Х. Х. НАЗАРОВ, Х. О. ОЧИЛОВА,
Е. Г. ПОДГОРНОВА

# ГЕОМЕТРИЯДАН МАСАЛАЛАР ТЎПЛАМИ

II қисм

Ўзбекистон республикаси халқ таълими вазирлиги педагогика институтларининг „Математика" ва „Математика ва физика" ихтисосилиги студентлари учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этган

Тошкент „Ўқитувчи" 1993

Тақризчилар: *М. А. Собиров, Т. А. Абдуллаев*

Махсус муҳаррир: — проф. *М. А. Собиров*

Тўплам педагогика институтлари геометрия курси программасининг 2 ва 3-курс талабалари учун мўлжалланган материалини ўз ичига олади. Унда геометрик ясашлар, проектив геометрия, тасвирлаш усуллари, топология элементлари, дифференциал геометрия ва геометрия асосларига доир масалалар берилган. Кўп масалаларнинг жавоблари кўрсатмалар билан, баъзилари муфассал ечимлари билан берилган.

Тўпламдан кечки ва сиртқи бўлим талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин.

H18

**Назаров Х. Х.** ва бошқ.

Геометриядан масалалар туплами: Пед. ин-тларининг «Математика» ва «Математика ва физика» ихтисосидаги студ. учун ўқув. қўлл. (Х. Х. Назаров, Х. О. Очилова, Е. Г. Подгорнова; (Махсус муҳаррир М. А. Собиров). Қ. 2.—Т.: Ўқитувчи. 1993. 156-б.

I.I., Автордош.

Назаров Х. Х. и др. Сборник задач по геометрии. Ч. 2.

ББК 22. 151я73

Н $\frac{1602050000-166}{353(04)-93}$ 76 — 93

ISBN 5 — 645 — 01216 — X

## СЎЗ БОШИ

Ушбу масалалар тўплами педагогика институтларининг математика факультети талабаларига мўлжалланган, ундан кечки ва сиртқи бўлим талабалари ҳам фойдаланишлари мумкин. Қўлланма муаллифларнинг „Геометриядан масалалар тўплами“, I қисм („Ўқитувчи“ нашриёти, 1983 й.) китобининг бевосита давоми бўлиб, „математика“, „математика ва физика“ ихтисосликлари учун геометрия программасининг қолган бўлимларини ўз ичига олади. Тўпламда геометрик ясашлар, проектив геометрия, тасвирлаш усуллари, топология элементлари, дифференциал геометрия ва геометрия асослари, шунингдек, ҳисоблашга доир планиметрик масалалар келтирилган. Кўп масалаларнинг жавоблари, уларни ечишга ёрдам берадиган кўрсатмалар берилган.

Айрим темаларга доир мисол ва масалалар мавжуд адабиётларда етарлича бўлгани сабабли улар мазкур тўпламда берилмади. (Масалан, инверсияга доир масалаларга Р. К. Отажоновнинг „Геометрик ясаш методлари“, („Ўқитувчи“, Т., 1984) китобида кенг ўрин берилган). Тўпламни тузишда муаллифлар ўзларининг кўп йиллик иш тажрибаларидан ҳамда мавжуд адабиётлардан фойдаландилар.

Тўпламнинг II III, VI, VIII бобларини Х. Назаров, I, VII бобларини Х Очилова ва IV, V бобларини Е. Подгорнова ёзган.

Қўлланмани тайёрлашда ўзларининг қимматли маслаҳатлари билан яқиндан ёрдам берган Тошкент Давлат педагогика институтининг геометрия кафедраси доценти Н. Дадажоновга ва Тошкент Давлат университетининг профессори, китобнинг махсус муҳаррири М. А. Собировга чуқур миннатдорчилик билдирамиз.

*Муаллифлар*

I боб

# ТЕКИСЛИКДА ГЕОМЕТРИК ЯСАШЛАР

## 1-§. БЕВОСИТА ЕЧИЛАДИГАН ЯСАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

**1.** Берилган кесмани 3 та, 5 та, 6 та тенг бўлакларга бўлинг.

**2.** Берилган нуқтадан берилган тўғри чизиққа:
1) параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказинг; 2) перпендикуляр қилиб тўғри чизиқ ўтказинг.

**3.** Бурчак томонлари орасига маълум узунликдаги кесмани:

1) унинг учлари бурчак томонларидан тенг кесмалар ажратадиган қилиб жойлаштиринг; 2) бу кесма бурчак томонларидан бирига перпендикуляр бўладиган қилиб жойлаштиринг.

**4.** $A$ нуқта, $l$ тўғри чизиқ ва $a$ кесма берилган. Маркази $l$ тўғри чизиқда ётувчи, $A$ нуқтадан ўтган, $a$ радиусли айлана ясанг.

**5.** Айланада ётадиган ва берилган кесманинг учларидан тенг узоқликда жойлашган нуқтани ясанг.

**6.** Айланага: 1) бу айланада ётган нуқтадан; 2) айланадан ташқарида ётган нуқтадан ўтадиган уринмани ясанг.

**7.** Ён томони, асосидаги бурчаги берилган тенг ёнли учбурчак ясанг.

**8.** Асоси ва ташқи чизилган айланасининг радиуси бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

**9** Гипотенузаси ва ўткир бурчаги бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

**10.** Бир ўткир бурчаги ва шу бурчак учидан чиққан биссектрисаси бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

**11.** Бир томони, шу томонга ўтказилган медианаси ва шу томон учидаги бир бурчаги бўйича учбурчак ясанг.

12. Бир бурчаги ва бу бурчакка ёпишган томонларига ўтказилган баландликлари бўйича учбурчак ясанг.

13 Икки томони ва ташқи чизилган айланасининг радиуси бўйича учбурчак ясанг.

14. $A$, $B$ учлари ва бу учлардан чиққан биссектрисалар кесишган $O$ нуқтаси бўйича $ABC$ учбурчак ясанг.

15. Икки томони ва учинчи томонига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

16. Икки томони ва улардан бирига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

17. Бир томони ва шу томонига туширилган медианаси ва баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

18. Икки томони ва бу томонлардан бирига ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

19. Икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

20. Икки учидан чиққан баландликлари ва уларнинг биридан ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

21. Бир томони ва қолган икки томонига ўтказилган медианалари бўйича учбурчак ясанг.

22. Учала медианаси бўйича учбурчак ясанг.

23. Бир томони, шу томонга ўтказилган медианаси ва ташқи чизилган айланасининг радиуси бўйича учбурчак ясанг.

24. Бир томони, шу томонга ёпишган бир бурчаги ва унга туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

25. Бир томони, унга ёпишган бир бурчаги ва шу бурчакнинг биссектрисаси маълум учбурчак ясанг.

26. Бир томони, унга туширилган баландлиги, бу томон учидан чиққан медианаси бўйича учбурчак ясанг.

27. Бир томони, шу томонга ёпишган учидан чиққан баландлиги ва биссектрисаси бўйича учбурчак ясанг.

28. Икки бурчаги ва улардан бирининг биссектрисаси бўйича учбурчак ясанг.

29. Асоси, унга туширилган баландлиги ва асосидаги бир бурчаги бўйича учбурчак ясанг.

30. Асоси, асосига ва бир ён томонига туширилган баландликлари бўйича учбурчак ясанг.

31. Баландлиги, асосига ёпишган бир бурчаги ва бир ён томони бўйича учбурчак ясанг.

**32.** Томонларининг ўрта нуқталари бўйича учбурчак ясанг.

**33.** Гипотенузаси ва тўғри бурчаги учидан гипотенузага туширилган баландлиги бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

**34.** Икки медианаси ва учинчи томонига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

**35.** Баландлиги, унинг асосда ҳосил қилган кесмаларидан бири ва учидаги бурчагининг биссектрисаси бўйича учбурчак ясанг.

**36.** Бир томони, унга ёпишган бир бурчаги, қолган икки томонининг йиғиндиси бўйича учбурчак ясанг.

**37.** Икки бурчаги ва периметри бўйича учбурчак ясанг.

**38.** Бир томони, унга ёпишган бир бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

**39.** Катетларининг йиғиндиси ва гипотенузаси бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

**40.** Бир катети ва иккинчи катети билан гипотенузасининг йиғиндиси бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

**41.** Ташқи чизилган айланаси, икки томонининг йиғиндиси, улардан бирининг қаршисидаги бурчаги бўйича учбурчак ясанг.

**42.** Ташқи чизилган айланасининг радиуси, бир учидаги бурчаги ва асосига туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

**43.** Бир учидаги бурчаги, қолган икки учининг ички чизилган айлана марказидан узоқлиги бўйича учбурчак ясанг.

**44.** *AB* ва *BC* томонларига туширилган баландликлари ва *AC* томонга ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

**45.** Берилган айланага маълум бурчак остида кесишувчи уринмалар ўтказинг.

**46.** Берилган айланага берилган тўғри чизиққа нисбатан: 1) параллел уринма ўтказинг; 2) перпендикуляр уринма ўтказинг.

**47.** Икки томони ва диагонали бўйича параллелограмм ясанг.

**48.** Бир томони ва икки диагонали бўйича параллелограмм ясанг.

**49.** Учта томонининг ўрталари берилган параллелограмм ясанг.

**50.** Бир бурчаги ва шу бурчаги учидан чиққан диагонали бўйича ромб ясанг.

**51.** Томони ва диагоналларининг йиғиндиси бўйича ромб ясанг.

**52.** Икки диагонали бўйича ромб ясанг.

**53.** Асослари ва ён томонлари бўйича трапеция ясанг.

## 2-§. ГЕОМЕТРИК ЎРИНЛАР МЕТОДИ

**54.** Берилган икки айланага уринувчи маълум радиусли айлана ясанг.

**55.** Бир хил радиусли учта айлана берилган. Бу учала айланага ташқи уринувчи айлана ясанг.

**56.** Берилган айланага ва берилган тўғри чизиққа уринувчи маълум радиусли айлана ясанг.

**57.** Берилган тўғри чизиқда шундай нуқта ясангки, у берилган икки нуқтадан тенг узоқлашган бўлсин.

**58.** $AC$ тўғри чизиқ ва унга тегишли бўлмаган $B$ нуқта берилган. $AC$ тўғри чизиқда шундай $X$ нуқтани ясангки, $AX+XB$ кесма берилган $l$ кесмага тенг бўлсин.

**59.** Иккита нуқта берилган. Шундай тўғри чизиқ ясангки, берилган нуқталардан унга туширилган перпендикулярларнинг узунликлари берилган кесмалар узунликларига тенг бўлсин

**60.** Асоси, унга ўтказилган медианаси ва ташқи чизилган айланасининг радиуси бўйича учбурчак ясанг.

**61.** Асоси, унга туширилган баландлиги ва ташқи чизилган айланасининг радиуси бўйича учбурчак ясанг.

**62.** Маълум нуқтадан ўтувчи, берилган радиусли шундай айлана ясангки, унинг маркази берилган икки кесишувчи тўғри чизиқдан тенг масофада ётсин

**63.** Иккита параллел тўғри чизиқ ва улар орасидаги $M$ нуқта берилган. Бу нуқтадан ўтадиган шундай айлана ясангки, у берилган параллел тўғри чизиқларга уринсин

**64** Бир бурчаги ва қолган бурчакларининг учларидан туширилган икки баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

**65** Бир ўткир бурчаги ва унинг қаршисида ётган катети бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

**66** Бир бурчаги, бу бурчагидан чиққан баландлиги ва иккинчи баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

**67.** Асоси, баландлиги ва бир ён томони бўйича учбурчак ясанг.

**68.** Асоси, учидаги бурчаги ва асосга туширилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

**69.** Берилган учбурчакнинг ҳар бир томони 120° ли бурчак остида кўринадиган нуқтани ясанг.

**70.** Бир бурчаги ва икки диагонали бўйича параллелограмм ясанг.

**71.** Асоси, учидаги бурчаги ва асоси билан унга ўтказилган биссектрисасининг кесишган нуқтаси бўйича учбурчак ясанг.

**72.** Асоси, учидаги бурчаги ва ён томони бўйича учбурчак ясанг.

**73.** Бир томони, шу томон қаршисидаги бурчаги, шу бурчаги учидан туширилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.

**74.** $A$ ва $B$ учидаги бурчаклари, $AC$ ва $BC$ томонларининг айирмаси $l$ бўйича учбурчак ясанг.

**75.** Бир томони, унга ёпишган бир бурчаги ва қолган икки томонининг айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

**76.** Асоси ва ички чизилган айланасининг радиуси бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

**77.** Ички ва ташқи чизилган айланасининг радиуслари ва бир бурчаги бўйича учбурчак ясанг.

**78.** Ички ва ташқи чизилган айланаларининг радиуслари бўйича тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

**79.** Томони ва ички чизилган айланасининг радиуси бўйича ромб ясанг.

**80.** Учта томони ва диагонали берилган ҳамда ташқарисига айлана чизиш мумкин бўлган тўртбурчак ясанг.

**81.** Икки қўшни томони, иккала диагонали ва қолган иккита томони орасидаги бурчаги бўйича тўртбурчак ясанг.

**82.** Тўғри бурчакли учбурчак берилган. Шундай айлана ясангки, унинг маркази учбурчакнинг катетлардан бирида ётсин, айлана тўғри бурчак учидан ўтсин ва гипотенузага уринсин.

