrt{(x^2+z^2)} = 0.$$

L чизиқ xOy да олинса, унинг тенгламасини $F(x, y)=0$ кўринишда олсак, L нинг Ox ўқ атрофида айланишидан $F(x, \pm\sqrt{(y^2+z^2)}=0$ сирт, Oy ўқ атрофида айланишидан эса $F(\pm\sqrt{x^2+z^2}, \ y)=0$ сирт ҳосил бўлади.

Мисол тариқасида yOz текисликда жойлашган қуйидаги чизиқларнинг Oz ўқ атрофида айланишидан ҳосил қилинган айланма сиртларнинг тенгламаларини ёзайлик: 1) $\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипс; 2) $\frac{y^2}{b^2}-$ $-\frac{z^2}{c^2}=1$ гипербола; 3) $y^2=2pz$ парабола.

(33) га асосан: 1) эллипсни Oz ўқ атрофида айлантирсак:

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2+y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

сирт ҳосил бўлиб, у *айланма эллипсоид* деб аталади;

2) гиперболани Oz ўқ атрофида айлантириш натижасида

$$\frac{(\sqrt{x^2+y^2})^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \text{ёки} \quad \frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

сирт ҳосил қилиниб, у *айланма гиперболоид* деб аталади;

3) параболани Oz ўқ атрофида айлантирсак,

$$(\pm\sqrt{x^2+y^2})^2=2pz \quad \text{ёки} \quad x^2+y^2=2pz$$

сирт ҳосил қилиниб, у *айланма параболоид* деб аталади.

Шуни таъкидлаймизки, цилиндрик ва конус сиртларнинг йўналтирувчилари иккинчи тартибли чизиқ бўлса, шу сиртларнинг ўзлари ҳам иккинчи тартибли сирт бўлар эди, лекин иккинчи тартибли ҳар қандай чизиқнинг бирор ўқ атрофида айланишидан доимо иккинчи тартибли айланма сирт ҳосил бўлавермайди. Масалан, юқоридаги $y^2=2pz$ параболани Oz атрофида айлантиришдан ҳосил қилинган сирт тенгламаси $y^2=2p(\pm\sqrt{x^2+y^2})$, ёки $p>0$ бўлган ҳолда $y^2=$ $=2p\sqrt{x^2+y^2}$ ва $p<0$ бўлган ҳолда эса $y^2=-2p\sqrt{x^2+y^2}$, бу эса иккинчи тартибли сирт эмас.

Юқорида биз сиртнинг таърифига асосланиб, унинг тенгламаларини чиқариш билан шуғулландик, энди танлаб олинган реперда тенгламалари билан берилган иккинчи тартибли сиртнииг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини текшириш билан шуғулланамиз.

24- §. Эллипсоид

Таъриф. Танлаб олинган декарт реперида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (39)$$

тенгламани қаноатлантирувчи фазодаги барча нуқталар тўплами *эллипсоид* дейилади.

(39) тенглама бўйича эллипсоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

1. (39) тенглама иккинчи тартибли алгебраик тенглама бўлгани учун эллипсоид иккинчи тартибли сиртдир.

2. (39) тенгламанинг чап томонига назар ташласак, учта мусбат соннинг йиғиндиси 1 га тенгдир, демак,

$$\frac{x^2}{a^2}\leqslant 1, \quad \frac{y^2}{b^2}\leqslant 1, \quad \frac{z^2}{c^2}\leqslant 1 \qquad (40)$$

ёки

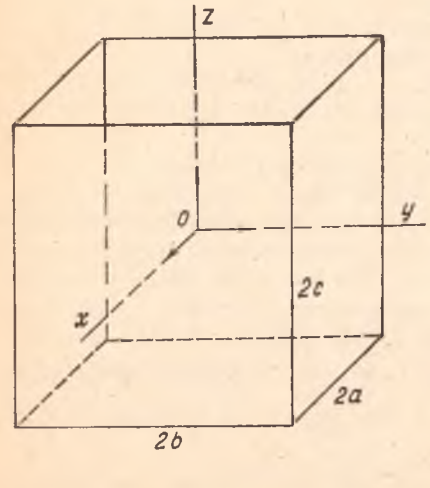
$$x^2\leqslant a^2, \quad y^2\leqslant b^2, \quad z^2\leqslant c^2,$$

булардан:

$$-a\leqslant x\leqslant a, \quad -b\leqslant y\leqslant b, \quad -c\leqslant z\leqslant c. \qquad (41)$$

Эллипсоид чегараланган сирт бўлиб, қирралари $2a$, $2b$ $2c$ ҳамда симметрия маркази координаталар бошидаги тўғри бурчакли параллелепипед ичига жойлашган фигурадир (185- чизма).

3. (40) ва (39) дан кўринадики, қўшилувчилардан биттаси 1 га тенг бўлса, қолган иккитаси ноль бўлиши керак: $\frac{x^2}{a^2}=1$, $\frac{y^2}{b^2}=0$, $\frac{z^2}{c^2}=0$, бундан $x=\pm a$, $y=0$, $z=0$ ва эллипсоид Ox ни $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$ нуқталарда кесиб ўтади.



185- чизма

Худди шунга ўхшаш, бу эллипсоид Oy ни $B_1(0, b, 0)$, $B_2(0, -b, 0)$ нуқталарда, Oz ни эса $C_1(0, 0, c)$, $C_2(0, 0, -c)$ нуқталарда кесиб ўтади. Бу A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 нуқталар *эллипсоиднинг учлари* деб аталади.

4. Энди эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесимини текширайлик:

а) xOy текислик билан кесишмаси:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

xOy даги эллипсдир.

б) xOz текислик билан кесишмаси:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

xOz даги эллипсдир.

с) yOz текислик билан кесишмаси:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

yOz даги яна эллипсдир.

Хулоса. (39) эллипсоиднинг координата текисликлари билан кесишмаси эллипслардан иборат.

5. Энди эллипсоиднинг координата текисликларига параллел текисликлари билан кесимини текширайлик.

xOy текисликка параллел бўлган $z=h$ $(h\in R)$ текислик билан кесимини қарайлик:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\\ z=h\end{array}\right\}\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{h^2}{c^2}; \qquad (*)$$

бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин.

а) $-c<h<c\Rightarrow 1-\frac{h^2}{c^2}>0$ бўлиб,

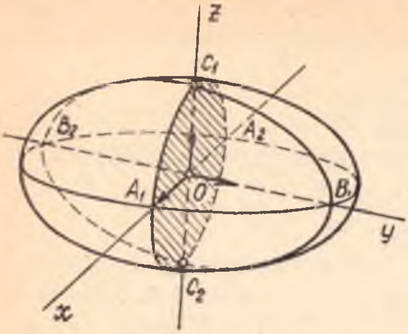
$$(*)\Rightarrow \frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{h^2}{c^2}\right)}=1,$$

махраждаги мусбат сонларни a'^2, b'^2 деб белгиласак, $\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$, бу эса маркази $(0,\ 0,\ h)$ нуқтада ва ўзи $z=h$ текисликда ётган эллипсдир.

б) $h=c$ ёки $h=-c$ бўлса, $(*)\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$ бўлиб, бу шартни фақатгина $x=0$, $y=0$ қаноатлантиради, демак, $z=c$ текислик бу ҳолда сирт билан $(0,\ 0,\ c)$ нуқтада кесишади.

с) $h>c$ ёки $h<-c\Rightarrow 1-\frac{h^2}{c^2}<0$ бўлиб, $(*)$ нинг ўнг томонида манфий сон ҳосил бўлади, чап томони эса доимо мусбат, демак, $z=h$ текислик эллипсоид билан бу ҳолда кесишмайди.

Худди шунга ўхшаш, $x=h$ ёки $y=h$ текисликлар билан (39) сиртнинг кесимини аниқлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.



186- чизма

6. Эллипсоидга тегишли (x_1, y_1, z_1) нуқта билан бир вақтда ($-x_1$, $-y_1$, $-z_1$) нуқта ҳам унга тегишли: бундан кўринадики, эллипсоид координаталар бошига нисбатан симметрик жойлашган (координата текисликларига нисбатан ҳам симметрик жойлашганлигини кўрсатинг).

Бу маълумотлар эллипсоиднинг (186- чизма) тузилишидан дарак беради.

Хусусий $a = b \neq c$ ҳолда

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

айланма эллипсоид ҳосил бўлади.

$$a = b = c \text{ да } x^2 + y^2 + z^2 = a^2$$

бўлиб, маркази координаталар бошидаги ва радиуси a га тенг сферани аниқланади.

$a \neq b \neq c$ шартда эллипсоид *уч ўқли* дейилади.

Мисол. Декарт реперида ўқлари координата ўқларида жойлашган ҳамда $M(2, 0, 1)$ нуқтадан ўтиб, xOy текислик билан $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ эллипс бўйича кесишувчи эллипсоид тенгламасини тузинг.

Ечиш. Изланган тенглама

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (**)$$

кўринишда бўлиб, a, b, c ни топиш кифоя, (**) ни $z = 0$ текислик билан кессак, кесимда $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ эллипс ҳосил бўлади, уни берилган $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} = 1$ эллипс билан солиштирсак,

$$a^2 = 8, \; b^2 = 1. \qquad (***)$$

$$M(2, \; 0, \; 1) \in (**); \quad \frac{4}{a^2} + \frac{0}{b^2} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow \frac{4}{8} + \frac{1}{c^2} = 1 \Rightarrow c^2 = 2,$$

изланган тенглама: $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1.$

25- §. Гиперболоидлар

Гиперболоидлар икки хил бўлади. Бирор П текисликда гиперболани олиб, уни мавҳум ўқи атрофида айлантирсак, ҳосил қилинган сирт *бир паллали айланма гиперболоид* деб аталади, лекин шу гиперболани ҳақиқий ўқ атрофида айлантирсак, ҳосил қилинган сирт *икки паллали айланма гиперболоид* деб аталади. Бу сиртлар гиперболоидларнинг хусусий ҳолидир, биз қуйида шу сиртлар билан айрим-айрим танишамиз.

1. Декарт реперида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (42)$$

тенгламани қаноатлантирувчи фазодаги барча нуқталар тўплами *бир паллали гиперболоид* деб аталади.

Бир паллали гиперболоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

1. Эллипсоид сингари бир паллали гиперболоид ҳам иккинчи тартибли сиртдир.

2. $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ билан бир вақтда $M'_1(\pm x_1,\ \pm y_1,\ \pm z_1)$ ҳам гиперболоидга тегишли, демак, бир паллали гиперболоид нуқталари координаталар бошига, координата текисликларига нисбатан симметрик жойлашган.

а) Ox ўқ ($y=0,\ z=0$) билан кесимини текширайлик:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0,\\ z=0\end{array}\right| \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=1\Rightarrow x=\pm a\Rightarrow A_1(a,\ 0,\ 0),\ A_2(-a,0,0);$$

б) Шунинг сингари Oy ўқ ($x=0,\ z=0$) билан $B_1(0,\ b,\ 0)$, $B_2(0,\ -b,\ 0)$ нуқталарда кесишади, чунки:

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\\ z=0\end{array}\right| \Rightarrow \frac{y^2}{b^2}=1\Rightarrow y=\pm b\Rightarrow B_1(0,b,0),\ B_2(0,-b,0);$$

в) Oz ўқ билан ($x=0,\ y=0$) кесишмайди, ҳақиқатан,

$$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0,\\ y=0\end{array}\right| \Rightarrow -\frac{z^2}{c^2}=1.$$

Ҳақиқий соҳада бу тенгликнинг бўлиши мумкин эмас.

Шунинг учун Oz ўқ бир паллали гиперболоиднинг *мавҳум ўқи* деб аталади. Юқорида ҳосил қилинган A_1, A_2, B_1, B_2 нуқталар бир паллали гиперболоиднинг *учлари* дейилади.

3. Энди координата текисликлари билан кесимини текширайлик.

а) xOy: $$\left.\begin{array}{r}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=0\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

кесим — эллипс.

б) xOz: $\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$

кесим — гипербола.

в) yOz: $\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ x=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,$

кесим — гипербола.

4. xOy текисликка параллел $z=h$ текислик билан кесимни аниқлайлик:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ z=h\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}$$

ёки

$$\frac{x^2}{a^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1+\frac{h^2}{c^2}\right)}=1;$$

бу тенглама $z=h$ текисликда эллипсни аниқлайди, $|h|$ сон катталашган сари эллипснинг ярим ўқлари ҳам катталашиб, фақат $h=0$ учун эллипс энг кичик ўқли бўлади.

5. xOz текисликка параллел $y=h$ текислик билан кесимини текширайлик:

$$\left.\begin{aligned}\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1,\\ y=h\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{h^2}{b^2}. \qquad (**)$$

Бу ерда қуйидаги ҳоллар юз бериши мумкин:

а) $h=b$ бўлса, $(*)\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$

ёки

$$\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=0$$

бўлиб, кесим иккита кесишувчи тўғри чизиқдан иборат.

б) $-b<h<b$ бўлса, $1-\frac{h^2}{b^2}>0$ бўлиб, $(*)$ қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}-\frac{z^2}{c^2\left(1-\frac{h^2}{b^2}\right)}=1,$$

бу эса $y = h$ текисликда мавҳум ўқи Oz га параллел гиперболани аниқлайди.

с) $|h| > b$ бўлса, $1 - \frac{h^2}{b^2} < 0$ бўлиб, (*) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

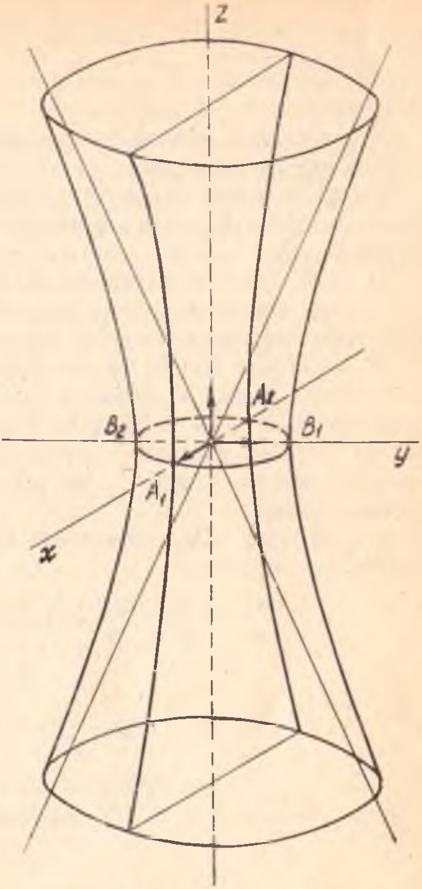
$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = -\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)\left(\text{бунда } \frac{h^2}{b^2} - 1 > 0\right)$, бундан

$$-\frac{x^2}{a^2\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} + \frac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{b^2} - 1\right)} = 1,$$

бу тенглама $y = h$ текисликда гипербола тенгламаси бўлиб, мавҳум ўқи Ox ўққа параллелдир.

Худди шу ҳоллар гиперболоидни $x = h$ текислик билан кесганда ҳам содир бўлади (буни ўзингиз текшириб кўринг).

Шу маълумотларга асосан, бир паллали гиперболоиднинг шакли намоён бўлади (187-чизма).



187- чизма

$a = b$ да (42) тенглама $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ га келтирилади, бу эса бир паллали айланма гиперболоидни аниқлайди:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{43}$$

ёки

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{44}$$

тенгламалар ҳам бир паллали гиперболоид бўлиб, улар мавҳум ўқлари билангина фарқ қилади ((43) учун мавҳум ўқ Oy, (44) учун мавҳум ўқ Ox дир).

II. Фазонинг

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (45)$$

тенгламани қаноатлантирувчи барча нуқталари тўплами *икки паллали гиперболоид* деб аталади.

(45) тенглама бўйича бу сиртнинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлайлик.

Юқоридаги бир паллали гиперболоид тенгламасини текширишдаги баъзи ҳолларни бу ерда муфассал кўрмаймиз, чунки улар бевосита такрорланади:

1) икки паллали гиперболоид иккинчи тартибли сиртдир;

2) икки паллали гиперболоид координаталар бошига ва координата текисликларига нисбатан симметрик жойлашган;

3) фақатгина Ox ўқ билан $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(-a, 0, 0)$ нуқталарда кесишиб, бошқа координата ўқлари билан кесишмайди, демак, yOz текислик билан ҳам кесишмайди, демак, Oy, Oz мавҳум ўқлар ҳисобланади. Бундан кўриниб турибдики, икки паллали гиперболоид икки қисмдан иборат бўлиб, улар yOz текисликка нисбатан симметрик жойлашгандир.

4) (45) нинг yOz текисликка параллел $x = h$ текислик билан кесимини текширайлик:

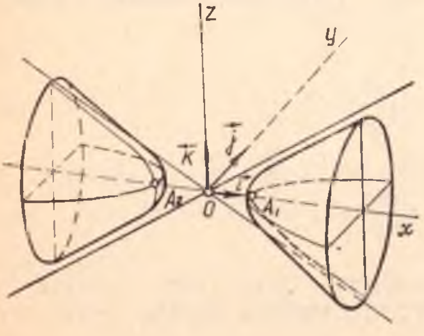
$$\left.\begin{aligned} \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \\ x = h \end{aligned}\right\} \Rightarrow \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}$$

ёки

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = \frac{h^2}{a^2} - 1. \qquad (*)$$

$|h| > a \Rightarrow \frac{h^2}{a^2} - 1 > 0$; (*) тенглама $\dfrac{y^2}{b^2\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)} + \dfrac{z^2}{c^2\left(\frac{h^2}{a^2} - 1\right)} = 1$

кўринишни олиб, $x = h$ текисликда эллипсни аниқлайди.



188- чизма

$h = a$ да кесим фақат битта $A_1(a, 0, 0)$ ёки $A_2(-a, 0, 0)$ нуқтадан иборат.

Бошқа координата текисликлари ва бу текисликларга параллел текисликлар билан кесимлари ҳам гиперболадан иборат.

Икки паллали гиперболоиднинг шакли 188- чизмада кўрсатилган. $b = c$ шартда (45) тенглама $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2 + z^2}{b^2} = 1$ кўринишни олади ва у $\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$

гиперболанинг ($y = 0$ текисликда) Ox ўқ атрофида айланишидан ҳосил қилинади, у айланма икки паллали гиперболоиддир. (45) тенгламаси $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ ёки $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ кўринишда бўлса, булар ҳам икки паллали гиперболоид бўлиб, биринчиси учун Ox, Oy ўқлар, иккинчиси учун Ox, Oz ўқлар мавҳум ўқлар бўлади.

Мисол. Декарт реперида $M_1(0, 0, 3)$ ва $M_2(0, 0 — 3)$ нуқталар берилган. Фазодаги шундай нуқталар тўпламини топингки, уларнинг ҳар биридан M_1, M_2 нуқталаргача бўлган масофалар айирмасининг абсолют қиймати 4 га тенг бўлсин.

Ечиш. Фараз қилайлик, $M(x, y, z)$ нуқта сўралган хоссага эга бўлган нуқта бўлсин, яъни $|\rho(M_1, M) - \rho(M_2, M)| = 4$, масала шартини координаталарда ёзамиз:

$$\left|\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3^2)}\right| = 4$$

ёки

$$\sqrt{x^2 + y^2 + (z - 3)^2} - \sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3)^2} = \pm 4,$$

бундан

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6z + 9 = x^2 + y^2 + z^2 + 6z + 9 \pm$$
$$\pm 8\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3)^2} + 16$$

ёки

$$\mp 8\sqrt{x^2 + y^2 + (z + 3)^2} = 16 + 12z.$$

Яна бир марта квадратга кўтариб соддалаштирсак,

$$-\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{5} + \frac{z^2}{4} = 1,$$

бу тенглама икки паллали гиперболоидни аниқлайди.

26- §. Параболоидлар

Энди иккинчи тартибли сиртларнинг яна бир синфи — параболоидлар билан танишамиз. Бу сиртлар ҳам икки турдан иборат бўлиб, уларни айрим-айрим кўриб чиқамиз.

I. Декарт реперида

$$\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z, \ (p > 0, \ q > 0) \qquad (46)$$

тенгламани қаноатлантирувчи фазодаги барча нуқталар тўплами *эллиптик параболоид* деб аталади.

Бу параболоиднинг ҳам шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини (46) тенгламани текшириш йўли билан аниқлаймиз.

1. Эллиптик параболоид ҳам иккинчи тартибли сирт, ундан ташқари, бу сирт координаталар бошидан ўтади.

2. Координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топайлик:

а) $$Ox: \left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z, \\ y=0 \\ z=0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x^2}{p}=0,\ x=0 \Rightarrow (0,\ 0,\ 0);$$

б) $$Oy: \left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z, \\ x=0 \\ z=0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{y^2}{q}=0,\ y=0 \Rightarrow (0,\ 0,\ 0);$$

с) $$Oz: \left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \\ x=0 \\ y=0 \end{array}\right| \Rightarrow 2z=0,\ z=0 \Rightarrow (0,\ 0,\ 0).$$

Демак, эллиптик параболоид координата ўқлари билан фақат координаталар бошидагина кесишади.

3. Координата текисликлари ва уларга параллел текисликлар билан кесимини текширайлик:

а) xOy билан кесишиш чизиғи:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z, \\ z=0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=0 \Rightarrow (0,\ 0,\ 0);$$

б) xOz билан кесишиш чизиғи:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z, \\ y=0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{x^2}{p}=2z \Rightarrow x^2=2pz,$$

бу тенглама xOz текисликда симметрия ўқи Oz дан иборат параболадир:

с) yOz билан кесишиш чизиғи:

$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z, \\ x=0 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{y^2}{q}=2z \Rightarrow y^2=2qz,$$

бу ҳам симметрия ўқи Oz дан иборат yOz текисликдаги параболадир;

д) $z=h$ текислик билан кесишиш чизиғи:

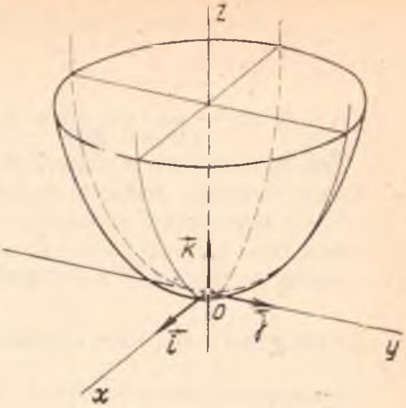
$$\left.\begin{array}{r} \dfrac{x^2}{p}+\dfrac{y^2}{q}=2z \\ z=h \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{x^2}{p}+\frac{y^2}{q}=2h. \qquad (*)$$

$h=0 \Rightarrow z=0$; а) ҳолига қайтдик. $h<0$ бўлса, p ва q шартга асосан мусбат, шунинг учун, (*) тенглик ўринли бўлмайди: $h>0$

ни (*) $\Rightarrow \dfrac{x^2}{p\cdot 2h}+\dfrac{y^2}{q\cdot 2h}=1$ бўлиб, бу тенглама $z=h$ текислигидаги эллипсни билдиради.

Бундан ташқари, x, y ўзгарувчилар (46) тенгламада жуфт даражада қатнашганлиги учун эллиптик параболоид xOz, yOz текисликларга нисбатан симметрик жойлашади.

Бу текисликларнинг кесишмасидан ҳосил бўлган Oz тўғри чизиқ *эллиптик параболоиднинг ўқи* деб аталади.



189- чизма

Эллиптик параболоид 189-чизмада тасвирланган. $p=q$ да тенглама $x^2+y^2=2pz$ кўринишда бўлиб, айланма параболоид бўлади. Ўқлари Ox ёки Oy дан иборат эллиптик параболоиднинг тенгламалари мос равишда ушбу тенгламалар билан ифодаланади:

$$\frac{y^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2x \text{ ёки } \frac{x^2}{p}+\frac{z^2}{q}=2y.$$

II. Декарт реперида

$$\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z\,(p>0,\ q>0) \tag{47}$$

тенгламани қаноатлантирувчи фазо нуқталари тўплами *гиперболик параболоид* деб аталади, тенгламаси бўйича гиперболик параболоиднинг шаклини ва баъзи геометрик хоссаларини аниқлаш мумкин. Қуйида биз баъзи хулосаларнигина берамиз, уларнинг ўринли эканлигини ўзингиз текшириб кўринг.

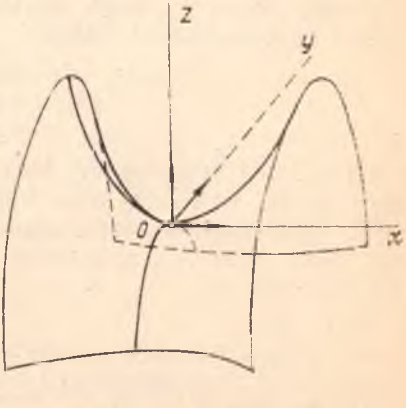
1. Гиперболик параболоид иккинчи тартибли сирт бўлиб, координаталар бошидан ўтади.

2. Координата ўқлари билан фақат координаталар бошида кесишади.

3. а) xOy текислик билан кесилганда кесимда иккита кесишувчи тўғри чизиқ ҳосил қилинади;

б) xOz текислик билан кесилганда кесимда симметрия ўқи Oz дан иборат $x^2=2pz$ парабола ҳосил бўлади;

с) yOz текислик билан кесилганда кесимда симметрия ўқи Oz дан иборат $y^2=-2qz$ парабола ҳосил бўлади.



190- чизма

4. $z = h$ текислик билан кесилганда кесимда

а) $h > 0$ шартда $\frac{x^2}{2\,ph} - \frac{y^2}{2\,qh} = 1$ гипербола.

б) $h < 0$ да $-\frac{x^2}{2\,ph} + \frac{y^2}{2\,qh} = 1$ гипербола ҳосил қилинади.

5. Бошқа координата текисликларига параллел текисликлар билан кесилганда кесимда доимо парабола ҳосил бўлади.

Шу маълумотларга асосланиб гиперболик параболоидни 190-чизмадагидек сирт кўринишида тасаввур қилиш мумкин, баъзан бу сиртни «эгарсимон» сирт деб ҳам юритилади.

27-§. Иккинчи тартибли сиртларнинг тўғри чизиқли ясовчилари

Биз юқорида иккинчи тартибли сиртларнинг турли синфлари билан танишдик. Унда сиртлар бир-биридан тенгламалари ёки таърифлари билан фарқ қилар эди. Энди бу сиртларни биз бошқа нуқтаи назардан икки синфга ажратамиз: улардан бирига иккинчи тартибли шундай сиртларни киритамизки, улар ўз таркибига тўғри чизиқларни тўлиқ олсин, бундай сиртлар *тўғри чизиқли сиртлар* дейилади; иккинчи тартибли цилиндр ва конуслар буларга яққол мисол бўла олади. Иккинчи синфга эса таркибида битта ҳам тўғри чизиқ бўлмаган иккинчи тартибли сиртларни киритамиз, равшанки, эллипсоид чегараланган сирт бўлгани учун унинг таркибида тўғри чизиқ йўқ, демак, эллипсоид иккинчи синфга киради. Сиртлар таркибидаги тўғри чизиқлар шу сиртларнинг *ясовчилари* деб аталади. Таркибида чексиз кўп тўғри чизиқлар мавжуд бўлган сиртлар (конус ва цилиндрдан бошқа) яна борми деган саволга жавоб излаймиз[1].

Бунинг учун гиперболик параболоидни текшириб кўрайлик:

$$\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z, \quad p > 0, \quad q > 0. \tag{48}$$

Шу сиртга тегишли тайин $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтани олайлик. M_0 нуқтадан ўтиб (48) гиперболоид таркибида бўлган тўғри чизиқларни излайлик, бунинг учун M_0 нуқтадан ўтган тўғри чизиқнинг параметрик тенгламаларини ёзайлик:

$$u: \begin{array}{l} x = x_0 + lt, \\ y = y_0 + mt, \\ z = z_0 + nt, \end{array} \tag{49}$$

бунда l, m, n йўналтирувчи векторнинг координаталари бўлиб, шуларни ва M_0 ни бериш билан u тўғри чизиқнинг вазияти аниқ бўлади; бу йўналтирувчи векторнинг йўналиши ҳаттоки, $l:m:n$ нисбатлар билан ҳам тўлиқ аниқланади. Шу нисбатни излайлик.

(48), (49) дан:

---

[1] Биз фақат 2-тартибли сиртлар билан иш кўраётганимизни эслатиб ўтамиз. Масала умумий ҳолда дифференциал геометрия курсидан муфассал ёзилган адабиётда баён қилинади (қ. мас. М. А. Собиров, А. Ё. Юсупов, Дифференциал геометрия курси, 2-нашри, 1959 й., Т., 74-§, 99-§).

$$\frac{(x_0+lt)^2}{p}-\frac{(y_0+mt)^2}{q}=2(z_0+nt)$$

ёки

$$\left(\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}\right)t^2+2\left(\frac{x_0l}{p}-\frac{y_0m}{q}-n\right)t+$$
$$+\left(\frac{x_0^2}{p}-\frac{y_0^2}{q}-2z_0\right)=0.$$

M_0 гиперболоидга тегишли бўлгани учун учинчи қавс ичидаги ифода нолга тенгдир, шуни эътиборга олсак,

$$\left(\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}\right)t^2+2\left(\frac{x_0l}{p}-\frac{y_0m}{q}-n\right)t=0. \qquad (50)$$

Агар u тўғри чизиқ гиперболик параболоид таркибида бўлса, у ҳолда (50) тенглик t нинг ҳар қандай қийматида ўринли бўлиши керак, демак,

$$\frac{l^2}{p}-\frac{m^2}{q}=0, \qquad (51)$$
$$\frac{x_0l}{p}-\frac{y_0m}{q}-n=0.$$

Аксинча, (51) бажарилса, $u\in$ (48), демак, (51) шартлар тўғри чизиқнинг гиперболик параболоидга тўлиқ тегишли бўлиши учун зарурий ва етарли шартлар экан.

(51) нинг биринчисидан: $m=\pm\sqrt{\frac{q}{p}}\,l$ ёки $m_1=\sqrt{\frac{q}{p}}\,l_1$, $m_2=-\sqrt{\frac{q}{p}}\,l_2$, булардан:

$$l_1:m_1=\sqrt{p}:\sqrt{q};\ l_2:m_2=\sqrt{p}:-\sqrt{q}. \qquad (52)$$

(52) нинг ҳар бирини (51) нинг иккинчиси билан биргаликда ечилса,

$$l_1:m_1:n_1=\sqrt{p}:\sqrt{q}:\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right), \qquad (53)$$
$$l_2:m_2:n_2=\sqrt{p}:\sqrt{q}:\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}+\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right).$$

Бундан кўринадики, параболоиднинг M_0 нуқтасидан йўналиши (53) тенгликлар билан аниқланадиган иккита тўғри чизиқ ўтиб, улар гиперболик параболоиднинг ясовчилари ролини ўйнайди.

Энди $\vec{u}_1(l_1,\ m_1,\ n_1)$ векторга параллел бўлган ясовчи билан

$$\Pi_1:\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}=0 \qquad (54)$$

текисликнинг ўзаро вазиятини текширайлик. Бу текисликнинг нормал вектори $\vec{n}_1\left(\frac{1}{\sqrt{p}},\ -\frac{1}{\sqrt{q}},\ 0\right)$ бўлгани учун (53) нинг биринчисини эътиборга олсак, $\sqrt{p}\cdot\frac{1}{\sqrt{p}}+(-\sqrt{q})\cdot\frac{1}{\sqrt{q}}+\left(\frac{x_0}{\sqrt{p}}-\frac{y_0}{\sqrt{q}}\right)\cdot 0=$ $=0\Rightarrow\vec{u}_1\cdot\vec{n}_1=0\Rightarrow u_1$ ясовчи (54) теккисликка параллелдир.

Худди шунга ўхшаш, $\vec{u}_2(l_2,\ m_2,\ n_2)$ векторга параллел бўлган u_2 ясовчи $\Pi_2:\ \frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}=0$ текисликка параллел бўлади.

Гиперболик параболоиднинг барча ясовчиларини икки оилага шундай ажратамизки, биринчи оилага фақатгина Π_1 текисликка параллел бўлганлари киради, иккинчи оилага Π_2 текисликка параллел бўлганлари киради. (Шуни эслатамизки, бу икки оилага кирмаган ясовчи қолмайди, чунки биз юқорида гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан фақатгина иккита ясовчи ўтишини ва бу ясовчилардан бири Π_1 га, иккинчиси Π_2 га параллел эканлигини исботладик.) У ҳолда

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}&=0,\\ z&=0\end{aligned}\right|$$

тўғри чизиқ биринчи оилага,

$$\left.\begin{aligned}\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}&=0,\\ z&=0\end{aligned}\right|$$

тўғри чизиқ эса иккинчи оилага тегишли бўлади.

Шуниси ҳам диққатга сазоворки, бир оиланинг битта тўғри чизиғининг ҳар бир нуқтасидан иккинчи оиланинг битта тўғри чизиғи ўтади.

Энди гиперболик параболоиднинг ясовчиларидан ҳар хил оилага тегишли икки ясовчисининг доимо кесишишлигини кўрсатайлик.

Ҳақиқатан ҳам, (48) нинг $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$ нуқтасидан ўтиб, $\vec{u}_1(l_1,\ m_1,\ n_1)$ векторга параллел бўлган u_1 ясовчининг тенгламаси ((53) га асосан)

$$u_1:\ \frac{x-x_1}{\sqrt{p}}=\frac{y-y_1}{\sqrt{q}}=\frac{z-z_1}{\frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{y_1}{\sqrt{q}}}$$

(48) нинг $M_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$ нуқтасидан ўтиб, $\vec{u}_2(l_2,\ m_2,\ n_2)$ векторга параллел бўлган u_2 ясовчининг тенгламаси

$$u_2:\ \frac{x-x_2}{\sqrt{p}}=\frac{y-y_2}{-\sqrt{q}}=\frac{z-z_2}{\frac{x^2}{\sqrt{p}}+\frac{y^2}{\sqrt{q}}}$$

бўлиб, u_1 биринчи оилага, u_2 иккинчи оилага тегишлидир.

Булардан кўринадики, $\vec{u}_1\nparallel\vec{u}_2$ (чунки мос координаталари пропорционал эмас). Энди бу икки тўғри чизиқнинг бир текисликда ётишлик шартини текширайлик (II боб, 17-§, (34)):

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \sqrt{p} & \sqrt{q} & \frac{x_1}{\sqrt{p}}-\frac{y_1}{\sqrt{q}} \\ \sqrt{p} & -\sqrt{q} & \frac{x_1}{\sqrt{p}}+\frac{y_2}{\sqrt{q}} \end{vmatrix} = (x_2-x_1)\left(x_2\sqrt{\frac{q}{p}}+y_2+\right.$$

$$\left.+x_1\sqrt{\frac{q}{p}}-y_1\right)-(y_2-y_1)\left(x_2+\sqrt{\frac{p}{q}}\,y_2-x_1+\sqrt{\frac{p}{q}}\,y_1\right)+$$

$$+(z_2-z_1)(-2\sqrt{pq})=(x_2^2-x_1^2)\sqrt{\frac{q}{p}}-(y_2^2-y_1^2)\sqrt{\frac{p}{q}}-$$

$$-2\sqrt{pq}\,(z_2-z_1)=\sqrt{pq}\left(\frac{x_2^2-x_1^2}{p}-\frac{y_2^2-y_1^2}{q}-2z_2+2z_1\right)=$$

$$=\sqrt{pq}\left[\frac{x_2^2}{p}-\frac{y_2^2}{q}-2z_2-\left(\frac{x_1^2}{p}-\frac{y_1^2}{q}-2z_1\right)\right]=$$

$$=\sqrt{pq}\,(0-0)=0.$$

Қавс ичидаги ифодалар нолга тенгдир, чунки M_1, M_2 нуқталар гиперболик параболоидга тегишлидир. Демак, u_1, u_2 бир текисликда ётади ва кесишади.

Гиперболик параболоиднинг бир оилага тегишли икки ясовчиси ўзаро айқаш жойлашгандир.

Ҳақиқатан ҳам, бир оилага, аниқроғи, биринчи оилага тегишли икки u_1, u_1' ясовчини олсак, уларнинг ҳар бири Π_1 текисликка параллелдир ҳамда $u_1 \cap u_1' = \varnothing$ (агар улар кесишиб қолса, икки оилага тегишли бўлиб қолади, бу эса u, u_1' нинг олинишига зиддир), лекин улар $u_1 \nparallel u_1'$, агар $u_1 \parallel u_1'$ бўлиб қолса, иккинчи оилага тегишли барча ясовчилар бу икки чизиқни кесиб, шу тўғри чизиқлардан ўтган текисликка жойлашиб қолади, бунинг бўлиши мумкин эмас. Демак, u_1 ва u_1' лар ўзаро айқаш жойлашган.

Агар гиперболик параболоид (48) кўринишдаги тенглама билан аниқланса, унинг биринчи оилага тегишли тўғри чизиқларини $\lambda^2 + \nu^2 \neq 0$ шартда)

$$\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\nu z, \tag{55}$$

$$\nu\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\lambda$$

кўринишда излаш қулайдир, λ ва ν га ҳар хил қийматлар бериш билан шу оилага тегишли ясовчилар топилади. (55) тенгламанинг тўғри чизиқни аниқлаши равшан, агар иккала тенгламанинг чап томонини чап томонига, ўнг томонини ўнг томонига кўпайтирсак ва $\lambda \cdot \nu$ га бўлиб юборсак, (48) ҳосил бўлади, демак, (55) ни қаноатлантирувчи нуқталар (48) га ҳам тегишли экан.

Иккинчи оила ясовчиларини эса ушбу кўринишда излаш мумкин:

$$\lambda\left(\frac{x}{\sqrt{p}}-\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=2\nu z,$$
$$\nu\left(\frac{x}{\sqrt{p}}+\frac{y}{\sqrt{q}}\right)=\lambda. \tag{56}$$

Энди бир паллали гиперболоидни олайлик:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1. \tag{57}$$

Бу сиртнинг тўғри чизиқли ясовчиларининг мавжудлигини исботлаш ва уларни топиш масаласини муфассал текширмасдан, биз бу ишда қуйидагиларнинг ўринли эканини таъкидлаймиз, холос.

1. Бир паллали гиперболоиднинг ҳар бир нуқтасидан унинг фақат иккита ясовчиси ўтади.

2. Бир паллали гиперболоиднинг тўғри чизиқли ясовчилари ҳам икки оилага ажралиб, биринчи оилага тегишли тўғри чизиқлар

$$\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\nu\left(1+\frac{y}{b}\right),$$
$$\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1-\frac{y}{b}\right)(\lambda^2+\nu^2\neq 0) \tag{58}$$

тенгламалар билан, иккинчи оилага тегишли тўғри чизиқлар эса

$$\lambda\left(\frac{x}{a}+\frac{z}{c}\right)=\nu\left(1-\frac{y}{b}\right)$$
$$\nu\left(\frac{x}{a}-\frac{z}{c}\right)=\lambda\left(1+\frac{y}{b}\right) \tag{59}$$

тенгламалар билан аниқланади ва λ, ν га турли қийматлар бериб, турли тўғри чизиқли ясовчиларни ҳосил қилиш мумкин.

3. Бир паллали гиперболоиднинг бир оилага тегишли икки ясовчиси ўзаро айқашдир.

4. Бир паллали гиперболоиднинг ҳар хил оилага тегишли икки ясовчиси ўзаро кесишади.

Биз юқорида эллипсоиднинг тўғри чизиқли ясовчиларининг йўқлигини кўрсатган эдик, шунга ўхшаш, икки паллали гиперболоид ҳам тўғри чизиқли ясовчиларга эга бўлмайди. Ҳақиқатан ҳам, икки паллали гиперболоидни $x=h\,(h^2>a^2)$ текислик билан кесилганда, равшанки, кесимда айнимаган иккинчи тартибли чизиқ ҳосил бўлиб, бунинг таркибида тўғри чизиқ йўқдир, демак, икки паллали гиперболоидни yOz текисликка параллел тўғри чизиқли ясовчиси йўқ, агар yOz га параллел бўлмаган тўғри чизиқли ясовчи бор бўлса, у тўғри чизиқ бу текислик билан кесишади, кесимда ҳосил бўлган нуқта тўғри чизиққа тегишли бўлиб, икки паллали гиперболоидга тегишли эмас. Демак, икки паллали гиперболоид тўғри чизиқли ясовчиларга эга эмас.

Худди шу усул билан эллиптик параболоид учун ҳам ясовчиларнинг мавжуд эмаслигини кўрсатиш мумкин.

28-§. Иккинчи тартибли сиртнинг уринма текислиги

Иккинчи тартибли сиртлар тенгламаси

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz +$$
$$+ 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

кўринишда берилганда унинг $M_0(x_0, y_c, z_0)$ нуқтасига ўтказилган уринма текисликнинг тенгламаси

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14})(x - x_0) + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 +$$
$$+ a_{24})(y - y_0) + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34})(z - z_0) = 0$$

кўринишда бўлишини кўрсатган эдик. Агар (1) нинг чап томонини $F(x, y, z)$ деб белгилаб, (1) дан аввал x бўйича (y ва z ни ўзгармас ҳисоблаб), сўнгра y бўйича (бунда x ва z ни ўзгармас ҳисоблаганда, ниҳоят z бўйича (x, y ни ўзгармас деб олиб) ҳосилалар олсак,

$$F'_x(x, y, z) = 2a_{11}x + 2a_{12}y + 2a_{13}z + 2a_{14} =$$
$$= 2(a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14}), \qquad (60)$$
$$F'_y(x, y, z) = 2a_{21}x + 2a_{22}y + 2a_{23}z + 2a_{24} =$$
$$= 2(a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24}),$$
$$F'_z(x, y, z) = 2a_{31}x + 2a_{32}y + 2a_{33}z + 2a_{34} =$$
$$= 2(a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34}).$$

Бу функцияларнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадаги қийматларини топсак,

$$F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14}),$$
$$F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24}),$$
$$F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0) = 2(a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34}),$$

булардан

$$a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} = \frac{1}{2}F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0),$$
$$a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} = \frac{1}{2}F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0),$$
$$a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} = \frac{1}{2}F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0).$$

Буларнинг қийматини (8) га қўйсак,

$$\frac{1}{2}F'_{x_0}(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}F'_{y_0}(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) +$$
$$+ \frac{1}{2}F'_{z_0}(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$$

ёки қисқароқ ёзсак,

$$F'_{x_0}(x - x_0) + F'_{y_0}(y - y_0) + F'_{z_0}(z - z_0) = 0. \qquad (61)$$

Бу тенглама иккинчи тартибли сиртга ўтказилган уринма текисликнинг энг қулай кўринишдаги тенгламасидир.

Шуни таъкидлаймизки, F'_{x_0}, F'_{y_0}, F'_{z_0} нинг учаласи бир вақтда нолга тенг бўлиши мумкин эмас, акс ҳолда M нуқта сирт учун махсус нуқта бўлиб қолади.

(61) дан фойдаланиб, каноник тенгламалари билан берилган иккинчи тартибли сиртга ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзайлик.

а) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиднинг $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасига ўтказилган уринма текислиги тенгламасини ёзайлик.

Бу ерда

$$F(x,\ y,\ z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,$$

$$F'_x=\frac{2}{a^2}x,\ F'_y=\frac{2}{b^2}y,\ F'_z=\frac{2}{c^2}z.$$

Демак,

$$F'_{x_0}=\frac{2}{a^2}x_0,\quad F'_{y_0}=\frac{2}{b^2}y_0,\quad F'_{z_0}=\frac{2}{c^2}z_0;$$

буларни (61) га қўйсак ва M_0 нуқтанинг эллипсоидга тегишли эканлигини ҳисобга олсак,

$$\frac{2}{a^2}x_0(x-x_0)+\frac{2}{b^2}y_0(y-y_0)+\frac{2}{c^2}z_0(z-z_0)=0,$$

бундан

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}+\frac{zz_0}{c^2}=1. \tag{62}$$

б) $\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}=2z$ гиперболик параболоиднинг $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзайлик. Бу ерда

$$F(x,\ y,\ z)=\frac{x^2}{p}-\frac{y^2}{q}-2z=0,$$

$F'_x=\frac{2}{p}x,\ F'_y=-\frac{2}{q}y,\ F'_z=-2$, буларнинг M_0 нуқтадаги қийматлари

$$F'_{x_0}=\frac{2}{p}x_0,\ F'_{y_0}=-\frac{2}{q}y_0,\ F'_{z_0}=-2.$$

Буларни (61) га қўйсак,

$$\frac{2}{p}x_0(x-x_0)+\left(-\frac{2}{q}y_0\right)(y-y_0)+(-2)(z-z_0)=0.$$

M_0 нинг шу сиртга тегишлилигини ҳисобга олсак, изланган тенглама қуйидагича бўлади:

$$\frac{xx_0}{p}-\frac{yy_0}{q}=z+z_0. \tag{63}$$

c) $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ цилиндрик сиртга унинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринма текислик тенгламасини ёзайлик.

$F'_x=\frac{2}{a^2}x$, $F'_y=\frac{2}{b^2}y$, $F'_z=0$; буларнинг $M_0(x_0, y_0, z_0)$ нуқтадаги қийматлари $F'_{x_0}=\frac{2}{a^2}x_0$, $F'_{y_0}=\frac{2}{b^2}y_0$, $F'_{z_0}=0$ бўлиб, буни (61) га қўйсак,

$$\frac{2}{a^2}x_0(x-x_0)+\frac{2}{b^2}\ y_0(y-y_0)+0(z-z_0)=0$$

ёки

$$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}=1. \tag{64}$$

Худди шунга ўхшаш формулаларни бошқа сиртлар учун мустақил келтириб чиқариш машқ сифатида ўқувчига ҳавола этилади.