**83.** Асоси, учидаги бурчаги ва ён томонига ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

**84.** $A$ учидаги бурчаги, баландлиги $h_c$ ва периметри $2p$ берилган учбурчак ясанг.

**85.** Асоси, учидаги бурчаги, ички чизилган айлананинг радиуси бўйича учбурчак ясанг.

**86.** Бир томонига ўтказилган баландлиги ва қолган икки томонига ўтказилган медианалари бўйича учбурчак ясанг.

**87.** Бир томонига ўтказилган медианаси ва қолган икки томонига ўтказилган баландликлари бўйича учбурчак ясанг.

**88.** Бир учидаги бурчаги ва бу бурчакка ёпишган томонларига ўтказилган баландликлари бўйича учбурчак ясанг.

## 3-§. ГЕОМЕТРИК АЛМАШТИРИШЛАР МЕТОДИ

### Нуқтага ва ўққа нисбатан симметрия

**89.** Учта $a$, $b$, $c$ тўғри чизиқ берилган. $a$, $b$ тўғри чизиқларда ётувчи шундай икки нуқта ясангки, улар $c$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлсин.

**90.** Ўткир бурчак ва бу бурчакнинг ичида $M$ нуқта берилган. Бурчакнинг томонларида шундай $X$, $Y$ нуқталар топингки, $MXY$ учбурчакнинг периметри энг кичик бўлсин.

**91.** $AB$ кесма ва уни кесувчи $a$ тўғри чизиқ берилган. $a$ тўғри чизиқда шундай $X$ нуқта топингки, $a$ тўғри чизиқ $AXB$ бурчакнинг биссектрисаси бўлсин.

**92.** $l$ тўғри чизиқ ва унда ётмаган $A$, $B$ нуқталар берилган. $l$ тўғри чизиқда шундай $X$ нуқта ясангки, $AX + XB$ йиғинди энг кичик, $AX - BX$ айирма эса энг катта бўлсин.

**93.** Томонларининг ўрталари бўйича учбурчак ясанг.

**94.** Томонларининг ўрталари бўйича бешбурчак ясанг.

**95.** Биссектрисалари ётган тўғри чизиқлар ва томонларининг бирида ётган $M$ нуқта бўйича учбурчак ясанг.

**96.** Маркази ва параллел томонлари ётган тўғри чизиқлардаги икки нуқтаси бўйича квадрат ясанг.

**97.** Икки томони ва бу томонлар қаршисидаги бурчаклари айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

**98.** Бир томони, унга ёпишган бир бурчаги, қолган икки томонининг айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

**99.** Баландлиги, асосидаги бурчакларининг айирмаси, баландлигининг асосда ҳосил қилган кесмалари айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

**100.** Икки қўшни томони ва шу томонларнинг умумий бўлмаган учларидаги икки бурчаги берилган, ички айлана чизиладиган тўртбурчак ясанг.

**101.** Диагоналларидан бирининг узунлиги $m$ кесмага тенг бўлиб, берилган $a$ тўғри чизиқда ётадиган, қолган икки учи берилган $b$, $c$ тўғри чизиқларда ётувчи ромб ясанг.

**102.** $MN$ тўғри чизиқ, $a$ кесма ва $(O_1, r_1)$, $(O_2, r_2)$ айланалар берилган. Диагонали берилган тўғри чизиқда ётувчи, узунлиги $a$ га тенг, қолган икки учи берилган айланаларда ётувчи ромб ясанг.

**103.** Тўғри бурчакли учбурчак берилган. Шундай айлана ясангки, унинг маркази катетлардан бирида ётсин ва айлана тўғри бурчак учидан ўтиб гипотенузага урінсин.

## Буриш

**104.** Асоси, унга ёпишган бир бурчаги ва ён томонларининг йиғиндиси бўйича учбурчак ясанг.

**105.** Бир учи берилган $M$ нуқтада, қолган икки учи $n$, $p$ параллел тўғри чизиқларда ётган тенг томонли учбурчак ясанг.

**106** $a$, $b$, $c$ параллел тўғри чизиқлар берилган. Учлари шу тўғри чизиқларда ётган квадрат ясанг.

**107.** Берилган квадратга бир учи маълум нуқтада ётган ички тенг томонли учбурчак ясанг.

**108.** $A$ нуқта, $(O, r)$ айлана ва $d$ тўғри чизиқ берилган. Бир учи $A$ нуқтада, қолган икки учи айлана ва $d$ тўғри чизиқларда ётган тенг томонли учбурчак ясанг.

**109.** Кесишадиган $a$, $b$ тўғри чизиқлар ва $M$ нуқта берилган. Учи $M$ нуқтада ва бу учидаги бурчаги $30°$ бўлган, асосининг учлари $a$, $b$ тўғри чизиқларда ётган тенг ёнли учбурчак ясанг.

**110.** Икки томони ва учинчи томонига ўтказилган медианаси бўйича учбурчак ясанг.

**111.** Берилган параллелограммга ички квадрат чизинг.

**112.** Берилган квадратга ички тенг томонли учбурчак чизинг.

**113.** $O$, $M$, $N$ нуқталар берилган. Маркази $O$ нуқтада ва қарама-қарши томонлари $M$, $N$ нуқталардан ўтадиган квадрат ясанг.

**114.** $\alpha$ бурчак $(\alpha < 90°)$, $O$ нуқта ва шу нуқтадан ўтмаган икки $a$, $b$ тўғри чизиқлар берилган. Шундай айлана ясангки, унинг маркази $O$ нуқтада, $a$, $b$ тўғри чизиқлар орасидаги ёйи $O$ нуқтадан берилган $\alpha$ бурчак остида кўринсин.

**115.** $\alpha$ бурчак ($\alpha < 90°$), $O$ нуқта ва икки айлана берилган. Маркази $O$ нуқтада бўлган шундай ёй чизингки, унинг учлари берилган айланаларда ётсин ва ёй $O$ нуқтадан берилган $\alpha$ бурчак остида кўринсин.

## Параллел кўчириш

**116.** Ўткир бурчак томонлари орасига маълум узунликдаги кесмани шундай жойлаштирингки, у бурчак томонларидан бирига перпендикуляр бўлсин.

**117.** Асоси ва учидаги бурчаги бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

**118.** Икки айлана, $MN$ тўғри чизиқ ва $a$ узунликдаги кесма берилган. Шундай кесма ясангки, унинг узунлиги $a$ га тенг, $MN$ га параллел бўлиб, учлари икки айланада ётсин.

**119.** $a$, $b$ параллел тўғри чизиқлар, улар орасидаги полосадан икки томонда жойлашган $A$, $B$ нуқталар берилган. Учлари $a$, $b$ да ётган, уларга перпендикуляр бўлган шундай $MN$ кесма ясангки, $AMNB$ синиқ чизиқ узунлиги энг қисқа бўлсин.

**120.** Параллел $a$, $b$ тўғри чизиқлар ҳамда уларни кесиб ўтувчи $c$ тўғри чизиқ берилган. Томони берилган кесмага тенг бўлган шундай тенг томонли учбурчак ясангки, унинг учлари берилган тўғри чизиқларда ётсин.

**121.** Тўртта томони бўйича трапеция ясанг.

**122.** Асослари ва диагоналлари бўйича трапеция ясанг.

**123.** Бир томони, диагоналлари ва диагоналлари орасидаги бурчаги бўйича трапеция ясанг.

**124.** Учала медианаси бўйича учбурчак ясанг.

**125.** Икки параллел тўғри чизиқ ва улар орасида ётган нуқта берилган. Берилган тўғри чизиқларга уриниб маълум (берилган) нуқтадан ўтувчи айлана ясанг.

**126.** Учта бурчаги ва икки қарама-қарши томони бўйича қавариқ тўртбурчак ясанг.

**127.** Учта томони ва тўртинчи томонига ёпишган икки бурчаги бўйича тўртбурчак ясанг.

**128.** Тўртта томони ва икки қарама-қарши томонлари орасидаги бурчаги бўйича тўртбурчак ясанг.

**129.** Тўртта томони ва икки қарама-қарши томонларининг ўрталарини бирлаштирувчи кесмаси бўйича тўртбурчак ясанг.

**130.** Икки диагонали, икки қарама-қарши томони ва улар орасидаги бурчаги бўйича тўртбурчак ясанг.

## Ўхшашлик алмаштиришлари

**131.** Икки бурчаги ва уларнинг биридан ўтказилган: 1) баландлиги; 2) медианаси бўйича учбурчак ясанг.

**132.** Икки бурчаги ва: 1) ташқи чизилган айлананинг радиуси; 2) учинчи бурчагининг биссектрисаси бўйича учбурчак ясанг.

**133.** Томонларининг нисбати ва: 1) ички чизилган айланасининг радиуси; 2) ташқи чизилган айланасининг радиуси; 3) бир медианаси; 4) $l_a$ биссектрисаси; 5) периметри бўйича учбурчак ясанг.

**134.** Бир катети иккинчисидан икки марта катта бўлиб: 1) гипотенузага туширилган баландлиги берилган тўғри бурчакли учбурчакни ясанг;

2) гипотенузага туширилган баландлиги билан катетларининг йиғиндиси берилган тўғри бурчакли учбурчакни ясанг.

**135.** Бир томони ва иккинчи томонининг диагоналга нисбати бўйича тўғри тўртбурчак ясанг.

**136.** Асосларининг нисбати, катта асосига ёпишган иккита бурчаги ва баландлиги бўйича трапеция ясанг.

**137.** Баландлиги ва томонларининг нисбатлари бўйича трапеция ясанг.

**138.** Битта бурчаги баландлиги билан томонининг нисбати бўйича параллелограмм ясанг.

**139.** Диагоналларининг нисбати, улар орасидаги бурчаги ва: 1) бир томони; 2) бир диагонали бўйича параллелограмм ясанг.

**140.** Учидаги бурчаги ва асоси билан баландлигининг йиғиндиси бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

**141.** Асосига ёпишган бурчаклари $\alpha$, $\beta$ ($\alpha < 45°$, $\beta < 45°$), асоси билан асосга туширилган баландлигининг айирмаси бўйича учбурчак ясанг.

**142.** Ён томони ва асоси билан баландлигининг йиғиндиси бўйича тенг ёнли учбурчак ясанг.

**143.** Периметри берилган ва маълум учбурчакка ўхшаш бўлган учбурчак ясанг.

**144.** Томони билан диагоналининг: 1) йиғиндиси бўйича квадрат ясанг; 2) айирмаси бўйича квадрат ясанг.

**145**. Бурчак ва унинг ичида $A$ нуқта берилган. Бурчак томонларига уриниб, $A$ нуқтадан ўтувчи айлана ясанг.

**146.** Берилган учбурчакка иккита учи бу учбурчакнинг берилган томонида ётувчи ички квадрат ясанг.

**147.** Берилган учбурчакка бир томони иккинчисидан 3 марта катта бўлган ички тўғри тўртбурчак чизинг.

**148.** Берилган учбурчакка берилган параллелограммга ўхшаш бўлган ички параллелограмм чизинг.

**149.** Берилган учбурчакка томонларининг нисбати маълум ички учбурчак чизинг.

**150** Берилган сегментга бир томони ватарда, бу томонга қарши учлари ёйда ётувчи ички квадрат ясанг.

**151.** Берилган $ABC$ учбурчакка ўткир бурчаги маълум ички ромб чизинг, унинг бир томони $AB$ кесмада ётсин, қолган икки учи $AC$ ва $BC$ томонларда ётсин.

**152.** Берилган тўртбурчакка ички ромб чизинг, ромбнинг томонлари тўртбурчакнинг диагоналларига параллел бўлсин.

**153** Берилган айланага асоси ва ён томонларининг нисбати берилган ички учбурчак ясанг.

**154** Берилган айланага бурчаклари берилган: 1) ички учбурчак ясанг; 2) ташқи учбурчак ясанг.

**155** Кесишган учта тўғри чизиқ берилган. Учлари шу тўғри чизиқларда ётадиган тенг томонли учбурчак ясанг.

**156**. Иккита тўғри чизиқ ва нуқта берилган. Учлари бу тўғри чизиқларда ётадиган ва шу нуқтада $m:n$ нисбатда бўлинадиган кесма ясанг.

**157**. Доиранинг иккита радиуси ўтказилган. Доиранинг шундай ватарини ясангки, у шу радиуслар билан кесишиб тенг уч бўлакка бўлинсин.

**158.** Берилган $a$, $b$, $c$ кесмаларга тўртинчи пропорционал кесма $x = \frac{ac}{b}$ ни ясанг.

## 4-§. АЛГЕБРАИК МЕТОД

**159.** Қуйидаги формулалар билан ифодаланган кесмаларни ясанг:

1) $x = \frac{abc}{de}$; 2) $x = \sqrt{a^2 + bc}$;

3) $x = \frac{a^3 + b^3}{a^2}$; 4) $x = \frac{a^3 + b^3}{ab + ac}$.

**160.** Бирлик кесма берилган. Ушбу кесмаларни ясанг:

1) $x=\sqrt{2}$; 2) $x=2-\sqrt{2}$;

3) $x=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$;

4) $x=\sqrt{3}$; 5) $x=\sqrt{5}$.

**161.** Қуйидаги шартларни қаноатлантирадиган $x$ бурчакни ясанг:

1) $\sin x=\frac{a}{b}$; 2) $\sin x=\frac{a\sin A}{b}$;

3) $\sin x=\frac{a^2}{b^2}$; 4) $\cos x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;

5) $\operatorname{tg} x=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^4-b^4}}$.

**162.** Юзи берилган тўғри тўртбурчак юзига тенг ва асоси маълум бўлган тўғри тўртбурчак ясанг.

**163.** Юзи берилган тўғри тўртбурчак юзига тенг квадрат ясанг.

**164** Юзи берилган иккита тўғри тўртбурчак юзларининг йиғиндисига тенг квадрат ясанг.

**165.** Юзи берилган квадрат юзининг $\frac{2}{3}$ қисмига тенг квадрат ясанг.

**166.** Доирага юзи берилган квадрат юзига тенг бўлган ички тўғри тўртбурчак чизинг.

**167.** Доирадан ташқарида шундай нуқта ясангки, ундан ўтказилган уринма узунлиги марказ орқали ўтадиган кесувчининг узунлигидан икки марта қисқа бўлсин.