29-§. Вектор фазо

Ўқувчига «Алгебра ва сонлар назарияси» курсидан вектор (чизиқли) фазо тушунчаси маълум. Шу тушунчанинг муҳимлигини эътиборга олиб, уни қисқача такрорлаб ўтамиз.

Элементлари вектор деб аталган (бу ерда вектор сўзи кенг маънодадир, хусусий ҳолда геометрия курсининг I бўлимида кўрилган вектор ҳам бўлиши мумкин) бўш бўлмаган V тўплам берилган бўлсин. Бу тўпламнинг элементларини устига стрелка қўйилган кичик лотин ҳарфлари $\vec{a}$, $\vec{b}$, . . . , $\vec{x}$, $\vec{y}$, . . . билан белгилайлик. Бундан ташқари, ҳақиқий сонлар тўплами R берилган бўлиб, V ва R элементларини боғловчи маълум муносабатлар ўрнатилган бўлсин, жумладан:

I. V нинг ихтиёрий икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектори учун уларнинг *йиғиндиси* деб аталган, шу тўпламнинг элементидан иборат учинчи бир вектор мос келтирилган бўлсин, бу векторни $\vec{a}+\vec{b}$ кўринишда ёзайлик.

II. V нинг ихтиёрий $\vec{a}$ вектори ва ихтиёрий k ҳақиқий сон учун V нинг шундай бир элементи мос келтирилган бўлсинки, бу элемент $\vec{a}$ векторни k сонга *кўпайтиришдан* ҳосил қилинган дейилиб, уни $k\vec{a}$ кўринишда ёзайлик. Киритилган бу икки амал қуйидаги 8 та аксиомани қаноатлантирсин.

I_1. Векторларни қўшиш коммутативлик қонунига бўйсунади, яъни $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ учун $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

I_2. Векторларни қўшиш гуруҳланиш қонунига бўйсунади, яъни $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V$ учун $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

I_3. V да ноль вектор деган $\vec{0}$ элемент мавжуд бўлиб, $\forall \vec{a} \in V$ учун $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

I_4. V нинг ихтиёрий $\vec{a}$ вектори учун V да шундай $\vec{a}'$ вектор мавжуд бўлиб, $\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}$. Бундай $\vec{a}'$ вектор одатда $\vec{a}$ векторга *қарама-қарши вектор* деб аталади ва у $-\vec{a}$ билан белгиланади. Бу тўртта аксиома *векторларни қўшиш аксиомалари* деб аталади.

II_1. $\forall k \in R$ ва $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ учун $k(\vec{a}+\vec{b})=k\vec{a}+k\vec{b}$.

II_2. $\forall k, t \in R$ ва $\forall \vec{a} \in V$ учун $(k+t)\vec{a}=k\vec{a}+t\vec{a}$.

II_3. $\forall k, t \in R$, $\forall \vec{a} \in V$ учун $k(t\vec{a})=(kt)\vec{a}$.

II_4. $\forall \vec{a} \in V$ учун $1 \cdot \vec{a}=\vec{a}$.

Бу тўртта аксиома *векторни сонга кўпайтириш аксиомалари* деб аталади.

Таъриф. Элементлари шу саккиз аксиома шартларини қаноатлантирувчи V тўплам *вектор (ёки чизиқли) фазо* деб аталади.

Векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амаллари биргаликда *чизиқли амаллар* деб аталади.

Бу саккиз аксиома геометрия курсининг Г. Вейль аксиомалари бўйича баён қилишдаги биринчи ва иккинчи гуруҳ аксиомаларидир (бу аксиомалар системаси билан IV бўлимда батафсил танишамиз).

Юқорида келтирилган аксиомалардан бевосита қуйидаги икки натижа келиб чиқади:

1-натижа. I_3 аксиома шартини қаноатлантирувчи $\vec{0}$ элемент V да ягонадир.

Исбот. V да $\vec{0}$ дан фарқли ва шу аксиома шартини қаноатлантирувчи $\vec{0}'$ элемент мавжуд деб фараз қилсак,

$\forall \vec{a} \in V$ учун $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{0}'=\vec{a}$, хусусий ҳолда, $\vec{0}+\vec{0}'=\vec{0}$, $\vec{0}'+\vec{0}=\vec{0}'$.

I_1 га асосан, коммутативлик қонунининг ўринлилигидан, $\vec{0}=\vec{0}'$. ▲

2-натижа. I_4 аксиомадаги ҳар бир $\vec{a}$ векторга қарама-қарши $\vec{a}'$ вектор V да ягонадир.

Исбот. $\vec{a}$ векторга қарама-қарши $\vec{a}'$ вектордан фарқли яна битта $\vec{a}''$ вектор мавжуд деб қарасак, яъни

$$\vec{a}+\vec{a}'=\vec{0}, \quad \vec{a}+\vec{a}''=\vec{0}$$

десак, бу тенгликлардан биринчисининг иккала томонига $\vec{a}''$ ни қўшиб, I_1, I_2 ни эътиборга олсак, $(\vec{a}''+\vec{a})+\vec{a}'=\vec{0}+\vec{a}''$. Лекин $\vec{a}+\vec{a}''=\vec{0} \Rightarrow \vec{a}+\vec{0}'=\vec{0}+\vec{a}''$ ёки $\vec{a}'=\vec{a}''$. ▲

Вектор фазога мисоллар келтирамиз.

1. Биринчи бўлимда кўриб ўтилган геометрик векторлар тўплами чизиқли фазо ҳосил қилади, чунки бу векторлар учун юқоридаги 8 та аксиоманинг ҳаммаси бажарилади.

2. Элементлари ҳақиқий сонлардан иборат бўлган n та устун ва m та сатрдан ҳосил қилинган барча матрицалар тўплами (қўшиш амали деб матрицаларни қўшишни, векторни сонга кўпайтириш амали деб матрицани сонга кўпайтиришни олсак) ҳам вектор фазо ҳосил қилади, бунда вектор сўзи $m \cdot n$ та элементли матрицани билдиради. (Бу тўпламнинг вектор фазо экани «Алгебра ва сонлар назарияси» курсида исбот қилинади.)

Эслатма. Юқорида биз векторни сонга кўпайтиришда фақат ҳақиқий сонлар тўплами билан чегараландик, шунинг учун бу вектор фазо *ҳақиқий сонлар майдони устидаги вектор фазо* деб аталади. Биз бундан буён фақат шундай чизиқли фазони кўзда тутамиз ва уни қисқача *вектор фазо* деб атайверамиз.

Агар II_{1-4} шартлар комплекс сонлар учун ҳам бажарилиши талаб қилинса, у ҳолда *V комплекс сонлар майдони устидаги вектор фазо* деб юритилади.

Таъриф. $V' \subset V$ бўлиб, V да аниқланган векторларни қўшиш ва векторни сонга кўпайтириш амалига нисбатан V' ҳам вектор фазо ҳосил қилса, у ҳолда V' ни V нинг *қисм фазоси* деб аталади, масалан, фақат битта ноль векторга эга бўлган тўплам ҳар қандай вектор фазонинг қисм фазосидир.

Қуйидаги содда теоремани мустақил исботланг,

Теорема. V вектор фазонинг иккита қисм фазосининг кесишмаси ҳам вектор фазо бўлади.

Энди вектор фазодаги векторлар учун чизиқли эрклилик тушунчасини киритайлик. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар V нинг элементлари бўлсин.

Таъриф. Камида биттаси нолдан фарқли ҳақиқий $k_1, k_2, \ldots, k_n$ сонлар мавжуд бўлиб,

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \tag{1}$$

тенглик бажарилса, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системаси *чизиқли боғлиқ* дейилади: агар (1) тенглик фақат $k_1 = k_2 = \ldots = k_n = 0$ бўлгандагина бажарилса, берилган векторлар системаси *чизиқли эркли* дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, V вектор фазода камида битта вектор бўлса, ҳар қандай $k \neq 0$ сон учун ҳам $k\vec{a} \in V$.

Энди вектор фазонинг ўлчовини аниқловчи қуйидаги аксиомаларни киритайлик.

III_1. V вектор фазода n та чизиқли эркли вектор мавжуд.

III_2. V вектор фазодаги ҳар қандай $n+1$ та вектор системаси чизиқли боғлиқдир.

Келтирилган 10 та аксиома (I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}) шартларини қаноатлантирувчи вектор фазо *n ўлчовли вектор фазо* дейилади ва у V_n билан белгиланади.

$n = 1$ га мос хусусий ҳолда бир ўлчовли V_1 вектор фазо ҳосил бўлади (бунга мисол тариқасида бир тўғри чизиққа параллел барча геометрик векторлар тўпламини олиш мумкин), $n = 2$ да икки ўлчовли V_2 вектор фазо ҳосил бўлади (мисол тариқасида бир текисликка параллел барча геометрик векторлар тўпламини кўрсатиш мумкин), $n = 3$ да уч ўлчовли V_3 вектор фазо ҳосил бўлади (бунга мисол тариқасида фазодаги барча геометрик векторлар тўпламини олиш мумкин).

Лекин III_{1-2} аксиомалар шартларини қаноатлантирувчи n сон мавжуд бўлмаса (албатта I_{1-4}, II_{1-4} нинг барча шартлари қаноатланганда), у ҳолда бундай вектор фазо *чексиз ўлчовли вектор фазо* деб юритилади; бу ҳолда чексиз ўлчовли вектор фазода етарлича кўп векторлардан ташкил топган чизиқли эркли векторлар системасини ҳосил қилиш мумкин. Чексиз ўлчовли вектор фазо тушунчаси айниқса функционал анализ бўлимида кенг ўрганилади.

Биз бундан буён чекли ўлчовли вектор фазо билан иш кўрамиз.

Векторнинг координаталари. Таъриф. n ўлчовли вектор фазонинг ихтиёрий n та чизиқли эркли векторлари системаси шу фазонинг *базиси* дейилади. Бундан буён биз базис векторларни $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ деб белгилаб, уни $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ кўринишда ёзамиз, шуни таъкидлаймизки, базис векторлар орасида ноль вектор йўқдир, чунки $\vec{e}_i = \vec{0}$ бўлиб қолса, хусусий ҳолда $k_1 = k_2 = \ldots = k_{i-1} = k_{i+1} = \ldots = k_n = 0$, $k_i \neq 0$ сонлар учун

$$k_1\vec{e}_1 + k_2\vec{e}_2 + \ldots + k_i\vec{e}_i + \ldots + k_n\vec{e}_n = \vec{0}$$

бўлиб, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ чизиқли боғлиқ бўлиб қолади.

Теорема. *V_n нинг ихтиёрий $\vec{a}$ вектори шу фазонинг базис векторлари орқали биргина кўринишда ифодаланади.*

Исбот. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лар V_n нинг базиси бўлсин, у ҳолда $\vec{a}, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар системаси III_2 аксиомага асосан чизиқли боғлиқ, демак, шундай $k, k_1, k_2, \ldots, k_n$ $(k^2 + k_1^2 + \ldots + k_n^2 \neq 0)$ сонлар мавжудки, улар учун

$$k\vec{a} + k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + \ldots + k_n\vec{a}_n = \vec{0} \qquad (2)$$

бунда $k \neq 0$, чунки $k = 0$ бўлса, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ чизиқли боғланган бўлар эди, бу эса базис тушунчасига зиддир. (2) нинг иккала қисмини $\frac{1}{k}$ га кўпайтириб $\left(\frac{1}{k} \cdot \vec{0} = \vec{0}\right.$ ни ҳисобга олиб), иккинчи қўшилувчидан бошлаб барча ҳадларни ўнг томонга ўтказсак,

$$\vec{a} = -\frac{k_1}{k}\vec{e}_1 - \frac{k_2}{k}\vec{e}_2 - \ldots - \frac{k_n}{k}\vec{e}_n.$$

Бунда $-\frac{k_1}{k} = x_1, \ -\frac{k_2}{k} = x_2, \ldots, -\frac{k_n}{k} = x_n$ — белгилашларни киритиб, сўнгги ифодани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\vec{a} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n. \qquad (3)$$

Бундан берилган $\vec{a}$ векторнинг базис векторлар орқали ифодаланиши кўриниб турибди.

Энди (3) ёйилманинг ягона эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, $\vec{a}$ вектор $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис векторлар орқали иккинчи кўринишда ифодалансин:

$$\vec{a} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n. \qquad (4)$$

У ҳолда (3) дан (4) ни ҳадлаб айирсак, (I_4 га асосан $\vec{a} - \vec{a} = \vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ ҳамда II_2 га асосан):

$$(x_1 - y_1)\vec{e_1} + (x_2 - y_2)\vec{e_2} + \dots + (x_n - y_n)\vec{e_n} = \vec{0}. \qquad (5)$$

Лекин базис векторлар чизиқли эрклилиги сабабли:

$$x_1 - y_1 = 0,\ x_2 - y_2 = 0, \dots,\ x_n - y_n = 0$$

ёки $x_1 = y_1,\ x_2 = y_2, \dots, x_n = y_n$. Бу эса (3) ёйилманинг ягоналигини тасдиқлайди.

Таъриф. (3) ёйилмадаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ сонлар $\vec{a}$ векторнинг $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \dots, \vec{e_n}$ базисдаги *координаталари* деб аталади ва у $\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўринишда белгиланади. Демак,

$$\vec{a}(x_1, x_2, \dots, x_n) \Longleftrightarrow \vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}.$$

Хусусий ҳолда

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \vec{e_1} \Rightarrow \vec{e_1}(1,\ 0,\ 0, \dots, 0),\\
\vec{a} &= \vec{e_2} \Rightarrow \vec{e_2}(0,\ 1,\ 0, \dots, 0),\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\\
\vec{a} &= \vec{e_n} \Rightarrow \vec{e_n}(0,\ 0, \dots, 0,\ 1),\\
\vec{a} &= \vec{0} \Rightarrow \vec{0}\,(0,\ 0, \dots, 0).
\end{aligned}$$

Теорема. *Бир базисга нисбатан берилган векторларни қўшишдан ҳосил қилинган векторнинг координаталари қўшилувчи векторлар мос координаталарининг йиғиндисига тенг, векторни сонга кўпайтиришда эса унинг барча координаталари шу сонга кўпайтирилади.*

Исбот. $\vec{a}(x_1, x_2, \dots x_n)$, $\vec{b}(y_1, y_2, \dots, y_n)$ векторлар ёйилмалари

$$\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n},\quad \vec{b} = y_1\vec{e_1} + y_2\vec{e_2} + \dots + y_n\vec{e_n},$$

бундан:

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1)\vec{e_1} + (x_2 + y_2)\vec{e_2} + \dots + (x_n + y_n)\vec{e_n},$$

ва

$$(\vec{a} + \vec{b})(x_1 + y_1)(x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n) \qquad (6)$$

Энди $\vec{a} = x_1\vec{e_1} + x_2\vec{e_2} + \dots + x_n\vec{e_n}$ ифоданинг иккала қисмини k га кўпайтирамиз:

$$k\vec{a} = kx_1\vec{e}_1 + kx_2\vec{e}_2 + \ldots + kx_n\vec{e}_n$$

ёки

$$k\vec{a}(kx_1,\ kx_2,\ \ldots,\ kx_n) \qquad (7)\ ▲$$

Эслатма. Қўшилувчи векторлар сони иккитадан ортиқ бўлса ҳам теорема ўз кучини сақлайди. Буни машқ сифатида исботлашни ўқувчига ҳавола қиламиз.

V_n да бирор $(\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n)$ базисга нисбатан

$$\vec{b}_1(b_{11},\ b_{12},\ \ldots,\ b_{1n}),\ \vec{b}_2(b_{21},\ b_{22},\ \ldots,\ b_{2n}),\ \ldots,$$

$$\vec{b}_m(b_{m1},\ b_{m2},\ \ldots,\ b_{mn})$$

векторлар берилган бўлсин. Қуйидаги матрицани тузайлик:

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_{m1} & b_{m2} & \ldots & b_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Теорема. *Берилган $\vec{b}_1,\ \vec{b}_2,\ \ldots,\ \vec{b}_n$ векторлардан олинган чизиқли эркли векторлар сони* (8) *матрицанинг рангига тенгдир.*

Исбот. Фараз қилайлик, берилган векторлар чизиқли боғлиқ бўлсин, у ҳолда шундай $k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_m$ сонлар мавжудки,

$$k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2 + \ldots + k_m\vec{b}_m = \vec{0},\ k_1^2 + k_2^2 + \ldots + k_m^2 \neq 0, \qquad (*)$$

бу тенгликни координаталарда ёзайлик:

$$k_1(b_{11}\vec{e}_1 + b_{12}\vec{e}_2 + \ldots + b_{1n}\vec{e}_n) + k_2(b_{21}\vec{e}_1 + b_{22}\vec{e}_2 + \ldots$$

$$+ b_{2n}\vec{e}_n) + \ldots + k_m(b_{m1}\vec{e}_1 + b_{m2}\vec{e}_2 + \ldots + b_{mn}\vec{e}_n) = \vec{0}$$

ёки $(k_1b_{11} + k_2b_{21} + \ldots + k_mb_{m_1})\vec{e}_1 + (k_1b_{12} + k_2b_{22} + \ldots$

$$+ k_mb_{m2})\vec{e}_2 + \ldots + (k_1b_{1n} + k_2b_{2n} + \ldots + k_mb_{mn})\vec{e}_n = \vec{0}.$$

$\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ базис векторлар бўлгани учун

$$k_1b_{11} + k_2b_{21} + \ldots + k_mb_{m1} = 0,$$
$$k_1b_{12} + k_2b_{22} + \ldots + k_mb_{m2} = 0,$$
$$. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$k_1b_{1n} + k_2b_{2n} + \ldots + k_mb_{mn} = 0;$$

бу тенгликларнинг барчасини қўшайлик:

$$k_1(b_{11}+b_{12}+\dots+b_{1n})+k_2(b_{21}+b_{22}+\dots+b_{2n})+$$
$$+\dots+k_n(b_{m1}+b_{m2}+\dots+b_{mn})=0 \qquad (^{**})$$

Бу эса B матрица сатрларининг чизиқли боғлиқлигини кўрсатади. Аксинча, $(^{**})\Rightarrow(^{*})$ ҳам ўринлидир.

Демак, берилган векторлар системасидаги чизиқли эркли векторларнинг максимал сони B матрицанинг чизиқли эркли сатрлари сонларининг энг каттасига тенг. ▲

Агар $m=n$, яъни берилган векторлар сони фазо ўлчовига тенг бўлса, B матрица квадрат матрица бўлиб, юқоридаги теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. n ўлчовли вектор фазода берилган n та векторнинг чизиқли боғлиқ бўлиши учун уларнинг координаталаридан тузилган n- тартибли детерминантнинг нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир.

Энди бир базисдан иккинчи базисга ўтиш масаласига тўхталайлик. $Б=(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$, $Б'=(\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}')$ лар V_n нинг икки базиси бўлсин. $\vec{a}\in V_n$ нинг шу базислардаги координаталари мос равишда

$$(x_1, x_2, \dots, x_n),\ (x_1', x_2', \dots, x_n'),$$

$$\vec{a}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\dots+x_n\vec{e}_n,\quad \vec{a}=x_1'\vec{e}_1{}'+x_2'\vec{e}_2{}'+\dots+x_n'\vec{e}_n{}'. \qquad (8')$$

Бундан ташқари, $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ лардан ҳар бирининг $Б$ базисдаги координаталари маълум бўлсин:

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1{}'&=c_{11}\vec{e}_1+c_{21}\vec{e}_2+\dots+c_{n1}\vec{e}_n,\\
\vec{e}_2{}'&=c_{12}\vec{e}_1+c_{22}\vec{e}_2+\dots+c_{n2}\vec{e}_n,\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\vec{e}_n{}'&=c_{1n}\vec{e}_1+c_{2n}\vec{e}_2+\dots+c_{nn}\vec{e}_n.
\end{aligned} \qquad (9)$$

Бунда

$$\begin{vmatrix} c_{11}c_{21} & \dots & c_{n1}\\ c_{12}c_{22} & \dots & c_{n2}\\ \cdot\ \cdot & \cdot & \cdot\\ c_{1n}c_{2n} & \dots & c_{nn}\end{vmatrix}\neq 0,$$

акс ҳолда $\vec{e}_1{}', \vec{e}_2{}', \dots, \vec{e}_n{}'$ векторлар чизиқли боғлиқ бўлар эди. Бу қийматларни $(8')$ нинг иккинчисига қўямиз:

$$\vec{a}=x_1'(c_{11}\vec{e}_1+c_{21}\vec{e}_2+\dots+c_{n1}\vec{e}_n)+x_2'(c_{12}\vec{e}_1+c_{22}\vec{e}_2+$$
$$+\dots+c_{n2}\vec{e}_n)+\dots+x_n'(c_{1n}\vec{e}_1+c_{2n}\vec{e}_2+\dots+c_{nn}\vec{e}_n).$$

Бундан

$$\vec{a} = (c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \dots + c_{1n}\overrightarrow{x'_n})\vec{e}_1 + (c_{21}\overrightarrow{x'_1} + c_{22}\overrightarrow{x'_2} + \dots + c_{2n}\overrightarrow{x'_n})\vec{e}_2 + \dots + (c_{n1}\overrightarrow{x'_1} + c_{n2}\overrightarrow{x'_2} + \dots + c_{nn}\overrightarrow{x'_n})\vec{e}_n.$$

(8) ва (9) дан:

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x'_1 + c_{12}x'_2 + \dots + c_{1n}x'_n, \\ x_2 &= c_{21}x'_1 + c_{22}x'_2 + \dots + c_{2n}x'_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n &= c_{n1}x'_1 + c_{n2}x'_2 + \dots + c_{nn}x'_n. \end{aligned} \qquad (10)$$

Бу формулалар $\vec{a}$ нинг *Б* базисдаги координаталарини шу векторнинг *Б'* базисдаги координаталари билан боғлагани учун (10) ифодалар *вектор координаталарини алмаштириш формулалари* дейилади.

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ . & . & . & . \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

Бу айнимаган матрицадир, чунки унинг детерминанти ((9) дан кўриниб турибдики) нолдан фарқли. Бу матрицани (9) нинг матрицаси

$$C^* = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ . & . & . & . \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix}$$

билан солиштирсак, (11) матрица C^* нинг транспонирланишидан ҳосил бўлганлиги ошкор бўлади.

1-мисол. Қуйида берилган тўртта векторнинг V_4 вектор фазо учун базис бўлишини исботланг: $\vec{a}_1(2,3,4,-3)$, $\vec{a}_2(5, 4, 9, -2)$, $\vec{a}_3(1, 0, 0, 0)$, $\vec{a}_4(3, 5, 5, 3)$.

Ечиш. Берилган векторлар системасининг V_4 учун базис бўлишини кўрсатиш учун уларнинг чизиқли эркли эканлигини кўрсатиш кифоядир. Ҳақиқатан,

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 & -3 \\ 5 & 4 & 9 & -2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 4 & 9 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 98 \neq 0,$$

демак, берилган векторлар чизиқли эркли.

2-мисол. Элементлари иккинчи тартибли квадрат матрицалардан иборат вектор фазо берилган. Бу фазода $\vec{a}_1\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_2\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\vec{a}_3\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$,

$\vec{a}_4\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix}$ векторларнинг базис ҳосил қилишини кўрсатинг ва $\vec{x}\begin{pmatrix}2 & 8\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ векторларнинг шу базисдаги координаталарини топинг.

Ечиш. Берилган векторларнинг базис эканлигини кўрсатиш учун уларнинг

$$k_1\vec{a}_1 + k_2\vec{a}_2 + k_3\vec{a}_3 + k_4\vec{a}_4 \qquad (*)$$

чизиқли комбинацияси фақат $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ шартдагина $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ матрица ҳосил бўлишини кўрсатиш керак. (*) ни берилганлар орқали ёзсак ва уни $\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ матрицага тенглаштирсак,

$$k_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} + k_2\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 0\end{pmatrix} + k_3\begin{pmatrix}3 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix} + k_4\begin{pmatrix}4 & 2\\ -1 & -6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

бўлиб, матрицаларни қўшиш ва матрицани сонга кўпайтириш қоидаларига асосан:

$$\begin{pmatrix}k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 & 2k_1 + 3k_2 + k_3 + 2k_4\\ k_1 + k_2 + k_3 - k_4 & k_1 - 2k_3 - 6k_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Бундан

$$\left|\begin{aligned} &k_1 + 2k_2 + 3k_3 + 4k_4 = 0,\\ &2k_1 + 3k_2 + k_3 + 2k_4 = 0,\\ &k_1 + k_2 + k_3 - k_4 = 0,\\ &k_1 - 2k_3 - 6k_4 = 0\end{aligned}\right. \qquad (**)$$

система ҳосил бўлади. Бу система бир жинсли бўлгани учун $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$. Бу ечимдан бошқа ечимнинг мавжуд эмаслигини кўрсатайлик. Бунинг учун (**) системанинг асосий детерминантини ҳисоблайлик:

$$\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\ 2 & 3 & 1 & 2\\ 1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -2 & -6\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 1 & 2 & 5\\ 2 & 1 & -1 & 4\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & -3 & -5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 2 & 5\\ 1 & -1 & 4\\ -1 & -3 & -5\end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Алгебрадан маълумки, бир жинсли система нолдан фарқли ечимга эга бўлиши учун унинг асосий детерминанти нолга тенг бўлиши зарур ва етарлидир. Мисолимизда бу детерминант -1 га тенг. Демак, (**) система фақат ноль ечимга эгадир. Бундан кўринадики (*) чизиқли комбинация фақатгина $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 0$ шартда ноль матрица ҳосил қилади, бундан $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{a}_3$, $\vec{a}_4$ векторларнинг базис векторлар эканлиги келиб чиқади. Энди шу базисда $\vec{x}\begin{pmatrix}2 & 8\\ 3 & 5\end{pmatrix}$ векторнинг координаталарини топайлик.

Фараз қилайлик,

$$\vec{x}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3 + x_4 \vec{a}_4$$

бўлсин. Берилганларни эътиборга олсак,

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Буни ҳам (**) га ўхшаш система қилиб ёзайлик:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 2, \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_3 - 6x_4 = 5. \end{cases} \qquad (***)$$

Крамер формулаларига асосан;

$$x_1 = 3, \ x_2 = 1, \ x_3 = -1, \ x_4 = 0.$$

Демак,

$$\vec{x}(3, \ 1, \ 1 \ 0).$$

3-мисол. V_3 вектор фазода янги базиснинг координаталари эски базисга нисбатан $\vec{e}_1'(1, \ 2,3 \ )$, $\vec{e}_2'(1, \ 0, \ 2)$, $\vec{e}_3'(-1, \ 4, \ -3)$ бўлса, шу фазодаги векторнинг эски ва янги базисдаги координаталарини боғловчи муносабатларни топинг.

Ечиш. $\vec{x}$ векторнинг эски ва янги базисдаги координаталарини мос равишда x_1, x_2, x_3 ва x_1', x_2', x_3' десак, у ҳолда изланган боғланиш (10) формулага асосан:

$$x_1 = x_1' + x_2' - x_3',$$
$$x_2 = 2x_1' + 4x_3',$$
$$x_3 = 3x_1' + 2x_2' - 3x_3'.$$

30-§. Аффин фазо ва аффин координаталар системаси

V_n вектор фазо ва элементлари нуқталар деб аталган (бу элементларни биз бош лотин ҳарфлари билан белгилаймиз) $\Omega = \{A, B, \ldots\}$ тўплам берилган бўлсин. Ω тўплам билан V_n тўплам орасида шундай мослик ўрнатамизки, Ω дан маълум тартибда олинган икки M, N нуқта учун V_n даги аниқ битта $\vec{a}$ вектор мос келсин, буни $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ деб белгилаймиз. Лекин шуни таъкидлаш зарурки, V_n даги ҳар бир векторга Ω да нуқталарнинг тартибланган турли жуфтлари мос келиши мумкин. Масалан, $\vec{a} = \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{KL}$, бунда M, N, P, Q, K, L ларнинг барчаси Ω га тегишлидир.

$\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ ёзувини қуйидагича ифодалаймиз: $\vec{a}$ векторни M нуқтадан қўйиш билан N нуқта ҳосил қилинади.

Юқорида келтирилган Ω билан V_n орасидаги мосликнинг қуйидаги икки аксиомани қаноатлантириши талаб қилинади.

IV_1. $\forall M\in\Omega$ ва $\forall \vec{a}\in V_n$ учун ягона шундай $N\in\Omega$ мавжудки, унинг учун $\vec{a}=\overrightarrow{MN}$.

IV_2. $\forall A, B, C, \in\Omega$ учун $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.

Бу икки аксиома баъзан *векторни нуқтадан бошлаб қуйиш аксиомалари* деб юритилади.

Таъриф. Элементлари юқоридаги I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}, IV_{1-2} аксиомаларни қаноатлантирувчи бўш бўлмаган тўплам *n ўлчовли ҳақиқий аффин фазо* деб аталади. Уни A_n орқали белгилаймиз. Агар V_n вектор фазо комплекс вектор фазо бўлса, у ҳолда A_n ҳам *комплекс аффин фазо* деб аталади.

Демак, n ўлчовли аффин фазони символик равишда қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин экан: $A_n=V_n\cup\Omega$.

V_n вектор фазо A_n нинг *элтувчиси* дейилади.

Хусусий ҳолда, $n=2$ бўлса, A_2 икки ўлчовли аффин фазо бўлиб, V_2 нинг элементларини одатдаги геометрик векторлар деб олсак, I бўлимда қаралган аффин текислик ҳосил бўлади.

Юқорида келтирилган жами 12 та аксиома Вейль киритган (1918 йил) аксиомаларнинг бир қисмидир.

A_n нинг барча хоссаларини исботлашда биз фақат юқоридаги 12 та аксиомага ва улардан келиб чиққан натижаларгагина суянамиз (лекин V_n хоссаларининг кўпчилиги «Алгебра ва сонлар назарияси» курсида тўла исботлангани учун улардан керак ҳолларда исботсиз фойдаланаверамиз).

Мисол тариқасида қуйидаги теоремаларни исботлайлик,

1-теорема. *Ω нинг устма-уст тушган икки нуқтасига V_n нинг ноль вектори мос келади*, яъни $\overrightarrow{AA}=\vec{0}$.

Исбот. $\forall A\in\Omega$ бўлсин. A, A нуқталарга V_n дан бирор $\vec{a}$ мос келсин: $\forall\vec{b}\in V_n$ ни олсак, IV_1 га асосан, шундай B нуқта мавжудки, $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, энди IV_2 ни татбиқ қилсак $\vec{a}+\vec{b}+\overrightarrow{AA}+\overrightarrow{AB}=\vec{b}$. Бундан I_3 га асосан $\vec{a}=\vec{0}$. △

2-теорема. $\overrightarrow{AB}=\vec{a}\Rightarrow\overrightarrow{BA}=-\vec{a}$.

Исбот. $\overrightarrow{BA}=\vec{b}$ десак, IV_2 га асосан $\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=$ $=\vec{0}$, бундан $\vec{b}=-\vec{a}$.

3-теорема. $\overrightarrow{OA'}=k\cdot\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'}=k\cdot\overrightarrow{OB}\Rightarrow\overrightarrow{A'B'}=k\cdot\overrightarrow{AB}$.

Исбот. IV_2 га асосан

$$\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{A'O}+\overrightarrow{OB'}=\overrightarrow{A'B'} \qquad (*)$$

Лекин $\overrightarrow{A'O} = -\overrightarrow{OA'} \Rightarrow \overrightarrow{A'O} + \overrightarrow{OB'} = -\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{OB'} = -k\overrightarrow{OA} +$ $+ k\cdot\overrightarrow{OB} = k(-\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = k(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB}) = k\cdot\overrightarrow{AB}$, бундан ва (*) дан: $\overrightarrow{A'B'} = k\cdot\overrightarrow{AB}$. ▲

Энди аффин координаталар системаси тушунчасини киритайлик, A_n да ихтиёрий бир O нуқтани олайлик, V_n нинг бирор $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ базисининг барча векторлари O нуқтадан қўйилган бўлсин, натижада O нуқта ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \dots, \vec{e}_n$ базис векторлардан ташкил топган $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ тўплам ҳосил бўлади. Бу тўплам *аффин координаталар системаси* деб аталиб, уни $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ билан белгилаймиз. O нуқта *координаталар боши*, $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ *координата векторлари* деб аталади.

Аффин координаталар системаси дейиш ўрнига бундан буён қисқача *аффин репер* деймиз. Демак, аффин репер икки турдаги объектдан — нуқта ва векторлардан ташкил топган системадир. A_n нинг ихтиёрий M нуқтасини олсак ва аффин репер $\mathcal{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ маълум бўлса, $\overrightarrow{OM}$ вектор ҳосил қилиниб, бу вектор M нуқтанинг *радиус-вектори* деб аталади.

У ҳолда $\overrightarrow{OM} \in V_n$ бўлгани учун унинг $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ базисдаги координаталарини $x_1, x_2, \dots, x_n$ десак,

$$\overrightarrow{OM} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n. \tag{12}$$

Таъриф. M нуқта радиус-векторининг координаталари шу нуқтанинг *аффин координаталари* деб аталади: у $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$ кўринишда белгиланади, демак, $(12) \Leftrightarrow M(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Хусусий ҳолда $\overrightarrow{OM_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OM_2} = \vec{e}_2$, $\dots$, $\overrightarrow{OM_n} = \vec{e}_n$ бўлса, 29-§ га асосан $M_1\ (1, 0, 0\ \dots\ 0)$, $M_2\,(0, 1, \dots 0)$, $\dots$, $M_n\,(0, 0, \dots 1)$.

A_n даги $\mathcal{B}$ аффин реперга нисбатан $M(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \dots, y_n)$ нуқталар берилган бўлсин. $\overrightarrow{MN}$ векторнинг координаталарини $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{ON}$ ёки $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$ га асосан базис векторлар орқали ифодалайлик:

$$\overrightarrow{MN} = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n - (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n) =$$
$$= (y_1 - x_1)\vec{e}_1 + (y_2 - x_2)\vec{e}_2 + \dots + (y_n - x_n)\vec{e}_n,$$

бундан:

$$\overrightarrow{MN}(y_1-x_1,\ y_2-x_2,\ \ldots,\ y_n-x_n). \qquad (13)$$

Таъриф. A_n нинг учлари M, N нуқталарда бўлиб, $\overrightarrow{MP}=t\,\overrightarrow{PN}$ $(0\leqslant t\leqslant 1)$ тенгликни қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами MN *кесма* дейилади.

MN кесма берилган бўлиб,

$$\overrightarrow{MP}=\lambda\overrightarrow{PN} \qquad (*)$$

(бунда $\lambda\in R$, $\lambda\neq 1$) бўлса, P *нуқта берилган кесмани* λ *нисбатда бўлади* деймиз. (*) дан $\overrightarrow{MP}=\lambda(\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MP})$ ёки $\overrightarrow{MP}=\frac{\lambda}{1+\lambda}\ \overrightarrow{MN}$. Ҳар бир $\lambda\neq 1$ учун MN кесмани λ нисбатда бўлувчи ягона нуқта мавжуд; $\lambda>0$ бўлган ҳолда бўлувчи нуқта кесманинг *ички нуқтасидир*.

A_n даги $\mathcal{B}$ реперда учлари $M_1(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $N(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ нуқталардаги MN кесмани λ нисбатда бўлувчи P нуқтанинг координаталарини $z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_n$ десак,

$$z_1=\frac{x_1+\lambda y_1}{1+\lambda},\quad z_2=\frac{x_2+\lambda y_2}{1+\lambda},\ \ldots,\ z_n=\frac{x_n+\lambda y_n}{1+\lambda}.$$

$\lambda=1$ да P нуқта кесманинг ўрта нуқтаси бўлади:

$$z_1=\frac{x_1+y_1}{2},\quad z_2=\frac{x+y_2}{2},\ \ldots,\ z_n=\frac{x_n+y_n}{2}.$$

Энди нуқтанинг аффин координаталарини алмаштириш формулаларини топайлик. A_n да $\mathcal{B}=(0,\vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n)$ ва $\mathcal{B}'=(0',\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}',\ \ldots,\ \vec{e}_n{}')$ аффин реперлар берилган бўлсин. $\forall M\in A_n$ нинг шу базислардаги координаталари мос равишда $x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ ва $x_1',x_2',\ldots,x_n'$ бўлсин ҳамда $\mathcal{B}'$ репер элементлари $\mathcal{B}$ реперга нисбатан қуйидагича аниқланган бўлсин:

$$O'(c_{10},\ c_{20},\ \ldots,\ c_{n0}),\ \vec{e}_1{}'(c_{11},\ c_{12},\ \ldots,\ c_{1n}),\ \ldots,$$
$$\vec{e}_n(c_{n1},\ c_{n2},\ \ldots,\ c_{nn}). \qquad (14)$$

$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OO'}+\overrightarrow{O'M}$ ни координаталарда ёзайлик:

$$x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2+\ \ldots\ +x_n\vec{e}_n=c_{10}\vec{e}_1+$$
$$+c_{20}\vec{e}_2+\ldots+c_{n0}\vec{e}_n+x_1'\vec{e}_1{}'+x_2'\vec{e}_2{}'+\ \ldots\ +x_n'\vec{e}_n{}'.$$

$\vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}',\ \ldots,\ \vec{e}_n{}'$ ни $\vec{e}_1{}',\vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n$ орқали ифодалаб,

$$(-x_1+c_{10}+c_{11}x_1'+\ \ldots\ +c_{n1}x_n')\vec{e}_1{}'+(-x_2+c_{20}+$$

$$+ c_{21} x_1' + \dots + c_{2n} x_n')\vec{e}_2 + \dots + (-x_n + c_{n0} + c_{n1} x_1' +$$

$$+ \dots + c_{nn} x_n')\vec{e}_n = 0$$

ни ҳосил қиламиз. $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ — чизиқли эркли бўлгани учун уларнинг бу ифодадаги барча коэффициентлари нолга тенг бўлиши керак, яъни

$$\begin{aligned} x_1 &= c_{11} x_1' + c_{21} x_2' + \dots + c_{n1} x_n' + c_{10}, \\ x_2 &= c_{12} x_1' + c_{22} x_2' + \dots + c_{n2} x_n' + c_{20}, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x_n &= c_{1n} x_1' + c_{2n} x_2' + \dots + c_{nn} x_n' + c_{n0}. \end{aligned} \tag{15}$$

Бу изланган формулалар бўлиб, ихтиёрий нуқтанинг $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперларга нисбатан координаталари орасидаги боғланишни аниқлайди. Бу формулада

$$\Delta = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{16}$$

Акс ҳолда $\Delta = 0$ бўлса, базис векторлар чизиқли боғлиқ бўлар эди. $\Delta \neq 0$, шунинг учун (15) ни $x_1', x_2', \dots, x_n'$ га нисбатан ҳам ечиш мумкин. Хусусий ҳолда $0 \neq 0'$ $\vec{e}_1 = \vec{e}_1'$, $\vec{e}_2 = \vec{e}_2'$, $\dots$, $\vec{e}_n = \vec{e}_n'$ бўлса, (14) дан:

$$\begin{aligned} &c_{11} = 1, \ c_{12} = c_{13} = \dots = c_{1n} = 0 \\ &c_{21} = 0, \ c_{22} = 1, \ c_{23} = c_{24} = \dots = c_{2n} = 0, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ &c_{n1} = c_{n2} = \dots = c_{n(n-1)} = 0, \ c_{nn} = 1, \end{aligned}$$

демак,

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + c_{10}, \\ x_2 &= x_2' + c_{20}, \\ &\cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot \\ x_n &= x_n' + c_{n0}. \end{aligned} \tag{17}$$

Буни баъзан *координаталарни параллел кўчириш формулалари* деб аталади.

1-мисол. A_4 фазода $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ реперга нисбатан бешта нуқта берилган: $C_0(1, 0, 0, 2)$, $C_1(0, 1, 2, 0)$, $C_2(2, 0, 0, 2)$, $C_3(0, 2, 1, 0)$, $C_4(2, 0, 0, 1)$. Янги репер сифатида $\mathscr{B}' = (C_0, \overrightarrow{C_0C_1},$

$\overrightarrow{C_0C_2}$, $\overrightarrow{C_0C_3}$, $\overrightarrow{C_0C_4}$) ни олиб, ихтиёрий нуқтанинг координаталарини алмаштириш формулаларини ёзинг.

Ечиш. Аввало янги базис векторларининг $\mathscr{B}$ га нисбатан координаталарини топайлик. (13) га асосан $\overrightarrow{C_0C_1}(-1,\ 1,\ 2,\ -2)$, $\overrightarrow{C_0C_2}(1, 0, 0, 0)$, $\overrightarrow{C_0C_3}(-1, 2, 1\ -2)$, $\overrightarrow{C_0C_4}(1, 0, 0,\ -1)$. У ҳолда бу қийматларни (15) га қўйсак (ҳамда $O' = C_0$, $\vec{e}_1' = \overrightarrow{C_0C_1}$, $\vec{e}_2' = \overrightarrow{C_0C_2}$, $\vec{e}_3' = \overrightarrow{C_0C_3}$, $\vec{e}_4' = \overrightarrow{C_0C_4}$ деб олсак),

$$x_1 = -x_1' + x_2' - x_3' - 2x_4' + 1,\ \ x_2 = x_1' + 2x_3',$$

$$x_3 = 2x_1' + x_3' - 2x_4',\ x_4 = -2x_1' - 2x_3' - x_4'$$

бу изланган формулалардир.

2-мисол. Қуйида берилган формулалар системаси A_3 да бирор нуқтанинг аффин координаталарини алмаштириш формулалари вазифасини бажарадими: $x_1 = x_1' + 2x_2' - x_3' - 1$, $x_2 = 2x_1' + x_2' + x_3'$, $x_3 = x_1' - 3x_2' + 1$?

Ечиш. Бу формулалар нуқта координаталарини алмаштириш формулалари вазифасини бажариши учун $\Delta \neq 0$ бўлиши керак; ҳақиқатан ҳам, бу ерда

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Энди берилган формулаларни (15) билан таққослаб қуйидагиларни топамиз:

$$O'(-1,\ 0,\ 1),\ \vec{e}_1'(1, 2, 1),\ \vec{e}_2'(2, 1, -3),\ \vec{e}_3'(-1, 1, 0).$$

31-§. *n* ўлчовли аффин фазоларнинг изоморфлиги

Аввало икки вектор фазонинг изоморфлиги тушунчасига таъриф берамиз.

Фараз қилайлик, V, V' вектор фазолар берилган бўлсин.

Таъриф. $\varphi : V \to V'$ акслантириш ўзаро бир қийматли бўлиб, қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, у *чизиқли изоморф акслантириш* деб аталади:

1. $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V$ учун $\varphi(\vec{a} + \vec{b}) = \varphi(\vec{a}) + \varphi(\vec{b})$ бўлса, яъни V даги икки ихтиёрий вектор йиғиндисига V' да шу векторларга мос келган векторларнинг йиғиндиси мос келсин.

2. $\forall \vec{a} \in V$ учун ва $\forall \lambda \in R$ учун $\varphi(\lambda\vec{a}) = \lambda\varphi(\vec{a})$ бўлса, яъни V даги $\vec{a}$ векторни бирор λ сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган векторнинг образи $\vec{a}$ га V' дан мос келган векторнинг λ сонга кўпайтиришдан ҳосил бўлган вектордан иборат бўлсин.

Бу таърифдан қуйидаги натижа келиб чиқади: V билан V' изоморф бўлса, V даги чизиқли эркли векторларга V' да мос келган векторлар ҳам чизиқли эркли бўлади, хусусий ҳолда V нинг ноль векторига V' нинг ҳам ноль вектори мос келади.

Теорема. *Икки вектор фазонинг изоморф бўлиши учун уларнинг ўлчовлари тенг бўлиши етарли ва зарурдир.*

Исбот. Етарлилиги. V, V' вектор фазоларнинг ўлчовлари бир хил бўлсин, яъни $V = V_n$, $V' = V'_n$. Бу фазоларнинг изоморф эканлигини исботлаймиз. V_n нинг базиси $Б = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n')$, V'_n нинг базиси $Б' = (\vec{e}_1', \vec{e}_2', \dots, \vec{e}_n')$ бўлсин. $\forall \vec{a} \in V_n$ бўлса, у ҳолда $\vec{a}$ нинг $Б$ базисдаги координаталарини x_1, x_2, ..., x_n дейлик:

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Шу $\vec{a}$ векторга V'_n да шундай $\vec{a}'$ векторни мос келтирамизки, унинг $Б'$ даги координаталари x_1, x_2, ..., x_n бўлсин, бу мосликни φ деб белгилайлик, у ҳолда

$$\vec{a}' = x_1 \vec{e}_1' + x_2 \vec{e}_2' + \dots + x_n \vec{e}_n'.$$

Топилган бу φ мослигимиз ўзаро бир қийматлидир, чунки ҳар бир вектор ягона усулда базис векторлар бўйича ифодаланади. Энди юқоридаги икки шартнинг бажарилишини текширамиз.

$$\vec{a} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + \dots + x_n \vec{e}_n,$$

$\forall \vec{a}, \vec{b} \in V_n \Rightarrow$

$$\vec{b} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + \dots + y_n \vec{e}_n;$$

бу векторларга V'_n да мос келган $\varphi(\vec{a}) = \vec{a}'$, $\varphi(\vec{b}) = \vec{b}'$ векторлар $Б'$ да қуйидагича ёйилмага эга бўлади:

$$\vec{a}' = x_1 \vec{e}_1' + x_2 \vec{e}_2' + \dots + x_n \vec{e}_n', \quad \vec{b}' = y_1 \vec{e}_1' + y_2 \vec{e}_2' + \dots + y_n \vec{e}_n';$$

у ҳолда

$$\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + y_1)\vec{e}_1 + (x_2 + y_2)\vec{e}_2 + \dots + (x_n + y_n)\vec{e}_n$$

ва

$$\vec{a}' + \vec{b}' = \varphi(a) + \varphi(b) = (x_1 + y_1)\vec{e}_1' + (x_2 + y_2)\vec{e}_2' + \dots +$$
$$+ (x_n + y_n)\vec{e}_n' = \varphi(\vec{a} + \vec{b});$$

демак, биринчи шарт бажарилди.

Энди иккинчи шартнинг бажарилишини текширайлик. $\forall\lambda \in R$ ни олсак,

$$\lambda \vec{a} = \lambda x_1 \vec{e_1} + \lambda x_2 \vec{e_2} + \ldots + \lambda x_n \vec{e_n},$$

$$\lambda \cdot \varphi (\vec{a}) = \lambda \vec{a'} = \lambda (x_1 \vec{e_1'} + x_2 \vec{e_2'} + \ldots + x_n \vec{e_n'}) =$$

$$= \lambda x_1 \vec{e_1'} + \lambda x_2 \vec{e_2'} + \ldots + \lambda x_n \vec{e_n'} = \varphi (\lambda \vec{a}),$$

демак, V_n, V'_n изоморф.

Зарурийлик. $\xi : V \to V'$ акслантириш изоморф мосликдан иборат бўлса, уларнинг ўлчовлари тенг эканлигини кўрсатайлик. Фараз қилайлик, $V = V_n$, $V' = V'_m$ бўлиб, аниқлик учун $m < n$ бўлсин. V_n нинг ўлчови n бўлгани учун унда n та чизиқли эркли вектор мавжуддир, юқоридаги натижага асосан шу векторларнинг образлари ҳам чизиқли эркли бўлади, демак, V_m нинг ҳам ўлчови n бўлиши керак, бундан $n = m$.

Хуллас, бир хил ўлчовли барча вектор фазолар ўзаро изоморфдир, яъни бирор вектор фазога тааллуқли даъво (ёки тасдиқ) шу фазога изоморф барча фазолар учун ҳам ўринли бўлади.

Таъриф. Элтувчи вектор фазолари ўзаро изоморф бўлган икки аффин фазо *изоморф* деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, икки аффин фазо ўзаро изоморф бўлиши учун улар бир хил ўлчовли бўлиши зарур ва етарлидир. Бундан эса бир хил ўлчовли барча аффин фазоларнинг ўзаро изоморфлиги келиб чиқади.

32-§. k ўлчовли текислик

Аффин фазода $M_0, M_1, \ldots, M_m$ нуқталар системаси берилган бўлсин.

Таъриф. Агар $\overrightarrow{M_0M_1}, \overrightarrow{M_0M_2}, \ldots, \overrightarrow{M_0M_m}$ векторлар системаси чизиқли эркли бўлса, берилган *нуқталар системаси чизиқли эркли* дейилади, акс ҳолда берилган *нуқталар системаси чизиқли боғлиқ* дейилади.

Бу таърифдан кўринадики, берилган нуқталар системаси чизиқли эркли бўлса, унинг ҳар қандай қисми ҳам чизиқли эркли бўлади, бундан ташқари, III_1 аксиомага асосан A_n да $n+1$ та чизиқли эркли нуқталар мавжуд бўлиб, сони $n+1$ тадан кўп бўлган ҳар қандай нуқталар системаси чизиқли боғлиқ бўлиши келиб чиқади.

Хусусий ҳолда икки нуқтадан ташкил топган нуқталар системасининг чизиқли эркли бўлиши учун, равшанки, улар турли бўлиши (устма-уст тушмаслиги), уч нуқтадан ташкил топган нуқталар системасининг чизиқли эркли бўлиши учун уларнинг бир тўғри чизиқда ётмаслиги зарур ва етарлидир.

A_n n ўлчовли аффин фазо, унинг элтувчиси V_n вектор фазо ҳамда A_n нинг қисм фазоси A_k бўлиб, унинг элтувчиси $V_k \subset V_n$ бўлсин. A_n нинг тайин P нуқтасини олайлик.

Таъриф. A_n фазодаги $\overrightarrow{PN}\in V_k$ шартни қаноатлантирувчи барча N нуқталар тўплами *k ўлчовли текислик* деб аталади ва Π_k деб белгиланади.

Бу таърифдан кўринадики, $V_k\subset\Pi_k$ бўлиб, $P\in\Pi_k$ дир, чунки $N=P$ бўлса, $\overrightarrow{PN}=\overrightarrow{PP}=\vec{0}$ бўлиб, V_k қисм фазо бўлгани учун $\vec{0}\in\Pi_k$ дир. P нуқта Π_k нинг *бошланғич нуқтаси*, V_k эса *элтувчиси* дейилади.

Хусусий ҳолларда: 1) $k=0$ бўлса, у ҳолда Π_0 текислик битта P нуқтадан иборат, демак, A_n даги ҳар бир нуқта ноль ўлчовли текисликдир; 2) $k=1$ бўлса, Π_1 бир ўлчовли текислик бўлиб, биз уни тўғри чизиқ деб атаганмиз; 3) $k=2$ бўлса, Π_2 икки ўлчовли текислик бўлиб, уни биз бевосита текислик деб атаганмиз; 4) $k=n-1$ бўлса, Π_{n-1} текисликни, махсус ном билан, яъни *гипертекислик* деб юритилади.

Текислик таърифидан кўринадики, $k=n$ бўлган ҳолда A_n ҳам n ўлчовли текислик экан.

1-теорема. *Π_k текисликда $(k+1)$ та нуқтадан иборат камида битта чизиқли эркли нуқталар системаси мавжуддир.*

Исбот. Агар $\vec{a}\in V_k$ $(\vec{a}\neq 0)$ бўлса, $\overrightarrow{PM_0}=\vec{a}$ билан аниқланувчи M_0 нуқта Π_k текисликнинг нуқтаси бўлади. V_k нинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ базис векторларини олиб, $\overrightarrow{M_0M_1}=\vec{e}_1$, $\overrightarrow{M_0M_2}=\vec{e}_2$, ..., $\overrightarrow{M_0M_k}=\vec{e}_k$ десак, ҳосил бўлган $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_k$ нуқталар системаси ($\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ базис векторлар чизиқли эркли) чизиқли эркли бўлади. ▲

2-теорема. *Π_k нинг таърифидаги P нуқта алоҳида ажратилган нуқта бўлмасдан, балки Π_k даги барча нуқталарнинг ҳар бири ҳам шундай хоссага эгадир (бошқача айтганда, P нуқта Π нинг қаерида олинишига боғлиқ эмас).*

Исбот. P дан фарқли $Q\in\Pi_k$ ни олайлик. Агар $N\in\Pi_k$ бўлгандагина $\overrightarrow{QN}\in V_k$ эканини кўрсатсак, теоремани исботлаган бўламиз. Ҳақиқатан ҳам $\overrightarrow{QN}\in V_k$ бўлсин, у ҳолда $\overrightarrow{PQ}\in\vec{V}_k$ бўлиб (текислик таърифига кўра), IV_2 га асосан $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{QN}=\overrightarrow{PN}\in V_k$ бўлади, демак, $N\in\Pi_k$, аксинча $N\in\Pi_k$ бўлса, $\overrightarrow{PN}\in V_k\to\overrightarrow{QN}\in V_k$ ▲

3-теорема. *Аффин фазодаги ҳар қандай k ўлчовли Π_k текислик ўз йўлида k ўлчовли A_k аффин фазодир.*

Исбот. Π_k нинг аффин фазо эканини кўрсатиш учун IV_1, IV_2 аксиомалар шартларининг қаноатланишини кўрсатиш кифоядир. $\forall M, N\in\Pi_k$ ни олайлик, у ҳолда

$\overrightarrow{PM} \in V_k$, $\overrightarrow{PN} \in V_k \Rightarrow \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MP} + \overrightarrow{PN} = \overrightarrow{PN} - \overrightarrow{PM} \in V_k$. Демак, Π_k да маълум тартибда олинган икки M, N нуқтага V_k да аниқ битта вектор мос келади (IV_1 нинг шарти бажарилади). IV_2 нинг шарти A_n учун бажарилгани сабабли Π_k учун ҳам бажарилади. ▲

4-теорема. A_n да P нуқта ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ $(k \leqslant n)$ *чизиқли эркли векторлар фақат битта* Π_k *текисликни аниқлайди.*

Исбот. Базис векторлари $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ дан иборат V_k қисм вектор фазони қарайлик, бу вақтда текислик таърифига асосан P нуқта ва V_k бирор текисликни аниқлайди. Шу текисликнинг ягона эканлигини кўрсатамиз. Фараз қилайлик, P нуқтани ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_k$ векторларни ўз ичига олган бошқа Π'_k текислик мавжуд бўлсин, унинг бошланғич нуқтаси P ва элтувчиси V'_k бўлсин. Аввало шуни пайқаймизки, V_k ва V'_k нинг иккаласи ҳам чизиқли эркли $e_1, e_2, \ldots, \vec{e}_k$ векторларни ўз ичига олгани учун улар устма-уст тушади. Бундан ташқари, $P \in V'_k$ бўлгани учун 3-теоремага асосан $\Pi_k = \Pi'_k$ ▲

Бу теоремадан қуйидаги икки натижа келиб чиқади.

1-натижа. A_n даги $(k+1)$ та чизиқли эркли нуқталар системаси фақат битта k ўлчовли текисликни аниқлайди.

2-натижа. A_n даги ҳар қандай n та чизиқли эркли нуқталар системаси фақат битта гипертекисликни аниқлайди.

Энди k ўлчовли текисликнинг аналитик ифодасини, яъни тенгламаларини келтириб чиқариш билан шуғулланайлик.

A_n да бирор $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ аффин репер берилган бўлсин. 5-теоремага асосан Π_k текислик битта нуқта ва k та чизиқли эркли вектор билан тўлиқ аниқланади. Π_k ни аниқловчи нуқта P ва чизиқли эркли векторлар $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_k$ бўлсин. У ҳолда Π_k нинг ихтиёрий нуқтаси N ни олсак, $\overrightarrow{PN}$ вектор ҳосил бўлиб, бу вектор Π_k нинг элтувчиси V_k га тегишли бўлади, демак, ундаги $\vec{p}_1, \vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_k$ чизиқли эркли векторлар орқали ифодаланади.

$$\overrightarrow{PN} = t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_k\vec{p}_k, \tag{18}$$

бунда $t_1, t_2, \ldots, t_k \in R$. У ҳолда $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN}$ ўринли бўлгани учун

$$\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2 + \ldots + t_k\vec{p}_k. \tag{19}$$

Равшанки, бу тенглик фақатгина $N \in \Pi_n$ бўлганда ўринлидир. шунинг учун (19) ни Π_k нинг векторли тенгламаси деб аташ мумкин. Агар $Б$ базисда $\overrightarrow{ON}$ $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\overrightarrow{OP}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ва

$\vec{p}_1(u_{11}, u_{21}, \ldots, u_{n1}), \vec{p}_2(u_{12}, u_{22}, \ldots u_{n2}), \ldots, \vec{p}_k(u_{1k}, u_{2k}, \ldots, u_{nk})$ бўлса, буларнинг $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис векторлар орқали ифодасини (19) га қўямиз:

$$x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n = a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + \ldots + a_n\vec{e}_n + t_1(u_{11}\vec{e}_1 + \\ + u_{21}\vec{e}_2 + \ldots + u_{n1}\vec{e}_n) + t_2(u_{12}\vec{e}_1 + u_{22}\vec{e}_2 + \ldots + u_{n2}\vec{e}_n) + \ldots + \\ + t_k(u_{1k}\vec{e}_1 + u_{2k}\vec{e}_2 + \ldots + u_{nk}\vec{e}_n).$$

Бу ифодадаги қавсларни очиб ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots \vec{e}_n$ га нисбатан гуруҳлаб, бу векторларнинг чизиқли эрклилигини ҳисобга олсак,

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11} + t_2 u_{12} + \ldots + t_k u_{1k}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21} + t_2 u_{22} + \ldots + t_k u_{2k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_n + t_1 u_{n1} + t_2 u_{n2} + \ldots + t_k u_{nk} \end{aligned} \tag{20}$$

Бу изланган тенгламалардир. (20) дан кўринадики, Π_k нинг ихтиёрий нуқтаси бўлган N нинг координаталари $t_1, t_2 \ldots, t_k$ параметрларга ихтиёрий қийматлар бериш билан Π_k га тегишли нуқталарни топиш мумкин. Шунинг учун (20) ни Π_k нинг *параметрик тенгламалари* деб аталади. Хусусий ҳолда $k = 1$ бўлса, Π_1 тўғри чизиқдан (яъни бир ўлчовли текислик) иборат бўлиб, унинг A_n даги параметрик тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_n + t_1 u_{11}. \end{aligned} \tag{21}$$

$u_{11} \cdot u_{21} \ldots u_{n1} \neq 0$ шартда (21) нинг ҳар биридан t_1 ни топиб уларни тенглаштирсак,

$$\frac{x_1 - a_1}{u_{11}} = \frac{x_2 - a_2}{u_{21}} = \ldots = \frac{x_n - a_n}{u_{n1}}. \tag{22}$$

Булар A_n даги Π_1 тўғри чизиқнинг *каноник тенгламалари* деб аталади. Бунда P нуқта Π_1 нинг *бошланғич нуқтаси*, $\vec{p}_1$ вектор эса унинг *йўналтирувчиси* дейилади.

$k = 2$ да Π_2 икки ўлчовли текислик бўлиб, унинг параметрик тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлади:

$$\begin{aligned} x_1 &= a_1 + t_1 u_{11} + t_2 u_{12}, \\ x_2 &= a_2 + t_1 u_{21} + t_2 u_{22}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= a_n + t_1 u_{n1} + t_2 u_{n2}. \end{aligned} \tag{23}$$

$n = 3$ да A_3 даги оддий текисликнинг параметрик тенгламалари ҳосил бўлади.

Энди (20) системага яна қайтиб келайлик. Бу системада t_1, t_2, $\ldots$, t_k лар параметрлар ҳисобланиб, уларнинг сони k дир (равшанки, $k < n$), лекин тенгламалар сони n тадир. $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2, \ldots, \vec{p}_k$ векторлар чизиқли эркли бўлгани учун (20) даги t_1, t_2, $\ldots$, t_k ларнинг козффициентларидан тузилган матрицанинг ранги k га тенг бўлади, у ҳолда (20) даги биринчи k тенгликдаги t_1, t_2, $\ldots$, t_k ларнинг коэффициентларидан тузилган детерминантни нолдан фарқли деб олсак, шу системадан t_1, t_2, $\ldots$, t_k ларни топиш мумкин, бу топилган қийматларни (20) даги қолган $(n - k)$ та тенгламадаги t_1, t_2, $\ldots$, t_2 ўрнига қўйсак, параметрлар қатнашмаган тенгламалар системаси ҳосил бўлади. Бу системани умумий ҳолда қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned}
&x_{k+1} + u'_{11} x_1 + u'_{12} x_2 + \ldots + u'_{1k} x_k + a'_k = 0, \\
&x_{k+2} + u'_{21} x_1 + u'_{22} + x_2 \ldots + u'_{2k} x_k + a'_{k+1} = 0, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&x_n + u_{n-k,1} x_1 + u'_{n-k,2} x_2 + \ldots + u'_{n-k,k} x_k + a'_n = 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

(2) системадаги ҳар бир тенглама чизиқли эркли бўлгани учун ундан ҳосил қилинган (24) системадаги тенгламалар ҳам чизиқли эркли бўлиб, биргаликда бўлади, бу система ҳам Π_k нинг тенгламаларидир. Демак, қуйидаги теоремани исботладик.

5-теорема. *A_n да k ўлчовли текисликнинг ҳар бири биргаликдаги чизиқли эркли $(n—k)$ та тенглама системаси билан аниқланади.*

Бу теореманинг тескариси ҳам ўринлидир.

6-теорема. *A_n даги бирор аффин реперга нисбатан берилган $(n—k)$ та чизиқли эркли (биринчи даражали) тенглама системаси биргаликда бўлса, A_n даги бу системани қаноатлантирувчи барча нуқталар тўплами k ўлчовли текисликни аниқлайди.*

Исбот. Фараз қилайлик, қуйидаги $(n - k)$ та чизиқли зркли, биринчи даражали тенглама системаси берилган бўлсин:

$$\begin{aligned}
&u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \ldots + u_{1n} x_n + a_1 = 0, \\
&u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + \ldots + u_{2n} x_n + a_2 = 0, \\
&\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
&u_{n-k,1} x_1 + u_{n-k,2} x_2 + \ldots + u_{n-k,n} x_n + a_{n-k} = 0.
\end{aligned} \tag{25}$$

Бу система чизиқли эркли ва биргаликда бўлгани учун $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тузилган

$$\begin{pmatrix}
u_{11} & u_{12}, \ldots, & u_{1n} \\
u_{21} & u_{22} \ldots, & u_{2n} \\
\cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
u_{n-k,1} & u_{n-k,2}, \ldots, & u_{n-k,n}
\end{pmatrix}$$

матрицанинг ранги $n — k$ га тенгдир, демак, шу матрицанинг $(n — k)$-тартибли детерминантларидан камида биттаси нолдан фарқли, умумийликни бузмаслик учун шу детерминант

$$\begin{vmatrix} u_{1,k+1} & u_{1,k+2} & , \dots , & u_{1n} \\ u_{2,k+1} & u_{2,k+2} & , \dots , & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ u_{n-k,k+1} & u_{n-k,k+2} & , \dots , & u_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

бўлсин. У ҳолда берилган системани $x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n$ га нисбатан ечсак,

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= u'_{11} x_1 + u'_{12} x_2 + \dots + u'_{1k} x_k + a'_{k+1}, \\ x_{k+2} &= u'_{21} x_1 + u'_{22} x_2 + \dots + u_{2k} x_k + a'_{k+2}, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= u'_{n-k,1} x_1 + u'_{n-k,2} x_2 + \dots + u'_{n-k,k} x_k + a'_n. \end{aligned}$$

Агар $x_1, x_2, \dots, x_k$ ни параметрлар деб қабул қилсак, яъни уларни $x_1 = t_1$, $x_2 = t_2, \dots, x_k = t_k$ деб белгиласак, сўнгги системани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} x_1 &= t_1 \\ x_2 &= t_2 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_k &= t_k, \\ x_{k+1} &= u'_{11} t_1 + u'_{12} t_2 + \dots + u'_{1k} t_k + a'_{k+1}, \\ x_n &= u'_{n-k,1} t_1 + u'_{n-k,2} t_2 + \dots + u'_{n-k,k} t_k + a'_n. \end{aligned} \tag{26}$$

(26) ни (20) билан таққослаб кўрсак, (26) система (20) системанинг хусусий ҳоли эканини кўрамиз. Шунинг учун (26) система бирор $(n-k)$ ўлчовли текисликнинг параметрик тенгламаларидир. Бу система берилган системага эквивалентлиги учун у ҳам шу текисликнинг тенгламалари ҳисобланади. (25) тенгламалар системаси $(n-k)$ *ўлчовли текисликнинг умумий тенгламалари* деб аталади.

Хусусий ҳолда, $k = n - 1$ бўлса, исботланган 6- теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади.

Натижа. Гипертекисликнинг умумий тенгламаси битта айнимаган чизиқли тенгламадан иборат (айнимаган чизиқли тенглама — ўзгарувчиларининг олдидаги коэффициентларидан камида биттаси нолдан фарқли бўлган тенгламалардир).

Демак, A_n да k та чизиқли тенглама системаси берилган бўлса, улардан ҳар бирини шу фазодаги гипертекислик деб қарасак, у ҳолда берилган тенгламалар системаси (агар система биргаликда бўлса) k та гипертекислик кесишмасидан ҳосил бўлган текисликни аниқлайди. (Бунга мисол тариқасида A_3 да икки текисликнинг кесишмасидан тўғри чизиқ ҳосил бўлишини эслаш кифоядир.)

Мисол. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$ репер берилган. Координата текисликларининг тенгламаларини ёзинг.

Ечиш. O нуқта ва $\vec{e}_1$ вектор билан аниқланадиган бир ўлчовли координата текислиги (яъни координаталар тўғри чизиғи) (21) га асосан

$$x_2 = 0, \ x_3 = 0, \ x_4 = 0.$$

$\Pi_2 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ текислик тенгламаси эса (25) га асосан

$$x_3 = 0, \ x_4 = 0.$$

$\Pi_3 = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ текислик тенгламаси (шу фазо учун гипертекислик)

$$x_4 = 0.$$

Қолган текисликларнинг тенгламаларини ёзишни машқ сифатида ўқувчига ҳавола қилинади.

33-§. Икки текисликнинг ўзаро вазияти

1-таъриф. A_n даги икки текислик камида битта умумий нуқтага эга бўлса, улар *кесишувчи текисликлар* деб аталади.

Демак, икки текислик кесишса, кесимда нуқта — ноль ўлчовли текислик, тўғри чизиқ — бир ўлчовли текислик, икки ўлчовли текислик ва ҳ. к. лар ҳосил бўлиши мумкин.

2-таъриф. Икки текисликнинг элтувчи вектор фазоларидан бири иккинчисининг қисми бўлса, бу текисликлар ўзаро параллел деб аталади (бу таърифни A_3 даги икки тўғри чизиқнинг параллеллиги, икки текисликнинг параллеллиги таърифлари билан таққосланг).

3-таъриф. Агар A_n да Π_k, Π_s текисликлар кесишмаса ҳамда параллел бўлмаса, улар *айқаш текисликлар* деб аталади (A_3 даги икки айқаш тўғри чизиқ таърифини эсланг).

1-теорема. A_n даги Π_k, Π_s текисликлар ўзаро параллел бўлиб, умумий нуқтага эга бўлса, улардан бири иккинчисига тегишлидир.

Исбот. Аниқлик учун $k \leqslant s$ бўлсин, у ҳолда параллелликнинг таърифига асосан бу текисликларнинг элтувчи вектор фазолари учун $V_k \subset V_s$ ўринли бўлади. Бу вақтда $\Pi_k \subset \Pi_s$ эканини кўрсатайлик. $\Pi_k \cap \Pi_s = P$ нуқта бўлсин. $M \in \Pi_k$ бўлса, равшанки, $\overrightarrow{PM} \in V_k$; бундан $V_k \subset V_s$; демак, $\overrightarrow{PM} \in V_3$ ва $M \in \Pi_s$. Хуллас, Π_k нинг ихтиёрий нуқтаси Π_s нинг ҳам нуқтасидир, шундай қилиб $\Pi_k \subset \Pi_s$.

Натижа. Ўлчовлари тенг икки текислик параллел бўлиб, камида битта умумий нуқтага эга бўлса, улар устма-уст тушади.

Энди умумий тенгламалари билан берилган икки текисликнинг кесишиш шартини излайлик. Π_k, Π_s текисликларнинг умумий тенгламалари:

$$\Pi_k: \begin{array}{l} u_{11} x_1 + u_{12} x_2 + \ldots + u_{1n} x_n + a_1 = 0, \\ u_{21} x_1 + u_{22} x_2 + \ldots + u_{2n} x_n + a_2 = 0, \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ u_{k1} x_1 + u_{k2} x_2 + \ldots + u_{kn} x_n + a_k = 0 \end{array}$$

$$\Pi_s: \quad \begin{array}{l} v_{11}x_1 + v_{12}x_2 + \ldots + v_{1n}x_n + b_1 = 0, \\ v_{21}x_1 + v_{22}x_2 + \ldots + v_{2n}x_n + b_2 = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ v_{s1}x_1 + v_{s2}x_2 + \ldots + v_{sn}x_n + b_s = 0. \end{array}$$

Бу икки системани бирлаштириб, жами $k+s$ та тенгламадан иборат $\sum$ системани ҳосил қилиб оламиз. Агар $\Pi_k \cap \Pi_s \neq \varnothing$ бўлса, $\sum$ система ечимга эга бўлиши керак, демак, шу системадаги ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлардан тузилган матрицанинг ранги r кенгайтирилган матрицанинг ранги r^* га тенг ва аксинча. Равшанки, кесимда ҳосил қилинадиган текисликнинг ўлчови $n-r$ га тенг. Демак, умумий тенгламалари билан берилган икки текисликнинг кесишиши учун уларнинг тенгламаларидан бирлаштириб тузилган тенгламалар системасида $r = r^*$ бўлиши зарур ва етарли экан.

Умуман, A_n даги икки Π_k ва Π_s текисликнинг ўзаро вазиятини қуйидаги жадвал орқали аниқлаш мумкин (бунда $V = V_k \cap V_s$, $\Pi = \Pi_k \cap \Pi_s$):

dim V	$\Pi = \varnothing$	$\Pi \neq \varnothing$
0	Π_k ва Π_s айқаш	Π_k ва Π_s битта умумий нуқтага эга.
$0 < r < \min(k, s)$*	$\Pi_k \nparallel \Pi_s$	Π_k ва Π_s нинг кесими r ўлчовли текислик
$\min(k, s)$	$\Pi_k \parallel \Pi_s$	$k < s$ бўлса, $\Pi_k \subset \Pi_s$ $k > s$ бўлса, $\Pi_k \supset \Pi_s$

Мисол. Π_2, Π_2' текисликлар мос равишда қуйидаги тенгламалар билан берилган:

$$\Pi_2: \begin{array}{l} x_1 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_4 = 4. \end{array} \qquad \Pi_2': \begin{array}{l} x_1 = t_1 - t_2, \\ x_2 = 1 - t_1, \\ x_3 = t_1 + t_2, \\ x_4 = t_2 - t_1. \end{array}$$

Шу текисликларнинг ўзаро вазиятини аниқланг.

Ечиш. Π_2' нинг тенгламаларини умумий кўринишда ёзамиз, яъни иккинчи ва учинчи тенгламадан t_1, t_2 ни топиб, биринчи ва тўртинчи тенгламаларга қўямиз:

$$\Pi_2': \begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2, \\ -2x_2 - x_3 + x_4 = -2. \end{array}$$

Π_2 билан Π_2' тенгламаларини бирлаштириб ёзсак,

---

* $\min(k, s)$ белгиси k, s сонларининг кичигини англатади.

$$\begin{aligned} x_1 - x_3 &= 2, \\ x_1 - x_2 + x_4 &= 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &= 2, \qquad (\Sigma) \\ -2x_2 - x_3 + x_4 &= -2 \end{aligned}$$

система ҳосил бўлади. Бу системанинг матрицаларини ёзамиз:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad M^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

M нинг ранги $r = 4$, у ҳолда M^* нинг ҳам ранги $r^* = 4$. Демак, (Σ) система ягона ечимга эга, бу эса Π_2, Π_2' текисликларнинг фақат битта нуқтада кесишишидан дарак беради. (Σ) системани ечсак, $x_1 = 6$, $x_2 = -4$, $x_3 = 4$, $x_4 = -6$ бўлиб, изланган нуқта $(6, -4, 4, -6)$.

34-§. Аффин алмаштиришлар

Текисликдаги аффин алмаштиришлар билан I бўлимнинг III бобида танишган эдик, энди n ўлчовли аффин фазодаги алмаштиришлар билан танишайлик.

A_n да икки $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ ва $\mathscr{B}' = (O, '\vec{e}_1', \vec{e}_2', \ldots, \vec{e}_n')$ репер берилган бўлсин. Бу реперлар ёрдамида A_n нинг нуқталари орасида шундай f мослик ўрнатамизки, ихтиёрий $M \in A_n$ нуқта $\mathscr{B}$ реперда қандай координаталарга эга бўлса, унинг образи $M' = f(M)$ нуқта $\mathscr{B}'$ реперда худди шундай координаталарга эга бўлсин, равшанки, бу мослик ўзаро бир қийматли бўлиб, A_n ни ўз-ўзига ўтказади, демак, f бирор алмаштиришдир.

1-таъриф. Юқоридагича аниқланган f алмаштириш A_n ни *аффин алмаштириш* деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, аффин алмаштириш бир жуфт аффин реперларнинг берилиши билан тўла аниқланади.

Энди аффин алмаштиришнинг қатор хоссалари билан танишайлик.

1°. f аффин алмаштиришда $\vec{a} \in A_n$ вектор шу фазонинг бирор $f(\vec{a}) = \vec{a}'$ векторига алмашади, чунки IV_1 га асосан $\vec{a} = \overrightarrow{MN}$ десак, M, N нуқталарнинг образлари $f(M) = M'$, $f(N) = N'$ бўлиб, бу нуқталар ҳам A_n га тегишли бўлгани учун уларга мос келган $\vec{a}'$ вектор $f(\vec{a})$ бўлади.

Хусусий ҳолда ноль вектор яна ноль векторга алмашади.

2°. f аффин алмаштиришда $\vec{a}$ векторнинг координаталари $\mathscr{B}$ да қандай бўлса, унга мос келган $\vec{a}'$ векторнинг ҳам координаталари $\mathscr{B}'$ да худди шу сонлардан иборат бўлади.

Бу хосса f нинг таърифи ва 1° дан бевосита келиб чиқади.

3°. f аффин алмаштиришда икки векторнинг йиғиндисига мос келган вектор қўшилувчи векторларга мос келган векторлар йиғиндисидан иборат, яъни $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} \Rightarrow f(\vec{c}) = f(\vec{a}) + f(\vec{b})$.

Бу хоссанинг ўринли эканлигига ишонч ҳосил қилиш учун координаталари билан берилган векторларни қўшиш қоидасини эсласак ва f нинг таърифини эътиборга олсак, кифоядир.

4°. $k\vec{a}$ векторга мос келган вектор $kf(\vec{a}) = k\vec{a}'$ вектордир.

Бу икки 3°, 4°-хоссадан f алмаштиришда $\lambda_1 \vec{a_1} + \lambda_2 \vec{a_2} + \ldots + \lambda_k \vec{a_k}$ векторга $\lambda_1 \vec{a_1'} + \lambda_2 \vec{a_2'} + \ldots + \lambda_k \vec{a_k'}$ векторнинг мос келиши келиб чиқади, яъни f да векторларнинг чизиқли комбинацияси сақланади, демак, чизиқли эркли векторга яна чизиқли эркли векторлар мос келади. Бу хоссаларни ва 4-§ даги икки аффин фазонинг изоморфлиги таърифини эътиборга олсак, аффин алмаштиришнинг қуйидаги иккинчи таърифи келиб чиқади.

2-таъриф. A_n фазонинг ўз-ўзига изоморф акслантиши A_n даги *аффин алмаштириш* деб аталади.

3-таъриф. MN кесмани P нуқта λ нисбатда бўлса (яъни $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{PN}$ бўлса), у ҳолда λ сон M, N, P нуқталарнинг *оддий нисбати* деб аталиб, уни одатдагидек $\lambda = (MN, P)$ кўринишда белгиланади.

Демак, $\overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{PN} \Leftrightarrow \lambda = (MN, P)$, у ҳолда 4-хоссани эътиборга олсак, аффин алмаштиришда нуқта берилган кесмани қандай нисбатда бўлса, унинг образи ҳам берилган кесма образини шу нисбатда бўлади, деган хулосага келамиз, демак, аффин алмаштиришда уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади.

5°. f аффин алмаштиришда k ўлчовли Π_k текислик яна k ўлчовли Π_k' текисликка алмашади. яъни текисликнинг ўлчови f учун инвариантдир.

Ҳақиқатан ҳам, Π_k нинг умумий тенгламаси $\mathscr{B}$ реперда (25) кўринишда бўлса, f аффин алмаштиришда M нуқтага мос келган M' нуқтанинг координаталари бир хил бўлгани учун $M \in (25) \Rightarrow M' \in \in (25)$, демак, Π_k текислик $\mathscr{B}$ га нисбатан қандай тенгламалар билан аниқланса, унинг аффин образи ҳам $\mathscr{B}'$ реперда худди шу тенгламалар билан аниқланади. Бу эса текисликнинг ўлчови аффин алмаштиришда ўзгармаслигини билдиради.

Хусусий ҳолда $k = 1$ бўлса, аффин алмаштиришда тўғри чизиқ яна тўғри чизиққа алмашинади. Бу хоссани биз I бўлим III бобда аффин алмаштиришнинг таърифига эквивалент эканлигини кўрсатган эдик.

6°. f аффин алмаштиришда параллел текисликлар яна параллел текисликларга ўтади.

Бу хосса аффин алмаштиришнинг ўзаро бир қийматли эканлигидан келиб чиқади (буни тўлиқ исботлашни ўқувчига топширамиз).

Энди аффин алмаштиришнинг координаталардаги ифодасини кўрайлик. A_n да $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ репер берилган бўлсин. $\forall M \in A_n$ ни олиб, унинг шу репердаги координаталарини $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $f(M) = M'$ нуқтанинг ҳам шу $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталарини $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ деб белгилаймиз. Бизнинг мақсадимиз $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ва $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$ ни боғловчи муносабатларни топишдир.

Фараз қилайлик, $f(O) = O'$, $f(\vec{e}_1) = \vec{e}'$, $\ldots$, $f(\vec{e}_n) = \vec{e}'_n$ бўлиб, буларнинг $\mathscr{B}$ га нисбатан координаталари $O'(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, $\vec{e}'_1 (c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n})$, $\vec{e}'_2 (c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2n})$, $\ldots$, $\vec{e}'_n (c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nn})$ бўлсин. У ҳолда $\mathscr{B}' = (O', \vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n)$ аффин репер ҳосил бўлиб, $f(\mathscr{B}) = \mathscr{B}'$; хусусий ҳолда $f(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{O'M'}$ дир. У ҳолда M нуқтанинг координаталари аффин алмаштиришнинг таърифига кўра $\mathscr{B}'$ реперга нисбатан $x_1, x_2, \ldots, x_n$ бўлиб, (15) га асосан

$$\begin{aligned}
x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{n1}x_n + c_1,\\
x'_2 &= c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{n2}x_n + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x'_n &= c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n + c_n
\end{aligned} \tag{27}$$

ва (16) шарт ўринлидир.

Бу (27) формулалар аффин алмаштиришнинг координаталардаги ифодасидир. Бунинг тескариси ҳам тўғридир, яъни (27) кўринишдаги ҳар қандай формулалар ((16) шарт бажарилганда) A_n да бирор аффин алмаштиришни аниқлайди. Ҳақиқатан ҳам, (27) берилган бўлсин. У ҳолда ихтиёрий $M(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $N(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, нуқталарнинг (27) алмаштиришдаги образлари $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$, $N'(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ бўлса, $\overrightarrow{MN}(y_1 - x_1, y_2 - x_2, \ldots, y_n - x_n)$, $\overrightarrow{M'N'}(y'_1 - x'_1, y'_2 - x'_2, \ldots, y'_n - x'_n)$,

$$\left|\begin{aligned}
x'_1 &= c_{11}x_1 + c_{21}x_2 + \ldots + c_{n1}x_n + c_1,\\
x'_2 &= c_{12}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{n2}x_n + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x'_n &= c_{1n}x_1 + c_{2n}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n + c_n
\end{aligned}\right.$$

ва

$$\left|\begin{aligned}
y'_1 &= c_{11}y_1 + c_{21}y_2 + \ldots + c_{n1}y_n + c_1,\\
y'_2 &= c_{12}y_1 + c_{22}y_2 + \ldots + c_{n2}y_n + c_2,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y'_n &= c_{1n}y_1 + c_{2n}y_2 + \ldots + c_{nn}y_n + c_n
\end{aligned}\right.$$

дан:

$$\begin{aligned}
y_1' - x_1' &= c_{11}(y_1 - x_1) + c_{21}(y_2 - x_2) + \ldots + c_{n1}(y_n - x_n),\\
y_2' - x_2' &= c_{12}(y_1 - x_1) + c_{22}(y_2 - x_2) + \ldots + c_{n2}(y_n - x_n),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_n' - x_n' &= c_{1n}(y_1 - x_1) + c_{2n}(y_2 - x_2) + \ldots c_{nn}(y_n - x_n).
\end{aligned}$$

Бундан кўринадики, (27) билан аниқланадиган алмаштиришда $\overrightarrow{MN}$ вектор $\overrightarrow{M'N'}$ векторга ўтади. Худди шунга ўхшаш, (27) кўринишдаги алмаштиришда $\lambda \overrightarrow{MN}$ вектор $\lambda \overrightarrow{M'N'}$ векторга алмашинишини ёки, умуман, векторларнинг чизиқли комбинацияси (27) алмаштиришда яна шу коэффициентли векторларнинг чизиқли комбинациясига ўтишлигини кўрсатиш мумкин. У ҳолда 2-таърифнинг шартлари бажарилади, демак, (27) ифода аффин алмаштиришни аниқлайди. Шу (27) ифоданинг $x_1, x_2, \ldots, x_n$ олдидаги коэффициентлари ҳамда $c_1, c_2, \ldots, c_n$ сонлар биргаликда (26) шарт ўринли бўлганда аффин алмаштиришнинг характерини билдиради, шу сонларнинг ҳар хил берилиши билан турли аффин алмаштиришларни ҳосил қилиш мумкин. Демак, A_n нинг чексиз кўп аффин алмаштиришлари мавжуд. (27) формулани (15) билан таққосласак, уларнинг ташқи кўринишида фарқ йўқдек туюлади, аслида эса (15) формула битта нуқтанинг иккита аффин реперга нисбатан координаталари орасидаги боғланишни аниқлайди, (27) эса мос нуқталар орасидаги боғланишни аниқлайди.

35-§. Аффин алмаштиришлар группаси ва унинг қисм группалари

Маълумки, алмаштиришлар тўпламининг группани ҳосил қилиши учун қуйидаги икки шарт бажарилиши керак.

1. Шу тўпламдаги ихтиёрий икки алмаштириш кўпайтмаси (композицияси) яна шу тўпламга тегишли алмаштириш.

2. Шу тўпламдаги ҳар бир алмаштиришга тескари алмаштириш ҳам шу тўпламга қарашли.

A_n нинг барча алмаштиришлари тўпламини A билан белгилайлик. Бу тўплам бўш бўлмасдан, балки унинг элементлари аввалги параграфдаги муҳокамамизга асосан чексиз кўпдир. A тўпламнинг элементлари юқоридаги икки шартни қаноатлантиришини кўрсатамиз.

Равшанки, f аффин алмаштириш бўлса, у бир жуфт $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ аффин реперларнинг берилиши билан тўла аниқланади (аффин алмаштириш таърифига асосан) ва, аксинча.

1. Агар f аффин алмаштириш $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ реперлар билан аниқланган бўлиб, g аффин алмаштириш $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ реперлар билан аниқланса, у ҳолда $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}''$ реперлар билан аниқланган аффин алмаштириш берилган аффин алмаштиришлар кўпайтмасидан иборат:

$$f,\ g \in A \rightarrow g \cdot f \in A.$$

2. f аффин алмаштириш $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ билан аниқланса, $\mathscr{B}'$, $\mathscr{B}$ билан аниқланган аффин алмаштириш f нинг тескариси f^{-1}, яъни

$$f \in A \Rightarrow f^{-1} \in' A.$$

Демак, A тўплам группа ташкил қилади, у қисқача *аффин группа* деб аталади.

Энди алмаштиришлар группасининг инварианти тушунчасини киритамиз. G бирор алмаштириш группаси бўлиб, F ихтиёрий фигура бўлсин. G нинг исталган алмаштиришида F фигура бирор F' фигурага алмашганда F нинг F' учун ҳам ўринли бўлиб қоладиган хоссалари F нинг G группага нисбатан *инвариантлари* деб аталади. У ҳолда аффин группанинг инвариантлари олдинги параграфдаги хоссаларини эътиборга олсак қуйидагилар бўлади:

1. Ҳар қандай аффин алмаштиришда k ўлчовли текислик яна k ўлчовли текисликка ўтгани учун текисликнинг ўлчови A га нисбатан инвариантдир.

2. Ҳар қандай аффин алмаштиришда уч нуқтанинг оддий нисбати A га нисбатан инвариантдир.

3. Аффин алмаштиришда параллел текисликлар яна параллел текисликларга ўтгани учун параллеллик муносабати A га нисбатан инвариантдир.

Бу тушунчаларга асосланиб аффин геометрия нимани ўрганади деган саволга жавоб бериш мумкин.

Аффин геометрия n ўлчовли аффин фазо фигураларининг шундай хоссаларини ўрганадики, бу хоссалар аффин группага нисбатан инвариант бўлади (ёки геометриянинг аффин алмаштиришда фигураларнинг шу алмаштириш группасига нисбатан ўзгармай қоладиган хоссаларини ўрганадиган бўлими аффин геометрия деб аталади).

Энди аффин группанинг баъзи қисм группалари билан танишайлик.

а) Параллел кўчириш. A_n да бирор $\vec{u}$ вектор берилган бўлсин.

Таъриф. A_n нинг ҳар бир M нуқтасига

$$\overrightarrow{MM'} = \vec{u} \tag{28}$$

шартни қаноатлантирувчи $M' \in A_n$ нуқта мос келтирилган бўлса, бу мослик алмаштиришдан иборат бўлиб, у A_n *ни* $\vec{u}$ *вектор қадар параллел кўчириш* деб аталади.

A_n ни параллел кўчириш аффин алмаштиришдир. Ҳақиқатан,

$$\mathscr{B} = (O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n),\ \vec{u}\ (u_1,\ u_2,\ \ldots,\ u_n),$$

$$M\ (x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n),\ M'\ (x_1',\ x_2',\ \ldots,\ x_n').$$

$$\overrightarrow{MM'}\ (x_1' - x,\ x_2' - x_2,\ \ldots,\ x_n' - x_n)$$

учун (28) га асосан:

$$\begin{array}{lcl} u_1 = x_1' - x_1, & & x_1' = x_1 + u_1, \\ u_2 = x_2' - x_2, & \text{ёки} & x_2' = x_2 + u_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot & & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ u_n = x_n' - x_n, & & x_n' = x_n + u_n. \end{array} \tag{29}$$

Бу формулаларни (27) билан таққосласак, $c_1 = u_1$, $c_2 = u_2$, . . . , $c_n = u_n$, $c_{11} = c_{22} = \ldots = c_{nn} = 1$, $c_{ij} = 0$ $(i \neq j,\ i,\ j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$. (16) шарт бу ҳолда:

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Демак, (29) формулалар билан аниқланган алмаштириш (яъни параллел кўчириш) аффин алмаштиришдан иборатдир.

$\vec{u} = \vec{0}$ бўлган ҳолда $M = M'$, бу эса A_n нинг ҳар бир нуқтасини $\vec{O}$ вектор қадар параллел кўчирилганда шу нуқта ўз-ўзига ўтишини англатиб, айнан алмаштириш ҳосил қилинади, демак, айнан алмаштириш параллел кўчиришнинг хусусий ҳолидир.

Энди A_n ни барча параллел кўчиришлар тўплами группа ташкил этишини кўрсатайлик.

1. A_n ни $\vec{u}$ вектор қадар параллел кўчириб, сўнгра $\vec{v}$ вектор қадар параллел кўчирсак, натижада $\vec{u} + \vec{v}$ вектор билан аниқланадиган параллел кўчириш ҳосил бўлади, демак, икки параллел кўчиришнинг композицияси яна параллел кўчиришдан иборат.

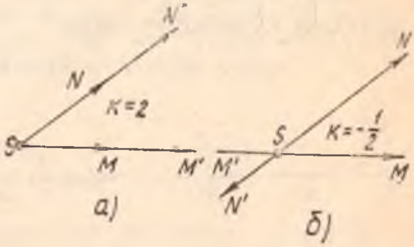
2. $\vec{u}$ вектор қадар параллел кўчириш берилган бўлса, $-\vec{u}$ вектор билан аниқланадиган параллел кўчириш унга тескари параллел кўчиришдир (чунки $\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0}$).

Демак, A_n ни барча параллел кўчиришлар тўплами группа ташкил этиб, у A_n нинг қисм группасидан иборат.

б) **Гомотетия.** A_n нинг тайин S нуқтаси ва тайин $k \neq 0$ сон берилган бўлсин.

Таъриф. A_n нинг ҳар бир M нуқтасига

$$\overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM} \tag{30}$$



191- чизма

шартни қаноатлантирувчи $M' \in A_n$ нуқта мос келтирилган бўлса, A_n да S марказли ва k коэффициентли *гомотетия* берилган деб аталади (бунда S нуқта ўз-ўзнга ўтади деб олинади) M, M' нуқталар *ўзаро гомотетик* дейилади.

S, M нуқталар ва k сон берилса, (30) ни қаноатлантирувчи M' нуқта ягоналиги учун гомотетия — алмаштиришдан иборатлигига ишонч ҳосил қиламиз (191-*а*, *б* чизмалар). Энди шу алмаштиришни, яъни гомотетиянинг аффин алмаштириш эканлигини кўрсатамиз.