**168.** Айланадан ташқаридаги нуқтадан шундай тўғри чизиқ ўтказингки, унинг айлана билан кесишишидан ҳосил қилинган кесмаси берилган узунликка тенг бўлсин.

**169.** $ABC$ учбурчак берилган, бу учбурчакнинг асосига параллел бўлиб, унинг юзини тенг иккига бўладиган тўғри чизиқ ўтказинг.

**170.** Диаметри $l$ га тенг доирага юзи $m^2$ га тенг ички тўғри тўртбурчак ясанг.

**171.** Учбурчакка юзи $m^2$ га тенг ички тўғри тўртбурчак ясанг.

**172.** Трапецияда асосига параллел қилиб, диагоналлари билан кесишганда тенг уч бўлакка бўлинадиган кесувчи ўтказинг.

**173.** Радиуси $R_1$ га тенг доирага ички квадрат ясалган, квадратга ички доира ясалган, бу доирага яна ички квадрат ясалган, унга ички доира ясалган ва ҳ. к. Юзи ҳосил бўлган ҳамма доиралар юзларининг йиғиндисига тенг доира ясанг.

**174.** Икки томони: $b$, $c$ ва улар орасидаги бурчакнинг биссектрисаси $l$ берилган учбурчак ясанг.

**175.** Гипотенузаси ва тўғри бурчагининг биссектрисаси берилган тўғри бурчакли учбурчак ясанг.

II боб

# ЕВКЛИД ФАЗОСИНИ ХОС ЭМАС ЭЛЕМЕНТЛАР БИЛАН ТЎЛДИРИШ. ПРОЕКТИВ ФАЗО

## 5-§. ЕВКЛИД ТЕКИСЛИГИНИ ХОС ЭМАС ЭЛЕМЕНТЛАР БИЛАН ТЎЛДИРИШ

**176.** Тўғри чизиқда қуйидаги нуқталар ўзларининг декарт координаталари билан берилган:

$$A(1),\ B(-2),\ C(0),\ D\left(-\frac{2}{3}\right).$$

Шу нуқталарнинг бир жинсли координаталарини топинг.

**177.** Тўғри чизиқда декарт репери $O(0)$, $E(1)$ нуқталардан иборат. Шу тўғри чизиқдаги хос эмас нуқтанинг бир жинсли координаталарини топинг.

**178.** Текисликда маркази $S$ нуқтада бўлган даста тўғри чизиқлари билан $a$ тўғри чизиқ нуқталари орасида биектив мослик ўрнатилган. $a$ тўғри чизиқнинг хос эмас нуқтасига дастанинг қайси тўғри чизиғи мос келади?

**179.** Евклид текислигида айлана берилган. Шу айлананинг диаметрал қарама-қарши нуқталарини $M$ тўпламнинг нуқталари деб қаралса, бу тўпламнинг проектив тўғри чизиқ бўлишини кўрсатинг.

**180.** Берилган иккита $A$, $B$ нуқталардан тўғри чизиқ ўтказинг. Бу нуқталардан бири ва иккаласи хос эмас бўлган ҳолни кўринг.

**181.** Кенгайтирилган Евклид тўғри чизиғида қуйидаги нуқталар бир жинсли координаталари билан берилган:

$$A(1:1)\quad B(2:3),\ C(-3:-5),$$
$$D(1:0),\ E(0:1),\ F(1:1).$$

Шу нуқталарнинг декарт координаталарини топинг.

**182.** Евклид фазосида сфера берилган. $M$ тўпламнинг нуқтаси деб, шу сферанинг диаметрал қарама-қарши нуқталарини тўғри чизиқ деб катта доира айланасининг диаметрал қарама-қарши нуқталари жуфтининг тўпламини қаралса, $M$ тўплам проектив текислик бўлишини кўрсатинг.

**183.** Евклид текислигида қуйидаги нуқталар ўзларининг декарт координаталари билан берилган. Шу нуқталарнинг бир жинсли координаталарини топинг: $A(2,5)$, $B(-3,1)$, $C(4,-2)$, $D(-1,5)$, $E(1,0)$, $O(0,0)$.

**184.** Қуйидаги тўғри чизиқларнинг бир жинсли координаталардаги тенгламасини тузинг:

а) $2x+3y-1=0$; б) $x+y-5=0$;
в) $3x-y+2=0$; г) $x=0$; д) $y=0$.

**185.** Кенгайтирилган текислик хос эмас тўғри чизиғининг бир жинсли координаталарда ёзилган тенгламасини тузинг.

**186.** $3x-5y+1=0$ тўғри чизиқдаги хос эмас нуқтанинг бир жинсли координаталарини топинг.

**187.** Қуйидаги берилган нуқталар жуфтидан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг:

а) $A(1:0:1)$ ва $B(1:1:-1)$;
б) $C(1:4:3)$ ва $D(2:1:3)$;
в) $E(2:-1:0)$ ва $F(0:1:0)$;
г) $G(-2:0:1)$ ва $H(3:-2:1)$;
д) $K(1:1:-1)$ ва $L(-1:0:1)$.

**188.** Қуйидаги тўғри чизиқларнинг кесишган нуқтасини топинг:

$$2x_1+x_2+x_3=0 \text{ ва } 3x_1+3x_2+2x_3=0.$$

**189.** Хос эмас нуқта $B_\infty$ ва $a$ тўғри чизиқ берилган. Улар орқали ўтувчи текислик тенгламасини тузинг.

**190.** Хос эмас тўғри чизиқ $b_\infty$ ва $A$ нуқта берилган. Улар орқали текислик ўтказинг.

**191.** Учта хос эмас $A_\infty$, $B_\infty$, $C_\infty$ нуқта берилган. Улар орқали текислик ўтказинг.

**192.** Хос эмас $A_\infty$ нуқтадан ўтиб, айқаш $b$, $c$ тўғри чизиқларни кесиб ўтадиган тўғри чизиқ ўтказинг.

**193.** $A(4:-2:5)$ нуқта ва $x_1+x_2-x_3=0$, $2x_1-x_2+4x_3=0$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасидан ўтадиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

**194.** $M(1:1:6)$ ва $N(2:-1:0)$ нуқталардан ўтувчи тўғри чизиқнинг $2x_1+x_2+x_3=0$ тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтасини топинг.

**195.** Қуйида тўртта тўғри чизиқ берилган:

$$a: x_1+x_2-x_3=0, \qquad b: 2x_1+x_2-2x_3=0,$$
$$c: x_1-x_2-x_3=0, \qquad d: 2x_1-x_2+2x_3=0.$$

$M=a\cap b$, $N=c\cap d$ бўлса, $MN$ тўғри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

**196.** $A(1:2:-3)$ нуқта ва $2x_1-x_2+3x_3=0$ тўғри чизиқнинг хос эмас нуқтасидан ўтадиган тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

**197.** $x_1-x_2+x_3=0$ ва $x_1+2x_2+3x_3=0$ тўғри чизиқларнинг хос эмас нуқталаридан ўтувчи тўғри чизиқ тенгламасини тузинг.

**198.** $A(a_1:a_2:a_3)$, $B(b_1:b_2:b_3)$, $C(c_1:c_2:c_3)$ нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётиш шартини топинг.

**199.** Олтита $A_i$ $(i=\overline{1,6})$ нуқта берилган: $A_1(1:0:1)$, $A_2(0:1:1)$, $A_3(3:4:5)$, $A_4(1:0:-1)$, $A_5(0:-1:-1)$, $A_6(-3:4:5)$. Агар $P=A_1A_2\cap A_4A_5$ $Q=A_2A_3\cap A_5A_6$, $R=A_3A_4\cap A_6A_1$ бўлса, бу нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини кўрсатинг.

**200.** $A(-4:-2:1)$, $B(2:-2:1)$, $C(0:7:1)$, $C_1(2:8:1)$, $B_1(8:1:1)$, $A_1(10:5:5)$ нуқталар берилган. $AB$ ва $A_1B_1$, $BC$ ва $B_1C_1$, $AC$ ва $A_1C_1$ тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқталари коллинеарми?

**201.** Олтита нуқта берилган: $A(10:5:1)$, $B(8:1:1)$, $C(2:8:1)$, $P(-4:-2:1)$, $D(2:-2:1)$, $O(0:7:1)$. $AP$, $BD$, $CO$ тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишишини текшириб кўринг. $A$, $D$, $O$ нуқталар коллинеарми?

**202.** Иккита учбурчак учларининг координаталари маълум: $A(4:2:1)$, $B(2:-2:1)$, $C(0:7:1)$, $A_1(10:5:1)$, $B_1(8:1:1)$, $C_1(2:8:1)$. $AA_1$ билан $BB_1$ нинг кесишган нуқтаси $CC_1$ га қарашлими?

## 6- §. ПРОЕКТИВ КООРДИНАТАЛАР СИСТЕМАСИ

**203.** Кенгайтирилган тўғри чизиқда репер $A_1$, $A_2$, $E$ нуқталардан иборат. Уларнинг бир жинсли проектив координаталари қуйидагича бўлишини кўрсатинг: $A_1(0:1)$, $A_2(1:0)$, $E(1:1)$.

**204.** $s$ тўғри чизиқда $A_1$, $A_2$, $E$ проектив репер берилган. Қуйидаги нуқталарни ясанг: $A(-2:1)$, $B(3:1)$, $C(3:2)$, $D(5:2)$.

**205.** $\overline{d}$ тўғри чизиқда $R=\{A_0, A_1, E_\infty\}$ проектив репер берилган. Қуйидаги нуқталарни ясанг: $M(-1:1)$, $N(1:-2)$.

**206.** $\overline{d}$ тўғри чизиқда $R=\{A_0, A_1, E\}$ репер берилган. $A_0$, $A_1$ нуқталар $\overline{d}$ нинг хос нуқталари бўлиб, $E$ нуқта $A_0A_1$ кесманинг ўртаси бўлса, $\overline{d}$ нинг хос эмас нуқтасининг координаталарини топинг.

207. $\overline{d}$ тўғри чизиқда $A_0$, $A_1$ нуқталар берилган. $\overline{d}$ нинг хос эмас $M_\infty$ нуқтасининг $R=\{A_0, A_1, E\}$ реперодаги координаталари $(-1:2)$ эканлиги маълум; $E$ нинг координаталарини топинг.

208. $\overline{d}$ тўғри чизиқда $R=\{A_0, X_\infty, E\}$ проектив репер берилган. $M(2:1)$ нуқтани ясанг.

209. Кенгайтирилган текисликда $\{A_1, A_2, A_3, E\}$ репер берилган. Репер учлари координаталарининг қуйидагича бўлишини кўрсатинг: $A_1(1:0:0)$, $A_2(0:1:0)$, $A_3(0:0:1)$, $E(1:1:1)$.

210. Текисликда $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ проектив репер берилган бўлса, қуйидаги координаталари билан берилган нуқталарни ясанг: $A(1:2:\ )$, $B(0:2:1)$, $C(3:0:1)$, $D(-1:3:1)$, $E(0:2:-1)$.

211. Текисликда $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ проектив репер берилган. Агар $A_1'=A_1E\cap A_2A_3$, $A_2'=A_2E\cap A_1A_3$, $A_3'=A_3E\cap A_1A_2$ бўлса, $A_1'$, $A_2'$, $A_3'$ нуқталарнинг $R$ реперга нисбатан координаталарини топинг.

212. $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ проектив реперга нисбатан $a$ тўғри чизиқ берилган: $a(1:2:-2)$. Шу тўғри чизиқни ясанг.

213. Проектив тўғри чизиқда иккита $R$ ва $R'$ репер берилган бўлиб, координаталарнинг алмаштириш формулалари қуйидагича $\begin{cases} \rho x_1 = x_1' + x_2', \\ \rho x_2 = 2x_1' - x_2' \end{cases}$ бўлса:

а) $A(1:-1)$, $B(0:1)$, $C(3:1)$ нуқталарнинг $R'$ га нисбатан координаталари бўйича $R$ даги координаталарини топинг;

б) $D(0:1)$, $E(1:-1)$, $F(2:7)$ нуқталарнинг $R$ га нисбатан координаталари бўйича $R'$ даги координаталарини топинг.

**214.** Проектив тўғри чизиқда иккита $R=\{A_1, A_2, E_1\}$ ва $R'=\{A_1', A_2', E_1'\}$ репер берилган. $R$ га нисбатан $A_1'(-1:3)$, $A_2'(1:2)$, $E_1'(-2:1)$ бўлса, координаталарнинг алмаштириш формулаларини ёзинг.

**215.** Проектив тўғри чизиқда бирор $R'$ реперга нисбатан $R$ репернинг базис нуқталари берилган: $A_1(1:0)$, $A_2(1:3)$, $E(1:-3)$. Агар $A$, $B$, $C$ нуқталарнинг $R'$ га нисбатан координаталари мос равишда $(1:1)$, $(2:-3)$, $(0:1)$ бўлса, уларнинг $R$ га нисбатан координаталарини топинг.

**216.** Қуйидаги берилганларга асосан $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперни $R'=\{A_1', A_2', A_3', E'\}$ реперга ўтказувчи алмаштириш формулаларини топинг:

а) $A_1'(1:1:1)$, $A_2'(0:1:0)$, $A_3'(1:0:0)$, $E'(0:0:1)$;

б) $A_1'(1:0:-1)$, $A_2'(2:1:0)$, $A_3'(0:0:1)$, $E'(3:1:0)$;

в) $A_1'(1:0:-1)$, $A_2'(2:1:0)$, $A_3'(0:0:1)$, $E'(1:1:2)$.

**217.** Тўғри чизиқдаги проектив алмаштириш берилган:

$$\begin{cases} \rho x_1' = 3x_1 + 4x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 + 3x_2; \end{cases}$$

а) тескари алмаштиришнинг аналитик ифодасини;

б) базис нуқталарнинг образини;

в) базис нуқталарнинг аслини топинг.