$\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ реперга нисбатан $S(s_1, s_2, \ldots, s_n)$, $M(x_1, x_2 \ldots, x_n)$, $M'(x'_1, x'_2, \ldots, x'_n)$ бўлсин. У ҳолда $\overrightarrow{SM}(x_1 - s_1, x_2 - s_2, \ldots, x_n - s_n)$ бўлиб, (30) га асосан

$$\begin{aligned} x'_1 - s_1 &= k(x_1 - s_1), \\ x'_2 - s_2 &= k(x_2 - s_2), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n - s_n &= k(x_n - s_n). \end{aligned}$$

ёки

$$\begin{aligned} x'_1 &= kx_1 - ks_1 + s_1, \\ x'_2 &= kx_2 - ks_2 + s_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x'_n &= kx_n - ks_n + s_n. \end{aligned} \tag{31}$$

Буларни (27) билан таққосласак, $c_1 = s_1 - ks_1$, $c_2 = s_2 - ks_2$, $\ldots$, $c_n = s_n - ks_n$ ва $c_{11} = c_{22} = \ldots = c_{nn} = k$, c_{ij} $(i \neq j,\ i, j = 1, 2, \ldots, n)$, демак,

$$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & k & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & & k \end{vmatrix} = k^n \neq 0$$

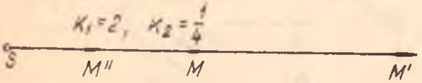
ва (31) формулалар билан аниқланган алмаштириш, яъни гомотетия аффин алмаштиришдир.

Хусусий ҳолда $S = 0 \Rightarrow s_1 = s_2 = \ldots = s_n = 0$ бўлиб, (31) қуйидаги кўринишни олади:

$$x'_1 = kx_1,\ x'_2 = kx_2,\ \ldots,\ x'_n = kx_n.$$

Энди битта S марказли барча гомотетиялар тўплами группа ташкил этишини кўрсатамиз.

1. k_1, k_2 коэффициентли S марказли гомотетиялар композицияси $k_1 \cdot k_2$ коэффициентли ва S



192- чизма

марказли гомотетиядир (192-чизма), чунки k_1 коэффициент ва M нуқта учун $\overrightarrow{SM'} = k_1 \overrightarrow{SM}$, k_2 коэффициент ва M' нуқта учун $\overrightarrow{SM''} = k_2 \overrightarrow{SM'}$ бўлиб, бундан $\overrightarrow{SM'} = \frac{1}{k_2} \overrightarrow{SM''}$, уни аввалги тенгликка қўйсак, $\frac{1}{k_2} \overrightarrow{SM''} = k_1 \overrightarrow{SM}$ ёки $\overrightarrow{SM''} = (k_1 \cdot k_2) \overrightarrow{SM}$ бўлади, бу эса $k_1 \cdot k_2$ коэффициентли ва S марказли гомотетияни билдиради.

2. k_1 коэффициентли S марказли гомотетияга тескари гомотетия $\frac{1}{k_1}$ коэффициентли ва ўша S марказли гомотетиядир, чунки $k = k_1 \times \frac{1}{k_1} = 1$ бўлиб, (30) $\Rightarrow \overrightarrow{SM'} = \overrightarrow{SM}$, $M' = M$, бу эса айнан алмаштиришдир.

Демак, бир марказли барча гомотетиялар тўплами группани ташкил этиб, бу группа A нинг қисм группасидан иборатдир.

Мисол. A нинг аффин алмаштириши қуйидаги формулалар билан берилган:

$$\begin{cases} x_1' = -x_1 + 2, \\ x_2' = x_2 - 3x_3 - 1, \\ x_3' = x_1 + x_2 + 3x_3 + 3. \end{cases}$$

1) $P(3, -1, 2)$, $Q(-1, 4, 0)$, $T(0, 0, 0)$ нуқталар образларини топинг.

2) Шу аффин алмаштиришнинг қўзғалмас (ўз ўрнида қоладиган) нуқталари борми?

3) $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ текисликнинг образи қандай текислик?

4) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - x_3 = 1 \end{cases}$ тўғри чизиқнинг образини топинг.

Ечиш. 1) Берилган формулалардаги x_1, x_2, x_3 лар ўрнига P, Q, T нуқталарнинг координаталарини қўйиб, x_1', x_2', x_3' ларни топамиз. P нинг образи:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= -x_1 + 2 = -3 + 2 = -1, \\ x_2' &= x_2 - 3x_3 - 1 = -1 - 3\cdot 2 - 1 = -8, \\ x_3' &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 3 = 3 - 1 + 3\cdot 2 + 3 = 11 \end{aligned}\right\} \Rightarrow P'(-1, -8, 11).$$

Шунга ўхшаш, Q, T нинг образлари $Q'(3, 3, 6)$, $T'(2, -1, 3)$;

2) аффин алмаштиришда ўз-ўзига ўтадиган қўзғалмас нуқталар учун: $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$; шунинг учун улар ушбу

$$\begin{aligned} x_1 &= -x_1 + 2, \\ x_2 &= x_2 - 3x_3 - 1, \\ x_3 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + 3 \end{aligned}$$

системанинг ечимидир. Бу системадан ушбу қўзғалмас нуқта топилади:

$$\left(1;\ -\frac{1}{3},\ -\frac{10}{3}\right);$$

3) текисликнинг образини топиш учун берилган системани x_1, x_2, x_3 га нисбатан ечиб, уларнинг қийматларини $2x_1 + x_2 + x_3 = 4$ тенгламага қўямиз. Берилган системадан:

$$x_1 = -x_1' + 2,$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1' + x_2' + x_3) - 2,$$

$$x_3 = \frac{1}{6}(x_1' - x_2' + x_3' - 6).$$

Топилган бу қийматларни берилган текислик тенгламасига қўйиб уни соддалаштирсак,

$$-4x_1' + x_2' + 2x_3' = 9;$$

4) берилган тўғри чизиқнинг образини топиш учун ҳам x_1, x_2, x_3 нинг юқорида топилган қийматларини берилган тенгламаларга қўямиз:

$$11x_1' + 7x_2' + 5x_3' = 18,$$

$$7x_1' - x_2' + x_3' = 12.$$

36-§. *n* ўлчовли векторли евклид фазоси

Биз I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2} аксиомалар ёрдамида *n* ўлчовли вектор фазо тушунчасини киритган эдик ҳамда чизиқли амалларга асосланиб, шу фазо хоссаларини ўргангандик, лекин бу фазода векторнинг узунлиги, икки вектор орасидаги бурчак, икки векторнинг перпендикулярлиги каби тушунчалар киритилмаган эди. Шунинг учун I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2} аксиомалар қаторига янги аксиомалар киритиш билан янги вектор фазоларни ҳосил қиламиз, шулардан бири векторли евклид фазосидир.

Таъриф. V_n вектор фазонинг ихтиёрий икки $\vec{a}$, $\vec{b}$ вектори учун уларнинг *скаляр кўпайтмаси* деб аталган ҳақиқий сон мос келтирилган бўлиб (кўпайтмани $\vec{a}\cdot\vec{b}$ билан белгилаймиз), қуйидаги тўртта аксиома бажарилса, бундай фазо *n ўлчовли векторли евклид фазоси* деб аталади (уни V_E билан белгилаймиз):

$\mathrm{V}_1\cdot \forall \vec{a},\ \vec{b} \in V_n$ учун $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$,

$\mathrm{V}_2\cdot \forall \vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c} \in V_n$ учун $(\vec{a}+\vec{b})\,\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$,

$\mathrm{V}_3\cdot \forall \vec{a},\ \vec{b} \in V_n$ ва $\forall k \in R$ учун $k\vec{a}\cdot\vec{b} = k(\vec{a}\vec{b})$,

$\mathrm{V}_4\cdot \forall \vec{a} \neq 0 \in \mathrm{V}_n$ учун $\vec{a}\cdot\vec{a} > 0$.

Бу аксиомаларни одатда векторларнинг *скаляр кўпайтириш аксиомалари* деб юритилади.

Аввало юқоридаги аксиомалардан келиб чиқадиган баъзи натижаларни кўрайлик.

1-натижа. V_2 аксиомадаги ассоциативлик қонуни икки қўшилувчи вектор учун ўринли бўлса, у исталган сондаги қўшилувчилар учун ўринлидир, $(\vec{a}_1+\vec{a}_2+\ldots+\vec{a}_m)\cdot\vec{b}=\vec{a}_1\vec{b}+\vec{a}_2\vec{b}+\ldots+\vec{a}_m\vec{b}$ (ифодадаги барча векторлар V_E га тегишли).

Ҳақиқатан ҳам, $\vec{a}_2+\vec{a}_3+\ldots+\vec{a}_m=\vec{b}_1$ десак, V_2 га асосан $(\vec{a}_1+\vec{b}_1)\vec{b}=\vec{a}_1\vec{b}+\vec{b}_1\vec{b}$, бу ифоданинг иккинчи қўшилувчисидаги $\vec{b}_1$ ни $\vec{a}_2+\vec{b}_2$ деб олсак, бунда $\vec{b}_2=\vec{a}_3+\vec{a}_4+\ldots+\vec{a}_m$, у ҳолда V_2 ни яна татбиқ қилсак, $(\vec{a}_1+\vec{b}_1)\vec{b}=\vec{a}_1\vec{b}+\vec{a}_2\vec{b}+\vec{b}_2\vec{b}$; энди шу ишни учинчи қўшилувчи учун такрорлаймиз ва ҳ.к. $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ нинг сони чекли бўлгани учун маълум қадамдан сўнг изланган тенглик ҳосил бўлади.

2-натижа. $\vec{0}$ векторнинг ҳар қандай вектор билан скаляр кўпайтмаси нолга тенгдир, чунки V_3 га асосан $(\vec{0}\cdot\vec{a})=(0\,\vec{b}\cdot\vec{a})=0\,(\vec{b}\vec{a})=0$.

3-натижа. $\vec{a}\cdot\vec{a}$ скаляр кўпайтма фақат $\vec{a}=\vec{0}$ бўлгандагина нолга тенгдир, бу бевосита V_4 аксиома ва 2-натижадан келиб чиқади.

$\vec{a}\cdot\vec{a}>0\Rightarrow\sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}$ — ҳақиқий сондир.

Таъриф. $\sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}$ ҳақиқий сонни $\vec{a}$ векторнинг *модули* (узунлиги) дейилади ва уни $\sqrt{\vec{a}\,\vec{a}}=|\vec{a}|$ кўринишда белгиланади. Хусусий ҳолда $|\vec{a}|=1$ бўлса, бундай $\vec{a}$ вектор *бирлик вектор* деб аталади, бундан ташқари, ноль векторнинг модули нолга тенглиги ҳам равшандир.

4-натижа. $\vec{b}=\lambda\vec{a}\Rightarrow|\vec{b}|=|\lambda|\,|\vec{a}|$, чунки

$$|\vec{b}|=\sqrt{\lambda\vec{a}\cdot\lambda\vec{a}}=\sqrt{\lambda(\vec{a}\cdot\lambda\vec{a})}=\sqrt{\lambda\lambda(\vec{a}\,\vec{a})}=$$

$$=\sqrt{\lambda^2\vec{a}\cdot\vec{a}}=|\lambda\,|\vec{a}|.$$

Теорема. $\forall\vec{a}, \vec{b}\in V_E$ *учун*

$$|\vec{a}\cdot\vec{b}|\leqslant|\vec{a}|\,|\vec{b}| \qquad (32)$$

ўринлидир (Коши — Буняковский тенгсизлиги).

Исбот. $\vec{a}, \vec{b}\in V_E$ берилган бўлсин. $\vec{a}-\lambda\vec{b}$ кўринишдаги векторни текширайлик. $|\vec{a}-\lambda\vec{b}|\geqslant 0$ дан: $(\vec{a}-\lambda\vec{b})(\vec{a}-\lambda\vec{b})\geqslant 0$. Бу тенгсизликнинг чап томонига V_{1-4} аксиомаларни ва юқорида келтирилган натижаларни татбиқ қилиб, $\vec{a}\,\vec{a}=a^2$, $\vec{b}\cdot\vec{b}=b^2$ десак,

$$\vec{a}^2 - 2\lambda(\vec{a}\,\vec{b}) + (\lambda\vec{b})^2 \geqslant 0$$

ёки

$$\vec{b}^2\lambda^2 - 2(\vec{a}\,\vec{b})\lambda + \vec{a}^2 \geqslant 0, \qquad (33)$$

бундан кўринадики, λ га нисбатан квадрат учҳад λ нинг ҳар қандай қийматида манфий эмас, у ҳолда бу учҳаднинг дискриминанти мусбат бўлиши мумкин эмас, яъни $(\vec{a}\,\vec{b})^2 - \vec{a}^2\vec{b}^2 \leqslant 0$, бундан $(\vec{a}\,\vec{b})^2 \leqslant \vec{a}^2\vec{b}^2$ ёки $|\vec{a}\,\vec{b}| \leqslant |\vec{a}|\,|\vec{b}|$.

Шуни таъкидлашимиз зарурки, (32) тенгсизликдаги тенглик белгиси $\vec{a}$, $\vec{b}$ коллинеар бўлгандагина ўринлидир. Ҳақиқатан ҳам,

$$\vec{a} = \lambda\vec{b} \Rightarrow |\vec{a}\,\vec{b}| = |\lambda\vec{b}\,\vec{b}| = |\lambda(\vec{b}\,\vec{b})| = |\lambda|\,|\vec{b}\,\vec{b}| =$$

$$= |\lambda|\,|\vec{b}|^2 = |\lambda\vec{b}|\,|\vec{b}| = |\vec{a}|\,|\vec{b}|, \qquad (34)$$

акс ҳолда $\vec{a} - \lambda\vec{b} \neq \vec{0}$ бўлса, (33) нинг чап томонидаги λ га нисбатан квадрат учҳаднинг дискриминанти манфий бўлади, яъни қатъий тенгсизлик рўй беради.

Коши — Буняковский тенгсизлигини $\vec{a} \neq \vec{0}$ ва $\vec{b} \neq \vec{0}$ векторлар учун қуйидагича ёзиб олайлик: $-1 \leqslant \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|} \leqslant 1$. Бундан $\frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}$ касрни бирор φ бурчакнинг косинуси деб олиш мумкин, яъни

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\,\vec{b}}{|\vec{a}|\,|\vec{b}|}. \qquad (35)$$

Таъриф. (35) тенглик билан аниқланадиган бурчакларнинг энг кичиги $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар орасидаги *бурчак* деб аталади.

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ да $\vec{a}$, $\vec{b}$ векторлар *ортогонал* деб аталади. (35) дан кўриниб турибдики, ноль бўлмаган икки вектор ортогонал бўлиши учун уларнинг скаляр кўпайтмаси нолга тенг бўлиши зарур ва етарли экан.

(35) да $\varphi = 0$ ёки $\varphi = \pi$ бўлса, $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|$; (34) га асосан $\vec{a} = \lambda\vec{b}$ ёки $\vec{a} \parallel \vec{b}$,

$$(35) \Rightarrow \vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi. \qquad (36)$$

Демак, икки векторнинг скаляр кўпайтмаси шу векторлар модуллари билан улар орасидаги бурчак косинусининг кўпайтмасига тенг.

Энди V_E нинг базиси масаласига тўхталайлик.

Таъриф. V_E даги $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ базис векторларнинг ҳар бири бирлик вектор бўлиб, уларнинг исталган иккитаси ўзаро ортогонал бўлса, бундай векторлар системаси *ортонормаланган базис* (ёки *де-*

карт базиси) деб аталади, уни ҳам одатдагидек $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ деб белгилайлик.

Демак, ортонормаланган базис учун

$$\vec{e}_i \vec{e}_j = \begin{cases} 1, & \text{агар } i = j \text{ бўлса}, \\ 0, & \text{агар } i \neq j \text{ бўлса}, \end{cases} \tag{37}$$

бунда $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Энди ортонормаланган базисда координаталари билан берилган икки векторнинг скаляр кўпайтмаси, векторнинг узунлиги, икки вектор орасидаги бурчакни ҳисоблаш формулаларини топайлик.

Фараз қилайлик, бирор декарт базисида

$$\vec{a}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n,$$

$$\vec{b}(y_1, y_2, \ldots, y_n) = y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n.$$

У ҳолда скаляр кўпайтманинг хоссаларини ва (37) ни назарда тутсак,

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n)(y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n) =$$

$$= x_1y_1(\vec{e}_1\vec{e}_1) + x_1y_2(\vec{e}_1\vec{e}_2) + \ldots + x_1y_n(\vec{e}_1\vec{e}_n) + x_2y_1(\vec{e}_2\vec{e}_1) +$$

$$+ x_2y_2(\vec{e}_2\vec{e}_2) + \ldots + x_2y_n(\vec{e}_2\vec{e}_n) + \ldots + x_ny_1(\vec{e}_n\vec{e}_1) +$$

$$+ x_ny_2(\vec{e}_n\vec{e}_2) + \ldots + x_ny_n(\vec{e}_n\vec{e}_n) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

яъни

$$\vec{a}\vec{b} = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \tag{38}$$

Демак, V_E да икки векторнинг скаляр кўпайтмаси шу векторлар мос координаталари кўпайтмаларининг йиғиндисига тенг.

$$\vec{a} = \vec{b} \Rightarrow x_1 = y_1, \ x_2 = y_2, \ \ldots, \ x_n = y_n \Rightarrow \vec{a}\vec{a} = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2.$$

ёки

$$\sqrt{\vec{a}\vec{a}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2},$$

вектор узунлигининг таърифига кўра

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}. \tag{39}$$

Демак, векторнинг узунлиги унинг координаталари йиғиндисидан олинган арифметик квадрат илдизга тенг.

(38) ва (39) ни эътиборга олсак, икки вектор орасидаги бурчакни ҳисоблаш (аниқроғи, шу бурчакнинг косинусини топиш) формуласи топилади. (35) дан:

$$\cos\varphi = \frac{x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots x_n y_n}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2}}. \tag{40}$$

Коши — Буняковский тенгсизлиги эса қуйидаги кўринишни олади:

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2). \qquad (41)$$

1-мисол. Тўрт ўлчовли векторли евклид фазосидаги декарт базисида $\vec{a}(3, 2, 1, 1)$, $\vec{b}(4, -2, -1, 1)$ берилган. Қуйидагиларни топинг. а) шу векторларнинг узунликлари; б) $\vec{a}\vec{b}$ скаляр кўпайтма; с) векторлар орасидаги бурчак.

Ечиш. а) (39) га асосан

$$|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{15},$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{22};$$

б) (38) га асосан

$$\vec{a}\vec{b} = 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-2) + 1 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 = 12 - 4 - 1 + 1 = 8;$$

с) (40) га асосан $\cos\varphi = \dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{8}{\sqrt{15} \cdot \sqrt{22}} = \dfrac{8}{\sqrt{330}}$;

$$\varphi = \arccos\frac{8}{\sqrt{330}}.$$

2-мисол. $\vec{a}(1, 3, 2, -1)$, $\vec{b}(5, 1, -4, 0)$, $\vec{c}(0, 4, 1, 14)$ векторларнинг ортогонал системани ҳосил қилишини исботланг.

Исбот. Умуман, $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ векторлар системасида ихтиёрий икки вектор ўзаро ортогонал бўлса, бундай векторлар системаси *ортогонал система* деб аталади. Бу ерда аҳвол шундай, ҳақиқатан,

$$\vec{a}\vec{b} = 1 \cdot 5 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + (-1) \cdot 0 = 8 - 8 = 0,$$

$$\vec{a}\vec{c} = 1 \cdot 0 + 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + (-1) \cdot 14 = 14 - 14 = 0.$$

$$\vec{b}\vec{c} = 5 \cdot 0 + 1 \cdot 4 + (-4) \cdot 1 + 0 \cdot 14 = 4 \cdot 4 = 0.$$

37-§. n ўлчовли евклид фазоси

Таъриф. Элтувчиси V_E бўлган (n ўлчовли векторли евклид фазоси) n ўлчовли аффин фазо *n ўлчовли евклид фазоси* деб аталади ва E_n билан белгиланади.

Демак, элементлари нуқта ва вектор деб аталган бўш бўлмаган тўплам I_{1-4}, II_{1-4}, III_{1-2}, IV_{1-2}, V_{1-4} аксиомаларни қаноатлантирса, у тўплам n ўлчовли евклид фазоси бўлади.

Таърифдан кўринадики, n ўлчовли аффин фазонинг барча таъриф ва теоремалари E_n да ҳам ўз кучини сақлайди.

E_n даги нуқтанинг координаталарини 30-§ дагидек таърифласак ҳамда декарт реперини $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ деб олсак $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots,$

$\vec{e}_n$ ортонормаланган базис), у ҳолда уч ўлчовли евклид фазоси сингари E_n да қатор масалаларни ҳал қилиш мумкин. Бирор декарт реперида $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $B(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ни олайлик.

Таъриф. E_n даги A, B нуқталар аниқлаган $\vec{AB}$ вектор узунлиги шу *икки нуқта орасидаги масофа* деб аталади ва $\rho(A, B)$ билан белгиланади.

Таърифга асосан $\rho(A, B) = |\vec{AB}|$. 30-§ даги (13) ни эсласак, $\vec{AB}(y_1 - x_1, y_2, - x_2, \ldots, y_n - x_n)$, (39) формуладан:

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}\ .$$

Бу формула E_n даги икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласидир.

Теорема. *E_n даги ихтиёрий учта A, B, C нуқта учун*

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C)$$

ўринлидир.

Ҳақиқатан, IV$_2$ аксиомага асосан $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{BC}$. Бу тенгликнинг икки томонидаги векторларни ўз-ўзига скаляр кўпайтирамиз:

$$\vec{AC} \cdot \vec{AC} = (\vec{AB} + \vec{BC})(\vec{AB} + \vec{BC})$$

ёки

$$\vec{AC}^2 = \vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + \vec{BC}^2,$$

бундан

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AB}|^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + |\vec{BC}|^2.$$

Лекин $\vec{AB} \cdot \vec{BC} \leqslant |\vec{AB}|\,|\vec{BC}|$ (чунки $\vec{AB} \cdot \vec{BC} < 0$ ҳолда тенгсизлик равшан, $\vec{AB} \cdot \vec{BC} > 0$ ҳолда эса Коши — Буняковский тенгсизлиги асосида). У ҳолда

$$|\vec{AC}|^2 \leqslant |\vec{AB}|^2 + 2|\vec{AB}|\,|\vec{BC}| + |\vec{BC}|^2,$$

$$|\vec{AC}|^2 \leqslant |\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2,$$

бундан

$$|\vec{AC}| \leqslant |\vec{AB}| + |\vec{BC}|$$

ёки

$$\rho(A, C) \leqslant \rho(A, B) + \rho(B, C). \tag{42}$$

Бу ердаги тенгликнинг ўринли бўлиши учун B нуқта A ёки C билан устма-уст тушиши, ёки B нуқта A билан C нинг орасида ётиши лозим (буни мустақил исботланг).

Табиийки, k ўлчовли текислик таърифи ва хоссалари A_n да қандай бўлса, E_n да шундай сақланиб қолади, бундан ташқари, бу фазода шу хоссалар ёнига янги хоссалар қўшилади. Бу хоссалар метрик характерга эга бўлиб, уларнинг барчасини биз бу ерда келтирмаймиз (икки текислик орасидаги масофа, тўғри чизиқ билан текислик орасидаги бурчак ва ҳ. к.). Мисол тариқасида қуйидаги масалини кўриб чиқайлик.

Декарт реперида берилган нуқтадан берилган гипертекисликкача масофа ҳисоблансин.

Таъриф. E_n да нуқтадан гипертекисликкача *масофа* деб, шу нуқтадан гипертекисликка туширилган перпендикуляр тўғри чизиқнинг бу текислик билан кесишган нуқтасигача бўлган масофага айтилади.

Шуни таъкидлаймизки, гипертекислик ўзига перпендикуляр тўғри чизиқ билан фақат битта нуқтада кесишади, чунки гипертекислик битта чизиқли тенглама билан, тўғри чизиқ эса $(n-1)$ та чизиқли тенглама билан аниқланиб, уларнинг умумий нукталарини топиш учун жами n та чизиқли тенгламани (бу система албатта биргаликда) ечилади. Умумий ҳолда n та тенгламада n та номаълум бўлгани учун тегишли системани ечиб, изланган нуқта топилади.

$M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ нуқта ва

$$\Pi_{n-1}: a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n + a_0 = 0 \tag{43}$$

гипертекислик берилган бўлсин. $\rho(M_0, \Pi_{n-1})$ ни излаймиз.

M_0 нуқтадан Π_{n-1} га перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказиб, унинг Π_{n-1} билан кесишган нуқтасини N_0 деб белгилайлик, у ҳолда $\overrightarrow{M_0N_0}$ вектор ҳосил бўлади, N_0 нинг координаталари $x_1', x_2' \dots, x_n'$ бўлсин.

$$N_0 \in \Pi_{n-1} \Rightarrow a_1x_1' + a_2x_2' + \dots + a_nx_n' + a_0 = 0. \tag{44}$$

Бу айниятни (43) тенгламадан ҳадлаб айириб, қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$a_1(x_1 - x_1') + a_2(x_2 - x_2') + \dots a_n(x_n - x_n') = 0. \tag{45}$$

Бу тенгликнинг чап томонини ўзаро перпендикуляр $\vec{a}(a_1, a_2, \dots, a_n$ ва $\overrightarrow{N_0P}(x_1 - x_1', \; x_2 - x_2', \dots, \; x_n - x_n')$ векторнинг скаляр кўпайтмаси деб қараш мумкин, бу ерда $N_0 \in \Pi_{n-1}$, $P \in \Pi_{n-1} \Rightarrow$ $\Rightarrow \vec{a} \perp \Pi_{n-1}$, чунки P нуқта Π_{n-1} нинг ихтиёрий нуқтасидир. Демак, Π_{n-1} нинг (43) тенгламасидаги ўзгарувчилар олдидаги коэффициентлар шу текисликка ортогонал векторнинг координаталаридан иборат, демак, $\vec{a} \parallel \overrightarrow{M_0N_0}$. У ҳолда

$$\overrightarrow{M_0N_0} \cdot \vec{a} = |\overrightarrow{M_0N_0}||\vec{a}|\cos\varphi = \pm|\overrightarrow{M_0N_0}||\vec{a}| \; (\varphi = 0 \text{ ёки } \pi),$$

бундан

$$|\overrightarrow{M_0N_0}\cdot\vec{a}|=\rho(M_0, \Pi_{n-1})|\vec{a}|,$$

$$\rho(M_0, \Pi_{n-1})=\frac{|\overrightarrow{M_0N_0}\cdot\vec{a}|}{|\vec{a}|}.$$

Бу формулани координаталарда ёзиш учун

$$\overrightarrow{M_0N_0}\cdot\vec{a}=a_1(x'_1-x_1^0)+a_2(x'_2-x_2^0)+\ldots+a_n(x'_n-x_n^0)=$$
$$=a_1x'_1+a_2x'_2+\ldots+a_nx'_n-(a_1x_1^0+a_2x_2^0+\ldots+a_nx_n^0)$$

ни эътиборга олсак, $\overrightarrow{M_0N_0}\cdot\vec{a}=-(a_1x_1^0+a_2x_2^0+\ldots+a_nx_n^0)-a_0$,

$$\rho(M_0, \Pi_{n-1})=\frac{|a_1x_1^0+a_2x_2^0+\ldots+a_n\ x_n^0+a_0|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}}. \qquad (46)$$

Бу формула E_3 даги нуқтадан текисликкача масофани топиш формуласининг умумлашган ҳолидир.

Энди E_n даги бир декарт реперининг иккинчи декарт репери билан қандай боғланганлигини кўрайлик.

Бу боғланиш умумий ҳолда 30-§ даги (15) формуладан аниқланади. У формуладаги иккинчи аффин репернинг базис векторларини биринчи аффин реперга нисбатан координаталари бўлган $c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1n}, c_{21}, \ldots, c_{nn}$ сонлар энди реперлар декарт реперларидан иборат бўлганда маълум шартларни қаноатлантириши керак. Ҳақиқатан ҳам, энди $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \ldots, \vec{e}'_n$ лар бирлик векторлардан иборат:

$$\begin{aligned}
&c_{11}^2+c_{12}^2+\ldots+c_{1n}^2=1,\\
&c_{21}^2+c_{22}^2+\ldots+c_{2n}^2=1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{n1}^2+c_{n2}^2+\ldots+c_{nn}^2=1.
\end{aligned} \qquad (47)$$

Ундан ташқари, бу базис векторларнинг ихтиёрий иккитаси ўзаро перпендикуляр:

$$\begin{aligned}
&c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}+\ldots+c_{1n}c_{2n}=0,\\
&c_{11}c_{31}+c_{21}c_{32}+\ldots+c_{1n}c_{3n}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{11}c_{n1}+c_{12}c_{n2}+\ldots+c_{1n}c_{nn}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&c_{n-1,1}c_{n1}+c_{n-1,2}c_{n2}+\ldots+c_{n-1,n}c_{nn}=0.
\end{aligned} \qquad (48)$$

(47) да n та тенглама, (48) да эса $\frac{n}{2}$ $(n-1)$ та тенглама бўлиб, улар жами $n+\frac{n}{2}$ $(n-1)=\frac{n^2+n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$ та тенгламани қа-

ноатлантириши керак экан. 30-§ даги (15) формулага диққат билан назар ташласак, ундаги барча c_{ij} (i, $j = 1, 2, \ldots, n$) нинг сони $n^2 + n = n(n+1)$ тадир; бу c_{ij} коэффициентларни параметрлар деб атасак, қуйидаги хулосаларга келамиз:

1. A_n да бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтиш $n(n+1)$ та параметрнинг берилиши билан тўла аниқланади (бу параметрлар албатта 30-§ даги (16) шартни қаноатлантириши керак).

2. E_n да бир декарт реперидан иккинчи декарт реперига ўтиш $\frac{n(n+1)}{2}$ та параметрнинг берилиши билан аниқланади, чунки c_{ij} лар юқоридаги $\frac{n(n+1)}{2}$ та шартни қаноатлантирса, у ҳолда

$$n(n+1) - \frac{n^2+n}{2} = n^2 + n - \frac{n^2+n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Хусусий ҳолда $n = 2$ бўлса, текисликдаги икки аффин реперни боғловчи формулалар

$$\begin{aligned} x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + c_{10}, \\ x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + c_{20} \end{aligned} \qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix} \neq 0$$

билан аниқланиб, жами 6 та c_{11}, c_{12}, c_{10}, c_{21}, c_{22}, c_{20} параметрга боғлиқдир (чунки $n(n+1) = 2(2+1) = 2 \cdot 3 = 6$). Декарт реперлари орасидаги боғланиш эса $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{2(2+1)}{2} = 3$ та параметрларга боғлиқ (улар c_{10}, c_{20} ва буриш бурчаги α).

1-мисол. E_5 да $A(4, 3, 3, 4, 5)$, $B(-2, -2, 2, 5, 4)$ нуқталар берилган. Шу нуқталар орасидаги масофани топинг.

Ечиш. (41) формулага асосан

$$\rho(A, B) = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-3)^2 + (2-3)^2 + (5-4)^2 + (4-5)^2} =$$

$$= \sqrt{36 + 25 + 1 + 1 + 1} = \sqrt{64} = 8.$$

2-мисол. E_5 да $A(3, -2, 1, 4, 1)$ ва $B(2, 4, -3, 1, 2)$ нуқталардан тенг узоқликда ётган нуқталар тўпламини топинг.

Ечиш. Изланган нуқталардан бирини $N(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ десак, қуйидаги шарт бажарилиши керак:

$$\rho(A, N) = \rho(B, N).$$

Буни координаталарда ёзсак,

$$\sqrt{(x_1-3)^2 + (x_2+2)^2 + (x_3-1)^2 + (x_4-4)^2 + (x_5-1)^2} =$$

$$= \sqrt{(x_1-2)^2 + (x_2-4)^2 + (x_3+3)^2 + (x_4-1)^2 + (x_5-2)^2}.$$

Иккала қисмни квадратга кўтариб, қавсларни очиб, ихчамлаб чиқсак,

$$x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 - x_5 + \frac{3}{2} = 0,$$

бу чизиқли тенглама E_5 да тўрт ўлчовли текисликни, яъни гипертекисликни аниқлайди. Демак, изланган нуқталар тўплами гипертекисликдан иборат.

3-мисол. $M(1,\ 4,\ -5,\ 3,\ 2)$ нуқтадан $\Pi_4 : 3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 - 3 = 0$ гипертекисликкача бўлган масофани ҳисобланг.

Ечиш. (46) формулага асосан

$$\rho(M,\ \Pi_4) = \frac{|3 \cdot 1 - 4 + 2(-5) - 3 + 2 - 3|}{\sqrt{3^2 + 1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 1^2}} = \frac{|-15|}{\sqrt{16}} = \frac{15}{4}.$$

38-§. Ҳаракат

E_n да иккита $\mathscr{B} = (O,\ \vec{e}_1,\ \vec{e}_2,\ \ldots,\ \vec{e}_n)$, $\mathscr{B}' = (O',\ \vec{e}_1{}',\ \vec{e}_2{}',\ \ldots,\ \vec{e}_n{}')$ декарт репери берилган бўлсин.

E_n нинг ҳар бир M нуқтасини шу фазонинг шундай M' нуқтасига акслантирамизки, $\mathscr{B}$ реперда M нуқта қандай координаталарга эга бўлса, $\mathscr{B}'$ реперда M' нуқта шундай координаталарга эга бўлсин. Бу ерда E_n нуқталари яна шу фазо нуқталарига мос қўйилиб, бундай мослик ўзаро бир қийматлидир. Демак, E_n да алмаштириш ҳосил қилинди, у E_n *нинг ҳаракати* (силжиши) деб аталади. E_n даги ҳаракат иккита декарт реперининг берилиши билан тўла аниқланади. Бу таърифни аффин алмаштиришнинг таърифи билан таққосласак, ҳаракат аффин алмаштиришнинг хусусий ҳоли экани аён бўлади. Шу сабабли фигуранинг барча аффин хоссалари ҳаракатда сақланиб қолади.

Ундан ташқари ҳаракат яна қуйидаги хоссага эга:

Ҳаракатда икки нуқта орасидаги масофа сақланади. Ҳақиқатан, $\mathscr{B}$ репердаги $M(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $N(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ нуқталарга ҳаракат натижасида $\mathscr{B}'$ реперда мос келган M', N' нуқталар таърифга асосан худди шундай координаталарга эга, яъни $M'(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$, $N'(y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n)$ у ҳолда $\rho(M,\ N) = \rho(M',\ N')$.

Масофа ҳаракатнинг асосий инварианти ҳисобланиб, баъзан ҳаракат шу инвариант орқали таърифланади. Фикримизнинг тасдиғи учун қуйидаги теоремани кўрайлик.

Теорема. *E_n нинг бирор f алмаштиришида икки нуқтаси орасидаги масофа сақланса, бу алмаштириш ҳаракатдир.*

Исбот. E_n да ихтиёрий учта $O,\ A,\ B$ нуқтани олайлик, у ҳолда IV_2 аксиомага асосан

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} \qquad (49)$$

ёки

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}.$$

Бу тенгликнинг чап ва ўнг томонида турган векторларни ўз-ўзига скаляр кўпайтирайлик: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA})(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) \Rightarrow \overrightarrow{AB}^2 =$

$$= \overrightarrow{OB}^2 - 2(\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}) + \overrightarrow{OA}^2 \Rightarrow 2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}) = \overrightarrow{OA}^2 + \overrightarrow{OB}^2 - \overrightarrow{AB}^2. \tag{50}$$

$f(O) = O'$, $f(A) = A'$, $f(B) = B'$ бўлсин, у ҳолда O', A', B' нуқталар учун ҳам IV$_2$ ни татбиқ қилиб ва (49) сингари тенглик ёзиб, тегишлича ихчамласак,

$$2(\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}) = \overrightarrow{O'A'}^2 + \overrightarrow{O'B'}^2 - \overrightarrow{A'B'}^2. \tag{51}$$

Лекин теорема шартига кўра $\rho(O, A) = \rho(O', A')$, $\rho(O, B) = \rho(O', B')$, $\rho(A, B) = \rho(A', B')$ бўлгани учун (50) билан (51) нинг ўнг томонларини таққосласак, улар ўзаро тенгдир, демак, чап томонлари ҳам тенг бўлади:

$$(\overrightarrow{O'A'}\cdot\overrightarrow{O'B'}) = (\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}). \tag{52}$$

E_n да бирор $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ декарт реперини олайлик, у ҳолда $\overrightarrow{OA_1} = \vec{e}_1$, $\overrightarrow{OA_2} = \vec{e}_2, \dots, \overrightarrow{OA_n} = \vec{e}_n$ десак, $\mathscr{B}$ реперни қуйидагича ёзиш мумкин: $\mathscr{B} = (O, A_1, A_2, \dots, A_n)$. Шу реперни f бўйича алмаштирсак, $f(O) = O'$, $f(A_1) = A_1', \dots, f(A_n) = A_n'$ бўлгани учун бу нуқталар системаси ҳам бирор $\mathscr{B}' = (O', A_1', \dots, A_n')$ реперни аниқлайди. Бу репер ҳам декарт реперидан иборатдир, чунки

1) алмаштиришга асосан $\rho(O, A_i) = \rho(O', A_i')$, $(i = 1, 2, \dots, n)$ яъни бирлик вектор образи яна бирлик вектордир;

2) (52) шартга асосан ўзаро перпендикуляр векторлар яна перпендикуляр векторга ўтади.

E_n даги ихтиёрий M нуқтани олайлик, унинг $\mathscr{B}$ декарт реперидаги координаталари $x_1, x_2, \dots, x_n$ бўлсин. M нуқтага f алмаштиришда мос келган M' нуқтанинг шу репердаги координаталари $y_1, y_2, \dots, y_n$ бўлсин. У ҳолда

$$\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA_1} = |\overrightarrow{OM}|\,|\overrightarrow{OA_1}|\cos\varphi = |\overrightarrow{OM}|\cdot|\vec{e}_1|\cos\varphi =$$

$$= |\overrightarrow{OM}|\cos\varphi = |\overrightarrow{OM_1}| = x_1$$

(бунда $\varphi = (\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OA_1}})$, $\overrightarrow{OM_1}$ вектор $\overrightarrow{OM}$ нинг Ox ўқдаги проекцияси) бўлгани учун

$$x_1 = \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{OA_1}, \tag{53}$$

шунга ўхшаш

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{OA_2}, \\ x_3 &= \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{OA_3}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \overrightarrow{OM}\,\overrightarrow{OA_n}, \\ y_1 &= \overrightarrow{O'M'}\cdot\overrightarrow{O'A'_1}, \\ y_2 &= \overrightarrow{O'M'}\cdot\overrightarrow{O'_1A'_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= \overrightarrow{O'M'}\,\overrightarrow{O'A'_n}. \end{aligned}\right| \tag{54}$$

$$(52)-(54) \Rightarrow \left.\begin{aligned} x_1 &= y_1, \\ x_2 &= y_2 \\ &\ldots\ldots \\ x_n &= y_n \end{aligned}\right| \Rightarrow f \text{ ҳаракатдан иборат.}$$

Ҳаракатнинг координаталардаги ифодасини топиш учун ҳаракат аффин алмаштиришнинг хусусий ҳолидан иборатлигини эслаш керак. Демак, ҳаракатнинг аналитик ифодаси 34-§ даги (27) формулалар кўринишида бўлиб, унинг характерини аниқловчи c_{ij} сонлар қўшимча шартларни қаноатлантириши керак, бу шартлар эса 37-§ даги (47), (48) дир.

«Алгебра ва сонлар назарияси» курсидан маълумки, квадрат матрицанинг элементлари (47), (48) шартларни қаноатлантирса, бундай матрица *ортогонал матрица* деб аталади, унинг детерминанти ± 1 га тенг, яъни 34-§ даги (27) нинг детерминанти $\Delta = \pm 1$.

Агар ҳаракатнинг аналитик ифодасида $\Delta = +1$ бўлса, бундай ҳаракат *биринчи тур ҳаракат* деб аталади, бу тур ҳаракатда иккита мос репер бир хил ориентацияли бўлади. $\Delta = -1$ ҳолда бундай ҳаракат *иккинчи тур ҳаракат* дейилиб, ундаги мос реперлар ҳар хил ориентацияли.

E_n нинг барча ҳаракатлари тўпламини E билан белгилайлик ҳамда $\forall f,\ g \in E$ ни олайлик; ҳаракатда икки нуқта орасидаги масофа ўзгармаганлиги учун кетма-кет бажарилган икки f, g ҳаракат натижасида ҳам икки нуқта орасидаги масофа ўзгармайди, демак, $g\cdot f$ «кўпайтма» ҳаракат бўлиб, E га тегишлидир. f да икки нуқта орасидаги масофа ўзгармагани учун унга тескари f^{-1} да ҳам масофа ўзгармайди, демак, $f^{-1} \in E$. Хуллас, E_n нинг барча ҳаракатлари тўплами E группа ҳосил қилади, у *E_n нинг ҳаракатлар группаси* деб аталади. Ҳаракат аффин алмаштиришнинг хусусий ҳоли эканлигидан ҳаракатлар группаси аффин группанинг қисм группаси бўлади. Демак, A нинг барча инвариантлари E учун ҳам инвариант бўлади, лекин бунинг тескариси доимо тўғри бўлавермайди; масалан, E нинг инвариантларидан бири икки нуқта орасидаги масофадир, бу эса A да инвариант эмас, шу нуқтаи назардан E_n даги фигура геометрик хоссалар нуқтаи назаридан E_n даги фигурага нисбатан бойроқдир.

Энди Евклид геометриясига қуйидагича таъриф бериш мумкин.

Евклид геометрияси геометриянинг ҳаракат натижасида фигуранинг ўзгармай қоладиган хоссаларини ўрганадиган бир бўлимидир.

Ўрта мактаб геометрия курсида икки ва уч ўлчовли (E_2, E_3) евклид фазолари геометрияси ўрганилади.

n ўлчовли ($n > 3$) евклид геометриясида ҳам ўрта мактаб геометрия курсида қараладиган баъзи тушунчаларни умумлаштириш мумкин. Масалан, конгруэнтлик тушунчаси E_n да қуйидагича киритилади: F, F' фигуралардан бирини иккинчисига ўтказувчи ҳаракат мавжуд бўлса, бу фигуралар *конгруэнт* деб аталади, ёки оддий сферани умумлаштириб, E_n да *гиперсфера* киритилади: E_n нинг марказ деб аталган C нуқтадан берилган r масофада ётган барча нуқталари тўплами *гиперсфера* деб аталади ва ҳ. к.

Энди ҳаракатлар группасининг баъзи қисм группалари билан танишайлик.

1. I турдаги барча ҳаракатлар тўпламини E_{I} деб белгиласак, бу тўплам группани ҳосил қилади, чунки 1) E_{I} нинг ҳар бир алмаштиришида репер ориентацияси (демак, фазо ориентацияси) ўзгармаганлиги учун унга тегишли икки ҳаракатнинг композицияси натижасида ҳам ориентация ўзгармайди; 2) E_{I} нинг ҳар бир ҳаракатига тескари ҳаракат ҳам ориентацияни ўзгартирмайди, демак, E_{I} ҳам E нинг қисм группасидир.

2. E_{I} даги барча параллел кўчиришлар тўпламини олайлик. (параллел кўчиришнинг таърифи 35-§ да берилган бўлиб, у таъриф бу ерда ҳам ўринлидир); бу тўпламнинг группани ҳосил қилишини 35-§ дан биз биламиз. Аввало параллел кўчиришнинг ҳаракат эканлигини исботлайлик. M, N нуқталар M', N' нуқталарни $\vec{u}$ вектор бўйича параллел кўчиришдан ($\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$, $\overrightarrow{NN'} = \vec{u}$) ҳосил қилинган бўлса, $|\overrightarrow{MN}| = |\overrightarrow{M'N'}| \Rightarrow \rho(M, N) = \rho(M', N')$. Демак, параллел кўчириш ҳаракатдир. У ҳолда бундай ҳаракатларнинг тўплами ҳам E нинг қисмидир.

3. E нинг шундай ҳаракатлари тўпламини қараймизки, бу ҳаракатлар натижасида E нинг бирор O нуқтаси ўз-ўзига ўтсин, бундай хоссага эга бўлган ҳаракатларни E_n ни O нуқта атрофида *бурии* дейилади, бу тўпламни E_0 деб белгиласак, E_0 нинг группа ҳосил қилишини кўрсатиш осондир (буни кўрсатишни ўқувчига ҳавола қиламиз); демак, E_0 ҳам E нинг қисм группасидир.

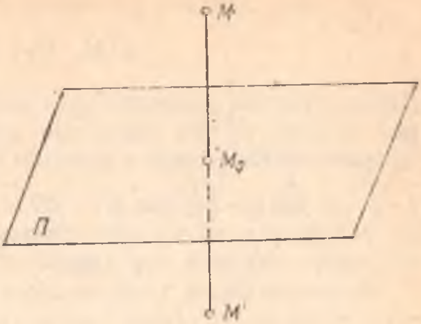
39-§. E_3 нинг ҳаракатлари ҳақида қисқача маълумот

1. Текисликка нисбатан симметрия. E_3 даги ихтиёрий бир П текисликни олайлик.

Таъриф. E_3 даги икки M, M' нуқта қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, бу нуқталар П текисликка нисбатан *симметрик* дейилади (193- чизма).

а) $MM' \perp \Pi$;

б) $MM' \cap \Pi = M_0$ бўлиб, $\rho(M, M_0) = \rho(M', M_0)$ бўлсин.



193- чизма

Бу таърифдан кўринадики, П текислик берилган бўлиб, $\forall M \in E_3$ нуқта учун П га нисбатан симметрик нуқтани топиш учун M дан П га перпендикуляр тушириб ва унинг П билан кесишган M_0 нуқтасини топиб сўнгра (M, M_0) тўғри чизиқда $\rho(M, M_0) = \rho(M', M_0)$ шартни қаноатлантирувчи M дан фарқли M' нуқтани топиш керак. $M \in \Pi$ ҳолда M ни ўз-ўзига симметрик деб олинади.

Бирор F фигура берилиб, унга П текисликка нисбатан симметрик фигурани топиш талаб қилинган бўлса, бу фигуранинг барча нуқталарига симметрик нуқталарни топиш керак, лекин баъзан фигураларни аниқлайдиган чекли сондаги нуқталарнинг образларини топиш билан чекланиш мумкин (чунки шу нуқталар F га симметрик фигурани тўла аниқлайди). Масалан, учбурчакка П га нисбатан симметрик фигурани топиш учун шу учбурчакнинг учта учига П га нисбатан симметрик бўлган учта нуқтани топиш кифоядир. П текисликка нисбатан E_3 даги симметрия E_3 нуқталарини яна шу фазо нуқталарига ўтказгани ҳамда бу акслантиришнинг ўзаро бир қийматли эканлиги сабабли уни симметрик алмаштириш (текисликка нисбатан симметрия) деб атаймиз.

Шу алмаштиришнинг аналитик ифодасини топайлик. $\mathscr{B} = (O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ декарт реперини анъанани бузмаслик учун $\mathscr{B} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ деб олиб, П текисликни бирор координаталар текислиги билан устма-уст тушсин десак, масалан, $xOy = \Pi$ бўлса, бу ҳолда $M(x, y, z)$ ва $M'(x', y', z')$ нуқталар П текисликка нисбатан симметрик бўлиши учун:

$$x = x', \; y = y', \; z = -z'. \tag{55}$$

(55) ифода танлаб олинган декарт реперидаги симметрик алмаштиришнинг аналитик ифодасидир; ($\Pi = xOz$ ҳолда (55) формула $x = x'$, $y = -y'$, $z = z'$ ва $\Pi = yOz$ бўлса, $x = -x'$, $y = y'$, $z = z'$).

Симметрия алмаштиришининг ҳаракат эканлигини кўрсатайлик. $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$ нуқталарни П текисликка нисбатан симметрия алмаштиришга дуч келтирилса, (55) га асосан, $M'(x_1, y_1, -z_1)$, $N'(x_2, y_2, -z_2)$. У ҳолда

$$\rho(M, N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$\rho(M', N') = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (-z_2 + z_1)^2}.$$

Бу ифодаларнинг ўнг томонлари тенг:

$$\rho(M,\ N) = \rho(M',\ N').$$

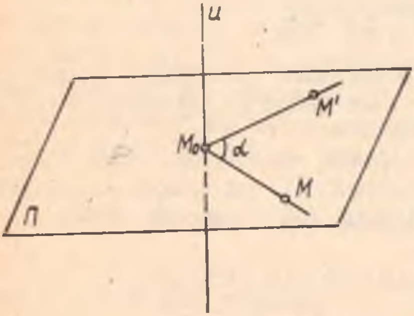
Демак, бундай алмаштиришда икки нуқта орасидаги масофа ўзгармай қолади, бу эса симметрия алмаштиришининг ҳаракатдан иборат эканлигини билдиради. Равшанки, юқоридаги алмаштиришда $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ декарт репери $\mathcal{B}' = (O, \vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$ декарт реперига ўтади. Бу реперлар ҳар хил ориентирланган бўлгани учун $(\Delta = -1)$ алмаштириш иккинчи тур ҳаракатга киради.

Фазодаги барча текисликларга нисбатан симметрия алмаштиришлари тўплами группани ҳосил қилмайди, чунки кесишувчи икки текисликнинг ҳар бирига нисбатан шундай алмаштиришлар композицияси бирор текисликка нисбатан симметрик алмаштириш бўлмайди, лекин бир текисликка параллел барча текисликларга нисбатан симметрия алмаштиришлари тўплами группа ҳосил қилади (исботланг); ҳатто битта текисликка нисбатан шундай алмаштиришлар ҳам группа ҳосил қилади; ҳақиқатан ҳам, f_Π бирор П текисликка нисбатан симметрия алмаштириши бўлиб, айнан алмаштиришни f_0 деб белгиласак, $\Phi = \{f_\Pi, f_0\}$ тўплам группа ҳосил қилади. Чунки бу ҳолда $f_\Pi = f_\Pi^{-1}$ бўлиб (П га нисбатан алмаштиришга тескари алмаштириш ҳам шу П га нисбатан алмаштиришдир), $f_\Pi^{-1} \in \Phi$ ва $f_\Pi \cdot f_0 = f_0 \cdot f_\Pi = f_\Pi \in \Phi$.

2. Тўғри чизиқ атрофида буриш. E_3 да бирор u тўғри чизиқ ва тайин α бурчак берилган бўлсин

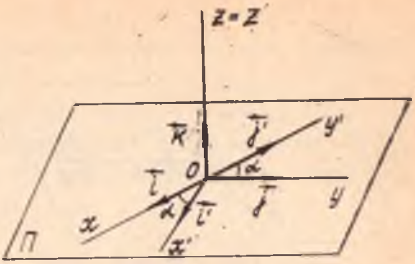
Таъриф. E_3 даги M, M' нуқталардан ўтиб, u тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган П текисликда $(\Pi \cap u = M_0)$ $\angle MM_0M' = \alpha$ ва $\rho(M, M_0) = \rho(M', M_0)$ бўлса, M' нуқта M нуқтани u тўғри чизиқ атрофида *α бурчакка буришдан ҳосил қилинган* дейилади (194- чизма).

u тўғри чизиқдаги нуқталар ўз-ўзига мос ҳисобланади. Бу таърифдан берилган нуқтани берилган тўғри чизиқ атрофида α бурчакка буришдан ҳосил қилинган нуқтани топиш қоидаси келиб чиқади. M берилган нуқта бўлса, M' ни топиш учун M дан ўтувчи ва u тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган П текисликни ўтказиб, унинг u билан кесишган M_0 нуқтаси топилади, сўнгра шу текисликда M_0 атрофида M ни α бурчакка буриш керак (I бўлим, 35- § га асосан). F фигурани u тўғри чизиқ атрофида α бурчакка буришдан ҳосил бўлган фигурани топиш учун унинг барча нуқталарини u тўғри чизиқ атрофида α бурчакка буриш керак; хусусий ҳолда F фигура тўғри чизиқдан иборат бўлса, уни u тўғри чизиқ атрофида буриш учун унинг иккита нуқтасининг



194- чизма

образини топиш кифоядир, учбурчакни *u* тўғри чизиқ атрофида буриш учун унинг учта учининг образини топиш етарлидир ва ҳ. к.



195- чизма

Тўғри чизиқ атрофида буриш E_3 ни ўз-ўзига бир қийматли акслантиргани учун у E_3 ни алмаштиришдир, $\alpha = \pi$ ҳолга мос буриш *u тўғри чизиққа нисбатан симметрия* деб аталади. Агар *u* тўғри чизиқ сифатида Oz ни қабул қилсак (195- чизма) ва $\mathscr{B} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперни Oz атрофида α бурчакка бурсак, $\mathscr{B}' = (O, \vec{i}', \vec{j}', \vec{k}')$ репер ҳосил бўлиб, улар орасидаги боғланишни қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' &= x\sin\alpha + y\cos\alpha, \\ z' &= z. \end{aligned} \tag{56}$$

Олдинги икки боғланиш бизга маълум.

(56) формулалар ёрдамида тўғри чизиқ атрофида буришнинг ҳаракат эканлигини кўрсатайлик. Агар $M(x_1, y_1, z_1)$, $N(x_2, y_2, z_2)$ нуқталар берилган бўлиб, бу нуқталарни *u* тўғри чизиқ атрофида α бурчакка буришдан ҳосил қилинган нуқталар (56) га асосан

$$M'(x_1\cos\alpha - y_1\sin\alpha,\ x_1\sin\alpha + y_1\cos\alpha,\ z_1),$$
$$N'(x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha,\ x_2\sin\alpha + y_2\cos\alpha,\ z_2)$$

бўлади, у ҳолда:

$$\rho(M,\ N) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,.$$

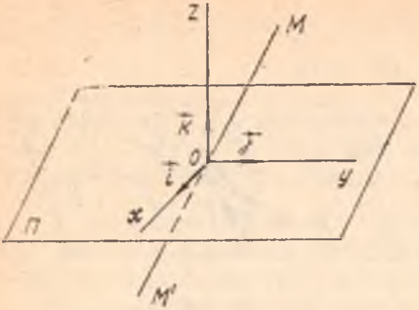
$$\begin{aligned} \rho(M',\ N') &= \{(x_2\cos\alpha - y_2\sin\alpha - x_1\cos\alpha + y_1\sin\alpha)^2 + (x_2\sin\alpha + \\ &+ y_2\cos\alpha - x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha)^2 + (z_2 - z_1)^2\}^{1/2} = \{[(x_2 - x_1)\cos\alpha - \\ &- (y_2 - y_1)\sin\alpha]^2 + [(x_2 - x_1)\sin\alpha + (y_2 - y_1)\cos\alpha]^2 + (z_2 - \\ &- z_1)^2\}^{1/2} = \{(x_2 - x_1)^2\cos^2\alpha - 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\sin\alpha\cos\alpha + \\ &+ (y_2 - y_1)^2\sin^2\alpha + (x_2 - x_1)^2\sin^2\alpha + 2(x_2 - x_1)(y_2 - y_1)\sin\alpha\cos\alpha + \\ &+ (y_2 - y_1)^2\cos^2\alpha + (z_2 - z_1)^2\}^{1/2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\,. \end{aligned}$$

Демак, $\rho(M,\ N) = \rho(M',\ N')$. Юқоридаги $\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$ реперлар бир хил ориентацияли бўлгани учун тўғри чизиқ атрофида буриш 1- тур ҳаракат деган хулоса чиқарамиз.

Битта тўғри чизиқ атрофидаги барча буришлар тўплами группа ҳосил қилади (буни мустақил исботланг).

3. Нуқтага нисбатан симметрия. E_3 да тайин S нуқта берилган бўлсин.

Таъриф. E_3 даги M, M' нуқталар учун S нуқта MM' тўғри чизиққа тегишли бўлиб, $\rho(S,\ M) = \rho(S,\ M')$ бўлса, M, M' нуқталар *S нуқтага нисбатан симметрик* дейилади. Бу



196- чизма

таърифдан кўринадики, икки нуқтанинг S га нисбатан симметрик бўлиши учун S нуқта учлари шу нуқтадаги кесманинг ўртаси бўлиши керак, бундан нуқта берилган бўлса, унга симметрик нуқтани ясаш усули келиб чиқади:

S нуқта ўз- ўзига симметрик деб ҳисобланиб, уни *симметрия маркази* қилиб олинади (196- чизма).

Бу акслантириш ҳам E_3 нуқталарини ўз- ўзига бир қийматли акслантиргани учун нуқтага нисбатан симметрия алмаштиришдан иборатлиги келиб чиқади. $\mathcal{B} = (O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ реперни шундай танлаб олайликки, $S = 0$ бўлса, $M(x, y, z)$ нуқта учун O га нисбатан симметрик нуқта $M'(-x, -y, -z)$ бўлади, чунки MM' кесма ўрта нуқтасининг координаталари:

$$\frac{x+(-x)}{2} = 0, \quad \frac{y+(-y)}{2} = 0, \quad \frac{z+(-z)}{2} = 0.$$

Демак, юқоридаги реперда O нуқтага нисбатан симметриянинг аналитик ифодаси қуйидагича бўлади:

$$x' = -x, \; y' = -y, \; z' = -z. \tag{57}$$

Лекин M нуқтадан M' нуқтага ўтишни қуйидагича ҳам бажариш мумкин: $M \to M'' \to M'$, бунда M'' нуқта M' нинг xOy текисликка нисбатан симметрияси бўлиб, M'' ни Oz атрофида $\alpha = \pi$ бурчакка буриш билан M' ҳосил қилинади.

Демак, марказий симметрия текисликка нисбатан симметрия билан тўғри чизиқ атрофида $\alpha = \pi$ бурчакка буришнинг композициясидан иборат экан, бундан эса нуқтага нисбатан симметрия иккинчи тур ҳаракат эканлиги келиб чиқади.

E_3 даги ҳаракатлардан бири параллел кўчиришдан иборат ҳолга тўхталмаймиз, чунки текисликда кўрилган параллел кўчиришнинг таърифи ва хоссалари E_3 да ҳам тўла сақланади.

Параллел кўчириш, текисликка нисбатан симметрия, тўғри чизиқ атрофида буришларни асосий ҳаракатлар деб атайлик. Буларнинг ҳар хил композицияларидан E_3 нинг турли ҳаракатларини ҳосил қилиш мумкин.

Масалан,

1. Тўғри чизиқ атрофида буриш билан шу тўғри чизиққа параллел вектор қадар параллел кўчиришнинг композицияси ҳам ҳаракат бўлиб, у *винт бўйича ҳаракат* деб аталади; равшанки, у биринчи тур ҳаракат бўлади.

2. П текисликка нисбатан симметрия билан П га перпендикуляр тўғри чизиқ атрофида $\alpha = \pi$ бурчакка буришнинг композицияси *бу-*

рини симметрияси деб аталган ҳаракатдан иборат бўлади, равшанки, бу иккинчи тур ҳаракатдир.

3. П текисликка нисбатан симметрия билан $\vec{a}$ вектор $(\vec{a} \parallel \Pi)$ қадар параллел кўчиришнинг композицияси *сирпанувчи симметрия* деб аталадиган ҳаракатдир, бу ҳам иккинчи тур ҳаракат бўлади.

40- §. Ўхшашлик алмаштириш. Ўхшашликлар группаси

f алмаштириш E_n нинг алмаштиришларидан бири бўлсин.

Таъриф. Агар $\forall$ A, $B \in E_n$ учун ҳамда $k>0$ сон учун $\rho(f(A), f(B)) = k \cdot \rho(A, B)$ шарт бажарилса, f алмаштириш E_n нинг *ўхшашлик алмаштириши* деб аталади.

$k > 1$ да икки нуқта орасидаги масофа ўхшаш алмаштиришда ортади, $k < 1$ да камаяди, $k = 1$ да f ҳаракатдан иборат. F, F' фигурадан бири иккинчисидан ўхшашлик алмаштириши натижасида ҳосил қилинса, улар *ўхшаш фигуралар* дейилади.

Ўхшашлик алмаштиришининг яна бир хусусий ҳоли гомотетиядир (35- §).

Гомотетияда бир-бирига гомотетик нуқталар билан гомотетия маркази S бир тўғри чизиқда ётади. k коэффициентли S марказли гомотетияни H_S^k билан белгиласак, бир-бирига гомотетик A, A' нуқталарни $H_S^k(A) = A'$ кўринишда ёзиш мумкин:

$$\forall M, \ N \in E_n \text{ ҳамда } H_S^k(M) = M', \ H_S^k(N) = N' \text{ десак, } \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{SM'} = k\overrightarrow{SM}, \quad \overrightarrow{SN'} = k\overrightarrow{SN}, \text{ булардан:}$$

$$\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'S} + \overrightarrow{SN'} = \overrightarrow{SN'} - \overrightarrow{SM'} = k(\overrightarrow{SN} - \overrightarrow{SM}) = k \cdot \overrightarrow{MN}. \quad (58)$$

MN тўғри чизиқдаги бирор P нуқтани олсак, $H_S^k(P) = P'$ нуқта учун (58) га асосан

$$\overrightarrow{M'P'} = k\overrightarrow{MP}, \quad (59)$$

лекин $\overrightarrow{MP} \parallel \overrightarrow{MN} \Rightarrow \overrightarrow{MP} = \lambda \overrightarrow{MN}$ ёки $\lambda = (MN; P)$, демак, $\overrightarrow{M'P'} = \lambda \overrightarrow{M'N'}$ ёки $\lambda = (M'N', P')$. Бу мулоҳазалар уч нуқта оддий нисбатининг гомотетияда сақланишини кўрсатади. $(MN, P) = (M'N', P')$ дан эса гомотетияда кесма образи кесма, нур образи нур, тўғри чизиқ образи тўғри чизиқ, ярим текислик образи ярим текислик деган хулоса келиб чиқади.

Йўналтирувчи вектори $\overrightarrow{MN}$ дан иборат u тўғри чизиқнинг образи учун $H_S^k(u) = u'$; (58) га асосан $\overrightarrow{M'N'} \parallel \overrightarrow{MN} \Rightarrow$ гомотетияда тўғри чизиқнинг образи ўзига параллел тўғри чизиқдир.

Бундан ташқари, гомотетияда m ўлчовли текисликнинг образи яна m ўлчовли текислик, бурчак образи шу бурчакка конгруэнт бурчак эканини исботлаш мумкин (буни мустақил машқ сифатида исботланг).

Декарт репери учун гомотетия маркази координаталар бошидан иборат бўлса ($S = 0$), мос $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $A'(x', x_2', \dots, x_n')$ нуқталар координаталарини боғловчи муносабат қуйидагича бўлади:

$$x_1' = kx_1;\ x_2' = kx_2,\ \dots,\ x_n' = kx_n.$$

1-теорема. *k коэффициентли гомотетия $|k|$ коэффициентли ўхшашлик алмаштиришдир.*

Исбот. Декарт реперида олинган $A(x_1, x_2, \dots, x_n)$, $B(y_1, y_2, \dots, y_n)$ нуқталарга гомотетияда мос келган нуқталар $A'(kx_1, kx_2, \dots, kx_n)$, $B'(ky_1, ky_2, \dots, ky_n)$ дан иборат. У ҳолда

$$\rho(A, B) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \dots + (y_n - x_n)^2},$$

$$\rho(A', B') = \sqrt{(ky_1 - kx_1)^2 + (ky_2 - kx_2)^2 + \dots + (ky_n - kx_n)^2} = |k|\,\rho(A, B),$$

демак, $\rho(A', B') = |k|\,\rho(A, B)$.

2-теорема. *Ҳар қандай ўхшашлик алмаштириш гомотетия билан ҳаракатнинг композициясидан иборатдир.*

Исбот. Айтайлик, f алмаштириш E_n нинг k коэффициентли ўхшашлик алмаштириши бўлсин ($k>0$). E_n да ихтиёрий S марказли ва k коэффициентли H_S^k гомотетияни қарайлик. $\forall A, B, \in E_n$ учун $\rho(f(A), f(B)) = \rho(A', B') = k\rho(A, B)$. H_S^k гомотетияда $H_S^k(A) = A''$, $H_S^k(B) = B'' \Rightarrow \overrightarrow{A''B''} = k\overrightarrow{AB}$, булардан $|\overrightarrow{A''B''}| = k|\overrightarrow{AB}| \Rightarrow \rho(A'', B'') = k\rho(A, B) \Rightarrow \rho(A'', B'') = \rho(A', B')$, демак, $A''B'' \equiv A'B'$, у ҳолда шундай d ҳаракат мавжудки, у $A''B''$ ни $A'B'$ га ўтказади; $f = dH_S^k$. ▲

Бу теоремадан муҳим натижаларни чиқариш мумкин.

1-натижа. Коэффициенти нолдан фарқли гомотетия билан ҳаракат композицияси ўхшашлик алмаштиришдир.

2-натижа. Ўхшаш икки фигура учун шундай учинчи фигура мавжудки, у биринчи фигурага гомотетик бўлиб, иккинчисига конгруэнтдир.

3-натижа. Ўхшаш алмаштиришда уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади, демак, ўхшаш алмаштириш аффин алмаштиришнинг хусусий ҳолидир.

4-натижа. Ўхшашлик алмаштиришда бурчак катталиги сақланади (чунки гомотетия билан ҳаракатда бурчак катталиги сақланади).

5-натижа. Ўхшашлик алмаштиришда текисликнинг ўлчови сақланади.

Энди ўхшашлик алмаштиришнинг координаталардаги ифодасини кўрайлик. E_n даги декарт реперида f ўхшашлик алмаштиришни текширайлик, у ҳолда юқоридаги мулоҳазаларга асосан $f = d \cdot H^k_S$. Бу реперга нисбатан $A(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f(A) = A'(x_1', x_2', \ldots, x_n')$ бўлсин. Гомотетия маркази координаталар боши деб қабул қилинса,

$$H^k_O(A) = A''(x_1'', x_2'', \ldots, x_n''),$$

бундан $x_1'' = kx_1$, $x_2'' = kx_2$, $\ldots$, $x_n'' = kx_n$.

d ҳаракат A'' ни A' га ўтказгани учун бу нуқталар координаталарини боғловчи муносабатлар:

$$\begin{aligned} x_1' &= c_{11}x_1'' + c_{12}x_2'' + \ldots + c_{1n}x_n'' + c_{10}, \\ x_2' &= c_{21}x_1'' + c_{22}x_2'' + \ldots + c_{2n}x_n'' + c_{20}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= c_{n1}x_1'' + c_{n2}x_2'' + \ldots + c_{nn}x_n'' + c_{n0} \end{aligned} \tag{60}$$

бўлиб, c_{ij} лар (47) ва (48) шартларни қаноатлантириши керак. Натижада:

$$\begin{aligned} x_1' &= k(c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n) + c_{10}, \\ x_2' &= k(c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n) + c_{20}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= k(c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + c_{nn}x_n) + c_{n0}. \end{aligned} \tag{61}$$

Булар изланган формулалардир.

3-теорема. *E_n нинг барча ўхшаш алмаштиришларининг Ф тўплами группани ҳосил қилади.*

Исбот. $\forall f_1, f_2 \in Ф$ деб олсак, улар мос равишда k_1, k_2 коэффициентли ўхшашлик алмаштиришлар бўлсин, $\forall A, B \in E_n$ учун f_1 да $\rho(A', B') = k_1\rho(A, B)$; f_2 да $\rho(A'', B'') = k_2\rho(A', B')$, f_1f_2 да эса $\rho(A'', B'') = k_2\rho(A', B') = k_2[k_1\rho(A, B)] = k_2k_1\rho(A, B)$, бундан f_1f_2 алмаштириш k_1k_2 коэффициентли ўхшашлик алмаштиришдир; f_1 ўхшашлик алмаштириш k_1 коэффициентли бўлса, $\frac{1}{k_1}$ коэффициентли ўхшашлик алмаштириш f_1^{-1} бўлади, чунки f_1 да $\rho(A', B') = k_1\rho(A, B)$ бўлиб, $f_1 \cdot f_1^{-1}$ да $\rho(A, B) = k_1 \cdot \frac{1}{k_1}\rho(A, B) = \rho(A, B)$, бу эса $f_1 \cdot f_1^{-1}$ алмаштиришнинг айнан алмаштириш эканлигини билдиради. Ф тўплам E_n нинг *ўхшашлик группаси* деб аталади.

Ҳар бир ўхшашлик алмаштириш бирор аффин алмаштиришнинг хусусий ҳоли бўлгани учун қуйидаги натижага келамиз.

Ўхшашлик группаси аффин группанинг қисм группасидир. Демак, аффин группанинг барча инвариантлари Ф учун ҳам инвариант ролини бажаради, лекин бунга қўшимча равишда Ф нинг ўзига хос инвариантлари ҳам мавжуддир, масалан, Ф даги ҳар бир алмаштиришда бурчак ўзига конгруэнт бурчакка ўтади.

V БОБ. КВАДРАТИК ФОРМАЛАР ВА КВАДРИКАЛАР

41-§. Чизиқли формалар

V вектор фазо, R ҳақиқий сонлар тўплами берилган бўлиб, $\varphi : V \rightarrow R$ акслантириш аниқланган, яъни V нинг ҳар бир $\vec{x}$ вектори учун R дан тайин битта сон мос келтирилган бўлсин. У ҳолда V да *вектор аргументли скаляр функция берилган* дейилади. Уни $\varphi = \varphi(\vec{x})$ деб белгилаймиз. Масалан, $\varphi(x) = |\vec{x}|$, бу ерда V нинг ҳар бир векторига унинг модулини мос келтирилиб, вектор аргументли скаляр функция ҳосил қилинган, бу функциянинг аниқланиш соҳаси векторли евклид фазоси бўлиб, қийматлар соҳаси номанфий ҳақиқий сонлар тўпламидан иборат.

Таъриф. Агар вектор аргументли $\varphi(x)$ скаляр функция қуйидаги икки шартни қаноатлантирса, у *чизиқли функция* дейилади.

1. $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V$ учун $\varphi(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x}) + \varphi(\vec{y})$.

2. $\forall \vec{x} \in V$ ва $\forall \lambda \in R$ учун $\varphi(\lambda \vec{x}) = \lambda \varphi(\vec{x})$.

1-мисол. Векторнинг ўқдаги проекциясини олсак,

$$\text{пр}_l(\vec{x} + \vec{y}) = \text{пр}_l \vec{x} + \text{пр}_l \vec{y},$$

$$\text{пр}_l(\lambda \vec{x}) = \lambda\, \text{пр}_l \vec{x}.$$

Векторнинг ўқдаги проекцияси чизиқли функциядир.

2-мисол. V да $\vec{a}$ эркин вектор, $\vec{x}$, $\vec{y}$ эса ўзгарувчи векторлар бўлса, $\vec{a}\vec{x}$, $\vec{a}\vec{y}$ скаляр кўпайтмалар чизиқли функция бўлади, чунки скаляр кўпайтманинг хоссасига асосан:

$$\vec{a} \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \vec{a}\vec{x} + \vec{a}\vec{y},$$

$$\vec{a}(\lambda \vec{x}) = \lambda(\vec{a}\vec{x}).$$

V_n да $\varphi(\vec{x})$ чизиқли функция берилган деб фараз қилайлик. Шу фазодаги тайин $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ базисда ҳар бир вектор аниқ координаталарга эга, яъни

$$\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n.$$

У ҳолда $\varphi(x)$ чизиқли бўлгани учун

$$\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \ldots + x_n\vec{e}_n) = \varphi(x_1\vec{e}_1) + \varphi(x_2\vec{e}_2) + $$
$$+ \ldots + \varphi(x_n\vec{e}_n) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + x_2\varphi(\vec{e}_2) + \ldots + x_n\varphi(\vec{e}_n). \qquad (1)$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лар V_n нинг векторлари булгани учун $\varphi(\vec{e}_1)$, $\varphi(e_2)$, $\ldots$, $\varphi(\vec{e}_n)$ ҳақиқий сонлардан иборат, уларни мос равишда a_1,

$a_2, \ldots, a_n$ деб белгилайлик. У ҳолда (1) тенглик қуйидаги кўринишда ёзилади:

$$\varphi(x) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_n x_n, \qquad (2)$$

демак, $\varphi(\vec{x})$ функция $\vec{x}$ нинг бирор базисга нисбатан координаталари орқали (2) кўринишда биринчи даражали бир жинсли кўпҳад шаклида ифодаланади.

Таъриф. Биринчи даражали бир жинсли кўпҳад *чизиқли форма* деб аталади (баъзан *биринчи даражали форма* деб ҳам юритилади).

(2) ифода чизиқли формадир.

Чизиқли форманинг муҳим геометрик хоссалари бор.

1°. $\varphi(x) = \text{const} \Rightarrow a_1x_1 + a_2x_2 + \ \ldots \ + a_n x_n = c \qquad (3)$

бўлсин. n номаълумли чизиқли тенглама n ўлчовли Евклид фазосида гипертекисликни ифодалайди.

2°. $\varphi(\vec{x}) = c$ даги c га турли қийматлар бера бориб, параллел гипертекисликлар ҳосил қиламиз.

Бичизиқли форма. φ: $V\times V \to R$ акслантириш берилган бўлсин (бунда $V\times V$ ифода V фазонинг ўз-ўзига декарт кўпайтмаси), яъни V нинг ихтиёрий икки $\vec{x}, \vec{y}$ векторига табиий битта ҳақиқий сон мос келтирилган бўлсин, бу вақтда V да икки вектор аргументли скаляр функция аниқланади. Уни $\varphi = \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ деб белгилаймиз.

1-мисол. $\varphi(\vec{x}, \cdot\vec{y}) = \vec{x}\cdot\vec{y}$; V_n даги ихтиёрий икки векторга уларнинг скаляр кўпайтмасидан ҳосил қилинган сонни мос келтирсак, икки вектор аргументли скаляр функция ҳосил қилинади.

2-мисол. V_3 да $\vec{a}$ эркин вектор берилган бўлсин, V_3 нинг ихтиёрий $\vec{x}, \vec{y}$ векторлари орқали аниқланадиган $[\vec{x}, \vec{y}]$ вектор билан $\vec{a}$ нинг скаляр кўпайтмаси (аралаш кўпайтма) икки вектор аргументли скаляр функция $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = (\vec{a}, \vec{x}\,\vec{y})$ бўлади.

Таъриф. Икки вектор аргументли $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ скаляр функция ҳар бир аргументига нисбатан чизиқли бўлса, у *бичизиқли функция* деб аталади, яъни $\forall\, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V_n$ ва $\forall\, \lambda \in R$ учун қуйидаги шартлар бажарилади:

1. $\varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{z}) = \varphi(\vec{x}, \vec{z}) + \varphi(\vec{y}, \vec{z})$,
2. $\varphi(\lambda\vec{x}, \vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{y})$,
3. $\varphi(\vec{x}, \vec{y} + \vec{z}) = \varphi(\vec{x}, \vec{y}) + \varphi(\vec{x}, \vec{z})$, (4)
4. $\varphi(\vec{x}, \lambda\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x}, \vec{y})$.

1-мисол. V_n даги икки векторнинг скаляр кўпайтмаси бичизиқли функцияга мисол бўла олади, чунки икки векторнинг скаляр кўпайтмаси юқоридаги шартларга бўйсунади.

2- мисол. $\varphi(\vec{x})$, $\psi(\vec{y})$ чизиқли формалар бўлса, $\varphi(\vec{x})\psi(\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y})$ ифода бичизиқли функция бўлади, ҳақиқатан ҳам,

1. $f(\vec{x}+\vec{z},\vec{y}) = \varphi(\vec{x}+\vec{z})\cdot\psi(\vec{y}) = \varphi(\vec{x})\psi(\vec{y})+\varphi(\vec{z})\psi(\vec{y}) = f(\vec{x},\vec{y})+f(\vec{z},\vec{y})$.

2. $f(\lambda\vec{x},\vec{y}) = \varphi(\lambda\vec{x})\psi(\vec{y}) = \lambda\varphi(\vec{x})\cdot\psi(\vec{y}) = \lambda f(\vec{x},\vec{y})$,

бу ерда (4) даги 3- ва 4- шартларнинг бажарилишини ҳам кўрсатиш мумкин.

Энди икки вектор аргументли скаляр функциянинг координаталардаги ифодасини топайлик. V_n даги $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ базисда $\vec{x}\in V_n$, $\vec{y}\in V_n$ векторлар мос равишда $x_1, x_2, \dots, x_n$, $y_1, y_2, \dots, y_n$ координаталарга эга дейлик ҳамда (4) шартларни эътиборга олсак:

$$\Phi(\vec{x},\vec{y}) = \varphi(x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + \dots + x_n\vec{e}_n,\ y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \dots + y_n\vec{e}_n) =$$
$$= x_1y_1\varphi(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + x_1y_2\varphi(\vec{e}_1,\vec{e}_2) + \dots + x_1y_n\varphi(\vec{e}_1,\vec{e}_n) +$$
$$+ x_2y_1\varphi(\vec{e}_2,\vec{e}_1) + x_2y_2\varphi(\vec{e}_2,\vec{e}_2) + \dots + x_ny_n\varphi(\vec{e}_n,\vec{e}_n);$$

$\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ лар V_n нинг векторлари бўлгани учун $\varphi(\vec{e}_1,\vec{e}_2)$, $\varphi(\vec{e}_1,\vec{e}_3), \dots, \varphi(\vec{e}_n,\vec{e}_n)$ — тайин сонлардан иборат, уларни $a_{ij} = \varphi(\vec{e}_i,\vec{e}_j)$, $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ деб белгилайлик, натижада $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = a_{11}x_1y_1 + a_{12}x_1y_2 + \dots + a_{nn}x_ny_n$; ёки қисқачароқ

$$\varphi(\vec{x},\vec{y}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_iy_j. \tag{5}$$

(5) нинг ўнг томонидаги иккинчи даражали (x_i, y_j — ўзгарувчилар) кўпҳад бичизиқли формадир, a_{ij} эса шу форманинг берилган базисдаги коэффициентларидир; шу коэффициентлардан қуйидаги квадрат матрицани тузамиз:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21}a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot \\ a_{n1}\,a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Бу матрица бичизиқли форманинг *матрицаси* деб аталади. Демак, V_n да ҳар бир бичизиқли формага тайин базисда n- тартибли аниқ квадрат матрица тўғри келади. Хусусий ҳолда V_n даги ортонормаланган базисда $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \dots + x_ny_n$ бўлиб, унинг матрицаси:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Таъриф. Агар $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V_n$ векторлар учун $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ шарт ўринли бўлса, φ ни *симметрик бичизиқли форма* деб аталади, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = -\varphi(\vec{y}, \vec{x})$ ҳолда эса *антисимметрик бичизиқли форма* дейилади. Симметрик бичизиқли форма учун $a_{ij} = a_{ji}$ (чунки $\varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = \varphi(\vec{e}_j, \vec{e}_i)$), антисимметрик бичизиқли форма учун $a_{ij} = -a_{ji}$; $i = j$ ҳолда $a_{ii} = -a_{ii}$ ёки $a_{ii} = 0$). Демак, симметрик бичизиқли форманинг матрицаси ҳам симметрикдир, антисимметрик бичизиқли форма матрицасининг бош диагоналидаги элементлари нолга тенг; (6) матрицанинг ранги (5) бичизиқли форманинг *ранги* деб юритилади.

42- §. Квадратик формалар

Симметрик бичизиқли $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ форма берилган бўлсин.

Таъриф. Симметрик бичизиқли $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ формадан $\vec{x} = \vec{y}$ ҳолда ҳосил қилинган $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ форма *квадратик форма* деб аталади. $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ ни бичизиқли форманинг *квадратик формаси* деб юритилади; $\varphi(\vec{x}, \vec{y})$ бу ҳолда $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ учун *қутбий форма* дейилади.

Мисол. Иккита x_1, x_2 ўзгарувчили квадратик форманинг умумий кўриниши

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2x_2,$$

учта x_1, x_2, x_3 ўзгарувчили квадратик форманинг умумий кўриниши эса $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_2x_2 + a_{33} + x_3x_3$.

Теорема. *Бичизиқли қутбий форма ўзининг квадратик формаси билан тўлиқ аниқланади.*

Исбот. $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = F(\vec{x})$ деб белгилаб, $F(\vec{x} + \vec{y})$ ифодани текширайлик, бунда ҳам $\vec{y} \in V$, белгилашимизга асосан, $F(\vec{x} + \vec{y}) = \varphi(\vec{x} + \vec{y}, \vec{x} + \vec{y})$; бичизиқли форманинг хоссалари ва симметриклигини ҳисобга олсак,

$$\varphi(\vec{x}+\vec{y}, \vec{x}+\vec{y}) = \varphi(\vec{x},\vec{x}) + \varphi(\vec{x},\vec{y}) + \varphi(\vec{y},\vec{x}) + \varphi(\vec{y},\vec{y}) = F(\vec{x}) + 2\varphi(\vec{x},\vec{y}) + F(\vec{y}),$$

бундан $\varphi(\vec{x},\vec{y}) = \frac{1}{2}[F(\vec{x}+\vec{y}) - F(\vec{x}) - F(\vec{y})]$; бу изланган ифодадир. ▲

Энди квадратик форманинг координаталардаги ифодасини кўрайлик.

(5) ни симметрик бичизиқли форма деб олсак ҳамда $\vec{x} = \vec{y}$ шартни эътиборга олсак,

$$\varphi(\vec{x},\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2^2 + 2a_{23}x_2x_3 + \dots + 2a_{2n}x_2x_n + \dots + a_{nn}x_n^2. \qquad (7)$$

(7) квадратик форманинг *матрицаси* деб, унинг қутбий формасининг (6) матрицасига айтилади, (6) матрицанинг ранги (7) квадратик форманинг *ранги* деб аталади. Агар бирор базисда (бундай базиснинг мавжудлигини кейинроқ кўрсатамиз) барча $a_{ij} = 0$ $(i \neq j)$ бўлса, (7) квадратик форма қуйидаги кўринишни олади:

$$\varphi(\vec{x},\vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2. \qquad (8)$$

(8) *каноник кўринишдаги квадратик форма* деб аталади. У ҳолда каноник кўринишдаги квадратик форманинг матрицаси ушбу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots 0 \\ 0 & a_{22} & \dots 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots a_{nn} \end{pmatrix}$$

кўринишни олади.

Биз биринчи бўлимда иккинчи тартибли чизиқнинг умумий тенгламасини соддалаштиришда

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 \qquad (*)$$

учҳадни координаталар системасини буриш билан $A'x'^2 + B'y'^2$ кўринишга келтирган эдик, шунинг билан (*) кўринишдаги квадратик формани каноник кўринишга келтирган эканмиз. Квадратик формани каноник кўринишга келтириш муҳим назарий ва амалий аҳамиятга молик масалалардан биридир.

Бу масалани ҳал қилишда бир неча усуллар мавжуд бўлиб, биз улардан бирини қуйида кўриб ўтамиз.

1-теорема. *Агар (7) квадратик формада бирорта ҳам ўзгарувчининг квадрати қатнашмаса, уни чизиқли алмаштиришлар ёрдамида камида битта ўзгарувчининг квадрати қатнашган квадратик формага келтириш мумкин.*

Исбот. Теорема шартига асосан (7) да $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 0$, у ҳолда (7) квадратик форма қуйидаги кўринишни олади:

$$\varphi(\vec{x},\vec{x}) = 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \dots + 2a_{n-1,\,n}\, x_{n-1}\, x_n, \qquad (9)$$

бу ерда a_{ij} $(i \neq j)$ лардан камида биттаси нолдан фарқли, умумиятликни бузмаслик учун $a_{12} \neq 0$ бўлсин дейлик. У ҳолда қуйидаги чизиқли алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_2, \\ x_2 &= y_1 - y_2, \\ x_3 &= y_3, \\ &\dots\dots \\ x_n &= y_n. \end{aligned} \qquad (10)$$

Бу чизиқли алмаштириш айнимагандир, чунки унинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

(10), (9) дан

$$\varphi(\vec{x},\vec{x}) = 2a_{12}\, y_1^2 - 2a_{12}y_2^2 + 2a_{13}y_1y_3 + 2a_{23}y_2y_3 + \dots + $$
$$+ 2a_{n-1\, n},\, y_{n-1}\, y_n.$$

Бу квадратик форманинг биринчи икки ҳади изланган кўринишдадир. Бу ҳадлар йўқолиб кетмайди, чунки қолган ҳадларда бунга ўхшаш ҳадлар йўқ (қолган ҳадлар бир- биридан камида битта y_i билан фарқ қилади). ▲

Мисол. $\varphi = 2x_1x_3 - x_2x_3$ ни ўзгарувчиларнинг квадратлари қатнашган ҳолга келтиринг.

Ечиш. Қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_3; \\ x_2 &= y_2, \\ x_3 &= y_1 - y_3, \end{aligned}$$

бу чизиқли алмаштиришнинг детерминанти айнимаган, чунки

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 1 = -2 \neq 0.$$

у ҳолда

$$\varphi = 2(y_1 + y_3)(y_1 - y_3) - y_2(y_1 - y_3) = 2y_1^2 - 2y_3^2 - y_2y_1 + y_2y_3.$$

2-теорема. *Агар (7) квадратик формада бирор ўзгарувчининг квадрати ва ундан бошқа шу ўзгарувчи иштирок этган ҳадлар мавжуд бўлса, чизиқли алмаштириш ёрдамида улар-*

нинг барчасини битта ўзгарувчининг квадрати қатнашган квадратик формага келтириш мумкин.

Исбот. (7) да $a_{11}\neq 0$ бўлсин ҳамда қолган ҳадларда x_1 иштирок этсин (агар бошқа ҳадларда x_1 иштирок этмаса, у ҳолда (7) шу ўзгарувчига нисбатан каноник кўринишига келтирилган бўлади, бу ҳолда теореманинг исботи равшан бўлиб, бошқа ўзгарувчилар учун исботлаш керак). Энди (7)ни қуйидаги кўринишда ёзиб оламиз:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + \psi(x_2, x_3, \ldots, x_n), \quad (11)$$

бунда $\psi(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ифода x_1 қатнашмаган квадратик формадир. Қуйидаги чизиқли алмаштиришни бажарамиз:

$$\left| \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 = x_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n = x_n, \end{array} \right. \quad (12)$$

бу чизиқли алмаштиришнинг детерминанти a_{11} га тенг бўлиб, шартга асосан у нолдан фарқлидир.

$$\text{У ҳолда } (12) \Rightarrow \frac{1}{a_{11}} y_1^2 = \frac{1}{a_{11}}(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n)^2 =$$
$$= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1n}x_1x_n + f(x_2, x_3, \ldots, x_n). \quad (13)$$

Бунда $f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$ ифода x_1 ни ўз ичига олмаган квадратик формадир. (11) дан (13) ни ҳадлаб айирсак, $\varphi(\vec{x},\vec{x}) - \frac{1}{a_{11}} y_1^2 = \psi(x_2, x_3, \ldots, x_n) - f(x_2, x_3, \ldots, x_n)$; бу тенгликнинг ўнг томонидаги ифода ҳам квадратик формадир, уни $\alpha(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ деб белгилаймиз:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2 + \alpha(y_2, y_3, \ldots, y_n). \ \blacktriangle \quad (14)$$

Мисол. $\varphi = x_1^2 + 3x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$ квадратик формага иккинчи теоремани татбиқ қилайлик ($a_{11} = 1\neq 0$, бу ерда x_1 ўзгарувчи учинчи ва тўртинчи ҳадда иштирок этмоқда).

x_1 қатнашган ҳадларни гуруҳлаймиз:

$$\varphi = x_1^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 3x_2^2.$$

Қуйидаги алмаштиришни бажарамиз:

$$y_3 = x_3;$$
$$y_2 = x_2,$$
$$y_1 = x_1 - 2x_2 - 2x_3,$$

тегишли детерминант:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

$$y_1^2 = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3,$$

$$\varphi - y_1^2 = -x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_2x_3 = -y_2^2 - 4y_3^2 - 8y_2y_3$$

ёки

$$\varphi = y_1^2 - y_2^2 - 4y_3^2 - 8y_2y_3.$$

3-теорема. *Чизиқли алмаштириш ёрдамида ҳар қандай квадратик формани каноник кўринишга келтириш мумкин.*

Исбот. Бу теоремани исботлаш учун математик индукция методидан фойдаланамиз. $n = 1$ да (14) ифода $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{a_{11}} y_1^2$ кўринишда бўлиб, бу бир ўзгарувчили квадратик форманинг каноник кўринишидир. Энди $(n - 1)$ та ўзгарувчи учун квадратик форма каноник кўринишга келтирилган деб, уни n та ўзгарувчи учун каноник кўринишга келтириш мумкинлигини исботлаймиз. (14) даги $\alpha(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ да $(n - 1)$ та ўзгарувчи бўлгани учун шундай

$$\begin{aligned} z_2 &= b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}\, y_n, \\ z_3 &= b_{32}y_2 + b_{33}y_3 + \ldots + b_{3n}\, y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= b_{n2}\, y_n + b_{n3}\, y_3 + \ldots + b_{nn}\, y_n \end{aligned} \tag{15}$$

айнимаган чизиқли алмаштириш мавжудки, у $\alpha(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ ни қуйидагича ёзиш имконини беради:

$$\alpha(y_2, y_3, \ldots, y_n) = c_{22}z_2^2 + c_{33}z_3^2 + \ldots + c_{nn}\, z_n^2. \tag{16}$$

(15) ни қуйидагича тўлдирамиз:

$$\begin{aligned} z_1 &= y_1, \\ z_2 &= b_{22}y_2 + b_{23}y_3 + \ldots + b_{2n}\, y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= b_{n2}\, y_2 + b_{n3}\, y_3 + \ldots + b_{nn}\, y_n. \end{aligned} \tag{17}$$

$x_1, x_2, \ldots, x_n$ ўзгарувчиларни аввал (12) бўйича $y_1, y_2, \ldots,$

y_n га, буларни эса ўз йўлида (17) бўйича $z_1, z_2, \ldots, z_n$ га алмаштирсак, (7) қуйидаги кўринишни олади:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \frac{1}{a_{11}} z_1^2 + c_{22} z_2^2 + c_{33} z_3^2 + \ldots + c_{nn} z_n^2.$$

бу изланган формадир. ▲

Квадратик формани каноник кўринишга келтириш мумкинлигини юқорида келтирилган 3 та теорема тасдиқлайди. Бу теоремани исботлаш усули француз математиги Лагранж томонидан таклиф қилингани учун уни квадратик формани Лагранж усули билан каноник кўринишга келтириш дейилади. Демак, Лагранж усулининг моҳияти қуйидагича: агар n та ўзгарувчили квадратик формада бирорта ҳам ўзгарувчининг квадрати қатнашмаса, биринчи теоремага асосан тайин чизиқли алмаштиришни танлаб олиб, камида битта ўзгарувчининг квадрати қатнашган форматга келтирилади, сўнгра иккинчи теоремани татбиқ қилиб, (14) кўринишга келтирилади, бунда ҳосил қилинган $(n-1)$ та ўзгарувчили $\alpha(y_2, y_3, \ldots, y_n)$ квадратик форма учун шу иш яна такрорланади ва ҳ. к.