**218.** Тўғри чизиқдаги проектив алмаштириш $x' = \frac{x-4}{x+5}$ формула билан берилган, $P(-2)$, $A(-5)$ нуқталарнинг образларини аниқланг.

**219.** Текисликдаги коллинеар алмаштириш берилган:

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + 2x_2, \\ \rho x_2' = x_1 + 2x_3, \\ \rho x_3' = x_2. \end{cases}$$

Қуйидагиларни аниқланг:

а) $A(1:1:-2)$ нуқтанинг образини;
б) $B(-2:2:1)$ нуқтанинг аслини;
в) $l: 2x_1+x_3=0$ тўғри чизиқнинг образини;
г) $m: 2x_1+x_2+x_3=0$ тўғри чизиқнинг аслини.

**220.** Қуйидаги коллинеацияларнинг қўзғалмас нуқталарини топинг:

а) $\rho x_1' = x_2 + x_3,\quad \rho x_2' = x_1 + x_3,\quad \rho x_3' = x_1 + x_2;$

б) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1, \\ \rho x_2' = x_2, \\ \rho x_3' = x_1 - x_3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \rho x_1' = 4x_1 - x_2, \\ \rho x_2' = 6x_1 - 3x_2, \\ \rho x_3' = x_1 - x_2 - x_3. \end{cases}$

**221.** Ушбу проектив алмаштириш берилган:

$$\rho x_1' = -9x_1 - 6x_2 - 2x_3,$$
$$\rho x_2' = 11x_1 + 5x_2 + 9x_3,$$
$$\rho x_3' = x_1 + x_2 + x_3.$$

$A_1A_2$ тўғри чизиқнинг образини ва $2x_1 - 3x_3 = 0$ тўғри чизиқнинг аслини топинг.

**222.** Қуйидаги проектив алмаштириш берилган:

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_2 + x_3, \\ \rho x_2' = x_1 + x_3, \\ \rho x_3' = x_1 + x_2. \end{cases}$$

Қуйидагиларни аниқланг:

а) $A_1A_2$ базис тўғри чизиқнинг образини ва аслини;
б) $M(1:-2:1)$ нуқтанинг аслини.

**223.** Қуйидаги алмаштиришларнинг қўзғалмас нуқталарини топинг:

а) $\begin{cases} \rho x_1' = 3x_1 + x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 + 3x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 + x_2; \\ \rho x_2' = 2x_1 + 3x_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 + x_2, \\ \rho x_2' = x_1 + 2x_2. \end{cases}$

**224.** Тўғри чизиқдаги проектив алмаштириш уч жуфт мос нуқталари билан берилган. Алмаштиришнинг аналитик ифодасини топинг:

а) $A_1(1:1) \to A_1'(1:-1)$; $B_1(1:0) \to B_1'(2:1)$; $C_1(1:1) \to C_1'(1:1)$;

б) $A_2(2:1) \to A_2'(8:7)$; $B_2(1:-1) \to B_2'(1:-1)$; $C_2(0:1) \to C_2'(2:3)$.

в) $A_3(1:1) \to A_3'(0:1)$; $B_3(2:1) \to B_3'(1:3)$; $C_3(3:1) \to C_3'(2:5)$.

**225.** Икки жуфт мос нуқталари билан берилган инволюциянинг аналитик ифодасини топинг:

а) $A(1:2) \longleftrightarrow A'(5:-3)$;
$B(1:-1) \longleftrightarrow B'(-1:0)$;

б) $A(1:0) \longleftrightarrow A'(1:2)$;
$B(0:1) \longleftrightarrow B'(-1:-1)$;

в) $A(1:1) \longleftrightarrow A'(1:-1)$;
$B(1:0) \longleftrightarrow B'(2:1)$.

**226.** Ушбу инволюцияларнинг турларини аниқланг:

а) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + 2x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 - x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 - 4x_2, \\ \rho x_2' = x_1 - 2x_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + x_2, \\ \rho x_2' = -5x_1 - x_2. \end{cases}$

**227.** $a$ нинг қандай қийматларида қуйидаги инволюция гиперболик, қандай қийматларида эллиптик бўлади:

$$\begin{cases} \rho x_1' = ax_1 - x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 - ax_2? \end{cases}$$

**228.** Текисликдаги коллинеация тўрт жуфт мос нуқталар билан берилган. Унинг аналитик ифодасини топинг:

а) $A(0:0:1) \to A'(2:3:-2)$,
$B(1:1:1) \to B'(3:5:-3)$,
$C(2:0:1) \to C'(6:7:-4)$,
$D(0:1:0) \to D'(1:3:0)$;

б) $A(2:1:1) \to A'(2:1:5)$,
$B(1:2:1) \to B'(2:-1:3)$,
$C(1:-1:1) \to C'(-1:2:3)$,
$D(-1:1:1) \to D'(1:2:1)$;

в) $A(1:-1:1) \to A'(1:-1:0)$,
$B(1:1:1) \to B'(1:1:0)$,
$C(2:0:1) \to C'(2:0:1)$,
$D(0:0:1) \to D'(0:0:1)$.

**229.** Коллинеар бўлмаган учта $A$, $B$, $C$ нуқтани $A'$, $B'$, $C'$ нуқталарга ўтказувчи чексиз кўп проектив алмаштиришлар мавжудлигини кўрсатинг.

**230.** Иккита ихтиёрий $d$, $g$ тўғри чизиқларни ихтиёрий $d'$, $g'$ тўғри чизиқларга ўтказувчи чексиз кўп проектив алмаштиришлар мавжудлигини кўрсатинг.

**231.** Текисликда $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ репер берилган. $A_2A_3$ тўғри чизиқни $A_1A_2$ тўғри чизиққа ўтказувчи бирор проектив алмаштириш топинг.

**232.** $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ тўғри чизиқни $x_1 = 0$ тўғри чизиққа ўтказувчи бирор проектив алмаштириш топинг.

**233.** $A_3$, $A_1$, $A_2$, $E$ базис нуқталарни мос равишда $A_2$, $A_3$, $E$, $A_1$ нуқталарга алмаштирувчи коллинеациянинг аналитик ифодасини топинг.

**234.** Қуйидаги коллинеацияларнинг турларини аниқланг:

а) $$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 - x_3, \\ \rho x_2' = x_1 + x_3, \\ \rho x_3' = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3; \end{cases}$$

б) $$\begin{cases} \rho x_1' = x_2 + x_3, \\ \rho x_2' = x_1 + x_3, \\ \rho x_3' = x_1 + x_2; \end{cases}$$

в) $$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 - 2x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 + x_2, \\ \rho x_3' = x_3. \end{cases}$$

**235.** Гиперболик гомологиянинг аналитик ифодасини қуйидаги кўринишга келтириш мумкин эканлигини исботланг:

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1, \\ \rho x_2' = ax_2 + bx_3, \\ \rho x_3' = cx_2 + dx_3. \end{cases}$$

**236.** Параболик гомологиянинг аналитик ифодасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин эканлигини кўрсатинг:

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + x_2 + x_3, \\ \rho x_2' = x_2 + c x_3, \\ \rho x_3' = d x_3. \end{cases}$$

**237.** Гомологиянинг маркази $S$, ўқи $s$ ва бир жуфт ($A$; $A'$) мос нуқталари маълум. Берилган $m$ тўғри чизиқнинг хос эмас нуқтасига мос келувчи нуқтани ясанг.

**238.** $A(0:0)$, $B(0:1)$, $C(1:1)$, $D(1:0)$ квадратни $A(0:0)$, $B(-4:1)$, $C(0:2)$, $D(4:1)$ ромбга алмаштирувчи коллинеация топинг.

**239.** $y^2 = 4x$ параболани $x^2 + y^2 = 1$ айланага ўтказувчи коллинеар алмаштириш топинг.

**240.** Гомология маркази $S$, ўқи $s$ ва бир жуфт ($A$: : $A'$) мос нуқталари билан берилган. $AA'$ тўғри чизиққа қарашли бўлган $M$ нуқтага мос нуқтани ясанг.

III боб

# ПРОЕКТИВ ГЕОМЕТРИЯНИНГ АСОСИЙ ФАКТЛАРИ

## 7-§. ИККИЛИК (ДУАЛЛИК) ПРИНЦИПИ. ДЕЗАРГ ТЕОРЕМАСИ

**241.** Қуйидаги фигураларга кичик ва катта иккилик принципи бўйича қандай фигуралар мос келади:

а) Биринчи таргибли қатор—бир тўғри чизиққа қарашли нуқталар тўплами;

б) тўғри чизиқлар дастаси—текисликдаги бир нуқтадан ўтган тўғри чизиқлар тўплами;

в) текисликлар дастаси—бир тўғри чизиқ орқали ўтган текисликлар тўплами;

г) ясси майдон—бир текисликдаги нуқталар (тўғри чизиқлар) тўплами;

д) тўғри чизиқлар боғлами— фазодаги бир нуқтадан ўтган ҳамма тўғри чизиқлар тўплами?

**242.** Қуйидаги жумлаларга кичик иккилик принципи бўйича мос келувчи жумлаларни ифодалаб беринг:

а) иккита турли $A$, $B$ нуқталар битта ва фақат битта тўғри чизиққа қарашлидир;

б) битта тўғри чизиққа қарашли бўлмаган учта нуқта мавжуддир;

в) бир тўғри чизиқ ва унда ётмаган нуқта фақат битта текисликни аниқлайди;

г) битта тўғри чизиқда ётган учта нуқта мавжуддир.

**243.** Қуйидаги жумлаларга катта иккилик принципи бўйича қандай жумлалар мос келади:

а) ҳар қандай текисликда бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта мавжуддир;

б) ҳар қандай тўғри чизиқ орқали камида иккита текислик ўтади;

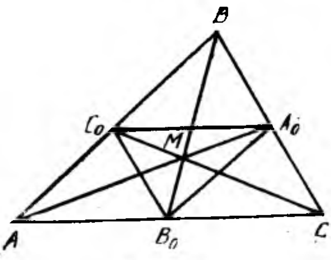
в) учбурчак деб бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқта ва уларни туташтиришдан ҳосил қилинган учта тўғри чизиқдан иборат фигурага айтилади?

**244.** $\alpha$ текисликда 1-чизмада кўрсатилгандек ясаш бажарилган: $\alpha$ текисликнинг ихтиёрий $M$ нуқтаси шу текисликдаги $ABC$ учбурчакнинг учлари билан туташтирилган. Бу тўғри чизиқлар учбурчакнинг $BC$, $AC$, $AB$ томонларини мос равишда $A_0$, $B_0$, $C_0$ нуқталарда кесади. Натижада $\triangle ABC$ га ички чизилган $\triangle A_0 B_0 C_0$ ҳосил қилинади. Катта иккилик принципи бўйича 1-чизмага мос келадиган чизмани чизинг.

**245.** Текисликда иккита: $ABC$, $A_1B_1C_1$ учбурчак учларининг координаталари берилган. Дезарг теоремасидаги шартнинг бажарилишини текшириб кўринг:

а) $A(2:-1:4)$, $B(2:2:1)$, $C(7:0:1)$, $A_1(5:10:1)$, $B_1(-1:8:1)$, $C_1(-8:2:1)$;

б) $A(0:-6:1)$, $B(-5:-5:1)$, $C(-3:0:1)$, $A_1(0::6:1)$, $B_1(5:5:1)$, $C_1(3:0:1)$.




1-чизма.

246. Текисликда $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ проектив репер берилган. Агар $A_1E \cap A_2A_3 = A_1'$, $A_2E \cap A_1A_3 = A_2'$, $A_3E \cap A_1A_2 = A_3'$, $S = A_1A_2 \cap A_1'A_2'$, $P = A_2A_3 \cap A_2'A_3'$, $Q = A_1A_3 \cap A_1'A_3'$ бўлса, $S$, $P$, $Q$ нуқталарнинг коллинеарлигини исботланг.

247. Проектив текисликда олтита нуқта берилган: $A(0; 5; 1)$, $B(0:2:1)$, $C(0:7:1)$, $P(-1:1:0)$, $D(3:2:0)$, $O(2:-2:0)$. $AB$ ва $PD$, $BC$ ва $DO$, $AC$ ва $PO$ тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталарини топинг. Бу нуқталар бир тўғри чизиқда ётадими?

248. $ABC$, $A_1B_1C_1$ учбурчаклар учларининг координаталари маълум. Бу учбурчаклар Дезарг учбурчаклари бўладими:

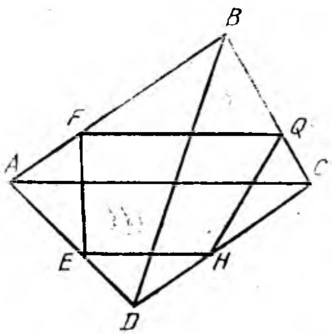
$$A(-4:2:1),\ B(2:-2:1),\ C(0:7:1),\ C_1(2:8:1),$$
$$B_1(8:1:1),\ A_1(10:5:1)?$$

249. Дезарг теоремасидан фойдаланиб, учбурчакнинг медианалари бир нуқтада кесишганлигини исбот қилинг.

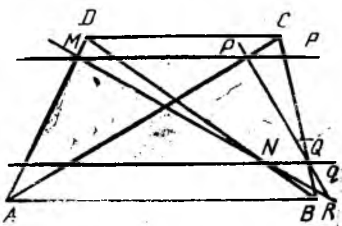
250. Евклид текислигида трапеция тўртбурчакка ички чизилган бўлиб, унинг параллел томонлари тўртбурчакнинг битта диагоналига параллел (2-чизма). Трапециянинг параллел бўлмаган томонларининг кесишган нуқтаси тўртбурчакнинг бошқа диагоналига қарашли эканлигини кўрсатинг.