Баъзи ҳолларда квадратик формани каноник кўринишга келтиришда «тўлиқ квадратларга келтириш усули» деган усулдан ҳам фойдаланилади.

Масалан, $\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 4x_2x_3 + 8x_3^2$ ни каноник кўринишга келтириш талаб қилинган бўлсин. Берилган квадратик формани қуйидагича ёзиб олайлик:

$$\varphi = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_2^2 + 2\cdot 2\, x_3x_2 + (2x_3)^2 + 4x_3^2 =$$
$$= (x_1 + x_2)^2 + (x_2 + 2x_3)^2 + 4x_3^2.$$

Қуйидагича чизиқли алмаштиришни оламиз:

$$y_3 = x_3,$$
$$y_2 = x_2 + 2x_3,$$
$$y_1 = x_1 + x_2,$$

бунинг детерминанти

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

у ҳолда $\varphi = y_1^2 + y_2^2 + 4y_3^2$.

Эслатма. Битта квадратик формани Лагранж усули ва тўлиқ квадратлар усули билан каноник кўринишга келтирганимизда жавоблар ҳар хил бўлиши мумкин, бунга тааждубланиш керак эмас, чунки улар турли базисларда ифодаланиши мумкин.

43- §. Нормал кўринишдаги квадратик форма. Инерция қонуни. Мусбат аниқланган квадратик форма

Фараз қилайлик, $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик форма каноник кўринишга келтирилган бўлсин, яъни

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2. \tag{18}$$

Квадратик формани каноник кўринишга келтирганимизда унинг матрицаси ҳам ўзгаради, лекин бундай ўзгаришда «Алгебра ва сонлар назарияси» курсидан маълумки, матрицанинг ранги ўзгармайди, яъни

$$\operatorname{rang} M = \operatorname{rang} M_1,$$

бунда M берилган квадратик форма матрицаси, M_1 эса шу квадратик форманинг каноник ҳолга келтирилгандаги матрицаси (бу, албатта диагонал кўринишдаги матрица).

Агар M нинг ранги r бўлса $(r \leqslant n)$, M_1 нинг ҳам ранги r бўлиб, M_1 нинг диагоналида нолдан фарқли r та элемент бўлади. Ўзгарувчилар ўринларини (агар шу талаб қилинса) алмаштириш билан M_1 ни қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_{rr} & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \ldots & & \ldots & \\ 0 & 0 & \ldots & & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Энди $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ қуйидаги каноник кўринишни олади:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{rr}x_r^2. \tag{19}$$

Бу квадратик формадаги a_{ii} коэффициентлар мусбат ва манфий ҳақиқий сонлардан иборат бўлиши мумкин. Фараз қилайлик, шу коэффициентлардан k таси мусбат, қолганлари манфий бўлсин, яъни

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = b_{11}x_1^2 + b_{22}x_2^2 + \ldots + b_{kk}x_k^2 - b_{k+1,k+1}x_{k+1}^2 - \\ - \ldots - b_{rr}x_r^2,$$

бунда $b_{ii} > 0$, $i = 1, 2, \ldots, r$.

Қуйидаги чизиқли алмаштиришни бажарамиз:

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{b_{11}}}y_1, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{b_{22}}}y_2, \ \ldots, \ x_r = \frac{1}{\sqrt{b_{rr}}}y_r.$$

Натижада

$$\varphi = y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2. \tag{20}$$

Квадратик форманинг бундай кўриниши унинг *нормал кўриниши* дейилади. (20) даги мусбат ҳадлар ва манфий ҳадлар сони мос равишда шу форманинг *мусбат* ва *манфий индекслари* деб аталади:

Қуйидаги теорема ўринлидир (бу теорема ҳақиқий квадратик формалар учун *инерция қонуни* деб ҳам юритилади).

Теорема. *Квадратик формани қайси усул билан каноник кўринишга келтиришдан қатъи назар, унинг мусбат ва манфий индекслари ўзгармасдир, яъни бу индекслар квадратик форманинг қайси базисда олинишига боғлиқ эмас.*

Исбот. Фараз қилайлик, φ бирор базисда (20) кўринишда, бошқа базисда эса

$$\varphi = z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \ldots - z_r^2 \qquad (21)$$

бўлсин. $k = m$ эканини исботласак, мақсадга эришамиз. Фараз қилайлик, $k \neq m$ аниқроғи $k > m$ бўлсин. Ўзгарувчиларни алмаштириш формулалари қуйидагича]

$$\begin{aligned} z_1 &= p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1n}y_n, \\ z_2 &= p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \ldots + p_{2n}y_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ z_n &= p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \ldots + p_{nn}y_n \end{aligned} \qquad (22)$$

бўлиб, бу айнимаган алмаштиришдан иборат дейлик, (22) нинг қийматларини (21) га қўйсак, табиийки, (20) ни ҳосил қиламиз, яъни $z_1, z_2, \ldots, z_n$ лар (22) бўйича ифодаланганда қуйидаги айният ҳосил бўлади:

$$\begin{aligned} &z_1^2 + z_2^2 + \ldots + z_m^2 - z_{m+1}^2 - \ldots - z_r^2 = \\ &= y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 - y_{k+1}^2 - \ldots - y_r^2. \end{aligned} \qquad (23)$$

Қуйидаги ёрдамчи бир жинсли тенгламалар системасини тузамиз:

$$\begin{aligned} p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1k}y_k &= 0, \\ p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \ldots + p_{2k}y_k &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_{m1}y_1 + p_{m2}y_2 + \ldots + p_{mk}y_k &= 0. \end{aligned} \qquad (24)$$

$k > m$ бўлгани учун бу системада тенгламалар сони номаълумлар сонидан камдир, демак, бу система ноль бўлмаган ечимга эга. Улардан бири $y_1, y_2, \ldots, y_k$ бўлсин. Бу ечимларни (23) айниятга қўйсак ҳамда улар ёнига

$$\begin{aligned} y_{k+1} = 0,\ y_{k+2} = 0,\ \ldots,\ y_n = 0, \\ z_1 = 0,\ z_2 = 0,\ \ldots,\ z_m = 0 \end{aligned} \qquad (25)$$

системани қўшсак, у ҳолда (23) — (25) дан қуйидагиларни ҳосил қиламиз:

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_k^2 = -z_{m+1}^2 - z_{m+2}^2 - \ldots - z_r^2. \qquad (26)$$

Лекин (26) тенглик ўринли эмас, чунки унинг чап қисми қатъий мусбат, ўнг томони эса манфий ёки нолдир. Шунга ўхшаш, $k<m$ нинг ҳам юз бермаслигини исботлаш мумкин (исботланг).

Демак, $m=k$. ▲

Шуни таъкидлаймизки, квадратик форманинг каноник кўриниши ҳар хил базисда умуман ҳар хил кўринишда бўлади, лекин шу квадратик форманинг нормал кўриниши барча базисларда бир хилдир.

Мисол. $\varphi = x_1^2 + 18x_2^2 + 9x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 30x_2x_3$ квадратик формани нормал ҳолга келтиринг.

Ечиш. Аввало φ ни каноник кўринишга келтирамиз Бунинг учун берилган формани диққат билан кўздан кечирсак, x_1 ўзгарувчининг квадрати ва ундан ташқари бошқа ҳадларда ҳам x_1 қатнашмоқда, у ҳолда 2- теоремага асосланиб иш кўрамиз: x_1 қатнашган ҳадларнинг барчасини тўплаб ёзамиз:

$$\varphi = (x_1^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3) + 18x_2^2 + 9x_3^2 - 30\,x_2x_3;$$

қуйидаги айнимаган чизиқли алмаштиришни оламиз:

$$y_1 = x_1 - 3x_2 + 2x_3;\ y_2 = x_2;\ y_3 = x_3.$$

Бундан

$$y_1^2 = x_1^2 + 9x_2^2 + 4x_3^2 - 6x_1x_2 + 4x_1x_3 - 12x_2\,x_3;$$

бу ерда $a_{11} = 1$ бўлгани учун

$$\varphi - y_1^2 = 9\,x_2^2 + 5x_3^2 - 18x_2x_3.$$

Демак,

$$\varphi = y_1^2 + 9\,y_2^2 + 5y_3^2 - 18\,y_2y_3.$$

Энди $\alpha = 9y_2^2 + 5y_3^2 - 18y_2y_3$ формани каноник кўринишга келтирамиз:

$$z_1 = y_1,\ z_2 = 9y_2 - 9y_3,\ z_3 = y_3$$

десак,

$$z_2^2 = 81\,(y_2^2 - 2y_2y_3 + y_3^2).$$

У ҳолда

$$\alpha - \frac{1}{9}\,z_2^2 = 9y_2^2 - 18y_2y_3 + 5y_3^2 - 9y_2^2 + 18y_2y_3 -$$

$$- 9y_3^2 = -4z_3^2,\ \ \alpha = \frac{1}{9}\,z_2^2 - 4z_3^2$$

ва $\varphi = z_1^2 + \frac{1}{9}\,z_2^2 - 4z_3^2$. Қуйидаги чизиқли алмаштиришни бажарайлик:

$$u_1 = z_1,\ u_2 = 3z_2,\ u_3 = \frac{1}{2}\,z_3;$$

берилган квадратик форма қуйидаги нормал кўринишни олади:

$$\varphi = u_1^2 + u_2^2 - u_3^2.$$

Равшанки, бу форманинг мусбат индекси 2 га, манфий индекси эса 1 га тенгдир.

Нормал кўринишга келтирилган квадратик форма барча ҳадларининг сони r шу форманинг *ранги* деб аталади.

Квадратик форма мусбат ҳадлари сонидан (уни k билан белгилайлик) манфий ҳадлари сонининг (уни l билан белгилайлик) айирмаси шу *квадратик форманинг сигнатураси* деб аталади. Бундан кўриниб турибдики, квадратик формани қайси усул билан каноник кўринишга келтирилганда ҳам сигнатура ўзгармас экан. φ нинг сигнатурасини s билан белгиласак, таърифга асосан $k - l = s$, лекин $k + l = r$ бўлгани учун

$$k = \frac{1}{2}(r + s), \quad l = \frac{1}{2}(r - s)$$

бўлади. Бу тенгламалардан кўринадики, k, l, s, r дан иккитаси берилса, қолган иккитасини топиш мумкин.

Мисол. $\varphi = x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$ да $k = 3$, $l = 1$, $r = 4$, $s = 2$ дир.

Таъриф. $\vec{x} \neq \vec{0}$ ҳолдаги барча $\vec{x}$ векторлар учун $\varphi(\vec{x}, \vec{x})$ квадратик форма доимо мусбат бўлса, бу квадратик форма *мусбат аниқланган* деб аталади.

Масалан, а) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 3x_1^2 + 4x_2^2$ квадратик форма мусбат аниқлангандир, чунки x_1 ва x_2 нинг бир вақтда ноль бўлмаган барча қийматларида (яъни $\vec{x} \neq \vec{0}$ да) $\varphi(\vec{x}\,\vec{x}) > 0$.

б) $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = x_1^2 + x_1 x_2 + \frac{1}{4} x_2^2$ квадратик формани олайлик. Уни $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \left(x_1 + \frac{1}{2} x_2\right)^2$ кўринишда ёзсак, $x_1 = -\frac{1}{2} x_2$ шартни қаноатлантирувчи барча x_1, x_2 учун $\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = 0$ бўлади, демак, бу форма мусбат аниқланган эмас.

Теорема. *n та ўзгарувчили квадратик форманинг мусбат аниқланган бўлиши учун бу форма мусбат ҳадларининг сони n га тенг бўлиши зарур ва етарлидир* (бунда $n = \dim V$).

Исбот. Фараз қилайлик, квадратик форма

$$\begin{aligned} y_1 &= c_{11} x_1 + c_{12} x_2 + \ldots + c_{1n} x_n, \\ y_2 &= c_{21} x_1 + c_{22} x_2 + \ldots + c_{2n} x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= c_{n1} x_1 + c_{n2} x_2 + \ldots + c_{nn} x_n \end{aligned} \quad \text{бунда} \quad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

чизиқли алмаштириш ёрдамида

$$\varphi = b_{11} y_1^2 + b_{22} y_2^2 + \ldots + b_{nn} y_n^2 \tag{27}$$

каноник кўринишга келтирилган бўлсин.

Зарурий шарт. φ мусбат аниқланган бўлсин, у ҳолда барча b_{ii} ларнинг мусбат эканлигини исботлаймиз. $y_1, y_2, \dots, y_n$ ўзгарувчиларнинг $y_1 = 1,\ y_2 = 0,\ \dots,\ y_n = 0\,(\vec{x} \neq \vec{0})$ қийматларида $\varphi = b_{11}$, бундан ташқари $\varphi > 0 \Rightarrow b_{11} > 0$; $y_1 = 0,\ y_2 = 1,\ y_3 = 0,\ \dots,\ y_n = 0$ қийматларида $\varphi = b_{22}$, $\varphi > 0 \Rightarrow b_{22} > 0$ ва ҳ. к. Худди шунга ўхшаш, $b_{33} > 0,\ b_{44} > 0,\ \dots,\ b_{nn} > 0$; бу эса (27) да мусбат ҳадлар сонининг n га тенглигини билдиради.

Етарли шарт. (27) да мусбат ҳадлар сони n та бўлсин, яъни $b_{11} > 0,\ b_{22} > 0,\ \dots,\ b_{nn} > 0$. У ҳолда $y_1, y_2, \dots, y_n$ нинг барчаси нолга тенг бўлмаган ҳамма қийматларида (яъни $\vec{x} \neq \vec{0}$ да) $\varphi > 0$. ▲

Мисол. $\varphi = x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$ квадратик форма мусбат аниқланганми?

Ечиш. φ ни қуйидагича ёзиб олиб, каноник кўринишга келтирамиз:

$$\varphi = x_1^2 - 2\cdot 2x_1x_2 + 4x_2^2 + x_2^2 = (x_1 - 2x_2)^2 + x_2^2.$$

$y_1 = x_1 - 2x_2,\ \ y_2 = x_2$ десак, $\varphi = y_1^2 + y_2^2$, бу эса φ нинг мусбат аниқланганлигини билдиради ($n = 2,\ k = 2$).

44- §. Аффин фазодаги квадрикалар. Квадрика тенгламасини каноник кўринишга келтириш

A_n бу n ўлчовли аффин фазо бўлсин.

Таъриф. A_n даги бирор $\mathscr{B} = (0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ реперда қуйидаги иккинчи тартибли алгебраик тенгламани қаноатлантирувчи A_n нинг барча нуқталари тўплами *квадрика* (ёки иккинчи тартибли сирт) деб аталади (уни Q билан белгилайлик):

$$Q: a_{11}x_1x_1 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{1n}x_1x_n + a_{22}x_2x_2 + 2a_{23}x_2x_3 + \\ + \dots + a_{nn}x_nx_n + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + \dots + 2a_nx_n + a_0 = 0, \quad (28)$$

бунда $a_{ij} = a_{ji}$ бўлиб, булардан камида биттаси нолдан фарқли. $n = 2$ бўлган ҳолда Q нинг тенгламаси:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0;$$

бу ерда $x_1 = x,\ x_2 = y$ десак, $a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_1x + 2a_2y + a_0 = 0$ тенглама ҳосил қилиниб, у аффин текисликда иккинчи тартибли чизиқнинг тенгламасидир. Демак, аффин текисликда квадрика иккинчи тартибли чизиқдир. $n = 3$ да (28) тенглама уч ўзгарувчили бўлиб, $x_1 = x,\ x_2 = y,\ x_3 = z$ десак,

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_1x + \\ + 2a_2y + 2a_3z + a_0 = 0$$

кўринишда бўлади. Бу эса уч ўлчовли аффин фазодаги иккинчи тартибли сиртнинг тенгламасидир.

(28) тенгламани қисқароқ қуйидагича ёзиб олайлик:

$$\varphi_2+2\varphi_1+a_0=0, \tag{29}$$

бунда $\varphi_2=\sum\limits_{i,\,j=1}^{n} a_{ij}\,x_i\,y_j$, $\varphi_1=\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\,x_i$. бўлиб, φ_2 квадратик форма, φ_1 эса чизиқли формадир.

Шуни ҳам таъкидлаймизки, *A* даги квадрика тушунчаси координаталар системасини алмаштиришга нисбатан инвариантдир, бир реперда берилган иккинчи даражали тенглама бошқа реперда ёзилганда хам иккинчи даражали тенгламадан иборат бўлади (чунки бир аффин репердан иккинчи аффин реперга ўтишда тенгламанинг даражаси ошмайди ва камайди).

Энди (29) тенгламани соддалаштириш билан шуғулланайлик. Бу тенгламанинг чап томонидаги ифода биринчи қўшилувчи φ_2 квадратик формадан иборатлиги сабабли, уни алоҳида ёзиб олиб, 43- § да кўрсатилган усул билан каноник кўринишга келтирамиз; фараз қилайлик, у қуйидаги кўринишга келсин:

$$\varphi_2=b_1y_1^2+b_2y_2^2+\ldots+b_ky_k^2,\quad k\leqslant n,\quad b_1\cdot b_2\cdot\ \ldots\ \cdot b_k\neq 0. \tag{30}$$

у ҳолда шу (30) квадратик форма ёзилган реперда (29) ни ёзайлик:

$$b_1y_1^2+b_2\,y_2^2+\ldots+b_k\,y_k^2+2\,c_1y_1+2c_2y_2+\ldots+$$
$$+2\,c_n\,y_n+a_0=0 \tag{31}$$

равшанки, янги реперга ўтилганда φ_1 чизиқли форманинг ҳам коэффициентлари ўзгаради, уларни биз $c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_n$ деб белгиладик. (31) даги ҳадларни гуруҳлаб, тўла квадратга келтирамиз:

$$b_1\left(y_1^2+2\frac{c_1}{b_1}\,y_1+\frac{c_1^2}{b_1^2}-\frac{c_1^2}{b_1^2}\right)+b_2\left(y_2^2+2\frac{c_2}{b_2}\,y_2+\frac{c_2^2}{b_2^2}-\frac{c_2^2}{b_2^2}\right)+$$
$$+\ldots+b_k\left(y_k^2+2\,\frac{c_k}{b_k}\,y_k+\frac{c_k^2}{b_k^2}-\frac{c_k^2}{b_k^2}\right)+2c_{k+1}\,y_{k+1}+\ldots+$$
$$+2\,c_n\,y_n+a_0=0$$

ёки

$$b_1\left(y_1+\frac{c_1}{b_1}\right)^2+b_2\left(y_2+\frac{c_2}{b_2}\right)^2+\ldots+b_k\left(y_k+\frac{c_k}{b_k}\right)^2+$$
$$+2c_{k+1}\,y_{k+1}+\ldots+2c_n\,y_n+a_0-\left(\frac{c_1^2}{b_1^2}+\frac{c_2^2}{b_2^2}+\ldots+\frac{c_k^2}{b_k^2}\right)=0.$$

Энди қуйидаги формулалар орқали янги реперга ўтамиз:

$$z_1 = y_1 + \frac{c_1}{b_1},\ z_2 = y_2 + \frac{c_2}{y_2},\ \dots,\ z_k = y_k + \frac{c_k}{b_k},\ z_{k+1} =$$

$$= y_{k+1},\ \dots,\ z_n = y_n$$

ҳамда $a = -a_0 + \left(\frac{c_1^2}{b_1^2} + \frac{c_2^2}{b_2^2} + \dots + \frac{c_k^2}{b_k^2}\right)$ белгилашни киритамиз; натижада:

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_k z_k^2 + 2c_{k+1} z_{k+1} + \dots + 2c_n z_n = a. \tag{32}$$

Агар $k = n$ бўлса, бу (32) тенглама

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_n z_n^2 = a \tag{33}$$

кўринишни олади. Қуйидаги ҳолларни кўриб чиқайлик.

1- ҳол. (32) да $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_n = 0$ ва $a \neq 0$ бўлса,

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_k z_k^2 = a. \tag{34}$$

Чап томондаги каноник кўринишдаги квадратик формани нормал кўринишга келтирамиз, бунинг учун ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$z_1 = \sqrt{\left|\frac{a}{b_1}\right|} u_1,\ z_2 = \sqrt{\left|\frac{a}{b_2}\right|} u_2,\ \dots,\ z_k =$$

$$= \sqrt{\left|\frac{a}{b_k}\right|} u_k,\ z_{k+1} = u_k,\ \dots,\ z_n = u_n;$$

буларни (34) га қўйсак,

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \dots + \varepsilon_k u_k^2 = 1, \tag{35}$$

бунда $\varepsilon_1\ \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ лар ёки $+1$ ёки -1 дир, аниқроғи $\frac{a}{b_i} > 0$ бўлса, $\varepsilon_i = = 1$, $\frac{a}{b_i} < 0$ бўлса, $\varepsilon_i = -1$.

2- ҳол. $c_{k+1} = c_{k+2} = \dots = c_n = 0$ ва $a = 0$ бўлса, (32) қуйидаги кўринишни олади:

$$b_1 z_1^2 + b_2 z_2^2 + \dots + b_k z_k^2 = 0.$$

Ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$z_1 = \frac{1}{\sqrt{|b_1|}} u_1,\ z_2 = \frac{1}{\sqrt{|b_2|}} u_2,\ \dots,\ z_k = \frac{1}{\sqrt{|b_k|}} u_k.$$

У ҳолда

$$\varepsilon_1 u_1 + \varepsilon_2 u_2 + \dots + \varepsilon_k u_k^2 = 0, \tag{36}$$

бунда $b_i > 0$ бўлса, $\varepsilon_i = 1$ ва $b_i < 0$ бўлса, $\varepsilon_i = -1$.

3- ҳол. $k < n$ бўлиб, $c_{k+1}, c_{k+2}, \dots, c_n$ лардан камида биттаси нолдан фарқли, аниқроғи $c_{k+1} \neq 0$ бўлсин. Ўзгарувчиларни қуйидагича алмаштирамиз:

$$z_1 = v_1,\ z_2 = v_2,\ \ldots,\ z_k = v_k,\ \frac{a}{2} - c_{k+1} z_{k+1} - \ldots - c_n z_n =$$
$$= v_{k+1},\ z_{k+2} = v_{k+2},\ \ldots,\ z_n = v_n.$$

У ҳолда (32) қуйидаги кўринишни олади:

$$b_1 v_1^2 + b_2 v_2^2 + \ldots + b_k v_k^2 = 2v_{k+1} \tag{37}$$

ёки

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{|b_1|}} u_1,\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{|b_2|}} u_2,\ \ldots,\ v_k = \frac{1}{\sqrt{|b_k|}} u_k,$$
$$v_{k+1} = u_{k+1},\ \ldots,\ v_n = u_n$$

десак,

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 2u_{k+1} \tag{38}$$

бўлади, бунда ҳам ε_i лар $+1$ ёки -1. (35), (36) ва (38) кўринишдаги тенгламалар квадриканинг *нормал кўринишдаги тенгламалари* деб аталади. Хулоса қилиб шуни айтиш мумкинки, (28) кўринишдаги ҳар қандай тенгламани янги реперга ўтиш йўли билан қуйидаги уч кўринишдан бирига келтириш мумкин экан:

$$\begin{aligned} &\text{I. } \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 1,\ k \leqslant n,\ \varepsilon_i = \pm 1.\\ &\text{II. } \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 0,\ k \leqslant n,\ \varepsilon_i = \pm 1.\\ &\text{III. } \varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 2u_{k+1},\ k < n,\ \varepsilon_i = \pm 1.\end{aligned} \tag{39}$$

Мисол. $8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 6x_2 = 0$ квадриканинг тенгламасини каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. $\varphi_2 = 8x_1^2 - 4x_1x_2 + 5x_2^2$, $\varphi_1 = 3x_2$, $a = 0$. φ_2 ни каноник кўринишга келтирамиз. $y_1 = 8x_1 - 2x_2$, $y_2 = x_2$ десак, $y_1^2 = 64x_1^2 - 32x_1x_2 + 4x_2^2$ бўлиб,

$$\varphi_2 - \frac{1}{a_{11}} y_1^2 = \frac{9}{2} x_2^2 \quad \text{ёки} \quad \varphi_2 = \frac{1}{8} y_1^2 + \frac{9}{2} y_2^2.$$

У ҳолда берилган тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\frac{1}{8} y_1^2 + \frac{9}{2} y_2^2 + 6y_2 = 0$$

ёки тўлиқ квадратга келтирсак,

$$\frac{1}{8} y_1^2 + \frac{9}{2}\left(y_2 + \frac{2}{3}\right)^2 - 2 = 0.$$

$y_1 = u_1$, $y_2 = u_2 - \frac{2}{3}$ алмаштиришдан сўнг $\frac{u_1^2}{16} + \frac{u_2^2}{\frac{4}{9}} = 1$. A_2 даги эллипс тенгламаси ҳосил қилинди.

45- §. Квадриканинг маркази

Кесманинг ўрта нуқтаси аффин алмаштиришда шу кесма образининг ўрта нуқтасига ўтади, шунга асосланиб A_n да квадриканинг симметрия маркази тушунчасини киритиш мумкин.

Таъриф. Квадриканинг ҳар бир нуқтасига унинг бирор S нуқтага нисбатан симметрик нуқтаси мавжуд бўлса, S нуқта квадриканинг *симметрия маркази* деб аталади.

Масалан, A_3 даги реперда каноник тенгламаси билан берилган эллипсоид, бир ва икки паллали гиперболоидлар учун координаталар боши симметрия марказидир. Двадрика (35)
тенглама билан берилса, унинг симметрия маркази координата-
динаталар бошида бўлса, унинг тенгламаси шу реперда (35)
лар бошидан иборат ва, аксинча, квадриканинг маркази коор-
кўринишда бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $M(u_1, u_2, \ldots, u_n) \in (35) \Rightarrow$

$\Rightarrow M'(-u_1, -u_2, \ldots, -u_n) \in (35)$.

MM' кесманинг ўрта нуқтаси $O(0, 0, \ldots, 0)$ дир, чунки кесманинг учлари унинг ўрта нуқтасига нисбатан симметрик жойлашган. Бундан, тенгламалари $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $\ldots$, $u_k = 0$ дан иборат $(n - k)$ ўлчовли текисликнинг барча нуқталари (35) тенглама билан аниқланадиган квадриканинг симметрия маркази бўлади деган хулоса чиқарамиз. Хусусий ҳолда $k = n$ бўлса, симметрия марказлари тўплами ноль ўлчовли текислик бўлиб, фақат битта нуқтадан, у ҳам бўлса, координаталар бошидан иборат. У вақтда квадрика фақат битта симметрия марказига эга бўлиб, у марказли квадрика деб аталади.

Энди квадриканинг тенгламаси (29) кўринишда берилган бўлса, бу квадрика марказининг мавжудлиги масаласига тўхталайлик.

Квадрика

$$\varphi_2 + a = 0 \tag{40}$$

кўринишдаги (бунда φ_2 ифода n ўзгарувчили квадратик форма) тенглама билан берилса, унинг симметрия маркази координаталар бошидан иборат.

Энди (29) кўринишга мос ҳолни кўрайлик. Фараз қилайлик, $S(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0)$ нуқта (29) квадриканинг симметрия маркази бўлсин. Репер бошини шу нуқтага кўчирамиз, базис векторларнинг йўналишини эса сақлаб қоламиз:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + x_1^0, \\ x_2 &= y_2 + x_2^0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_n &= y_n + x_n^0. \end{aligned} \tag{41}$$

Буларни (29) га қўйиб, соддалаштирсак,

$$\varphi_2' + (2a_{11}x_1^0 + 2a_{12}x_2^0 + \ldots + 2a_{1n}x_n^0 + 2a_1)\,y_1 + \ldots + (2a_{n1}x_1^0 + \\ + 2a_{n2}x_{12}^0 + \ldots + 2a_{nn}x_n^0 + 2a_n)\,y_n + a' = 0, \qquad (42)$$

бунда φ_2' ифода $y_1, y_2, \ldots, y_n$ ўзгарувчили квадратик форма, a' — барча озод сонларнинг алгебраик йиғиндиси. Координаталар боши квадриканинг симметрия маркази бўлиши учун (42) тенглама (40) кўринишни олиши керак, яъни биринчи даражали ҳадларнинг барча коэффициентлари бир вақтда нолга тенг бўлиши етарли ва зарурдир:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1^0 + a_{12}x_2^0 + \ldots + a_{1n}x_n^0 &= -a_1, \\ a_{21}x_1^0 + a_{22}x_2^0 + \ldots + a_{2n}x_n^0 &= -a_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1^0 + a_{n2}x_2^0 + \ldots + a_{nn}x_n^0 &= -a_n. \end{aligned} \qquad (43)$$

Демак, квадрика симметрия марказининг $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ координаталари (43) ни қаноатлантириши керак, демак, квадрика марказининг мавжудлиги масаласи (43) системанинг ечимига боғлиқ; қуйидаги детерминантни қарайлик:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta.$$

1. $\Delta \neq 0$, (43) система ягона ечимга эга, квадрика битта симметрия марказига эга; *марказли* деб аталган *квадрика* ҳосил қилинади.

2. $\Delta = 0$ ва (43) система чексиз кўп ечимга эга бўлса, квадриканинг симметрия марказлари ҳам чексиз кўп бўлади (бундай нуқталар тўплами k ўлчовли текислик бўлади).

3. $\Delta = 0$ ва (43) система биргаликда бўлмаса, квадрика битта ҳам симметрия марказига эга эмас. Кейинги икки ҳолда *квадрика марказсиз* деб аталади.

Эслатма. (43) системанинг биринчи тенгламасига диққат билан қарасак, у (28) тенгламадан x_1 бўйича (қолган $x_2, x_3, \ldots, x_n$ ларни доимий деб олинса) олинган ҳосиладан, иккинчи тенглама эса (28) дан x_2 бўйича олинган ҳосиладан (бунда $x_1, x_3, x_4, \ldots, x_n$ лар доимий деб олинади) ва ҳ. к., охирги тенглама эса (28) дан x_n бўйича олинган ҳосиладан (бунда $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ лар доимий ҳисобланади) иборат экан.

Мисол. $x_1^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 + 10x_3 - 3 = 0$ квадриканинг симметрия марказининг мавжудлигини исботланг ҳамда параллел кўчириш ёрдамида тенгламани соддалаштиринг.

Ечиш. (29) билан солиштирсак,

$$\varphi_2 = x_1^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3, \quad \varphi_1 = 2x_1 + 4x_2 + 10x_3.$$

Энди (43) системани тузамиз.

$$\left| \begin{aligned} & x_1^0 + x_2^0 = -1, \\ & x_1^0 - x_3^0 = -2, \\ & x_2^0 + 5x_3^0 = 5. \end{aligned} \right. \tag{*}$$

Унинг детерминанти:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

(*) дан $x_1^0 = -1$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 1$. Берилган квадрика маркази $S(-1, 0, 1)$. Реперни параллел кўчириб, унинг бошини S нуқтага келтирамиз:

$$x_1 = y_1 - 1, \quad x_2 = y_2, \ x_3 = y_3 + 1;$$

буларни берилган тенгламага қўйиб, уни соддалаштирсак,

$$y_1^2 - 5y_3^2 + 2y_1y_2 - 2y_2y_3 + 1 = 0.$$

46- §. Квадриканинг таснифи

n ўлчовли аффин фазодаги квадриканинг (28) кўринишдаги тенгламасини аффин реперни махсус танлаб олиш йўли билан (39) кўринишдаги учта тенгламанинг бирига келтириш мумкинлигини кўрган эдик (44- §). Ҳеч қандай аффин алмаштириш билан бу тенгламалардан бирини иккинчисига ўтказиб бўлмайди, демак, улар ўзаро аффин эквивалент синфлар эмас. Шу тенгламаларнинг ҳар бирини айрим-айрим кўриб чиқайлик.

1. $\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 1, \ k \leqslant n.$

$k = n$ да

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_n u_n^2 = 1. \tag{44}$$

1- ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = 1$ учун

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 1 \tag{45}$$

ҳосил қилиниб, квадрика *эллипсоид* деб аталади ($n = 3$ да A_3 даги эллипсоид).

2- ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n = -1$ бўлса, $(44) \Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = -1$; A_n да бу тенгламани қаноатлантирувчи бирорта ҳам ҳақиқий нуқта йўқ, бу ҳолда (45) тенглама *мавҳум эллипсоидни* аниқлайди деймиз.

3- ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_l = 1, \ \varepsilon_{l+1} = \varepsilon_{l+2} = \ldots = \varepsilon_n = -1;$

бу ҳолда (44) тенглама билан аниқланадиган квадрика $n - t$ *индексли гиперболоид* деб аталади ($n = 2$ ҳол юз берса, $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = -1$ ёки $\varepsilon_1 = -1$, $\varepsilon_2 = 1$ да квадрика текисликдаги гиперболани ифода қилади, $n = 3$ да ε_1, ε_2, ε_3 дан биттаси -1 га тенг бўлса, квадрика *бир паллали гиперболоидни*, ε_1, ε_2, ε_3 дан иккитаси -1 га тенг бўлса, квадрика *икки паллали гиперболоидни* аниқлайди).

Энди $k < n$ бўлган ҳолни кўрайлик.

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 \ \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 1. \tag{46}$$

Маълумки, бу кўринишдаги тенглама симметрия марказлари $(n - 1)$ ўлчовли координата текислигидан иборат бўлган сиртни ифода қилади, бундай квадрика A_n да *цилиндрик сирт* деб аталади.

1- ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = 1$.

(46) тенглама

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 = 1 \tag{47}$$

кўринишни олади ва k ўлчовли текисликдаги эллипсоидни аниқлаб, A_n фазода эса асоси шу эллипсоиддан, ясовчилари $(n - k)$ ўлчовли текисликдан иборат *эллиптик цилиндрни* беради. $n = 3$, $k = 2$ да эса A_3 да ясовчилари бирор координата ўқига параллел эллиптик цилиндрни аниқлайди.

2- ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k = -1$ учун $u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 = -1$; бу тенглама бирорта ҳам ҳақиқий нуқтага эга бўлмаган квадрикани аниқлаб, уни *мавҳум цилиндр* дейилади.

3- ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_t = 1$, $\varepsilon_{t+1} = \varepsilon_{t+2} = \ldots = \varepsilon_k = -1$ учун

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_t^2 - u_{t+1}^2 - \ldots - u_k^2 = 1. \tag{48}$$

Бу тенглама k ўлчовли текисликда $(k - t)$ индексли гиперболоидни аниқлаб, унинг ҳар бир нуқтасидан $(n - k)$ ўлчовли текислик ўтади. Бундай квадрикани A_n да *$(k - t)$ индексли гиперболик цилиндр* деб аталади; унинг ясовчилари $(n - k)$ ўлчовли текисликдан иборат.

II. $\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 0$. $\quad$ (49)

Бу теглама билан аниқланган квадриканинг симметрия маркази координаталар бошида бўлиб, бу нуқта квадрикага тегишлидир.

$k = n$ бўлсин.

1- ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_n$ бўлса, (49) $\Rightarrow u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2 = 0$ тенглама билан аниқланадиган квадрика мавҳум конус деб аталади, бу конус фақат битта ҳақиқий нуқтага эга бўлади (координаталар боши O).

2- ҳол. ε_1, ε_2, $\ldots$, ε_n нинг барчаси бир хил ишорали бўлмаса, квадрика *конус* деб аталади, демак, конус марказли сиртдир.

Унинг маркази *конуснинг учи* деб аталади. Шуниси қизиқки, бу конусга тегишли бирор T нуқтани олсак, OT тўғри чизиқнинг (O — конуснинг маркази) барча нуқталари ҳам конусга тегишли бўлади; бу тўғри чизиқ *конуснинг ясовчиси* деб аталади.

Энди $k < n$ ҳолни текширайлик.

1-ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_k$; (49) тенглама

$$u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_k^2 = 0 \tag{50}$$

кўринишни олади; бу тенглама билан аниқланадиган квадрика ҳам *мавҳум конус* деб юритилади.

Лекин бу тенгламани A_n да қарасак, бу квадрика $(n - k)$ ўлчовли текисликнинг барча нуқталарини ўз ичига олади (чунки $N(0, 0, \ldots, 0, u_{k+1}, \ldots, u_n)$ кўринишдаги барча нуқталарнинг координаталари (50) тенгламани қаноатлантиради). Бундай конус учи $(n - k)$ ўлчовли текисликдан иборат *мавҳум конус* деб аталади.

2-ҳол. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k$ нинг барчаси бир хил ишорали бўлмаса (масалан, t таси $+1$ бўлса), у ҳолда (49) тенглама билан аниқланадиган квадрикани *$(k - t)$ индексли, учи $(n - k)$ ўлчовли текисликдан иборат конус* деб аталади.

Ниҳоят, (39) даги учинчи тенгламани текширайлик:

$$\varepsilon_1 u_1^2 + \varepsilon_2 u_2^2 + \ldots + \varepsilon_k u_k^2 = 2u_{k+1}. \tag{51}$$

$k = n - 1$. 1-ҳол. $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \ldots = \varepsilon_{n-1}$; (51) тенглама билан аниқланадиган квадрика *эллиптик параболоид* деб аталади ($n = 3$ бўлса, (51) тенглама $u_1^2 + u_2^2 = 2u_3$ кўринишда бўлиб, A_3 даги эллиптик параболоидни ифодалайди).

2-ҳол. $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{n-1}$ нинг барчаси бир хил ишорали бўлмаса (масалан, t таси $+1$ бўлса), у ҳолда (51) тенглама билан аниқланадиган квадрика *$(k - t)$ индексли гиперболик параболоид* деб аталади.

$k \leqslant n - 2$. У ҳолда (51) тенглама O нуқта ва $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_{k+1}$ векторлар билан аниқланадиган текисликда бирор параболоидни аниқлайди. A_n да қарасак, бу квадрикага $(n - k - 1)$ ўлчовли текислик киради, аниқроғи N нуқта параболоидга тегишли бўлса, у ҳолда бошлари шу нуқтадаги $\vec{e}_{k+2}, \ldots, \vec{e}_n$ векторлар билан аниқланувчи текислик шу параболоид таркибида бўлади. Бу ҳолда (51) квадрика ясовчилари $(n - k - 1)$ ўлчовли текисликдан иборат *параболик цилиндр* деб аталади. Бу квадриканинг индекси $(n - t)$ бўлса, у мос равишда *$(n - t)$ индексли параболик цилиндр* деб аталади.

Мисол. A_3 да $u_1^2 + u_2^2 + 4u_1u_3 - 4u_2 = 0$ тенглама билан аниқланувчи квадриканинг турини топинг.

Ечиш. Аввало бу квадриканинг симметрия маркази борйўқлигини аниқлайлик. Бунинг учун берилган тенгламадан аввал u_1, кейин u_2, ниҳоят u_3 бўйича ҳосила олайлик:

$$2u_1 + 4u_3 = 0,$$

$$2u_2 - 4 = 0;$$

$$4u_1 = 0;$$

бу система ягона ечимга эга: $u_1 = 0$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$. Марказ (0, 2, 0) нуқтада. Энди репер бошини шу марказга келтирайлик, бунинг учун қуйидагича чизиқли алмаштиришни бажариш керак:

$$u_1 = y_1, \ u_2 = y_2 + 2, \ u_3 = y_3;$$

буларни берилган тенгламага қўйсак,

$$y_1^2 + (y_2 + 2)^2 + 4y_1y_3 - 4(y_2 + 2) = 0,$$

$$y_1^2 + y_2^2 + 4y_2 + 4 + 4y_1y_3 - 4y_2 - 8 = 0,$$

$$y_1^2 + y_2^2 + 4y_1y_3 - 4 = 0.$$

Энди $\varphi_2 = y_1^2 + y_2^2 + 4y_1y_3$ квадратик формани Лагранж усули билан каноник кўринишга келтирамиз. Ушбу

$$x_1 = y_1 + 2y_3, \ x_2 = y_2, \ x_3 = y_3$$

алмаштиришни бажариб, $\varphi_2 - x_1^2$ ни ҳисоблайлик:

$$\varphi_2 - x_1^2 = y_1^2 + 4y_1y_3 + y_2^2 - (y_1 + 2y_3)^2 = y_1^2 + 4y_1y_3 + y_2^2 - y_1^2 -$$

$$- 4y_1y_3 - 4y_3^2 = y_2^2 - 4y_3^2 = x_2^2 - 4x_3^2, \text{ ёки } \varphi_2 = x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2.$$

У ҳолда берилган тенглама қуйидагича бўлади: $x_1^2 + x_2^2 -- 4x_3^2 - 4 = 0$, ёки $x_1^2 + x_2^2 - 4x_3^2 = 4$, ёки $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_3^2}{1} = 1$, бу эса, A_3 даги бир паллали гиперболоиддир.

47- §. Ортогонал алмаштириш йўли билан квадратик формани каноник кўринишга келтириш

Аввалги параграфларда n ўлчовли аффин фазода квадратик формани каноник кўринишга, ҳатто нормал кўринишга келтиришни кўриб, унинг n ўлчовли аффин фазодаги квадрикалар учун татбиқини аниқладик. Энди квадратик формани n ўлчовли (E_n) Евклид фазосида қарасак, унинг A_n даги хоссалари сақланиб, бу хоссалар қаторига янги метрик характердаги хоссалари қўшилади.

Аввал, баъзи янги тушунчаларни киритайлик (бу тушунчалар «Алгебра ва сонлар назарияси» курсида батафсил ўрганилгани сабабли улар ҳақидаги баъзи теоремаларни исботсиз келтирамиз).

1. **Хос векторлар ва характеристик сонлар.** Қуйидаги чизиқли алмаштиришларни кўрайлик:

$$\begin{aligned} x_1' &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n, \\ x_2' &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n' &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{52}$$

Бу чизиқли алмаштиришларнинг матрицаси

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \tag{53}$$

айнимаган бўлсин.

Агар (52) нинг чап томонидаги $x_1', x_2', \dots, x_n'$ ни бирор $\vec{x}'$ векторнинг $\mathscr{B}$ реперга нисбатан координаталари десак, худди шунга ўхшаш, ўнг томондаги $x_1, x_2, \dots, x_n$ ни ҳам шу $\mathscr{B}$ реперга нисбатан бирор $\vec{x}$ векторнинг координаталари деб қараш мумкин, у ҳолда (52) алмаштириш ҳар бир $\vec{x} \neq \vec{0}$ векторга аниқ битта $\vec{x}' \neq \vec{0}$ векторни мос келтиради, буни қуйидагича ёзайлик:

$$\vec{x}' = \varphi(\vec{x}). \tag{54}$$

Бу вақтда φ *чизиқли оператор* деб ҳам юритилади.

Таъриф. Агар (52) чизиқли алмаштиришда $\vec{x} \neq \vec{0}$ вектор ва унга мос $\vec{x}' \neq \vec{0}$ векторни боғловчи

$$\vec{x}' = \lambda \vec{x} \tag{55}$$

муносабат (бунда $\lambda \in R$) ўринли бўлса, $\vec{x}$ вектор φ чизиқли операторнинг *хос вектори* деб аталади, λ сон эса φ чизиқли операторнинг $\vec{x}$ векторга мос келган *хос қиймати* деб аталади. Агар (55) ўринли бўлса, $x_1' = \lambda x_1$, $x_2' = \lambda x_2$, $\dots$, $x_n' = \lambda x_n$ бўлиб, бу қийматларни (52) га қуйсак,

$$\begin{aligned} \lambda x_1 &= b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \dots + b_{1n}x_n, \\ \lambda x_2 &= b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \dots + b_{2n}x_n \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda x_n &= b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n \end{aligned} \tag{56}$$

ёки

$$\begin{aligned} (b_{11}-\lambda)x_1+b_{12}x_2+\ \dots\ +b_{1n}x_n=0,\\ b_{21}x_1+(b_{22}-\lambda)x_2+\ \dots\ +b_{2n}x_n=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ b_{n1}x_1+b_{n2}x_2+\ \dots\ +(b_{nn}-\lambda)x_n=0. \end{aligned} \tag{57}$$

Маълумки, бу бир жинсли тенгламалар системаси ноль бўлмаган ечимга эга бўлиши учун унинг бош детерминанти нолга тенг бўлиши керак:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & \dots & b_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}-\lambda \end{vmatrix}=0. \tag{58}$$

Демак, чизиқли операторнинг исталган хос қиймати (яъни λ) (58) тенгламани қаноатлантириши керак ва, аксинча, λ нинг (58) тенгламани қаноатлантирувчи ҳар қандай ҳақиқий қиймати φ нинг хос қиймати бўлади: (58) нинг чап томонидаги детерминантни ёйиб, ўхшаш ҳадларни ихчамлаб чиқсак, λ га нисбатан n-даражали кўпҳад ҳосил қилинади. Бу кўпҳад *характеристик кўпҳад,* (58) эса *характеристик тенглама* деб аталади.

Қуйидаги теоремалар ўринлидир.