251. Текисликдан ташқарида ётган $M$ нуқтада кесишадиган $m$, $m'$ тўғри чизиқлар ва уларга қарашли бўлмаган $N$ нуқта берилган. $MN$ тўғри чизиқни ясанг.

252. $ABCD$ трапецияни $AB$ асосига параллел бўлган $p$, $q$ тўғри чизиқлар кесиб ўтган (3-чизма). Агар




2-чизма.




3-чизма.

$p \cap AD = M$, $p \cap AC = P$, $q \cap BD = N$, $q \cap BC = Q$ бўлса, $R = MN \cap PQ$ нуқтанинг $AB$ тўғри чизиқда ётишини исботланг.

**253.** Текисликда $a$ тўғри чизиқ, унга қарашли $AB$ кесма ва унинг ўртаси $C$ нуқта берилган. $l$ тўғри чизиқнинг $M$ ($M \overline{\in} a$) нуқтасидан $a$ тўғри чизиққа фақат чизғичдан фойдаланиб, параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

**254.** Иккита параллел $a$, $b$ тўғри чизиқ ва уларга қарашли бўлмаган $C$ нуқта берилган. Дезарг теоремасидан фойдаланиб, $C$ нуқтадан берилган тўғри чизиқларга параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

**255.** Евклид текислигида параллелограмм ва унинг томонларига параллел бўлмаган $l$ тўғри чизиқ берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $l$ тўғри чизиқда бирор кесма ясаб, унинг ўртасини топинг.

**256.** Евклид текислигида битта айлана, унинг маркази ва айлана билан кесишмайдиган $l$ тўғри чизиқ берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $l$ тўғри чизиқда бирор кесма ясаб, унинг ўртасини аниқланг.

257. $ABC$, $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AB \| A_1B_1$, $AC \| A_1C_1$, $BC \| B_1C_1$ бўлса, $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишиши ёки параллел бўлишини исбот қилинг.

258. $ABC$, $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AA_1 \| BB_1 \| CC_1$, $AB \| A_1B_1$, $AC \| A_1C_1$ бўлса, $BC \| B_1C_1$ эканлигини исбот қилинг.

## 2- §. ТЎРТТА НУҚТАНИНГ МУРАККАБ НИСБАТИ

259. Тўртта нуқтанинг мураккаб нисбати $(ABCD) = \lambda$ бўлса, қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исботланг:

а) $(ABDC) = \frac{1}{\lambda}$; б) $(ACBD) = 1 - \lambda$;

в) $(ACDB) = \frac{1}{1-\lambda}$; г) $(ADBC) = \frac{\lambda - 1}{\lambda}$;

д) $(ADCB) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$.

**260.** Тўғри чизиқда $A$, $B$, $C$ нуқталар берилган бўлиб, шу тўғри чизиқнинг ихтиёрий $D$ нуқтаси учун $(ABCD) = \lambda$ бўлса, $A$, $B$, $C$ нуқталарга мос келувчи сонларни топинг.

261. $(ABCD_\infty) = (ABC)$ эканлигини исбот қилинг.

**262.** Тўғри чизиқда бешта: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ нуқта берилган бўлса, қуйидаги тенгликнинг бажарилишини исботланг:

$$(ABCD)=\frac{(ABCE)}{(ABDE)}=\frac{(ABC)}{(ABD)}.$$

**263.** Мураккаб нисбатнинг хоссаларидан фойдаланиб, бир тўғри чизиқда ётган $A$, $B$, $C$, $D$, нуқталар учун қуйидаги тенгликнинг бажарилишини кўрсатинг:

$$AB\cdot CD+AC\cdot DB+AD\cdot BC=0.$$

**264.** $S(a, b, c, d, \ldots)$ даста тўғри чизиқлари билан $s(A, B, C, D, \ldots)$ тўғри чизиқ нуқталари орасида перспектив мослик ўрнатилган. $(ABCD)=(abcd)$ эканлигини исбот қилинг.

**265.** Евклид тўғри чизиғида тўртта нуқта ўзининг координаталари билан берилган: $A(\xi_1)$, $B(\xi_2)$, $C(\xi_3)$, $D(\xi_4)$ $(ABCD)$ ни ҳисобланг.

**266.** Тўғри чизиқдаги нуқталар ўзларининг бир жинсли координаталари билан берилган: $A(a_1:a_2)$, $B(b_1:b_2)$, $C(c_1:c_2)$, $D(d_1:d_2)$. Уларнинг мураккаб нисбатини ҳисобланг.

**267.** Агар бир тўғри чизиқда $A$, $B$ нуқталар берилган бўлиб, $C=A+\lambda B$, $D=A+\mu B$ бўлса, $(ABCD)=\frac{\lambda}{\mu}$ эканлигини исбот қилинг.

**268.** Маркази координаталар бошида бўлган дастага қарашли

$$a_1:\ y=k_1x,\ a_2:\ y=k_2x,\ a_3:\ y=k_3x,\ a_4:\ y=k_4x$$

тўртта тўғри чизиқнинг мураккаб нисбатини ҳисобланг.

**269.** $A_1(1:-1:2)$, $A_2(0:1:2)$, $A_3(1:0:4)$, $A_4(2:-1:6)$ нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишлигини текширинг ва $(A_1A_2A_3A_4)=2$ эканлигини кўрсатинг.

**270.** Қуйидаги берилган тўртта тўғри чизиқнинг битта даста тўғри чизиқлари эканлигини исботланг ва уларнинг мураккаб нисбатини ҳисобланг:

| | |
|---|---|
| а) $a:\ x_1-2x_2+x_3=0$, | б) $a:\ x_2=0$, |
| $b:\ -x_2+x_3=0$, | $b:\ x_1-x_2=0$, |
| $c:\ x_1-x_3=0$, | $c:\ 3x_1-x_2=0$, |
| $d:\ x_1-x_2=0$; | $d:\ 5x_1-x_2=0$. |

**271.** $ABC$ учбурчакнинг $C$ учидаги ички ва ташқи бурчакларининг биссектрисалари қаршисидаги $AB$ томонни $P$, $Q$ нуқталарда кесса, $A$, $B$, $P$, $Q$ нуқталарнинг гармоник тўртлик ташкил қилишини, яъни $(ABPQ)=-1$ тенгликни исботланг.

**272.** $a$, $b$ тўғри чизиқлар $C$ нуқтада кесишади. Агар $c$, $d$ тўғри чизиқлар $a$ билан $b$ ташкил қилган ички ва ташқи бурчакларининг биссектрисалари бўлса, $(abcd)=-1$ эканлигини исбот қилинг.

**273.** $ABC$ учбурчакда $CM$ медиана ва $CX\|AB$ тўғри чизиқ ўтказилган. $(CA\,CB\,CM\,CX)=-1$ эканлигини исботланг.

**274.** Тўғри чизиқда учта $A$, $B$, $C$ нуқта берилган. Тўғри чизиқда шундай $D$ нуқтани ясангки, $(ABCD)=2$ бўлсин.

**275.** $x_1+x_2+x_3=0$ тўғри чизиқ $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ репернинг томонларини $M_1$, $M_2$, $M_3$ нуқталарда кесади. $(A_1A_2EM_3)=(A_1A_3EM_2)=(A_2A_3EM_1)=-1$ эканлигини исбот қилинг.

**276.** Маркази хос эмас нуқтада бўлган дастанинг учта тўғри чизиғи берилган: $a\|b\|c$. Уларга гармоник бўлган тўртинчи $d$ тўғри чизиқни ясанг.

## 9- §. ТЎЛИҚ ТЎРТБУРЧАК ВА УНИНГ ГАРМОНИК ХОССАЛАРИ

**277.** Тўғри чизиқда $A$, $B$, $C$ нуқталар берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, берилган нуқталарга гармоник бўлган $D$ нуқтани ясанг.

**278.** Дастага қарашли $a$, $b$, $c$ тўғри чизиқлар берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, уларга гармоник бўлган тўртинчи тўғри чизиқни ясанг.

**279.** Тўғри чизиқда $A(x_1)$, $B(x_2)$, $C(x_3)$, $D(x_4)$ нуқталар берилган. $(ABCD)=-1$ бўлиши учун нуқтанинг координаталари қандай шартни бажариши керак?

**280.** $y=0$, $x=0$, $y=kx$, $y=-kx$ тўғри чизиқлар гармоник жойлашганми?

**281.** Иккита параллел $a$, $b$ тўғри чизиқлар ҳамда уларнинг бирида $AB$ кесма берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $AB$ кесмани тенг иккига бўладиган нуқтани топинг.

**282.** Иккита параллел $a$, $b$ тўғри чизиқ ва уларга қарашли бўлмаган $C$ нуқта берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $C$ нуқтадан $a$ га параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

**283.** $ABCD$ параллелограмм ва унинг маркази $S$ нуқта берилган. Параллелограммнинг диагоналлари ётган тўғри чизиқлар билан $S$ нуқтадан параллелограммнинг томонларига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқлар ўзаро гармоник жойлашганлигини исбот қилинг.

**284.** Евклид текислигида параллелограмм берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, унинг диагоналларининг кесишган нуқтасидан томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказинг.

**285.** Евклид текислигида $AB$ кесма, унинг ўртаси $C$ нуқта ва $AB$ га қарашли бўлмаган $M$ нуқта берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $M$ нуқтадан $AB$ га параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

**286.** $ABCD$ трапеция диагоналларининг кесишган нуқтаси $M$, ён томонларининг кесишган нуқтаси $N$, асосларининг ўрталари $P$, $Q$ нуқталарнинг коллинеар эканлигини исбот қилинг.

**287.** Евклид текислигида иккита параллел тўғри чизиқ ва уларнинг бирида $AB$ кесма берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, 2 $AB$ га тенг кесмани ясанг.

**288.** $S$ дастанинг $c$ тўғри чизиғи $a$, $b$ тўғри чизиқлар ташкил қилган бурчакни тенг иккига бўлади. $(abcd)=-1$ шарт бажариладиган $S$ дастанинг $d$ тўғри чизиғини ясанг

**289.** $S$ дастанинг $a$, $b$, $c$ тўғри чизиқлари берилган бўлиб, $c \perp a$ шарт бажарилса, $2(\widehat{a, b})$ га тенг бурчакни фақат чизғич ёрдамида ясанг.

**290.** $ABCD$ трапецияда: $AB \| CD$, $P = CB \cap AD$, $Q = AC \cap BD$, $X = AB \cap PQ$, $Y = CD \cap PQ$, $K = AY \cap BD$, $T = AB \cap KP$ бўлса, $AT = 1/3\ AB$ эканлигини исбот қилинг.

**291.** Евклид текислигида иккита параллел тўғри чизиқ ва уларнинг бирида $AB$ кесма берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $AB$ кесмани тенг уч қисмга бўлинг.

**292.** Иккита параллел тўғри чизиқ ва уларнинг бирида $AB$ кесма берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $AB$ кесмани тенг беш қисмга бўлинг.

**293** $ABC$ учбурчак томонларининг хос эмас нуқталари $A_\infty$, $B_\infty$, $C_\infty$ дан иборат. Уларга гармоник бўлган тўртинчи $D_\infty$ ни ясанг.

**294.** $M$ нуқтадан $k$, $l$ тўғри чизиқларнинг чизмадан ташқарисида кесишган $D$ нуқтаси орқали ўтувчи тўғри чизиқни ясанг.

**295.** Тўлиқ тўртбурчакнинг уч жуфт қарама-қарши томонларининг ихтиёрий тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари битта инволюцияга қарашли эканлигини исботланг.

## 10- §. ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚЛАР ВА УЛАРНИНГ ТУРЛАРИ

**296.** $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ репер учларидан ўтадиган иккинчи тартибли эгри чизиқнинг тенгламасини тузинг.

**297.** Қуйидаги иккинчи тартибли эгри чизиқларнинг тенгламасини каноник кўринишга келтиринг ва уларнинг турларини аниқланг:

а) $4x_1^2+x_2^2+2x_1x_3+2x_2x_3=0$;

б) $20x_2^2+10x_1x_2-3x_2x_3=0$;

в) $x_1^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3=0$.

**298.** Кенгайтирилган евклид текислигида $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ реперга нисбатан иккинчи тартибли эгри чизиқ — $\theta$ ўзининг тенгламаси билан берилган:

$$a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+2a_{23}x_2x_3=0.$$

Бу эгри чизиқ хос нуқталарининг геометрик ўрни евклид текислигидаги одатдаги иккинчи тартибли эгри чизиқни ташкил этишини исботланг.

**299.** Ўзаро проектив иккита дастага қарашли тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари геометрик ўрни иккинчи тартибли эгри чизиқдан иборат эканлигини исбот қилинг.

**300.** Иккинчи тартибли эгри чизиқ ўзининг бешта нуқтаси билан аниқланишини исботланг.

**301.** Қуйида берилган нуқталардан ўтадиган иккинчи тартибли эгри чизиқ тенгламасини тузинг:

а) $A_0(-4:0:1)$, $B_0(0:0:1)$, $C_0(2:-1:0)$; $D(5::-1:10)$, $E_0(1:1:0)$;

б) $A_1(1:0:0)$, $B_1(0:0:1)$, $C_1(0:1:0)$, $D_1(2:2:1)$, $E_1(0:-1:2)$;

в) $A_2(0:1:0)$, $B_2(0:0:1)$, $C_2(1:1:-1)$, $D_2(2::4:-1)$, $E_2(1:-1:1)$.

**302.** Марказлари иккинчи тартибли қаторда жойлашган иккита дастанинг мос тўғри чизиқлари кесишган нуқталари шу чизиққа қарашли бўлса, бу икки дастанинг проектив эканлигини исбот қилинг.

**303.** Ихтиёрий тўғри чизиқ иккинчи тартибли чизиқ билан энг кўпи билан иккита умумий нуқтага эга бўлиши мумкинлигини кўрсатинг.

**304.** Иккинчи тартибли эгри чизиққа кичик иккилик принципи бўйича қандай фигура мос келади?

**305.** Иккинчи тартибли эгри чизиққа қарашли бешта нуқта берилган: $A$, $B$, $C$, $D$, $E$. Унинг яна бир нечта нуқтасини ясанг.

**306.** Ушбу

$$\begin{cases} \rho x_1' = x_1 - \frac{1}{2} x_3, \\ \rho x_2' = x_2, \\ \rho x_3' = x_1 + \frac{1}{2} x_3 \end{cases}$$

проектив алмаштириш параболани қандай чизиққа алмаштиради?

**307.** $x^2 - y^2 = 1$ гиперболани $x^2 + y^2 = 1$ айланага алмаштирувчи бирор проектив алмаштириш топинг.

**308.** Ҳамма айланаларнинг $(1 : i : 0)$ ва $(1 : -i : 0)$ нуқталардан ўтишини кўрсатинг.

## 11-§. ТЎҒРИ ЧИЗИҚ БИЛАН ИККИНЧИ ТАРТИБЛИ ЧИЗИҚНИНГ ЎЗАРО ВАЗИЯТИ

**309.** $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ тўғри чизиқнинг иккинчи тартибли $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_2 - x_3^2 = 0$ чизиқ билан кесишган нуқталарини топинг.

**310.** Қуйидаги маълумотларга асосан $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1x_3 - x_3^2 = 0$ иккинчи тартибли чизиқнинг $AB$ тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарини топинг:

а) $A(1 : 7 : 2)$, $B(7 : -1 : 0)$; б) $A(1 : 1 : 0)$, $B(-1 : : 1 : 10)$;

в) $A(1 : 2 : 1)$, $B(1 : 0 : -1)$.

**311.** $2x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 = 0$ квадриканинг $x_1 + x_2 = 0$ тўғри чизиққа $(0 : 0 : 1)$ нуқтада уринишини исботланг.

**312.** $x_1^2 - x_2^2 + x_1x_3 = 0$ квадриканинг $A(1 : 2 : 3)$ нуқтасидаги уринма тенгламасини тузинг.

**313.** $A(1 : 0 : 0)$ нуқтадан $x_2^2 + 2x_3^2 - x_1x_2 - 5x_2x_3 = 0$ квадрикага уринма ўтказинг.

**314.** $3x_1 + 4x_2 - 40 = 0$ тўғри чизиқнинг $x_1^2 + x_2^2 -$

$-10x_1x_3=0$ квадрикага $A(4:7:1)$ нуқтада уринишини исбот қилинг.

**315.** $a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+a_{33}x_3^2+2a_{12}x_1x_2+2a_{13}x_1x_3+$ $+2a_{23}x_2x_3=0$ чизиқнинг хос эмас нуқтасида унга ўтказилган уринмасининг тенгламасини топинг.

**316.** Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг тўртта нуқтаси ва уларнинг бирида ўтказилган уринмаси берилган бўлса, чизиқнинг яна бир-икки нуқтасини ясанг.

**317.** Иккинчи тартибли эгри чизиқнинг учта нуқтаси ва бу нуқталарнинг иккитасидан ўтказилган уринмалари берилган. Шу чизиқнинг яна бир нечта нуқтасини ясанг.

**318.** 315-масаладаги чизиқнинг хос эмас тўғри чизиқ билан кесишган нуқталарини топинг.

## 12-§. ҚУТБ ВА ПОЛЯРА

**319.** Қуйидаги нуқталар жуфтининг қайси бири $x_1^2+x_2^2+2x_1x_3=0$ квадрика билан гармоник эмас:

а) $A_1(1:1:1)$, $B_1(1:-1:-1)$;

б) $A_2(-1:2:1)$, $B_2(1:2:-3)$;

в) $A_3(0:-1:1)$, $B_3(1:1:0)$.

**320.** $A(1:-1:0)$ нуқтанинг $x_2^2+4x_1x_3=0$ квадрикага нисбатан полярасини топинг.

**321.** $3x_1-x_2-x_3=0$ тўғри чизиқнинг $-x_1^2+x_2^2+$ $+x_3^2-2x_1x_2=0$ квадрикага нисбатан қутбини топинг.

**322.** $k^2$ квадрика ва унга қарашли бўлмаган $A$ нуқта берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, $A$ нуқтанинг полярасини ясанг.

**323.** Айлана ва унинг ташқарисида нуқта берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, шу нуқтадан айланага уринма ўтказинг.

**324.** Иккинчи тартибли чизиқ $k^2$ нинг иккита $P$ ва $Q$ нуқтада ўтказилган уринмалари берилган. $PQ$ тўғри чизиқ қутбини топинг ($k^2$ нинг ўзи берилмаган).

**325.** $x_1^2+x_2^2-x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3=0$ квадрикага нисбатан $A(-3:1:-3)$ нуқтага гармоник қўшма бўлган $4x_1+x_2-x_3=0$ тўғри чизиқнинг нуқтасини топинг.

**326.** Иккинчи тартибли чизиқ ичида ётувчи нуқтадан шундай ватар ўтказингки, у шу нуқтада тенг иккига бўлинсин.

**327.** Иккинчи тартибли чизиқ $k^2$ ва $A\overline{\in}k^2$ берилган. Агар $X$, $Y$, $Z$, $T$, $U$, $V$ нуқталар $A$ нуқтадан ўтказилган $a_1$, $a_2$, $a_3$ кесувчиларнинг $k^2$ билан кесишган нуқталари бўлиб, $P = XT \cup ZY$, $Q = UT \cup ZV$ бўлса, $PQ$ тўғри чизиқ $A$ нуқтанинг поляраси эканлигини исбот қилинг.

**328.** Квадрика $k^2$ ички нуқталарининг поляраси $k^2$ ни кесмаслиги, ташқи нуқталарининг поляралари $k^2$ ни кесишини исбот қилинг.

**329.** $x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3 = 0$ квадрика берилган. $A(2:1:0)$ ва $B(-1:1:1)$ нуқталарнинг квадрикага нисбатан поляралари бўлмиш $a$, $b$ ни топинг. $C = a \cap b$ нуқта полярасининг $AB$ тўғри чизиқдан иборат эканлигини текшириб кўринг.

**330.** $k^2$ квадрика билан кесишмайдиган $d$ тўғри чизиқ берилган. Агар $A \in d$ нуқтадан $k^2$ га ўтказилган уринмаларнинг уриниш нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқ $d$ ни $B$ нуқтада кесса, $B$ дан $k^2$ га ўтказилган уринмаларнинг уриниш нуқталарини бирлаштирувчи тўғри чизиқ $A$ дан ўтишини исбот қилинг.

**331.** $k^2$ айлана ва у билан кесишмайдиган $d$ тўғри чизиқ берилган. $\forall M \in d$ нуқтадан $k^2$ га ўтказилган уринмаларнинг уриниш нуқталарини туташтирувчи тўғри чизиқларнинг бир нуқтадан ўтишини исбот қилинг.

**332.** $k^2$ айлана ва $A \neq O$ ($k^2$ нинг ички нуқтаси) берилган, $A$ дан ўтказилган барча ватарларнинг $k^2$ билан кесишган нуқталаридан $k^2$ га ўтказилган уринмаларнинг кесишиш нуқталари $AO$ га перпендикуляр бўлган тўғри чизиқда ётишини исбот қилинг, бу ерда $O$ айлананинг маркази

**333.** Агар $(0:0:1)$ нуқта $k^2$ га нисбатан $x_3 = 0$ тўғри чизиқнинг қутби бўлса, $k^2$ нинг тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

**334.** Агар проектив репернинг учлари қаршисида ётган томонларнинг $k^2$ га нисбатан қутби бўлса, $k^2$ нинг тенгламаси қандай кўринишда бўлади?

**335.** Эллипс, гипербола ва параболанинг директрисалари мос фокусларининг поляралари эканлигини исбот қилинг.

## 13-§. ПАСКАЛЬ ВА БРИАНШОН ТЕОРЕМАЛАРИ

**336.** $A_1(1:0:1)$, $A_2(0:1:1)$, $A_3(3:4:5)$, $A_4(1:0:-1)$, $A_5(0:-1:1)$, $A_6(-3:4:5)$ нуқталар берилган. Агар $P = A_1A_2 \cap A_4A_5$, $Q = A_2A_3 \cap A_5A_6$, $R = A_3A_4 \cap A_6A_1$

бўлса, $P$, $Q$, $R$ нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

337. Олтита нуқта берилган: $A(10:5:1)$, $B(8:1:1)$, $C(2:8:1)$, $P(-4:-2:1)$, $D(2:-2:1)$, $O(0:7:1)$. $AP$, $BD$, $CD$ тўғри чизиқларнинг бир нуқтада кесишишини исбот қилинг.

338. Иккинчи тартибли чизиқдаги олтита нуқта нечта Паскаль тўғри чизиғини аниқлайди?

339. Иккинчи тартибли дастага қарашли бўлган олтита тўғри чизиқ 60 та Брианшон нуқтасини аниқлашини исбот қилинг.

340. Квадриканинг бешта нуқтаси берилган. Унинг яна бир нечта нуқтасини ясанг.

341. Иккинчи тартибли дастанинг бешта тўғри чизиғи берилган. Унга қарашли бир-иккита тўғри чизиқ ясанг.

342. Квадрика ўзининг бешта $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ нуқтаси билан берилган. $D$ нуқтада квадрикага уринма ўтказинг.

343. Иккинчи тартибли чизиқ ўзининг учта $A$, $B$, $C$ нуқтаси ва $A$, $B$ нуқталарида ўтказилган уринмалари билан берилган. $C$ нуқтада унга уринма ўтказинг.

344. Иккинчи тартибли эгри чизиқ ўзининг тўртта нуқтаси ва уларнинг бирида ўтказилган уринмаси билан берилган. Шу чизиқнинг бирорта нуқтасини ясанг.

345. $A_1$, $A_3$, $A_5$ ва $A_2$, $A_4$, $A_6$ нуқталар мос равишда $m$ ва $n$ тўғри чизиқларда ётади. Бу ерда $P=A_1A_2\cap A_4A_5$, $Q=A_2A_3\cap A_5A_6$, $R=A_3A_4\cap A_6A_1$. Бу нуқталарнинг бир тўғри чизиқда ётишини исботланг.

346. Паскаль теоремасида Паскаль тўғри чизиғи хос эмас бўлган ҳол учун чизма ясанг.

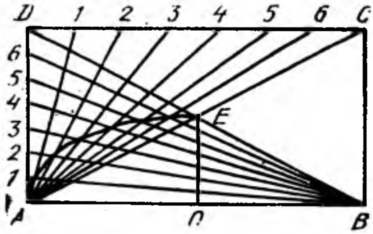
347. Брианшон теоремасида Брианшон нуқтаси хос эмас бўлган ҳол учун чизма ясанг.

348. Паскаль—Пан конфигурациясида қуйидаги ҳоллар учун чизма ясанг:
а) тўғри чизиқларидан бири хос эмас;
б) нуқталаридан бири хос эмас.

349. Эллипсда тўртта $A$, $B$, $C$, $D$ нуқта берилган бўлиб, $AB$ ва $CD$ эллипснинг қўшма диаметрлари бўлса, эллипснинг яна битта нуқтасини ясанг.

350. $S_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \overline{\wedge} S_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$ дасталар берилган бўлиб, $(\widehat{a_1, b_1})=(\widehat{a_2, b_2})$, $(\widehat{a_1, c_1})=(\widehat{a_2, c_2})$, ... бўлса, бу дасталар мос тўғри чизиқларининг кесишган нуқталари қандай чизиқдан иборат бўлади?

351. $K$ айлана ва унинг маркази $O$ берилган. Фақат




4-чизма.

чизғичдан фойдаланиб, берилган $P$ нуқтадан $l$ тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

**352.** $ABCD$ тўғри тўртбурчак берилган бўлиб, $AD$, $CD$ томонлар бир хил сондаги тенг кесмаларга бўлинган. $A$, $C$ нуқталардан ҳисоблаб, мос нуқталарни $B$ ва $A$ нуқталар билан туташтирувчи тўғри чизиқларнинг кесишган нуқталари ярим ўқлари $OA$ ва $OE$ дан иборат эллипсда ётишини исбот қилинг (4- чизма)

# IV боб. ТАСВИРЛАШ УСУЛЛАРИ

## 14- §. ПАРАЛЛЕЛ ПРОЕКЦИЯДА ЯССИ ФИГУРАЛАРНИ ТАСВИРЛАШ

**353.** Параллел проекциялашнинг қуйидаги хоссаларини исботланг (бу хоссаларда проекцияловчи тўғри чизиқлардан бошқалари кўзда тутилади):

1) тўғри чизиқ тўғри чизиққа проекцияланади;

2) параллел тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқларга проекцияланади;

3) уч нуқтанинг оддий нисбати сақланади (берилган нисбатда бўлиш).

**354.** Текисликни текисликка параллел проекциялаш аффин акслантириш эканлигини исботланг.

**355** Қавариқ фигуранинг параллел проекциясидаги тасвири — қавариқ фигура бўлишини исботланг.

**356.** Фазодаги ихтиёрий учбурчакнинг текисликдаги тасвири ихтиёрий учбурчак бўлишини исботланг.

**357.** Олдинги масалага асосланиб, ихтиёрий ясси кўпбурчак тасвирини ясаш усулини келтириб чиқаринг.

**358.** Фазодаги ихтиёрий параллелограммнинг текисликдаги тўғри тасвири* ихтиёрий параллелограмм эканини исботланг.

---

* Агар тасвир оригиналнинг текисликдаги проекцияси ёки шу проекцияга ўхшаш фигурадан иборат бўлса, тасвир тўғри деб айтилади.