1-теорема. *Бошқа бирор базисга ўтишда чизиқли операторнинг матрицаси албатта ўзгаради, лекин характеристик кўпҳаднинг коэффициентлари ва илдизлари ўзгармайди.*

2-теорема. *Тайин бир хос қийматга мос келувчи хос векторларнинг ҳар қандай чизиқли комбинацияси шу хос қийматга мос келувчи хос вектор бўлади.*

Агар $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$ базис векторлар бирор чизиқли операторнинг хос векторлари бўлиб, уларга мос келган хос қийматлар мос равишда $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ бўлса, (52) тенглама қуйидаги кўринишни олади:

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \lambda_1 x_1,\\ x_2' &= \lambda_2 x_2,\\ &\dots\dots\\ x_n' &= \lambda_n x_n \end{aligned}\right|. \tag{59}$$

У ҳолда бу алмаштиришнинг матрицаси диагонал кўринишда бўлади:

$$B=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \tag{60}$$

($\lambda_1, \lambda_2 \dots, \lambda_n$ ичида бир-бирига тенглари бўлиши мумкин, чунки характеристик тенглама каррали илдизга эга бўлган ҳол ҳам юз бериши мумкин).

2. Симметрик оператор ва унинг матрицаси. φ чизиқли оператор берилган бўлсин.

Таъриф. E_n даги ихтиёрий $\vec{x}$, $\vec{y}$ векторлар учун

$$\varphi(\vec{x})\cdot\vec{y} = \vec{x}\cdot\varphi(\vec{y}) \qquad (61)$$

ўринли бўлса, φ ни *симметрик оператор* деб аталади.

Бу таърифдан кўринадики, скаляр кўпайтмада симметрик оператор белгисини бир кўпайтувчидан иккинчи кўпайтувчига ўтказиш мумкин.

3-теорема. *Чизиқли симметрик оператор ҳар қандай декарт базисида симметрик матрицага эгадир.*

Исбот. Чизиқли симметрик операторнинг бирор $Б = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n)$ декарт базисидаги матрицаси (53) кўринишда бўлсин. У ҳолда (61) даги $\vec{x}$ ва $\vec{y}$ нинг ўрнига $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ ни қўйсак,

$$\varphi(\vec{e}_i)\,\vec{e}_j = \vec{e}_i\,\varphi(\vec{e}_j) \qquad (62)$$

(бунда $i, j = 1, 2, \ldots, n$), (62) нинг чап томонини ҳисоблайлик:

$$\varphi(\vec{e}_i)\,\vec{e}_j = \vec{e}_i{}'\,\vec{e}_j = (b_{i1}\vec{e}_1 + b_{i2}\vec{e}_2 + \ldots + b_{in}\vec{e}_n)\,\vec{e}_j = b_{i1}(\vec{e}_1\vec{e}_j) +$$

$$+ b_{i2}(\vec{e}_2\vec{e}_j) + \ldots + b_{in}(\vec{e}_n\vec{e}_j) = b_{ij},$$

бунда $\vec{e}_i\vec{e}_j = 0\,(i \neq j)$ эътиборга олинади. Энди (62) нинг ўнг томонини ҳисоблайлик:

$$\vec{e}_i\cdot\varphi(\vec{e}_j) = (\vec{e}_i\,\vec{e}_j) = \vec{e}_i(b_{j1}\vec{e}_1 + b_{j2}\vec{e}_2 + \ldots + b_{jn}\vec{e}_n) =$$

$$= b_{j1}(\vec{e}_i\vec{e}_1) + b_{j2}(\vec{e}_i\vec{e}_2) + \ldots + b_{jn}(\vec{e}_i\vec{e}_n) = b_{ji}.$$

(62) га асосан $b_{ij} = b_{ji}$, бу эса (53) нинг симметрик матрица эканини билдиради.

Бу теоремага тескари теорема ҳам ўринли, яъни:

4-теорема. *Агар чизиқли оператор бирор декарт базисида симметрик матрицага эга бўлса, у чизиқли симметрик оператор бўлади.*

Исбот. (53) да $b_{ij} = b_{ji}$ бўлсин, у ҳолда ихтиёрий $\vec{x}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\vec{y}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(\vec{x} \neq 0,\ \vec{y} \neq 0)$ векторлар учун $\varphi(\vec{x})\,\vec{y} = \vec{x}{}'\,\vec{y} =$ $= (x_1'\vec{e}_1 + x_2'\vec{e}_2 + \ldots + x_n'\vec{e}_n\ y_1\vec{e}_1 + y_2\vec{e}_2 + \ldots + y_n\vec{e}_n) = x_1'y_1 + x_2'y_2 + \ldots$ $+ x_n'y_n = (b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \ldots + b_{1n}x_n)\,y_1 + (b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \ldots +$

$$+b_{2n}x_n)\,y_2 + \dots + (b_{n1}x_1 + b_{n2}x_2 + \dots + b_{nn}x_n)\,y^n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} b_{1i}x_i y_1 + \sum_{i=1}^{n} b_{2i}x_i y_2 + \dots + \sum_{i=1}^{n} b_{ni}\cdot x_i\cdot y_n =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\cdot x_i y_j. \qquad (63)$$

Худди шунга ўхшаш, $(\vec{x}\cdot\varphi(\vec{y}))$ ни ҳисобласак,

$$\vec{x}\,\varphi(\vec{y}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ji}\,{}'_{i}\,x_j. \qquad (64)$$

$$(63),\ (64) \Rightarrow \vec{x}\ \varphi(\vec{y}) = \varphi(\vec{x})\,\vec{y},$$

бу эса таърифга асосан φ нинг чизиқли симметрик оператор эканлигини билдиради:

5-теорема. *Чизиқли симметрик операторнинг характеристик тенгламаси фақат ҳақиқий илдизга эгадир.*

Исбот. λ_0 характеристик тенгламанинг илдизи бўлсин, $\lambda_0 \in R$ эканини исботлаймиз. λ_0 ни (57) даги λ ўрнига қўйсак, (58) детерминант нолга тенг бўлгани учун (57) система ноль бўлмаган ечимга эгадир, бу ечимларни $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ деб белгиласак, (56) система қуйидаги кўринишни олади:

$$\begin{aligned}
&b_{11}\beta_1 + b_{12}\beta_2 + \dots + b_{1n}\beta_n = \lambda_0\beta_1,\\
&b_{21}\beta_1 + b_{22}\beta_2 + \dots + b_{2n}\beta_n = \lambda_0\beta_2,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&b_{n1}\beta_1 + b_{n2}\beta_2 + \dots + b_{nn}\beta_n = \lambda_0\beta_n
\end{aligned} \qquad (65)$$

(бунда албатта барча $b_{ij} \in R$) (65) нинг ҳар бирини мос равишда $\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, \dots, \overline{\beta}_n$ сонларга (бунда $\overline{\beta}_j$ сон β_j нинг қўшмасидир, яъни $\beta_j = a + ib$ бўлса, $\overline{\beta}_j = a - ib$, равшанки, β_j ҳақиқий сон бўлса, $\overline{\beta}_j = \beta_j$) кўпайтириб, чап томонларини ва ўнг томонларини ҳадлаб қўшсак,

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i = \lambda_0\sum_{i=1}^{n}\beta_i\overline{\beta}_i, \qquad (66)$$

$\beta_i\overline{\beta}_i > 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\beta_i\overline{\beta}_i > 0$, у ҳолда λ_0 нинг ҳақиқий сон эканини кўрсатиш учун (66) даги чап томоннинг ҳақиқий сон эканини кўрсатиш кифоядир.

$S = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i$ бўлсин; $b_{ij} = b_{ji}$, $\overline{\overline{\beta}}_i = \beta_i$ эканини ҳисобга олсак,

$$\overline{S} = \overline{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{b_{ij}\beta_j\overline{\beta}_i} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\overline{b}_{ij}\,\overline{\beta}_j\,\overline{\overline{\beta}}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\overline{\beta}_j\beta_i.$$

Йиғиндини англатувчи i ва j нинг ўринларини алмаштириш билан йиғинди ўзгармаганлиги учун $\overline{S} = S$, бу эса, S нинг ҳақиқий сон эканлигини билдиради. У ҳолда (66) тенгликнинг ўринли бўлиши учун λ_0 ҳақиқий сон бўлиши керак. ▲

Бу теоремадан қуйидаги натижа келиб чиқади: ҳар қандай чизиқли симметрик оператор камида битта хос қийматга эга.

Ҳақиқатан ҳам, (58) тенглама алгебраик тенгламадир, демак, унинг камида битта илдизи мавжуд, юқоридаги 5-теоремага асосан у илдиз λ_0 ҳақиқий сондан иборат. Бу сон берилган симметрик операторнинг хос қийматидир.

6-теорема. *Чизиқли симметрик операторнинг ҳар хил хос қийматларига мос келган хос векторлари ўзаро ортогоналдир.*

Исбот. λ, μ сонлар берилган φ чизиқли симметрик операторнинг ҳар хил қийматлари бўлиб, улар билан аниқланадиган хос векторлар мос равишда $\vec{x}$, $\vec{y}$ бўлсин: $\varphi(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$, $\varphi(\vec{y}) = \mu\vec{y}$; бу операторнинг симметриклигидан $\Rightarrow \varphi(\vec{x})\vec{y} = \vec{x}\varphi(\vec{y})$, лекин $\varphi(\vec{x})\vec{y} = \lambda\vec{x}\cdot\vec{y} = \lambda(\vec{x}\vec{y})$, $\vec{x}\cdot\varphi(\vec{y}) = \vec{x}\cdot\mu\vec{y} = \mu(\vec{x}\vec{y}) \Rightarrow \lambda(\vec{x}\cdot\vec{y}) = \mu(\vec{x}\vec{y}) \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda - \mu)(\vec{x}\vec{y}) = 0$ ва $\lambda \neq \mu \Rightarrow \vec{x}\cdot\vec{y} = 0 \Rightarrow \vec{x} \perp \vec{y}$.

7-теорема. *E_n фазодаги ҳар қандай чизиқли симметрик оператор учун шундай декарт базиси мавжудки, бу базиснинг ҳар бир вектори шу операторнинг хос векторидан иборат.*

Исбот. $n = 1$ бўлсин, (52) тенглама $x_1' = b_{11}x_1$ кўринишда бўлиб, $\vec{x} \neq \vec{0}$ вектор ўзининг образи $\varphi(\vec{x})$ билан фақат b_{11} сонли кўпайтувчи билан фарқ қилади, демак, бу вектор чизиқли операторнинг хос вектори экан; $b_{11} = \frac{1}{|\vec{x}|}$ десак, $\frac{1}{|\vec{x}|}\cdot\vec{x} = \vec{e}_1$ бирлик вектор бўлиб, бир ўлчовли фазонинг базисидир.

Энди математик индукция методини қўллаймиз, яъни теорема E_{n-1} фазо учун ўринли бўлиб, уни E_n учун ўринли эканини кўрсатамиз. φ оператор E_n нинг симметрик оператори бўлсин. 5-теоремага асосан у ҳақиқий λ хос қийматга эга, шу λ га мос келувчи хос вектор $\vec{z}$ бўлсин, у ҳолда $\frac{1}{|\vec{z}|}\cdot\vec{z} = \vec{e}_1$ вектор бирлик векторбир.

Бу вектор $\vec{z}$ дан фақат сонли кўпайтувчи билангина фарқ қилгани учун у λ га мос келган хос вектор бўлади, яъни

$$\varphi(\vec{e}_1) = \lambda\vec{e}_1. \tag{67}$$

E_n даги $\vec{e}_1$ га ортогонал барча векторлар тўплами $(n-1)$ ўлчовли қисм фазони ҳосил қилади. Бу фазонинг ўзи ҳам ўз йўлида евклид фазосидир, чунки E_n да аниқланган скаляр кўпайтма E_{n-1} учун ҳам ўз кучини сақлаб, скаляр кўпайтманинг барча хоссалари E_{n-1} учун ҳам сақланади. E_{n-1} нинг ихтиёрий $\vec{a}$ векторини олайлик. У ҳолда $\vec{a}\,\vec{e}_1 = 0$ бўлиб, φ нинг симметриклигини ва (67) ни эьтиборга олсак, $\vec{e}_1 \cdot \varphi(\vec{a}) = \varphi(\vec{e}_1)\,\vec{a} = \lambda\,\vec{e}_1 \cdot \vec{a} = \lambda(\vec{e}_1 \cdot \vec{a}) = \lambda \cdot 0 = 0$. Бундан $\varphi(\vec{a})$ векторнинг ҳам E_{n-1} га тегишли эканлиги кўринади.

Демак, φ оператор E_{n-1} нинг ҳар бир векторига шу фазонинг векторини мос келтиради. φ ни татбиқлаш натижасида E_{n-1} да ҳосил қилинадиган янги операторни φ_1 десак, ҳамда E_n даги ихтиёрий икки вектор учун (61) шарт ўринли экани сабабли бу шарт E_{n-1} фазодаги икки вектор учун ҳам ўринлидир, чунки φ_1 ҳам симметрик оператор бўлади. Фаразга асосан теорема E_{n-1} да ўринли бўлганлиги учун шу фазода декарт базис мавжуддир. Бу базиснинг ҳар бир вектори φ_1 нинг хос векторларидир; буларни $\vec{e}_2, \vec{e}_3, \ldots \vec{e}_n$ десак, бу векторларнинг ҳар бири $\vec{e}_1$ га ортогоналдир. Демак, $\vec{e}_1$ $\vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n$ лар E_n даги декарт базис бўлиб, чизиқли симметрик операторнинг хос векторларидан иборат. ▲

Натижа. Чизиқли симметрик операторнинг матрицасини декарт базисини танлаб олиш йўли билан диагонал кўринишга келтириш мумкин.

Таъриф. Ортогонал матрица ёрдамида бажариладиган чизиқли алмаштириш *ортогонал алмаштириш* дейилади.

Қуйида биз ортогонал алмаштириш ёрдамида квадратик формани каноник кўринишга келтиришни кўрсатамиз. Лекин ортогонал алмаштириш ёрдамида квадратик формани нормал кўринишга доимо келтириб бўлавермайди.

8-теорема. *Бирор декарт базисига нисбатан квадратик форма ва чизиқли оператор бир хил матрицага эга бўлса, улар бошқа ҳар қандай декарт базисида ҳам бир хил матрицага эга бўлади.*

Исбот. Ушбу

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \qquad (68)$$

квадратик форма билан чизиқли f операторнинг матрицалари бирор декарт базисида бир хил бўлсин дейлик: $b_{ij} = c_{ij}$.

f оператор $\vec{x}$ ни шундай $\vec{x}'$ га акслантирадики, шу векторларнинг координаталари қуйидагича боғлангандир:

$$\begin{aligned} x_1' &= c_{11}x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n, \\ x_2' &= c_{21}x_1 + c_{22}x_2 + \ldots + c_{2n}x_n \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n' &= c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots c_{nn}x_n. \end{aligned} \qquad (69)$$

У ҳолда (68) квадратик формани қуйидагича ёзиш мумкин:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \right) = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i' = x_1 x_1' + x_2 x_2' + \ldots + x_n x_n' = \vec{x}\,\vec{x}'. \qquad (70)$$

Энди бирор декарт базисга ўтайлик: $\vec{x}, \vec{x}'$ ларнинг шу базисга нисбатан координаталари $y_1, y_2, \ldots, y_n, y_1', y_2', \ldots, y_n'$ бўлсин, уларни боғловчи формулалар

$$\begin{array}{l} y_1' = d_{11} y_1 + d_{12} y_2 + \ldots + d_{1n} y_n, \\ y_2' = d_{21} y_1 + d_{22} y_2 + \ldots + d_{2n} y_n, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n' = d_{n1} y_1 + d_{n2} y_2 + \ldots + d_{nn} y_n \end{array} \qquad (71)$$

бўлсин. У ҳолда $\vec{x}, \vec{x}'$ нинг шу базисга нисбатан скаляр кўпайтмасини ҳисобласак, $\vec{x} \cdot \vec{x}' = y_1 y_1' + y_2 y_2' + \ldots + y_n y_n'$ ва (71) ни эътиборга олсак,

$$\vec{x} \cdot \vec{x}' = y_1 (d_{11} y_1 + d_{12} y_2 + \ldots + d_{1n} y_n) + y_2 (d_{21} y_1 + d_{22} y_2 + \ldots + d_{2n} y_n) + \ldots + y_n (d_{n1} y_1 + d_{n2} y_2 + \ldots + d_{nn} y_n) = \sum_{i=1}^{n} y_i \left(\sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_j \right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_i y_j.$$

(70) га асосан

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \vec{x} \cdot \vec{x}' = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} d_{ij} y_i y_j. \qquad (72)$$

(71) билан (72) ни солиштириб, квадратик форма билан чизиқли оператор матрицаларининг бир хил эканлигини кўрамиз.

9-теорема. *Ҳар қандай квадратик форманинг ўзгарувчиларини ортогонал алмаштириш ёрдамида бу формани каноник кўринишга келтириш мумкин.*

Исбот. (68) квадратик форма берилган бўлсин. Бирор декарт базисида (68) квадратик форма симметрик матрицага эга бўлсин. Биз худди шу матрицали чизиқли операторни кўрайлик. Бу чизиқли операторнинг характеристик тенгламаси (58) га асосан

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \qquad (73)$$

Бу тенгламанинг илдизларини $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ десак, 7-теоремадан чиққан натижага асосан шундай декарт базиси мавжудки, унда юқоридаги оператор матрицаси диагонал кўринишга келади ва унинг диагонал элементлари $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ бўлади. У ҳолда квадратик форма қуйидаги кўринишни олади:

$$\varphi(\vec{x}, \vec{x}) = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \ldots + \lambda_n y_n^2 \tag{74}$$

(бунда λ_i лар неча каррали илдиз бўлса, улар (74) да шунча марта қатнашади). ▲

У ҳолда янги базис векторлари эски базис векторлари орқали

$$\begin{aligned}
\vec{e}_1' &= d_{11}\vec{e}_1 + d_{12}\vec{e}_2 + \ldots + d_{1n}\vec{e}_n,\\
\vec{e}_2' &= d_{21}\vec{e}_1 + d_{22}\vec{e}_2 + \ldots + d_{2n}\vec{e}_n,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\vec{e}_n' &= d_{n1}\vec{e}_1 + d_{n2}\vec{e}_2 + \ldots + d_{nn}\vec{e}_n
\end{aligned}$$

кўринишда ифодаланиб, ўтиш матрицаси ортогоналдир. Демак, квадратик формани каноник кўринишда ёзиш учун (58) характеристик тенгламани тузиб, унинг илдизларини топиш кифоя. Энди янги декарт базисини топиш ва квадратик формани каноник кўринишга келтирадиган ортогонал алмаштиришни излаш усулини кўрсатамиз.

λ_k характеристик тенгламанинг бир каррали илдизи бўлсин. Бу λ_k ни (57) даги λ нинг ўрнига қўйиб, $c_{ij} = b_{ij}$ эканини назарда тутсак,

$$\begin{aligned}
(c_{11} - \lambda_k)x_1 + c_{12}x_2 + \ldots + c_{1n}x_n &= 0,\\
c_{21}x + (c_{22} - \lambda_k)x_2 + \ldots + c_{2n}x_n &= 0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
c_{n1}x_1 + c_{n2}x_2 + \ldots + (c_{nn} - \lambda_k)x_n &= 0.
\end{aligned} \tag{75}$$

Бундан λ_k га мос келувчи хос векторнинг координаталарини топамиз (яъни (75) системани $x_1, x_2, \ldots, x_n$ га нисбатан ечиб, ноль бўлмаган ечимларини топамиз); топилган векторни модулига бўлиш натижасида бирлик вектор ҳосил қиламиз.

Энди λ_k сон характеристик тенгламанинг $m\,(m > 1)$ каррали илдизи бўлсин. Бу вақтда ҳам λ_k нинг қийматини (57) даги λ нинг ўрнига қўйсак, (75) га ўхшаш система ҳосил бўлади. Бу системанинг m та ечимини шундай танлаб оламизки, координаталари шу ечимлардан иборат m та векторнинг ҳар бири бирлик вектор бўлиб, ўзаро ортогонал бўлсин. Равшанки, бу векторлар m ўлчовли векторли евклид фазосининг базиси бўлади, шу векторларни E_n нинг ҳам базис векторлари сифатида қабул қиламиз. Шунга ўхшаш муҳокамани ҳар бир λ_k учун юритамиз. Барча λ_k ларнинг сони n та бўлгани учун (карралиги ва карралик сони билан олинади) жами n та ўзаро ортогонал ва бирлик вектордан иборат декарт базиси ҳосил қилинади.

1-мисол. $5x_1^2 - 8x_1x_2 - x_2^2$ квадратик формани каноник кўринишга келтиринг ва янги базис билан эски базисни боғловчи муносабатларни топинг.

Ечиш. (57) характеристик тенгламани тузамиз:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-\lambda & -4 \\ -4 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 4\lambda - 21 = 0.$$

Бу тенгламани ечсак, $\lambda_1 = 7$, $\lambda_2 = -3$.

Изланган квадратик форма: $7y_1^2 - 3y_2^2$. Энди янги базис билан эски базисни боғловчи муносабатни аниқлайлик, $\lambda_1 = 7$ га мос келган хос векторни топайлик, бунинг учун бу қийматни қуйидаги системадаги λ нинг ўрнига қўямиз:

$$\left.\begin{aligned} (c_{11}-\lambda)x_1 + c_{12}x_2 = 0, \\ c_{21}x_1 + (c_{22}-\lambda)x_2 = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} (5-7)x_1 - 4x_2 = 0, \\ -4x_1 + (-1-7)x_2 = 0, \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 + 4x_2 = 0; \\ 4x_1 + 8x_2 = 0, \end{cases}$$

бундан $x_1 + 2x_2 = 0$ нинг ноль бўлмаган ечимларидан бирини, масалан, $x_1 = -2$, $x_2 = 1$ ни олсак, у ҳолда $(-2, 1)$ векторнинг модули $\sqrt{5}$ бўлиб, бирлик вектор: $\vec{e}_1'\left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$. Шунга ўхшаш, $\lambda_2 = -3$ га мос келган вектор $\vec{e}_2' = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$ бўлади. Демак, янги базис векторлари эски базис векторлари орқали

$$\vec{e}_1' = -\frac{2}{5}\vec{e}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_2, \quad \vec{e}_2' = \frac{1}{\sqrt{5}}\vec{e}_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}\vec{e}_2$$

кўринишда ифодаланади. Равшанки, ўтиш матрицаси

$$\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$

ортогоналдир (текшириб кўринг). У ҳолда ортогонал алмаштириш формуласи:

$$x_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}y_2, \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_2.$$

Бу қийматларни берилган квадратик формага қўйиб, юқорида топилган каноник кўринишдаги квадратик форма ҳосил қиламиз.

2- мисол. $x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 4x_2x_3$ квадратик формани каноник кўринишга келтиринг.

Ечиш. Бу ерда: $b_{11} = 1$, $b_{22} = 0$, $b_{33} = 1$, $b_{12} = 2$, $b_{13} = 1$, $b_{31} = 1$, $b_{23} = 2$, $b_{32} = 2$.

(57) характеристик тенглама:

$$\begin{vmatrix} b_{11}-\lambda & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22}-\lambda & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33}-\lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ 1 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3+2\lambda^2+8\lambda=0.$$

Бу тенглама илдизлари $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 0$; квадратик форма $4y_1^2 - 2y_2^2$ каноник кўринишга келади.

48- §. Уч ўлчовли евклид фазосидаги квадрикалар

46- § да n ўлчовли аффин фазодаги квадрикалар таснифи билан муфассил танишдик. Уч ўлчовли аффин фазода 17 хил квадриканинг борлигини ошкор қилиш осондир. (39) даги тенгламаларда k ни 1, 2, 3 сонлар деб олинса 17 та ҳар хил тенглама ҳосил қиламиз.

Шу квадрикаларни уч ўлчовли евклид фазосида қарасак, декарт реперини қулай танлаб олиш йўли билан уларнинг тенгламаларини қуйидаги жадвалда кўрсатилгандек қилиб ёзиш мумкин (ўзгарувчиларни u_1, u_2, u_3 билан эмас, балки эскича белгилашимизга мос равишда x, y, z деб оламиз).

№	Квадриканинг содда тенгламаси	Квадриканинг номи
1	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$	эллипсоид
2	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=-1$	мавҳум эллипсоид
3	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	бир паллали гиперболоид
4	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$	икки паллали гиперболоид
5	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=0$	мавҳум конус
6	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$	учи координаталар бошида бўлган конус
7	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллиптик цилиндр
8	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мавҳум цилиндр
9	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гиперболик цилиндр
10	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	Oz ўқ бўйича кесишувчи 2 та мавҳум текислик

№	Квадриканинг содда тенгламаси	Квадриканинг номи
11	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$	иккита кесишувчи текислик
12	$\frac{x^2}{a^2} = 1$	икки ўзаро параллел текислик
13	$\frac{x^2}{a^2} = -1$	икки мавҳум ўзаро параллел текислик
14	$x^2 = 0$	устма-уст тушган икки текислик
15	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$	эллиптик параболоид
16	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 2z$	гиперболик параболоид
17	$\frac{x^2}{a^2} = 2z$	параболик цилиндр

Бу квадрикаларнинг кўпчилиги билан биз III бобда танишиб ўтганмиз.

49- §. Тўпламлар назариясининг баъзи тушунчалари

E_3 (уч ўлчовли Евклид фазоси)да маркази O нуқтада ва радиуси r га тенг шарни (O, r) билан белгилайлик, шу шарни чегараловчи сфера шарга тегишли бўлмаса, у одатда *очиқ шар* деб аталади. Бу тушунчани E_2 да қарасак, очиқ доира E_1 да эса очиқ кесма, яъни интервал ҳосил бўлади.

Таъриф. (O, r) очиқ шар O нуқтанинг атрофи деб аталади. Демак, E_2 да (текисликда) O нуқтанинг атрофи маркази шу нуқтадаги очиқ доирадан, E_1 да эса ўрта нуқтаси O даги очиқ кесмадан иборат.

Бирор M тўплам берилган бўлсин.

Таъриф. Агар X нуқта ўзининг бирор атрофи билан M тўпламга тўлиқ тегишли, яъни шундай $r>0$ сон мавжуд бўлиб, $(X, r)\subset M$ бўлса, у ҳолда X нуқта M нинг *ички нуқтаси* деб аталади. M нинг барча ички нуқталари тўплами M нинг *ичи* деб аталади ва у $\mathrm{int}\, M$ билан белгиланади.

Таъриф. Агар X нуқтанинг (X, r) атрофи мавжуд бўлиб, у M тўплам билан умумий нуқтага эга бўлмаса, у ҳолда X нуқта M нинг *ташқи нуқтаси* деб аталади. M нинг барча ташқи нуқталари тўплами $\mathrm{ext}\, M$ билан белгиланади ва у M нинг *ташқариси* деб аталади.

Таъриф. X нуқтанинг ҳар қандай атрофи бир вақтда ҳам M га тегишли, ҳам M га тегишли бўлмаган нуқталарни ўз ичига олса, у ҳолда X нуқта M нинг *чегара нуқтаси* дейилади; M нинг барча чегара нуқталари тўплами ∂M билан белгиланади ва M нинг *чегараси* дейилади. Бу таърифлардан кўринадики, M тўпламнинг ички нуқтаси албатта M га тегишли, ташқи нуқтаси M га тегишли эмас. Чегара нуқтаси M га тегишли ҳам бўлиши мумкин, тегишли бўлмаслиги ҳам мумкин экан.

197- чизма

Мисол. 197-чизмада квадрат тасвирланган бўлиб, бу квадратга AD, AB, BC кесмаларнинг нуқталари тегишли, лекин CD кесманинг нуқталари тегишли эмас, у ҳолда N ички нуқта, P ташқи нуқта, Q чегара нуқта бўлиб, M га тегишли, S нуқта эса чегара нуқта бўлиб, M га тегишли эмас.

E_3 даги ихтиёрий M тўплам учун ички, ташқи ва чегара нуқталарнинг таърифидан бевосита қуйидаги муносабатларнинг ўринлилиги келиб чиқади (CM билан E_3 тўпламнинг M га тегишли бўлмаган барча нуқталари тўплами белгиланган, баъзан, у M нинг тўлдирувчиси дейилади):

1. $\partial M = \partial(\text{ext}\, M) = \partial CM$. (1)
2. $\text{int}\ M \cup \text{ext}\, M \cup \partial M = E_3$
3. $\text{int}\, M \cap \text{ext}\, M = \varnothing$
4. $\text{ext}\, M \cap \partial M = \varnothing$.
5. $\text{int}\, M \cap \partial M = \varnothing$

Таъриф. M тўплам учун $\text{int}\, M = M$ бўлса, бу тўплам *очиқ* деб аталади.

Очиқ шар, шунингдек томонларининг нуқталари кирмаган учбурчак ва ҳ. к. лар очиқ тўплам мисолидир.

Таърифдан ҳар қандай M тўплам учун $\text{int} M$ нинг очиқ тўпламлиги кўринади.

Таъриф. Агар M тўпламга унинг барча чегара нуқталарини киритсак, ҳосил қилинган тўплам M нинг ёпиғи деб аталиб, у $\overline{M}$ билан белгиланади, демак, $\overline{M} = \partial M \cup M$.

Таъриф. Ўзининг ёпиғи билан устма-уст тушган тўплам *ёпиқ тўплам* деб аталади (яъни $M = \overline{M}$ бўлса).

Очиқ M тўплам учун $\text{ext}\, M \cup \partial M$ ёпиқ тўплам бўлади, бу тўплам CM дир.

Демак, очиқ тўпламнинг тўлдирувчиси ёпиқ тўпламдир.

Ихтиёрий M тўплам учун $\text{int}\ M \cup \text{ext}\, M$ тўплам очиқ бўлади. Ҳақиқатан ҳам, шу тўпламни N билан белгиласак, $x \in N$ бўлса, $x \in \text{int}\, M$ ёки $x \in \text{ext}\, M$. $\text{ext}\ M$ ва $\text{int}\, M$ тўпламларнинг ҳар бири очиқ бўлгани учун x ўзининг бирор атрофи билан шу тўпламларнинг бирига тегишли бўлади, у ҳолда шу атроф N га ҳам тегишли, демак, N очиқ тўпламдир. Шунга ўхшаш, исталган сондаги очиқ тўпламларнинг бирлашмаси ҳам очиқ тўплам эканлигини кўрсатиш мумкин.

У ҳолда (1) даги муносабатларнинг иккинчисига асосан

$$\partial M = E_3 \setminus (\text{ext}\, M \cup \text{int}\, M)$$

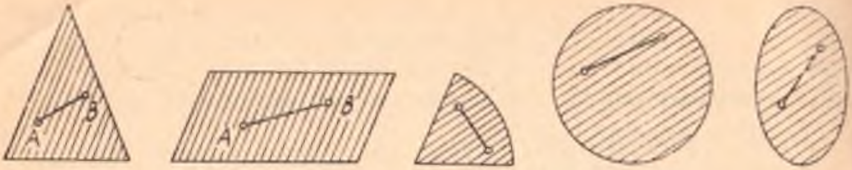
ва $\text{ext}\, M \cup \text{int}\, M$ нинг очиқ тўплам эканлигидан ∂M ёпиқ тўплам деган хулоса чиқади. Демак, ҳар қандай тўпламнинг чегараси ёпиқ тўпламдир.

50- §. Қавариқ фигуралар

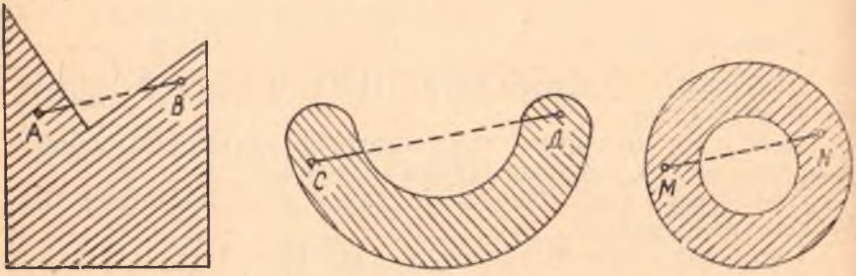
Нуқталардан ташкил топган ҳар қандай тўпламнинг фигура деб аталишини эслатиб ўтамиз.

Таъриф. F фигуранинг ихтиёрий икки A, B нуқтасини туташтирувчи AB кесманинг барча нуқталари F га тегишли бўлса, F *қавариқ фигура* деб аталади. Бўш тўплам ва битта нуқта ҳам қавариқ деб олинади.

198- чизмада тасвирланган фигуралар қавариқ, лекин 199-



198- чизма



199- чизма

чизмадаги фигуралар эса қавариқ эмас, фазовий фигуралардан шар, пирамида, доиравий цилиндр ва ҳ.к. қавариқ фигураларга мисолдир.

Бу фигураларнинг чегаралари ўзига тегишли ёки тегишли бўлмаслиги мумкин. Бундан ташқари, шундай қавариқ фигуралар борки, улар ё тўғри чизиққа, ёки текисликка тегишли бўлади; биринчи ҳолда *бир ўлчовли,* иккинчи ҳолда *икки ўлчовли қавариқ фигура* берилган деймиз. Барча нуқтаси бир текисликда жойлашмаган қавариқ фигура уч ўлчовли қавариқ фигурадир.

Бир ўлчовли қавариқ фигуралар учтадир, улар кесма, нур ва тўғри чизиқнинг ўзидир (бир ўлчовли бошқа қавариқ фигураларнинг мавжуд эмаслигини биз исботламаймиз).

Қавариқ фигуралар қатор хоссаларга эга.

1. Қавариқ ясси фигура учун $A \in \operatorname{int} F$ ва $B \in \operatorname{int} F$ бўлса, AB кесманинг барча нуқталари ҳам $\operatorname{int} F$ га тегишлидир.

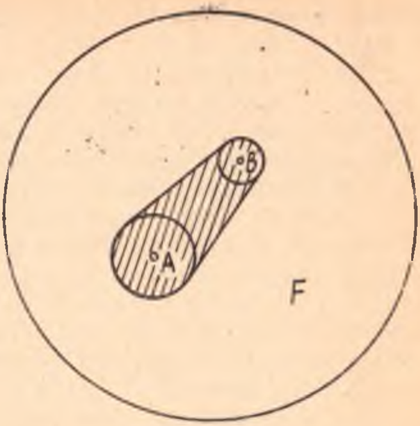
Исбот. F ясси қавариқ фигура бўлсин. A, B нуқталар F нинг ички нуқталари бўлгани учун шундай r_A, r_B сонлар топиладики, (A, r_A), (B, r_B) доиралар F га тўла тегишли бўлади. F нинг қавариқ эканлигидан бу доиралар ва уларга ўтказилган ташқи умумий уринмалар орасида ҳосил қилинган F_0 фигура ҳам қавариқ ва $F_0 \subset F$ (200- чизмада штрихланган соҳа). AB кесманинг ихтиёрий нуқтаси C бўлсин, у ҳолда r_A, r_B сонлардан кичигини r_C деб олсак, (C, r_C) доира F_0 га тегишли ва $F_0 \subset F$ бўлгани учун $(C, r_C) \subset F$, демак, $C \in \operatorname{int} F$. ▲

2°. F — қавариқ фигура ва $A\in\partial F$, $B\in \operatorname{int} F$ бўлса, AB кесманинг A дан бошқа барча нуқталари F нинг ички нуқтасидир.

3°. F қавариқ фигура ва $A\in\partial F$, $B\in\partial F$ бўлса, $AB\subset\partial F$ ёки AB кесманинг учларидан бошқа барча нуқталари F нинг ички нуқтаси бўлади.

Бу икки хосса ҳам 1° га ўхшаш исботланади.

4°. F қавариқ фигуранинг ички нуқтасидан ўтган u тўғри чизиқ F нинг иккитадан ортиқ чегара нуқтасини ўз ичига олмайди.



200- чизма

Исбот. $M_0\in u$, $M_0\in \operatorname{int} F$ бўлсин. Фараз қилайлик, u тўғри чизиқда F нинг иккитадан ортиқ, аниқроғи, учта нуқтаси бўлсин, уларни A, B, C билан белгилайлик. Бу уч нуқтанинг камида иккитаси, масалан, A, B лар M_0 нинг бир томонида ва A, B нинг биттаси, масалан, B нуқта A билан M_0 орасида ётади; демак, 2° га асосан B нуқта F нинг ички нуқтасидир. Бу эса B ни чегара нуқта деган фаразимизга зиддир. ▲

5°. Агар u тўғри чизиқ қавариқ F фигуранинг битта ҳам ички нуқтасидан ўтмаса, F фигура u тўғри чизиқ билан аниқланадиган ёпиқ ярим текисликлардан фақат бирига тегишлидир.

Исбот. $A\in \operatorname{int} F$, $A\,\overline{\in}\,u$ бўлсин. A нуқта ва u тўғри чизиқ билан аниқланадиган ярим текисликни $[u, A)$ деб белгилайлик, $F\subset[u, A)$ эканини исботлаймиз. Агар F га тегишли, лекин $[u, A)$ ярим текисликка тегишли бўлмаган B нуқта мавжуд деб фараз қилсак, AB кесманинг барча нуқталари 1° ёки 2° га асосан F нинг ички нуқталари бўлади ҳамда AB кесма u тўғри чизиқни кесиб, кесимда ҳосил этилган нуқта F нинг ички нуқтаси бўлади. Бу эса шартга зид. Демак, F нинг барча нуқталари $[u, A)$ га тегишлидир.

1-теорема. *Исталган сондаги қавариқ фигураларнинг кесишмаси ҳам қавариқ фигура бўлади.*

Исбот. (F_α) — исталган сондаги қавариқ фигуралар тўплами берилган бўлсин. Бу фигураларнинг барчасининг кесишмасини F деб белгилайлик ($F=\bigcap_{\alpha} F_\alpha$). Агар F тўплам бўш ёки битта нуқтадан иборат бўлса, таърифга асосан бу фигуралар қавариқдир. Энди F камида иккита A, B нуқтага эга бўлсин дейлик: $A\in\bigcap_{\alpha} F$, $B\in\bigcap_{\alpha} F_\alpha$, у ҳолда бу A, B нуқталар F_α нинг ҳар бирига тегишлидир. F_α нинг қавариқлигидан AB кесма $\subset F_\alpha$, демак, AB кесма $\subset\bigcap_{\alpha}\cdot F_\alpha$ бўлиб, F қавариқдир.

Ихтиёрий F фигура берилган бўлсин.

Таъриф. F фигурани ўз ичига олувчи барча қавариқ фигураларнинг кесишмасидан ҳосил этилган фигура F нинг *қавариқ қобиғи* деб аталади ва $Қ(F)$ деб белгиланади.

Бу таърифдан кўриниб турибдики, F қавариқ фигура учун $Қ(F) = F$, лекин қавариқ бўлмаган F учун $F \subset Қ(F)$ дир. F_1 қавариқ фигура учун $F \subset F_1$ бўлса, таърифдан равшанки, $F \subset Қ(F) \subset F_1$. Шу маънода, фигуранинг қавариқ қобиғи шу фигурани ўз ичига олувчи энг кичик қавариқ фигурадир.

Мисол. Битта нуқтадан иборат F фигура учун $Қ(F) = F$. Иккита A, B нуқтадан иборат фигура учун $Қ(F) = AB$ кесма; бир тўғри чизиқда ётмаган учта A, B, C нуқтадан иборат F фигура учун $Қ(F)$ фигура учлари A, B, C нуқталарда бўлган учбурчакдан ва бир текисликда ётмаган тўртта A, B, C, D нуқтадаги фигура учун эса $Қ(F)$ учлари шу нуқталардаги тетраэдрдан иборат.

2- теорема. $F_1 \subset F_2 \Rightarrow Қ(F_1) \subset Қ(F_2)$.

Бу теоремани исботлаш учун қавариқ фигура ва қавариқ қобиқ таърифларини эслаш кифоя (мустақил исботланг).

3- теорема. *Ихтиёрий икки F_1, F_2 фигура учун*

$$Қ(F_1 \cup F_2) = Қ(Қ(F_1) \cup F_2).$$

Исбот. $F_1 \cup F_2 \subset Қ(F_1) \cup F_2$ (*) бўлгани учун 2- теоремага асосан

$$Қ(F_1 \subset F_2)\,Қ(Қ(F_1) \cup F_2). \qquad (**)$$

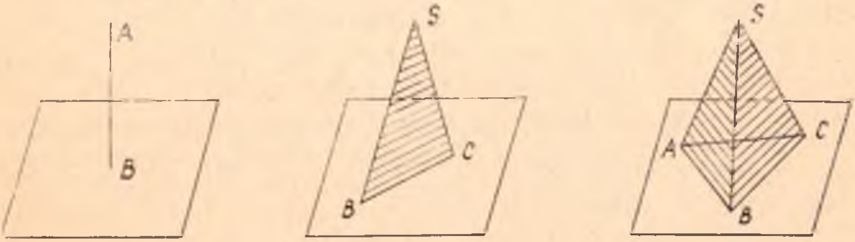
Лекин $Қ(F_1 \cup F_2)$ фигура $Қ(F_1)$ билан F_2 ни ўз ичига олувчи қавариқ фигура бўлгани учун 2- теоремага асосан

$$Қ(Қ(F_1) \cup F_2) \subset Қ(F_1 \cup F_2). \qquad (***)$$

(**), (***) дан $Қ(F_1 \cup F_2) = Қ(Қ(F_1) \cup F_2)$. ▲

F — текисликдаги қавариқ тўплам ва A — шу текисликка тегишли бўлмаган нуқта бўлсин. F нинг ҳар бир N нуқтасини A билан туташтиришдан AN кесмалар тўпламини ҳосил қиламиз. Шу тўпламни қисқача $K(FA)$ деб белгилаб, уни A учли ва F *асосли конус* деб атаймиз.

Агар F битта B нуқтадан иборат бўлса, $K(B, A) = AB$ кесма, $F = BC$ бўлса, $K(F, A) = \triangle ABC$. $F = \triangle BCD$ ҳолда $K(F, A)$ фи-



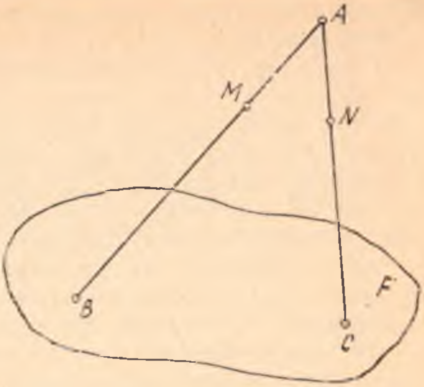
201- чизма

гура $ABCD$ учбурчакли пирамида бўлади (201-чизма).

4-теорема. *A нуқта ва қавариқ фигура учун қуйидаги муносабат ўринлидир;*

$$K(F,\ A) = \text{Қ}(F \cup A).$$

Исбот. $A \in F$ бўлган ҳолда $K(F,\ A) = F$ бўлиб, теорема ўринли. $A \bar{\in} F$ ҳолни қарайлик. Равшанки, $A \cup F$ фигурани ўз ичига олувчи ҳар қандай қавариқ фигура $K(F,\ A)$ ни ҳам ўз ичига олади. У ҳолда теореманинг ўринлилигини кўрсатиш учун $K(F,\ A)$ нинг қавариқ эканини кўрсатиш керак.



202-чизма

$\forall M,\ N \in K(F,\ A)$ ни олайлик, у ҳолда M нуқта AB кесмага, N эса тегишли ҳамда $B,\ C \in F$ бўлиб, F қавариқ фигура бўлгани учун кесма $BC \subset F_0$. Бундан кесма $MN \subset \triangle ABC$ бўлиб, $\triangle ABC \subset K(F,\ A)$, демак, кесма $MN \subset K(F,\ A)$ ва $K(F,\ A)$ — қавариқ (202-шакл). ▲

Биз юқорида қавариқ фигураларнинг баъзи хоссалари билан танишиб ўтдик. Энди қавариқ фигурани ҳосил қилиш масаласига тўхталайлик.

Одатда, биз ўрганадиган қавариқ фигуралар қуйидаги икки усулнинг бири орқали ҳосил қилинади.

I усул. 1-теоремага асосан қавариқ фигураларнинг кесишмаси ҳам қавариқ фигура бўлгани учун текисликда қавариқ фигураларнинг соддаси сифатида яримтекисликлар олинади. Уларнинг кесишмасидан ҳосил қилинган қавариқ фигуралар текширилади, фазода эса яримфазоларнинг кесишмасидан ҳосил этилган фигуралар қаралади.

II усул. Қавариқ фигуралар шу фигурага нисбатан соддароқ бўлган фигураларнинг қавариқ қобиғи сифатида ҳосил қилинади. Кўпинча, бу содда фигуралар сифатида чекли сондаги нуқталар ёки чекли сондаги нурлар, ёки чекли сондаги нуқталар ва нурлар қаралади. Чекли сондаги нуқталарнинг қавариқ қобиғини қараш текисликда чегараланган кўпбурчак тушунчасига, фазода эса чегараланган қавариқ кўпёқ тушунчасига олиб келади. Чекли сондаги нурларнинг қавариқ қобиғини қараш кўпёқли бурчак тушунчасига олиб келади.

51-§. Қавариқ кўпбурчаклар

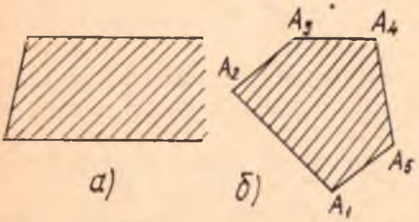
Тайин П текислик ва шу текисликда F қавариқ фигура берилган бўлсин. $u \subset \Pi$ тўғри чизиқ F нинг ички нуқтасидан ўтмасин. У ҳолда $F \cap u = \partial F \cap u$. Демак, u тўғри чизиқ ∂F билан кесишмаслиги, битта умумий нуқтага эга бўлиши ёки умумий кесмага эга бўлиши ёки умумий нурга, ниҳоят умумий шу тўғри чизиққа эга бўлиши мумкин.