**359**. Трапециянинг тўғри тасвири асосларининг нисбати берилган трапецияникидек бўлган трапециядан иборат эканлигини исботланг.

**360**. Мунтазам олтибурчакнинг тасвирини ясанг.

**361**. Айлананинг аффин акси—эллипс бўлишини исботланг. Бундан: айлананинг ҳар қандай тўғри тасвири эллипс эканлигини келтириб чиқаринг.

**362**. $\omega$ айлана $\gamma$ эллипсга аффин акслансин. Қуйидагиларни исботланг:

1) $\omega$ нинг маркази $\gamma$ нинг марказига алмашинади;

2) айлананинг икки ўзаро тик диаметрлари эллипснинг иккита ўзаро қўшма диаметрларига ўтади;

3) $\omega$ га уринма $\gamma$ га уринмага ўтади;

4) $\omega$ га ташқи чизилган квадрат $\gamma$ га ташқи чизилган параллелограммга ўтади.

**363**. Ҳар қандай икки умумий ўрта нуқтага эга бўлган бир тўғри чизиқда ётмаган кесмалар учун ягона эллипс мавжуд бўлиб, бу кесмалар эллипснинг ўзаро қўшма диаметрлари бўлади. Шуни исботланг.

**364**. Ҳар қандай айлананинг тўғри тасвири ихтиёрий эллипсдир. Исботланг.

**365**. Ҳар қандай эллипс бирор айлананинг текисликдаги ортогонал проекцияси бўлишини исботланг.

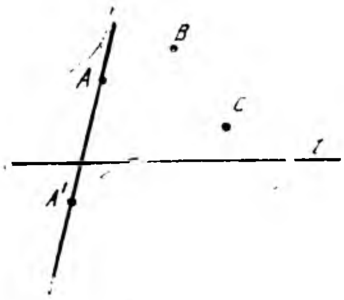
**366**. Айлананинг унга ички чизилган: 1) квадрат; 2) мунтазам саккизбурчак; 3) мунтазам учбурчак; 4) мунтазам олтибурчаклар билан бирга тасвирини ясанг.

**367**. Айлананинг унга ташқи чизилган: 1) квадрат; 2) мунтазам саккизбурчак; 3) мунтазам учбурчак; 4) мунтазам олтибурчаклар билан бирга тасвирини ясанг.

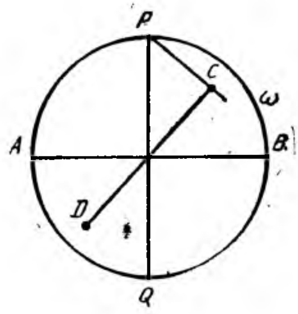
**368**. Агар аффин алмаштиришда мос нуқталарни туташтирадиган тўғри чизиқлар параллел бўлса, алмаштириш *ҳамжинс* дейилади. Ҳамжинс алмаштириш ҳамжинслик ўқига эга, бу ўқ—барча нуқталари қўзғалмас бўлган тўғри чизиқдир.

$f$—ҳамжинс алмаштириш, $l$—ҳамжинслик ўқи, $A$ ва $A'$ мос нуқталар жуфти бўлсин (5-чизма). $l$ да ётмаган ихтиёрий $B$, $C$ нуқталар учун $B' = f(B)$, $C' = f(C)$ ларни ясанг.

**369**. 6-чизмада $AB$ ва $CD$ кесмаларнинг умумий ўрта нуқтаси $O$ дан иборат ($AB > CD$). $AB$ кесма $\omega$ айлананинг диаметри, $PQ$ эса шу айлананинг $AB$ га перпендикуляр диаметри. $AB$ ўққа эга бўлган, $P$ нуқтани $C$ нуқтага акслантирадиган ҳамжинс алмашти-




5-чизма.




6-чизма.

ришдан фойдаланиб, қўшма диаметрлари $AB$ ва $CD$ дан иборат эллипснинг бир неча нуқталари аксини ясанг.

**370.** Ҳамжинслик ўқи $l$ ва $l(A)=A'$ шартни қаноатлантирган алмаштириш $l$ бўлсин. Ўзаро перпендикуляр $d$ ва $q$ тўғри чизиқларни ясанг ($d$, $q$ ларнинг йўналишлари ҳамжинс алмаштиришдаги *(қўш йўналишлар* дейилади).

**371.** Ўрта нуқтаси $O$ дан иборат $AB$, $CD$ кесмалар берилган. Қўшма диаметрлари $AB$, $CD$ бўлган эллипс ўқларини ясанг.

## 15- §. ФАЗОВИЙ ФИГУРАЛАРНИ ПАРАЛЛЕЛ ПРОЕКЦИЯДА ТАСВИРЛАШ

**372.** Асоси: 1) квадрат; 2) параллелограмм; 3) трапеция; 4) ихтиёрий тўртбурчак бўлган тўртбурчакли призмани тасвирланг.

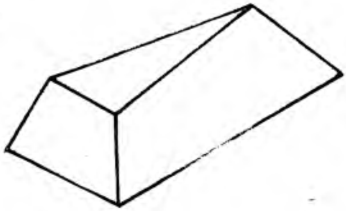
**373.** $Q_1$, $Q_2$—$P$ призманинг юқори ва қуйи асослари, $Q_1$, $Q_2$ уларнинг тасвирлари бўлсин. $Q_1'$, $Q_2''$ ларнинг тенг эканлигини тушунтиринг.

**374.** Мунтазам учбурчакли призма ва асос марказларини туташтирувчи ўқи тасвирларини ясанг.

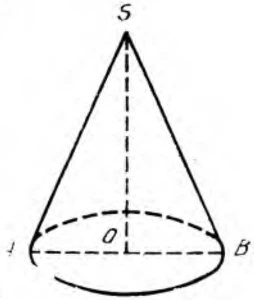
**375.** Мунтазам олтибурчакли призма ва асос марказларини туташтирувчи ўқининг тасвирларини ясанг.

**376.** Мунтазам учбурчакли пирамида ва унинг баландлиги тасвирларини ясанг.

**377.** Мунтазам олтибурчакли пирамида ва унинг баландлиги тасвирларини ясанг.



7-чизма.




8-расм.

**378.** Мунтазам $n$ бурчакли ($n=3$, 4, 6) пирамида ва унинг баландлигини тасвирлаш қоидасини топинг.

**379.** Тўртбурчакли кесик пирамиданинг тасвирини ясанг.

**380.** 7- чизмада кўрсатилган учбурчакли кесик пирамиданинг тасвирида йўл қўйилган хатони топинг.

**381.** Доиравий цилиндр, унинг ўқи ва иккита перпендикуляр ўқ кесимларининг тасвирини ясанг.

**382.** Доиравий конус ва унинг иккита перпендикуляр ўқ кесимларининг тасвирини ясанг

**383.** 8- чизмадаги конус ўқ кесимининг тасвиридаги хатони аниқланг ($SA$, $SB$—маркази $O$ дан иборат эллипсга уринмалар).

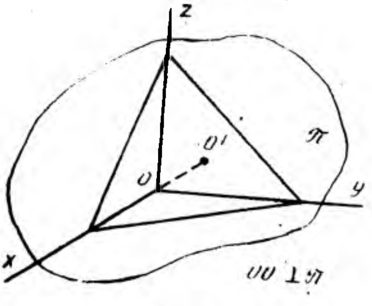
**384.** Учи $S$ бўлган конусга учи $S$ дан иборат мунтазам: 1) учбурчакли; 2) тўртбурчакли пирамида ички чизилган. Шу фигураларнинг тасвирларини ясанг.

**385.** Доиравий цилиндрга ички чизилган ва ён қирраси цилиндр баландлигига тенг мунтазам: 1) учбурчакли; 2) тўртбурчакли; 3) олтибурчакли призма чизилган. Шу фигураларнинг тасвирларини ясанг.

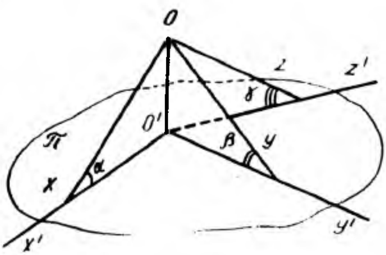
**386.** Цилиндрга мунтазам учбурчакли призма, призмага эса цилиндр ички чизилган ҳолдаги тасвирни ясанг. Цилиндрлар ҳажмларининг нисбатини аниқланг.

**387.** Мунтазам олтибурчакли призмага цилиндр ички чизилган ҳолдаги тасвирни ясанг. Призманинг ҳар бир қирраси $a$ бўлганда цилиндр ҳажмини топинг.

**388.** Ясовчиси $l$ га параллел қилиб, конус баландлигининг ўртасидан тўғри чизиқ ўтказилган. Шу тўғри чизиқнинг конус ичидаги кесмасини тасвирланг ва унинг узунлигини топинг.




9-чизма.




10-чизма.

**389**. Конусга куб ички чизилган ҳолдаги тасвирни ясанг. Куб қиррасини конус асосининг радиуси $R$ ва баландлиги $H$ орқали ифодаланг.

**390**. Конусга мунтазам учбурчакли призма ички чизилган ҳолдаги тасвирни ясанг. Призманинг ён ёқлари квадратлардан иборат бўлса, призма қиррасини конуснинг асос радиуси $R$ ва баландлиги $H$ орқали ифодаланг.

**391**. Ортогонал аксонометрия: тўғри бурчакли $Oxyz$ координаталар системаси чизма текислиги $\pi$ га ортогонал проекцияланади. Координата ўқларининг ҳеч бири $\pi$ га параллел эмас (9- чизма). $\pi$ текисликнинг координата ўқлари $Ox$, $Oy$, $Oz$ билан ташкил қилган бурчакларини $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ орқали белгилаймиз (10- чизма). Ўқлар йўналишидаги қисилиш коэффициентлари шу бурчакларнинг косинусларига тенглиги, яъни $u = \cos\alpha$, $v = \cos\beta$, $w = \cos\gamma$ эканлигини исботланг.

**392**. Тўғри бурчакли аксонометрияда қисилиш коэффициентлари квадратларининг йиғиндиси 2 га тенг, яъни $u^2 + v^2 + w^2 = 2$ эканини исботланг.

**393**. Тўғри бурчакли изометрия ҳоли учун ўқлар бўйича қисилиш коэффициентларини топинг.

**394**. Тўғри бурчакли аксонометрияда чизма текислиги $\pi$ нинг $Ox$ ўқ билан кесишган нуқтаси $A$, $Oy$ ўқ билан кесишган нуқтаси $B$ ва $Oz$ ўқ билан кесишган нуқтаси $C$ бўлсин (391- масалага қаранг). $ABC$ учбурчак *излар учбурчаги* дейилади. Тўғри бурчакли изометрияда $ABC$ учбурчак тенг томонли учбурчакка, $O$ нуқта $ABC$ учбурчакнинг марказига проекцияланишини исботланг.

395. Тўғри бурчакли изометрияда $O'x'$, $O'y'$, $O'z'$ ўқлар орасидаги бурчакларни топинг.

396. Тўғри бурчакли изометрияда айлананинг образини ясанг.

397. Тўғри бурчакли изометрияда сферанинг тасвирини ясанг.

## 16-§. ПОЗИЦИОН МАСАЛАЛАР (ТЎЛИҚ ТАСВИРЛАРДА)

Бу параграфнинг ҳар бир масаласида барча нуқталари берилганда фигура берилган деб қаралади Агар $A$ нуқта ва унинг бирор текисликка (асосий текисликка) олинган проекциясининг тасвири $A_1$ берилган бўлса, у ҳолда $A$ нуқта ҳам берилган дейилади, буни $A(A_1)$ кўринишда ёзилади.

398. $A(A_1)$, $B(B_1)$ нуқталар берилган $AB$ тўғри чизиқнинг изини ясанг (тўғри чизиқнинг асосий текислик билан кесишишидаги нуқта унинг изи ҳисобланади).

399 Бир тўғри чизиқда ётмаган $A(A_1)$ $B(B_1)$, $C(C_1)$ учта нуқта берилган. $ABC$ текисликнинг изини ясанг ($ABC$ текисликнинг изи бу текислик билан асосий текислик кесишишидан ҳосил қилинган тўғри чизиқдир).

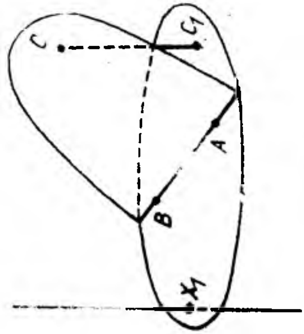
400 Қуйидаги ҳолларнинг ҳар бирида $a$, $b$ тўғри чизиқлар ҳамда уларнинг $a_1$, $b_1$ проекцияларини тасвирланг:

1) $a \| b$; 2) $a \cap b = C$; 3) $a \dot{-} b$.

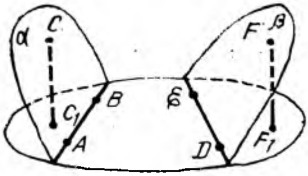
401. $ABC$ $(A_1B_1C_1)$ текислик ва $PQ\,(P_1Q_1)$ тўғри чизиқ берилган. Тўғри чизиқ билан текисликнинг ўзаро қандай жойлашганини аниқланг.

402. $ABC$ $(A_1B_1C_1)$ текислик ва асосий текисликка тегишли $X_1$ нуқта берилган. $ABC$ текислик билан $X_1$ нуқтадан ўтадиган проекцияловчи $d$ тўғри чизиқнинг кесишишидан ҳосил бўлган $X$ нуқтани ясанг.