Таъриф. F қавариқ фигуранинг ∂F чегараси чекли сондаги кесма ва нурларнинг бирлашмасидан иборат бўлса, F *қавариқ кўпбурчак* деб аталади. Бунда ∂F да бир вақтда кесма ва нурларнинг бўлиши талаб қилинмайди; агар ∂F нинг таркибида камида битта нур бўлса, F *чексиз қавариқ кўпбурчак* ва ∂F нинг таркибида фақат кесмаларгина қатнашса, у *чегараланган қавариқ кўпбурчак* деб аталади.

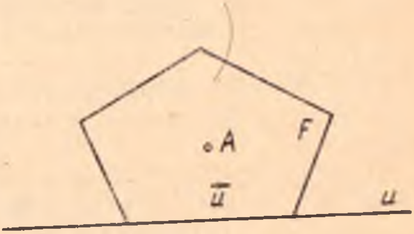
203- *а* чизмада чексиз қавариқ кўпбурчак, 203- *б* чизмада чегараланган қавариқ кўпбурчак тасвирланган.

чакларнинг *томонлари*, бу томонларнинг умумий учлари кўп-
∂F нинг таркибига кирган кесмалар ва нурлар шу кўпбур-
бурчакнинг *учлари* деб аталади.

Кўпбурчак одатда учларини белгиловчи нуқталар ёрдамида ёзилади, масалан, 203- *б* чизмадаги бешбурчак $A_1A_2A_3A_4A_5$ деб ёзилади. Ҳарфлар тартиби кўпбурчак чегараси орқали маълум йўналишда (масалан, соат мили ҳаракати йўналишида) олинади.



203- чизма



204- чизма

5- теорема. *Қавариқ кўпбурчак ўзининг бир томони орқали ўтган тўғри чизиқ билан аниқланадиган ярим текисликлардан фақат бирига тегишли бўлади.*

Исбот. F бирор қавариқ кўпбурчак бўлсин, унинг ихтиёрий томони $\overline{u}$ бўлиб, шу томон орқали ўтган тўғри чизиқни u деб белгилайлик (204- чизма). Фараз қилайлик, қавариқ кўпбурчак u тўғри чизиқ билан аниқланган Π_1, Π_2 ярим текисликларнинг бирига эмас, балки иккаласига ҳам тегишли бўлсин. F нинг бирор ички нуқтасини A деб белгилайлик. Ички нуқтанинг таърифига асосан унинг шундай $(A,\ r_A)$ атрофи мавжудки, $(A,\ r_A) \subset \operatorname{int} F$ бўлиб, $(A,\ r_A) \cap$ $\cap\ u = \varnothing$. $(A,\ r_A)$ доира u нинг бир томонида бўлсин. Фаразга кўра u нинг икки томонида F нинг нуқталари ётгани учун A тегишли бўлмаган яримтекисликда F нинг бирор B нуқтасини оламиз, $B \in \operatorname{int} F$ ёки $B \in \partial F$ бўлиши мумкин. Қайси ҳол юз беришидан қатъи назар AB кесманинг A учи ички нуқта бўлгани учун юқоридаги 1°- ёки 2°- хоссаларга асосан AB нинг барча нуқталари ($B \in \partial F$ бўлса, B дан бошқа) F нинг ички нуқтасидир, AB кесма u тўғри чизиқни бирор N нуқтада кесиб, бу нуқта бир вақтда $\bar{u}$ га ва $\operatorname{int} F$ га тегишли бўлади. Ички нуқта чегара нуқта бўла олмагани учун зидлик ҳосил қилинди. ▲

6- теорема. *Қавариқ кўпбурчак ҳар бир томонидан ўтган тўғри чизиқ билан аниқланадиган ва шу кўпбурчакни ўз ичига олувчи барча яримтекисликлар кесишмасидан иборатдир, яъни кўпбурчакнинг томони n та бўлса ҳамда ҳар бир* $\Pi_{\bar{u}_i}$ *ярим текислик F ни ўз ичига олса, у ҳолда*

$$F = \bigcap_{i=1}^{n} \Pi_{\bar{u}_i} .$$

Исбот. Равшанки,

$$F \subset \bigcap_{i=1}^{n} \Pi_{\bar{u}_i}. \qquad (*)$$

Фараз қилайлик, шундай B нуқта мавжуд бўлсинки, у $B \in \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Pi_{\bar{u}_i}$ ва $B \overline{\in} F$ бўлсин. $A \in \operatorname{int} F$ ни олайлик. У ҳолда AB кесма ∂F ни бирор N нуқтада кесади, $\partial F = \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Pi_{\bar{u}_i}$, демак, N нуқта $\bar{u}_i$ нинг бирортасига тегишли ҳамда A, B нуқталар $\Pi_{\bar{u}_i}$ томоннинг икки томонида жойлашиб қолади, бу эса B нуқта $\Pi_{\bar{u}_i}$ яримтекисликка тегишли эмаслигини билдиради, хуллас $B \overline{\in} \bigcap\limits_{i=1}^{n} \Pi_{\bar{u}_i}$, бу эса фаразга зиддир.

7- теорема. *Чегараланган қавариқ кўпбурчак шу кўпбурчак учларининг қавариқ қобиғидан иборатдир.*

Исбот. F чегараланган қавариқ кўпбурчак ва унинг учлари $A_1, A_2, \ldots, A_n$ бўлсин. $n = 3$ бўлса, теорема равшан, чунки бу ҳолни 50- § да мисол тариқасида кўрганмиз.

$k = n - 1$ учун теорема ўринли деб олиб, $k = n$ учун исботлаймиз. F нинг A_2A_n диагоналини ўтказамиз (қавариқ кўпбурчакнинг ўзаро қўшни бўлмаган икки учидан ўтган тўғри чизиқ унинг *диагонали* деб аталади). У ҳолда $F = \triangle A_1A_2A_n \cup F'$ (бунда F' фигура учлари $A_2, A_3, \ldots, A_n$ нуқталарда бўлган қавариқ кўпбурчак) бўлиб, индукция методига асосан

$$\text{Қ}(A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n) = F'.$$

3- теоремага асосан

$$\text{Қ}(\triangle A_1A_2A_3 \cup F') = \text{Қ}(\text{Қ}(\triangle A_1A_2A_n) \cup F') = \text{Қ}(A_1 \cup F') =$$
$$= \triangle A_1A_2A_n \cup F' = F. \ ▲$$

8- теорема. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 2)$ *бир текисликда бўлиб, улар; 1) бир тўғри чизиқда ётса, уларнинг қавариқ қобиғи кесма, 2) бир тўғри чизиқда ётмаса, уларнинг қавариқ қобиғи қавариқ кўпбурчак бўлади.*

Исбот. Агар берилган нуқталар бир тўғри чизиқда ётса, қобиқнинг таърифига асосан теорема равшан.

Теореманинг иккинчи қисмини исботлайлик. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqslant 3)$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётмасин. $n = 3$ бўлган ҳолда A_1, A_2, A_3 нуқталарнинг қавариқ қобиғи учбурчакдир. Теоремани $n-1$ та нуқта учун ўринли деб олиб, n та нуқта учун исботлаймиз.

$\text{Қ}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{n-1})$ ва $\text{Қ}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)$ ни мос равишда F_{n-1}, F_n билан белгилайлик. У ҳолда $\text{Қ}(F_{n-1}) = F_{n-1}$, шунинг учун

$$F_n = \text{Қ}(\text{Қ}(F_{n-1}) \cup A_n) = \text{Қ}(F_{n-1} \cup A_n).$$

4- теоремага асосан $\text{Қ}(F_{n-1} \cup A_n) = KF(F_{n-1}, A_n)$, бундан $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — бир текисликда олингани учун $K(F_{n-1}, A_n)$ конус қавариқ кўпбурчакдан иборат. A_n нуқта $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ нуқталарнинг қавариқ қобиғига тегишли бўлмаса, A_n шу конуснинг учи, яъни кўпбурчакнинг учи бўлади (акс ҳолда, албатта A_n нуқта кўпбурчак учи бўлмайди). ▲

Энди кўпбурчакнинг ички бурчаги тушунчасини киритайлик. Учлари $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталарда бўлган кўпбурчакни F билан белгилайлик. Равшанки, бу учларнинг ихтиёрий учтаси бир тўғри чизиқда ётмайди. F нинг ихтиёрий бир учини, масалан, A_1 ни олайлик ҳамда учи A_1 нуқтада бўлган $n-1$ та $A_1A_2, \ldots, A_1A_n$ нурларни ўтказайлик. Бу нурлар ҳар хил бўлиб, иккитаси бир тўғри чизиқда ётмайди. A_1A_i, A_1A_k $(i \neq k,\ i, k = 2, 3, \ldots, n)$ нурлардан ҳосил бўлган бурчакларнинг ёйиқ бурчакдан кичик бўлганини $\angle A_iA_1A_k$ деб белгиласак, i, k лар 2, 3, ..., n қийматларни қабул қилгани учун учи A_1 нуқтада бўлган $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ та бурчак ҳосил қиламиз.

Бу бурчаклардан энг каттасини (яъни қолган бурчакларнинг барчасини ўз ичига олувчи бурчакни) $\angle A_2A_1A_n$ билан белгилайлик, у ҳолда бу бурчак қуйидаги икки хоссага эга:

1°. Бу бурчакнинг ҳар бир томони F нинг A_1 дан бошқа яна битта учидан ўтади.

2°. $F \subset \angle A_2A_1A_n$, чунки бу бурчак ёйиқ бурчакдан кичик бўлиб, уни иккита ёпиқ ярим текисликнинг кесишмаси деб қарасак, бу яримтекисликларнинг ҳар бирида $A_1, A_2, \ldots, A_n$ нуқталар борлиги учун бу нуқталарнинг қавариқ қобиғи ҳам (яъни F кўпбурчак) шу кесимда бўлади.

Таъриф. Юқоридаги икки хоссага эга бўлган бурчак F кўпбурчакнинг A учидаги *ички бурчаги* деб аталади.

Демак, қавариқ n бурчакда n та ички бурчак бор экан. Ўрта мактаб геометрия курсидан маълумки, ҳар қандай қавариқ n бурчак барча ички бурчакларининг йиғиндиси $2d(n-2)$ га тенгдир.

Агар кўпбурчакнинг барча томонлари ўзаро конгруэнт ва бурчаклари ҳам ўзаро конгруэнт бўлса, у *мунтазам кўпбурчак* деб аталади.

Масалан, тенг томонли учбурчак мунтазам учбурчакдир, квадрат мунтазам тўртбурчакдир, лекин ромб мунтазам тўртбурчак эмас, чунки томонлари ўзаро конгруэнт бўлгани билан бурчаклари ўзаро конгруэнт эмас.

52-§ Қавариқ кўпёқлар

E_3 да барча нуқталари бир текисликка тегишли бўлмаган қавариқ M тўплам берилган бўлсин; равшанки, бу тўпламнинг бир текисликда ётмаган камида тўртта нуқтаси мавжуддир. У ҳолда M тўплам учлари шу нуқталарда бўлган тетраэдрни ўз ичига тўла олади, демак, M тўплам E_3 га нисбатан ички нуқталарга эгадир.

Таъриф. E_3 га нисбатан ички нуқталарга эга бўлган ёпиқ қавариқ тўплам *қавариқ жисм* деб аталади.

Шар, шар сегменти, призма ва ҳ. к. қавариқ жисмга мисол бўла олади.

M қавариқ жисм қуйидаги хоссаларга эга.

1. $A \in \operatorname{int} M$, $B \in \operatorname{int} M \Rightarrow [AB] \subset \operatorname{int} M$ (AB — кесма),

2. $A \in \partial M$, $B \in \operatorname{int} M \Rightarrow AB$ кесманинг A дан фарқли барча нуқталари M нинг ички нуқталари бўлади.

3. $A \in \partial M$, $B \in \partial M \Rightarrow [AB] \subset \partial M$ ёки AB кесманинг A, B дан бошқа барча нуқталари M нинг ички нуқталари бўлади.

4. Агар u тўғри чизиқ M нинг бирорта ички нуқтасидан ўтса, у M нинг кўпи билан иккита чегара нуқтасидан ўтади.

5. Агар П текисликда M нинг ички нуқтаси бўлмаса, M нинг барча нуқтаси П билан аниқланадиган иккита ёпиқ ярим фазодан бирига тўла тегишли бўлади.

Бу хоссаларнинг исботи 50-§ даги қавариқ фигура хоссаларининг исботидан фарқ қилмайди. Шунинг учун биз бу ерда бу хоссаларни исботламаймиз.

Таъриф. Агар M қавариқ жисмнинг чегараси (яъни ∂M) чекли сондаги қавариқ кўпбурчаклар бирлашмасидан иборат бўлса, у *қавариқ кўпёқ* деб аталади.

Агар ∂M нинг таркибида камида битта нур бўлса, бундай кўпёқ *чексиз қавариқ кўпёқ* деб аталади.

Агар ∂M фақат чегараланган кўпбурчаклардан иборат бўлса, M *чегараланган қавариқ кўпёқ* деб аталади. ∂M ни ташкил қилувчи қавариқ кўпбурчакларнинг ҳам бири M нинг ёғи деб аталади. Ёқларнинг умумий томонлари қавариқ кўпёқнинг *қирралари,* қирраларининг умумий учлари кўпёқнинг *учи* деб аталади.

Барча қавариқ кўпёқлар қуйидаги икки хоссага эга.

1. M қавариқ кўпёқнинг ҳар бир ёғи билан аниқланадиган П текисликда M нинг ички нуқтаси бўлмайди.

Исбот. Тескарисини фараз қилайлик, яъни $M_0 \in \operatorname{int} M$ бўлиб, $M_0 \in П$ бўлсин. П текисликда ётган ва M_0 нуқтадан ўтувчи u тўғри чизиқни олайлик, равшанки, бу u тўғри чизиқ П текисликда ётган ёқ билан иккитадан кўп умумий нуқтага эга бўлади, бу эса шу параграфдаги 4- хоссага зиддир.

Бу хоссадан ва юқоридаги 5° ни эътиборга олсак, қуйидаги иккинчи хосса келиб чиқади.

2. M қавариқ кўпёқнинг барча нуқталари унинг бирор ёғи ётган текислик билан аниқланадиган ёпиқ ярим фазолардан бирига тўла тегишлидир.

M нинг барча нуқталари P_k ёғи ётган П текислик билан аниқланган ёпиқ яримфазолардан бирига тегишли бўлса, шу яримфазо M нинг P_k билан аниқланган *яримфазоси* дейилади.

Теорема. *Ҳар қандай қавариқ кўпёқ ўзининг ҳар бир ёғи билан аниқланган барча яримфазолар кесишмасидан иборатдир.*

Исбот. M қавариқ кўпёқнинг ёқларини $P_1, P_2, \ldots, P_n$ билан белгилайлик. M нинг шу ёқлари билан аниқланган яримфазоларни $П'_1, П'_2, \ldots, П'_n$ деб олайлик. $П'_1 \cap П'_2 \cap \ldots \cap П'_n = \bigcap_{i=1}^{n} П'_i = S$ десак, $S = M$ эканини исботлаш керак, $N \in M$ бўлсин, у ҳолда қавариқ кўпёқнинг 2°- хоссасига асосан $N \in П'$, $N \in П'_2, \ldots, N \in П'_n$, демак, $N \in S$. $Q \overline{\in} M$ ни олайлик, у холда $Q \in \operatorname{ext} M$ бўлиб, ON кесма M нинг бирор P_i ёғи билан аниқланган $П'_i$ текисликни кесади. $N \in П'_i$ бўлгани учун $Q \overline{\in} П'_i$, демак, $Q \overline{\in} S$. Бундан кўринадики, M га тегишли нуқталаргина S га тегишли бўлади, демак, $S = M$. ▲

Бундан қуйидаги хулоса келиб чиқади.

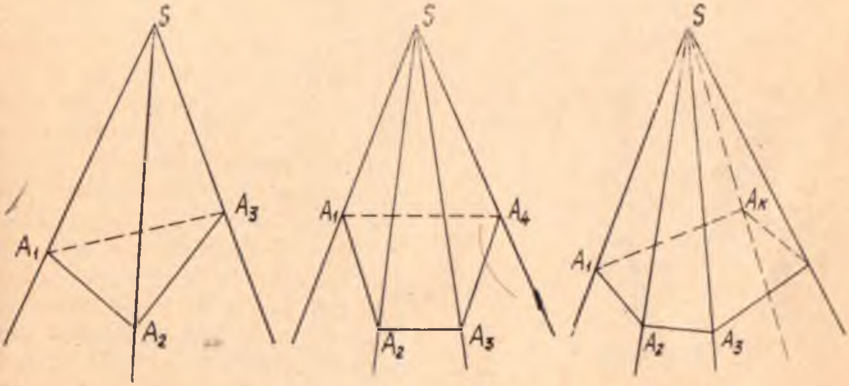
Ҳар қандай қавариқ кўпёқни чекли сондаги ёпиқ ярим фазоларнинг кесишмасидан ҳосил қилинган деб қараш мумкин. Баъзи китобларда бу хулоса қавариқ кўпёқнинг таърифи сифатида ҳам қабул қилинади.

53- §. Қавариқ кўпёқнинг кўп ёқли бурчаклари

Аввало кўп ёқли бурчак тушунчаси билан танишиб ўтайлик. П текисликда $A_1A_2 \ldots A_n$ кўпбурчак ва $S \overline{\in} П$ нуқта берилган бўлсин.

Таъриф. Учи S нуқтада бўлиб, $A_1A_2 \ldots A_n$ кўпбурчакнинг ҳар бир N нуқтасидан ўтган SN нурлар тўплами *кўп ёқли бурчак* деб аталади ва у $SA_1A_2 \ldots A_n$ билан белгиланади. S нуқта кўп ёқли бурчакнинг *учи*, SA_1, SA_2, . . . ,SA_n нурлар эса *қирралари*, $\angle A_1SA_2$, $\angle A_2SA_3$, . . . , $\angle A_nSA_1$ бурчаклар унинг *ясси бурчаклари* деб аталади. Кўп ёқли бурчакнинг умумий қиррага эга бўлган ҳар икки ёғидан тузилган фигура унинг *икки ёқли бурчаги* дейилади.

Равшанки, $A_1A_2 \ldots A_n$ кўпбурчак қавариқ бўлса, $SA_1A_2 \ldots A_n$ кўп ёқли бурчак ҳам қавариқ фигура бўлади, биз фақат қавариқ кўпёқли бурчаклар билан танишамиз. Кўп ёқли бурчаклар ёқларининг сонига қараб уч ёқли, тўрт ёқли, . . . , n ёқли бўлиши мумкин (205- чизма).

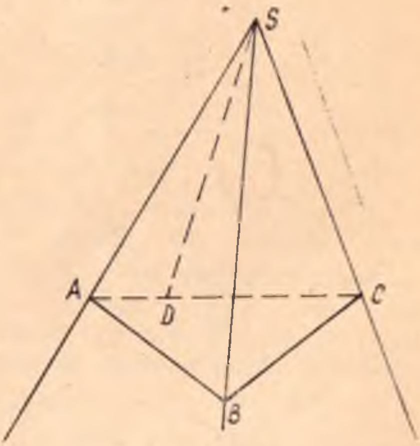


205- чизма

Кўп ёқли бурчаклар учун қуйидаги теоремалар ўринлидир.

Теорема. *Уч ёқли бурчак ҳар бир ясси бурчагининг миқдори қолган икки ясси бурчаги миқдорларининг йиғиндисидан кичикдир.*

Исбот. $SABC$ уч ёқли бурчак берилган бўлсин (206- чизма). Агар шу уч ёқли бурчак учала ясси бурчагининг миқдорлари тенг бўлса, теорема равшаьдир. Фараз қилайлик, $\widehat{ASC} > \widehat{BSC}$ бўлсин. У ҳолда CS тўғри чизиқ ва A нуқта

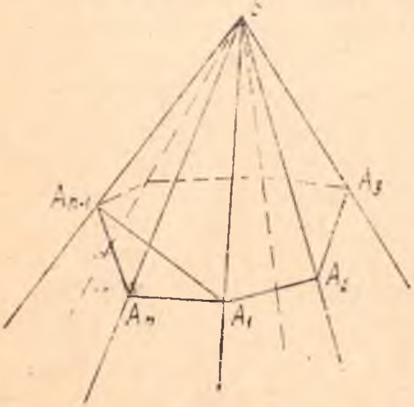


206- чизма

билан аниқланадиган ярим текисликда учи S нуқтада ва бир томони SC нурда бўлган шундай $\widehat{CSD}$ бурчак мавжудки, у бурчак $\widehat{CSB}$ бурчакка конгруэнт. D нуқтани шундай оламизки, $SB \equiv SD$ бўлсин. У ҳолда $AC < AB + BC$ ва $AC = AD + DC$ бўлгани учун $AD < AB$. $\triangle ASD$ билан $\triangle ASB$ ни таққосласак, $\widehat{ASD} < \widehat{ASB}$; бу тенгсизликнинг иккала қисмига конгруэнт $\angle CSB$, $\angle CSD$ бурчакларнинг миқдорларини қўшамиз:

$$\widehat{ASD} + \widehat{CSD} < \widehat{ASB} + \widehat{CSB} \text{ ёки}$$

$$\widehat{ASC} < \widehat{ASB} + \widehat{CSB} \blacktriangle.$$



207- чизма

Теорема. *Қавариқ кўп ёқли бурчакнинг барча ясси бурчаклари миқдорларининг йиғиндиси 4d дан кичик.*

Исбот. n ёқли $SA_1A_2 \ldots A_n$ бурчакни кўрайлик (207- чизма). $A_1A_2 \ldots A_n$ кўпбурчакнинг ҳар бир учини тайин уч ёқли бурчакнинг учи деб олиш мумкин, масалан, A_1 ни $A_1A_2SA_n$ уч ёқли бурчакнинг учи деб, A_2 ни $A_2A_3SA_1$ уч ёқли бурчакнинг учи деб ва ҳ. к. олиш мумкин. Шу уч ёқли бурчакларнинг ҳар бирига аввалги теоремани татбиқ қиламиз.

$$\widehat{A_2A_1A_n} < \widehat{A_2A_1S} + \widehat{A_nA_1S},$$

$$\widehat{A_1A_2A_3} < \widehat{A_1A_2S} + \widehat{A_3A_2S},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\widehat{A_{n-1}A_nA_1} < \widehat{A_{n-1}A_nS} + \widehat{A_1A_nS}.$$

Бу тенгсизликларнинг барчасини чап ва ўнг қисмларини мос равишда қўшсак, чап қисмида $A_1A_2 \ldots A_n$ n бурчак ички бурчакларининг йиғиндиси ҳосил бўлиб, у $2d\,(n-2)$ га тенгдир, ўнг томонда эса $\triangle A_1SA_2$, $\triangle A_2SA_3$, ..., $\triangle A_nSA_1$ учбурчакларнинг барча ички бурчаклари йиғиндиси билан шу учбурчакларнинг S учидаги бурчаклари йиғиндисининг айирмаси ҳосил қилинади:

$$2d\,(n-2) < 2d \cdot n - \Omega, \qquad (*)$$

бунда Ω — берилган n ёқли бурчакнинг учидаги ясси бурчакларнинг йиғиндиси. У ҳолда (*) дан $\Omega < 4d$. ▲

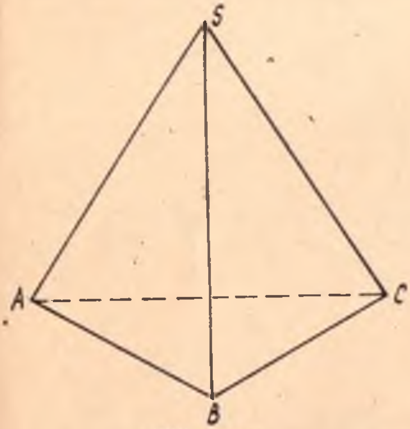
Таъриф. Қавариқ кўпёқнинг бирор A учини олайлик. У ҳолда A нуқтани шундай кўп ёқли бурчакнинг учи деб қараш мумкинки, унинг ёқлари M нинг шу нуқтадан чиққан ёқлари, қирралари эса M нинг шу нуқтадан чиққан қирраларидан иборатдир. Бу кўп ёқли бурчак M нинг A учидаги *кўп ёқли бурчаги* деб аталади.

Бу таърифдан қавариқ кўпёқ учларининг сони унинг кўп ёқли бурчаклари сонига тенг деган хулоса чиқади. Масалан, параллелепипеднинг 8 та уч ёқли бурчаги (8 та учи), тўртбурчакли пирамиданинг эса 4 та уч ёқли бурчаги ва битта тўрт ёқли бурчаги (5 та учи) бордир.

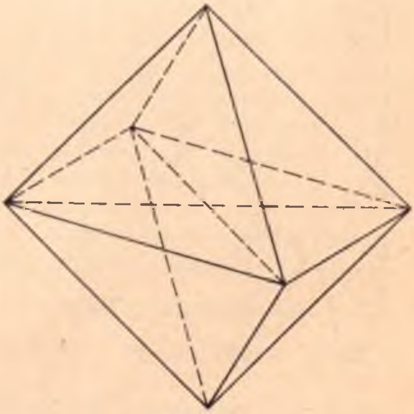
54- §. Мунтазам кўпёқлар

Кўпёқнинг барча ёқлари конгруэнт мунтазам кўпбурчаклардан иборат бўлиб, ҳамма кўп ёқли бурчаклари ҳам конгруэнт бўлса, у *мунтазам кўпёқ* деб аталади.

Равшанки, кўпёқнинг ҳар бир учидан камида учта ёғи ўтганлиги учун 53- § даги иккинчи теоремага асосан шу учдаги барча ясси бурчакларнинг йиғиндиси $4d$ дан кичикдир. Мунтазам кўпёқнинг ёқлари мунтазам учбурчаклардан иборат бўлса, унинг ҳар бир учидан учта ёқ ўтиши (чунки $3\cdot 60^\circ < 4d$), тўртта ёқ ўтиши (чунки $4\cdot 60^\circ < 4d$), бешта ёқ ўтиши (чунки $5\cdot 60^\circ < 4\,d$) мумкин. Лекин бир учдан олтита ва нудан кўп ёқ ўтиши мумкин эмас (чунки бу ҳолда $6\cdot 60^\circ = 360^\circ = 4\,d$ бўлиб, бу эса юқоридаги теоремага зиддир). Демак, ёқлари мунтазам учбурчакдан иборат фақатгина уч хил мунтазам кўпёқ мавжуд бўлиши мумкин. Булар қуйидагилардир:



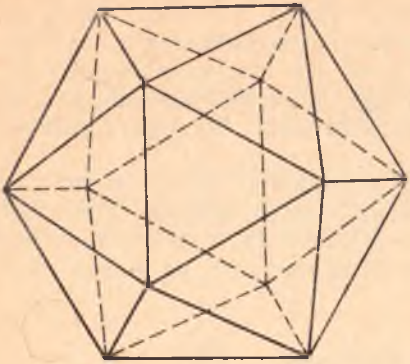
208- чизма



209- чизма

1. *Мунтазам тўртёқ,* одатда *мунтазам тетраэдр* деб юритилиб, унинг 4 та ёғи, 4 та учи ва 6 та қирраси бор (208- чизма).

2. *Мунтазам саккизёқ,* баъзан *октаэдр* деб аталиб, унинг 8 ёғи, 6 та учи ва 12 қирраси бор (209- чизма).

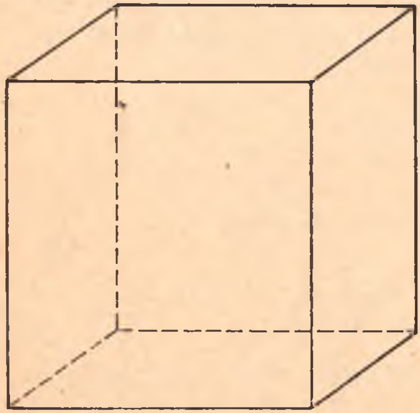


210- чизма

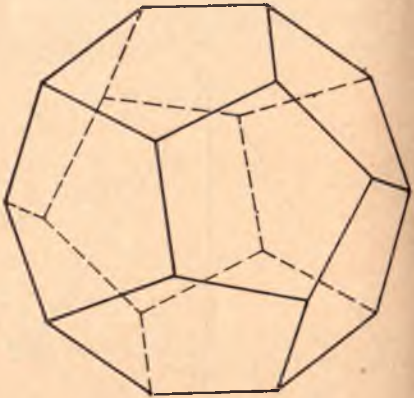
3. *Мунтазам йигирмаёқ, икосаэдр* деб аталиб, унинг 20 та ёғи, 12 та учи ва 30 та қирраси бор (210- чизма).

Энди ёқлари мунтазам тўртбурчакдан, яъни квадратдан иборат мунтазам кўпёқни кўрайлик. Бундай мунтазам кўпёқнинг ҳар бир учидан фақат учта ёқ чиқиши мумкин (чунки $3 \cdot 90^\circ < 4d$). Лекин бир учдан тўртта ва ундан ортиқ ёқ чиқиши мумкин эмас (чунки $4 \cdot 90^\circ = 4d$ бўлиб, бу эса иккинчи теоремага зиддир). Демак, ёқлари мунтазам тўртбурчакдан иборат мунтазам кўпёқ фақат бир тур бўлиб, кубдан иборат, куб баъзан *гексаэдр* деб юритилади. Куб 6 та ёққа, 8 та учга ва 12 та қиррага эга (211- чизма).

Ёқлари мунтазам бешбурчаклардан иборат мунтазам кўпёқларнинг ҳам тури биттадир (чунки мунтазам бешбурчакнинг битта бурчаги 108° бўлиб, $4 \cdot 108^\circ > 4d$ бўлади), уни баъзан *додекаэдр* деб аталиб, 12 та ёқдан, 20 та учдан ва 30 та қиррадан иборатдир (212- чизма).



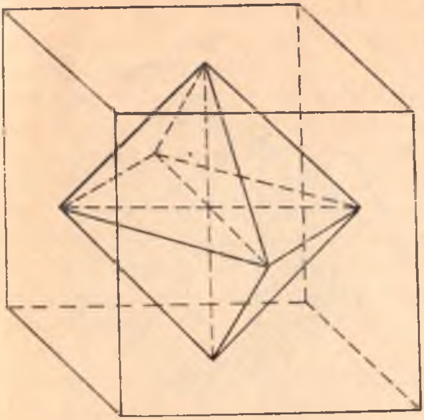
211- чизма



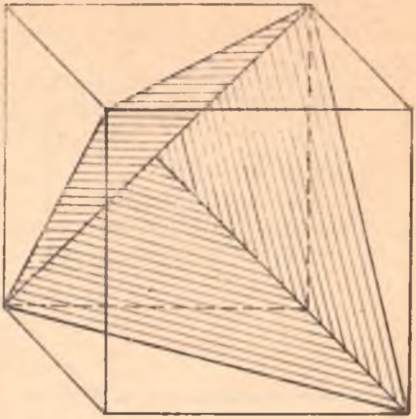
212- чизма

Демак, мунтазам кўпёқнинг ёқлари фақатгина мунтазам учбурчак, мунтазам тўртбурчак, мунтазам бешбурчаклардан гина иборат бўлиб, улар 5 турга бўлинади. Бунинг қатъий математик исботини кейинги параграфда берамиз.

Қуйида биз шу мунтазам кўпёқлар тасвирини ясаш усулини кўрсатамиз. Шуниси диққатга сазоворки, агар кубнинг



213- чизма



214- чизма

(гексаэдрнинг) тасвири маълум бўлса (биз кубнинг тасвирини ясашни биламиз), унинг ёрдамида қолган 4 та мунтазам кўпёқ тасвирини ҳосил қилиш ҳам мумкин.

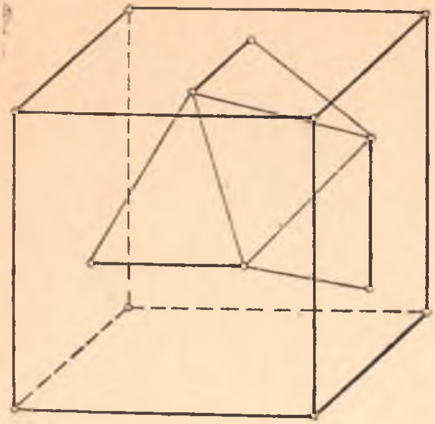
1. Куб ёқларининг марказлари мунтазам октаэдрнинг учлари ролини ўтайди (213- чизма).

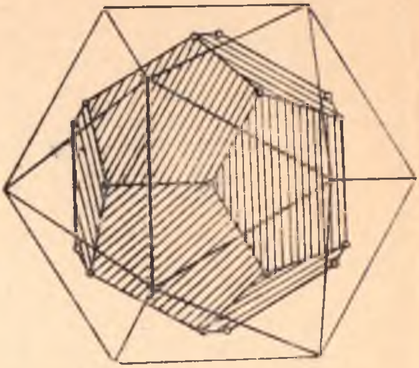
2. Агар кубнинг бир учидан чиққан учта ёғининг шу учдан чиққан учта диагоналини ўтказсак, шу диагоналларнинг учлари мунтазам тетраэдр учларининг тасвири бўлади (214- чизма).

3. Кубнинг бир учидан чиққан учта ёғини олайлик ҳамда шу ёқлардан ҳар бирининг шундай ўрта чизиқларини ўтказайликки, улар ўзаро перпендикуляр бўлсин (улар ўзаро айқаш), бу ўрта чизиқлар куб ёқларининг марказидан ўтганлиги учун бу чизиқларнинг ҳар бирида шундай *a* кесма танлаб оламизки, бу кесманинг ўрта нуқтаси куб ёғининг марказида бўлсин; бу кесма учлари эса шундай жойлашганки, ҳар бир учдан қўшни ёқда жойлашган худди шундай кесманинг яқин учигача бўлган масофа ҳам *a* кесма узунлигига тенг бўлсин, натижада, кубнинг уч ёғида жами 6 та нуқта ҳосил қиламиз. Шу нуқталарнинг ҳар бирини кубнинг марказига нисбатан симметрик кўчирсак, кубнинг қолган ёқларида ҳам шундай 6 та нуқта ҳосил бўлади, куб ёқларида жами 12 та нуқта ҳосил қиламиз. Шу нуқталарнинг ҳар бирини ўзига яқин 6 та нуқта билан туташтириб, $\frac{12\cdot 5}{2}=30$ та кесма ҳосил қиламиз. Бу кесмаларнинг ҳар бири икосаэдр қирраларининг тасвири бўлади (215- чизма).

4. Юқорида ҳосил қилинган икосаэдр ҳар бир ёғининг оғирлик маркази бирор додекаэдрнинг учларидан иборат бўлади (216- чизма).

Тасвирда ҳосил қилинган кўпёқ ҳақиқатан ҳам мунтазам кўпёқ эканини биз қатъий исботламадик, уларнинг исботи унча ҳам мураккаб бўлмасдан, қуйидаги битта мулоҳазага асослан-


215- чизма


216- чизма

гандир: бирор ўқни танлаб олиб, шу ўқ атрофида буриш билан ёқни ихтиёрий ёқ билан, кўп ёқли бурчакни ихтиёрий кўп ёқли бурчак билан устма-уст тушириш мумкин. Мунтазам кўпёқ моделини шу тасвирда кўрсатилган усулдан фойдаланиб ясаш мумкин.

Агар кўпёқнинг барча учлари бирор сферада ётса, у ҳолда бу сфера шу кўпёққа *ташқи чизилган* дейилади, агар кўпёқнинг барча ёқлари бирор сферага уринса, бу сфера шу кўпёққа *ички чизилган* деб аталади.

Мунтазам кўпёқлар учун қуйидаги ўринли: ҳар қандай мунтазам кўпёққа доимо ички ва ташқи сфералар чизиш мумкин.

Бу фикрнинг ўринли эканлигини кўрсатиш ўқувчига топширилади.

55- §. Эйлер теоремаси

Юқорида келтирилган беш турдаги мунтазам кўпёқ қуйидаги умумий хоссага эга: ҳар бир мунтазам кўпёқда учлар билан ёқлар сонларининг йиғиндиси қирралар сонидан иккита ортиқдир. Ҳақиқатан ҳам ҳар бир мунтазам кўпёқ ёқлари сонини f, учлари сонини l, қирралари сонини k билан белгиласак,

тетраэдр учун: $f = 4,\ l = 4,\ k = 6,$
октаэдр учун: $f = 8,\ l = 6,\ k = 12,$
гексаэдр учун $f = 6,\ l = 8,\ k = 12,$
икосаэдр учун: $f = 20,\ l = 12,\ k = 30,$
додекаэдр учун: $f = 12,\ l = 20,\ k = 30,$
буларнинг ҳаммаси учун: $f + l - k = 2.$

Бу хосса фақат мунтазам кўпёқлар учун ўринли бўлмасдан, қуйидаги теорема бу хоссанинг кенг синфдаги кўпёқлар учун ҳам ўринли эканини тасдиқлайди.

Теорема (Эйлер теоремаси). *Ҳар қандай қавариқ кўпёқнинг ёқлари билан учлари сонининг йиғиндиси қирралари сонидан иккита ортиқдир.*

Исбот. Бирор M қавариқ кўпёқ берилган бўлиб, унинг ёқлари сони f, учлари сони l, қирралари сони k бўлсин. Бу ҳолда: $f + l - k = d$ десак, $q = 2$ эканини исботлаймиз.

Кўпёқнинг барча ёқлари бирлашмасини S билан белгилаб, уни *кўпёқ сирти* деб атайлик. S дан битта ёқнинг ички қисмини чиқариб ташлайлик, у ҳолда қолган сиртни S_1 десак, бу сиртдаги ёқлар сони f_1 аввалги сиртга нисбатан битта камайиб, учлар сони l_1, қирралар сони k_1 ўзгармай қолади, демак,

$$S_1 \text{ учун } f_1 + l_1 - k_1 = q - 1.$$

Бу вақтда икки ҳол юз бериши мумкин:

1-ҳол. S_1 нинг барча ёқлари фақат учбурчаклардан иборат бўлиши мумкин. Фақат битта ёққа тегишли қиррани (учни) *чегаравий қирра (уч)* деб атайлик. Чегаравий қирра ёки уч бўлган ёқни ҳам *чегаравий ёқ* деб атайлик. Бундан кўринадики, қавариқ кўпёқнинг сирти чегаравий ёққа, чегаравий қиррага ва чегаравий учга эга эмас. Масалан, параллелепипед сиртида чегаравий қирра ва чегаравий уч йўқ, лекин бир ёқнинг ичини чиқариб ташласак, қолган сиртда 4 та чегаравий қирра бўлади.

Қавариқ кўпёқнинг сирти камида битта чегаравий бўлмаган қиррага эгалигидан чегаравий ёқ учбурчакдан иборат бўлганда унда битта ёки иккита чегаравий қирра ва биттадан ортиқ бўлмаган чегаравий уч бўлиши мумкин. Равшанки, ёқ учбурчакдан иборат бўлганда у чегаравий учга эга бўлиши учун албатта иккита чегаравий қиррага эга бўлиши керак.

S_1 сиртдан чегаравий элементларга эга бўлган битта ёқнинг ичини чегаравий элементлари билан чиқариб ташлаймиз, қолган сиртни S_2 билан, унинг ёқлари, қирралари ва учлари сонини мос равишда f_2, l_2, k_2 билан белгилиб. $f_2 + l_2 - k_2$ ни ҳисоблайлик. Агар чиқариб ташланган ёқ битта чегаравий қиррага эга бўлса (бу вақтда чегаравий уч бўлмайди), $f_2 + l_2 - k_2 = (f - 1) + l_1 - (k_1 - 1) = f_1 + l_1 - k_1 = q - 1$, агар чиқариб ташланган ёқ иккита чегаравий қиррага эга (албатта бу вақтда битта чегаравий уч ҳам шу ёққа тегишлидир) бўлса,

$$f_2 + l_2 - k_2 = (f_1 - 1) + (l_1 - 1) - (k_1 - 2) = f_1 + l_1 - k_1 = q - 1.$$

Демак, чегаравий қиррага эга бўлган бир ёқнинг ичини чегаравий элементлари билан чиқариб ташласак, $f_1 + l_1 - k_1$ ифода ўзгармайди. Худди шунга ўхшаш, S_2 дан чегаравий элементга эга бўлган бир ёқнинг ичини чегара элементлари билан чиқариб ташласак ҳам,

$$f_3 + l_3 - k_3 = q - 1.$$

Шу ишни давом эттириб, охири битта учбурчак (S кўпёқли сиртнинг битта ёғи) қолгунча давом эттирамиз, равшанки, учбурчак учун $f+l-k=1$ дир. Ёқларни биттадан камайтиришда $f_t+l_t-k_t$ ифода доимо $q-1$ га тенг бўлиб қолгани учун $q-1=1$ ёки $q=2$. Шуни исбот этиш талаб қилинган эди.

2-ҳол. S_1 сиртнинг ёқлари орасида томони учтадан кўп бўлган ёқ бўлиши мумкин. Бу ёқнинг шундай диагоналини ўтказамизки, натижада бу ёқда камида битта учбурчак ҳосил бўлсин, агар шу диагонални S_1 нинг қирраси деб, ҳосил қилинган учбурчакни ҳам бир ёқ деб олсак, S_1 да қирра ва ёқлар сони биттадан ортиб, учлар сони ўзгармайди, демак $f_1+l_1-k_1$ ифода ҳам ўзгармайди.

Учбурчакли бўлмаган ёқларни учбурчакли ёқларга келтирилиши билан $f_1+l_1-k_1$ ифода ўзгармас экан (бир неча ёқнинг бир текисликда жойлашиб қолиши аҳамиятсиздир). У ҳолда S_1 нинг барча ёқлари учбурчаклардан иборат бўлиб, 1-ҳолга келтирилади.

Натижа. Мунтазам кўпёқларнинг кўпи билан беш тури мавжуддир.

АДАБИЕТ

1. Азларов Т. А. ва бошқ. Математикадан қўлланма, I қ. «Ўқитувчи», Т., 1979 й.
2. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии. «Наука», М., 1968 г.
3. Атанасян Л. С. Геометрия, часть I. «Просвещение», М., 1973 г.
4. Аргунов Б. И., Балк М. Б. Элементарная геометрия, «Просвещение», М., 1966 г.
5. Базылев В. Т., Дуничев Қ. И., Иваницкая В. П. Геометрия, часть I., «Просвещение», М., 1974 г.
6. Бакельман И. Я. Аналитик геометрия ва чизиқли алгебра. «Ўқитувчи», Т., 1978 й.
7. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П. Аналитическая геометрия. «Просвещение», М., 1970 г.
8. Беклемишев Д. В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры, «Наука», М., изд. 4. 1980.
9. Васильева М. В. Методические рекомендации и указания по геометрии, часть I, II. МГПИ, М., 1979 г.
10. Вернер А. Л. Аффинная и евклидова геометрии, вып. 1, Л., 1976 г.
11. Вернер А. Л. Аффинная и евклидова геометрии, вып. 2, Л., 1977 г.
12. Ефимов Н. В. Аналитик геометрия қисқа курси. «Ўқитувчи», Т., 1966 й.
13. Ефимов Н. В. Розендорн Э. Р. Линейная алгебра и многомерная геометрия. «Наука», М., 1970 г.
14. Моденов П. С., Пархоменко А. С. Геометрические преобразования. Изд-во МГУ, М., 1961 г.
15. Парнасский И. В., Парнасская О. Е. Многомерные пространства: квадратичные формы и квадрики. «Просвещение». М., 1978 г.
16. Погорелов А. В. Аналитическая геометрия. «Наука», М., 1978 г.

МУНДАРИЖА

IV боб. **Иккинчи тартибли чизиқлар**

II БУЛИМ. ФАЗОДАГИ ГЕОМЕТРИЯ

I боб. **Фазода координаталар методи. Векторларнинг вектор ва аралаш кўпайтмаси**

II боб. **Текислик ва фазодаги тўғри чизиқ**

Д 65

Додажонов Н. Д., Жўраева М. Ш.

Геометрия: Пед. ин-тлари ва ун-тлари математика ва физ.-мат. фак-лари талабалари учун ўқув. қўлл/ (Махсус муҳаррир М. А. Собиров). 1- қ. — Қайта ишланган 2- нашри. — Т.: Ўқитувчи, 1996—384 б.

I. Муаллифдош.

ББК 22.151я73

ДОДАЖОНОВ НОРМАТ,
ЖЎРАЕВА МАҲФУЗА

ГЕОМЕТРИЯ

1 ҚИСМ

Педагогика институтлари ва университетлари
талабалари учун ўқув қўлланма

Қайта ишланган иккинчи нашри

Тошкент «Ўқитувчи» 1996

Таҳририят мудири *М. Пўлатов*
Муҳаррирлар: *Н. Ғоипов, Ў. Ҳусанов*
Расмлар муҳаррири *С. Соин*
Техмуҳаррир *Т. Грешникова*
Мусаҳҳиҳ *Ш. Тўлаганов*

ИБ № 6775

Теришга берилди 21.11.94. Босишга рухсат этилди 17.05.96. Бичими $60 \times 90^1/_{16}$. Литературная гарн. Кегли 10 шпонсиз. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 24,0. Шартли кр.-отт. 24,25. Нашр. л. 20,3. 3000 нусхада босилди. Буюртма № 2818.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома 09-171-94.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг Тошполиграфкомбинати. Тошкент, Навоий кўчаси, 30. 1996.