403. $AB$ изи ва $C(C_1)$ нуқтаси билан $\alpha$ текислик ва асосий текисликка тегишли $X_1$ нуқта берилган (11 чизма). $X_1$ нуқта-



11-чизма.




12-чизма.

дан ўтадиган проекцияловчи тўғри чизиқ билан $\alpha$ текисликнинг кесишган $X$ нуқтасини ясанг.

**404**. $\alpha$ текислик ўзининг изи $AB$ ва $C(C_1)$ нуқта билан, $\beta$ текислик ўзининг $DE$ изи ва $F(F_1)$ нуқта ёрдамида берилган (12- чизма).

Бу текисликларнинг кесишишидан ҳосил бўлган $l(l_1)$ тўғри чизиқни ясанг.

Кўпёқлининг ясси кесимини ясаш—муҳим позицион масаладир. 405—411- масалаларда кесимларни „мактаб усули", яъни излар усули билан бажариш мумкин. Ёқлардаги кесим кесмаларини шу ёққа тегишли қирраларнинг давоми билан кесиштириб, натижада „қўшни ёққа чиқилади".

**405**. Учбурчакли $ABCA_1B_1C_1$ призманинг $AB$ қиррасида $M$, $BB_1$ қиррасида $N$, $CC_1$ қиррасида $K$ нуқталар берилган. Призманинг $MNK$ текислик билан кесишиши натижасида ҳосил қилинган кесимни ясанг.

**406**. $ABCD$ учбурчакли пирамиданинг $BD$ қиррасида $M$, $CD$ қиррасида $N$, $ABC$ ёғида $K$ нуқталар берилган. Пирамиданинг $MNK$ текислик билан кесишиши натижасида ҳосил бўладиган кесимни ясанг. $MN \parallel BC$ ва $MN \nparallel BC$ ҳолларни алоҳида қаранг.

**407**. $PQRSP_1Q_1R_1S_1$ тўртбурчакли призманинг $PP_1S_1S$ ёғидаги $A$, $RS$ қиррасидаги $B$, $PQ$ қиррасидаги $C$ нуқталардан ўтадиган $ABC$ текислик билан кесишишидан ҳосил бўлган кесимни ясанг.

**408**. $PQRP_1Q_1R_1$ учбурчакли призманинг $PR$ қиррасида $A$, $QQ_1$ қиррасида $B$, $P_1Q_1R_1$ асосида $C$ нуқталар олинган. $ABC$ текисликнинг призма билан кесишишидан ҳосил бўлган кесимни ясанг.

**409**. $PQRSTP_1Q_1R_1S_1T_1$ бешбурчакли призманинг ён қирраларида $A$, $B$, $C$ нуқталар қуйидагича олинган:

1) $QA : AQ_1 = 2 : 1$; $RB : BR_1 = 1 : 7$; $SC : CS_1 = 5 : 3$;
2) $QA : AQ_1 = 1 : 1$; $RB : BR_1 = 1 : 3$; $SC = CS_1 = 1 : 1$.

$ABC$ текисликнинг призма билан кесишишидан ҳосил бўлган кесимни ясанг.

**410**. Учбурчакли призманинг ён қирра ўртаси, пастки асос томонининг ўртаси, юқори асос томонининг ўртаси орқали ўтган текислик билан призманинг кесимини ясанг.

**411.** Учи $S$ нуқтадаги $SPQRT$ тўртбурчакли пирамиданинг ён қирраларида $A$, $B$, $C$ нуқталар олинган:

$$1)\ SA:AQ=1:2;\ SB:BR=3:1;\ SC:CP=2:1;$$

$$2)\ SA:AQ=1:3;\ SB:BT=1:1;\ SC:CR=3:1.$$

$ABC$ текислик билан пирамида кесимини ясанг.

Кесимларни ясашнинг универсал усули текислик билан қирраларнинг кесишиш нуқталарини топишдан иборат. Бунинг учун 402-масалада кўрсатилган ясаш усулидан фойдаланиш маъқулдир.

**412.** Бешбурчакли призманинг ён қирраларида олинган уч нуқта орқали ўтган текислик билан призманинг кесимини ясанг.

**413.** Бешбурчакли пирамиданинг ён қирраларида олинган уч нуқта орқали ўтган текислик билан пирамиданинг кесимини ясанг.

**414.** Бешбурчакли призманинг қуйидагича аниқланган уч нуқта орқали ўтган текислик билан кесимини ясанг:

1) бир нуқта призманинг юқори асосида, иккитаси—унинг ён қирраларида;

2) бир нуқта призманинг юқори асосида, иккитаси—унинг ён ёқларида;

3) бир нуқта призманинг пастки асосининг текислигида, иккитаси унинг ён қирраларида;

4) бир нуқта призманинг ён қиррасида, иккитаси—ён ёқларда.

**415.** Бешбурчакли пирамиданинг қуйидагича аниқланган уч нуқта орқали ўтган текислик билан кесимини ясанг:

1) бир нуқта пирамиданинг ён қиррасида, иккитаси—ён ёқларда;

2) бир нуқта пирамиданинг баландлигида, бири ён қиррада; учинчиси—ён ёқда;

3) бир нуқта пирамида ичида, иккитаси—унинг ташқарисида.

**416.** Учбурчакли пирамида ва унинг баландлигининг тасвири берилган. Пирамида баландлигининг ўртаси ва асос қирраси орқали ўтган текислик билан пирамиданинг кесимини ясанг.

**417.** $DABC$ тетраэдрнинг $AD$ ва $DC$ қирраларида олинган $M$, $N$ нуқталар ҳамда $ABC$ ёқнинг оғирлик маркази $O$ орқали ўтган текислик билан тетраэдрнинг кесимини ясанг.

**418.** $DABC$ тетраэдр билан мос равишда унинг $AD$, $AB$, $DC$ қирраларида олинган $M$, $N$, $P$ нуқталар орқали ўтган текислик билан кесимини ясанг.

Призмаларнинг кесимларини ясашда қуйидаги теоремадан фойдаланиш фойдадан ҳоли эмас: агар параллел икки текислик учинчи текислик билан кесишса, кесимдаги тўғри чизиқлар параллел бўлади.

**419** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг $A_1C_1$ учлари, $AB$ қирранинг $Z$ нуқтаси орқали ўтган текислик билан параллелепипеднинг кесимини ясанг.

**420.** Кубнинг ён қиррасининг ўртаси ва бу қирра ётмаган ён ёқнинг диагонали орқали ўтган текислик билан кубнинг кесимини ясанг.

**421.** Мунтазам тўртбурчакли призма пастки асосидаги икки қўшни томонннинг ўрталари ва призма ўқининг ўртаси орқали ўтган текислик билан призманинг кесимини ясанг.

**422.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $B$ учи, $CC_1$ ва $A_1D_1$ қирраларнинг ўрталаридан ўтган текислик билан кубнинг кесимини ясанг. Кубнинг қиррасини $a$ деб олиб, кесимнинг периметрини ҳисобланг.

**423.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $A_1$ учи, $BB_1C_1C$ ва $CC_1DD_1$ ёқларнинг $P$, $Q$ марказлари орқали ўтган текислик билан кубнинг кесимини ясанг.

Кубнинг қиррасини $a$ деб олиб, кесимнинг периметрини ҳисобланг.

**424** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $AB$, $BC$, $DD_1$ қирралари ўрталаридан ўтадиган текислик билан кубнинг кесимини ясанг.

Кубнинг қиррасини $a$ деб олиб, кесимнинг периметрини ҳисобланг.

**425.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда $A$ уч $BB_1\times\times CC_1$ ёқнинг $P$ маркази билан туташтирилган. $AP$ тўғри чизиқ $A_1BD$ текисликни $Q$ нуқтада кесиб ўтади. $Q$ нуқтани ясанг ва $AQ:QP$ нисбатни топинг.

Берилган тўғри чизиққа параллел тўғри чизиқни тасвирлашда параллел тўғри чизиқлар тасвирда параллел бўлиши хоссасидан фойдаланиш керак. Шунинг учун кўпинча параллел тўғри чизиқни „таваккалига" ўтказилади, лекин иккинчи тўғри чизиқни „тавакалига" ўтказишдан аввал, кесишадиган тўғри чизиқларни бир текисликда ётишларига ишонч ҳосил қилиш керак.

**426.** Берилган тўртбурчакли пирамида асосининг диагонали орқали ўтган ва бирор ён қиррасига параллел бўлиб ўтган кесимни ясанг.

**427.** Тўртбурчакли пирамида ва унинг баландлигининг тасвири берилган. Пирамида баландлигининг ўртасидан ўтган ва ён ёғига параллел бўлган кесим ўтказинг.

**428.** Тетраэдрнинг учидан қарама-қарши ёғига параллел текислик ўтказилган. Бу текислик билан тетраэдрнинг қолган ёқлари текисликлари кесишишидан ҳосил бўлган чизиқларни ясанг.

**429.** Бешбурчакли призма асосининг диагонали орқали ўтиб, призманинг бу диагональ билан кесишмайдиган бошқа бирор диагоналига параллел текислик ўтказинг.

**430.** $PQRSTP_1Q_1R_1S_1T_1$ бешбурчакли призмада $Q_1T_1$ га параллел ва $P_1S$ диагонали орқали ўтган кесимни ясанг.

**431.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипеднинг $AD$ ва $B_1C_1$ қирраларида $P$, $Q$ нуқталар берилган. $AB$ қиррага параллел бўлиб $P$, $Q$ орқали ўтган текислик билан параллелепипеднинг кесимини ясанг.

**432.** Параллелепипеднинг пастки асосида $l_1$, ён ёғида $l_2$ иккита айқаш тўғри чизиқ берилган. Параллелепипед диагоналлари кесишган нуқта орқали ўтувчи $l_1$, $l_2$ га параллел текислик билан параллелепипеднинг кесимини ясанг.

**433.** Мунтазам тўртбурчакли пирамида асосининг нуқтаси орқали ўтган ва қуйидагиларга параллел текислик ўтказинг:

1) пирамида икки қарама-қарши ёқларининг апофемаларига;

2) пирамиданинг икки қўшни ёқларининг апофемаларига;

3) пирамиданинг баландлиги ва ён қиррасига.

**434.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг қуйидагилар орқали ўтган текислик билан кесимини ясанг:

1) $DC_1$ тўғри чизиққа параллел, $BD_1$ диагональ орқали;

2) $A_1C_1$ тўғри чизиққа параллел, $B_1C$ диагональ орқали.

**435.** $SABCD$ тўртбурчакли пирамиданинг тасвири берилган. $SA$ қиррага тегишли $K$ нуқта орқали ўтган, параллелограмм шаклидаги пирамиданинг кесимини ўтказинг.

## 17-§. МЕТРИК МАСАЛАЛАР

436—455-масалалар ясашга доир, 456—488-масалалар эса ҳисоблашга доир метрик масалалардир.

**436.** $ABC$—тенг томонли учбурчакнинг тасвири бўлсин. $PQR$ эса оригиналга ички чизилган учбурчакнинг тасвири. $PQR$ учбурчак $PQ$ томонининг $RZ$ баландлиги тасвирини ясанг.

**437.** Мунтазам учбурчакли призмада ён қиррадаги $M$ нуқтадан қарама-қарши ёғига ўтказилган перпендикуляр тасвирини ясанг.

**438.** Мунтазам тўртбурчакли призма диагональ кесимларига перпендикулярлар ўтказинг.

**439.** Кубнинг учидан унинг диагоналига перпендикуляр ўтказинг.

**440.** Мунтазам учбурчакли пирамиданинг баландлиги асос томонидан икки баробар кичик. Пирамида асосининг учидан қарама-қарши ён ёққа перпендикуляр ўтказинг.

**441.** Учбурчакли $ABCA_1B_1C_1$ мунтазам призманинг баландлиги асосининг томонига тенг. $A_1$, $B_1$, $C_1$ учлардан кесим ўтказилган. $A_1$ нуқтадан $AB_1C_1$ текисликка ўтказилган перпендикулярни ясанг.

**442.** Мунтазам тетраэдрнинг икки айқаш қирраларига умумий перпендикулярни ясанг.

**443.** (Оғзаки, чизмага қараб), $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг тасвирида қуйидагиларни кўрсатинг:

1) кубнинг қирралари, ёқларининг диагоналлари, кубнинг диагоналлари, $AA_1$ қирра билан айқаш тўғри чизиқлар;

2) бу тўғри чизиқлар ва $AA_1$ қирранинг умумий перпендикулярлари.

**444.** Кубнинг икки қўшни ёқлари диагоналларининг умумий перпендикулярларини ясанг. Кубнинг қиррасини $a$ деб олиб, шу диагоналлар орасидаги масофани топинг.

**445.** Қирраси $a$ га тенг кубнинг диагонали ва бу диагональ билан кесишмайдиган ёқ диагонали орасидаги масофа ҳамда улар орасидаги бурчакни топинг.

**446.** Тўғри бурчакли параллелепипедда асос томонлари $a$, $b$ га тенг. Параллелепипед диагонали ва бу диагональ билан кесишмайдиган ён қирра орасидаги масофани топинг.

**447.** Тўртбурчакли мунтазам призма асосининг томони 15 га, баландлиги 20 га тенг. Асос томонидан у билан кесишмайдиган диагоналгача бўлган масофани топинг.

**448.** Тўртбурчакли мунтазам призманинг баландлиги асосининг томонидан икки баробар катта. Призманинг марказидан ўтадиган, ён ёқнинг диагоналига перпендикуляр кесим ўтказинг.

**449**. Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг баландлиги асос диагоналига тенг. Пирамиданинг асоснинг учи ва қарама-қарши ётган ён қиррага перпендикуляр бўлган текислик билан кесимини ясанг.

**4.0.** Учбурчакли мунтазам пирамиданинг ён қирраси асосининг томонидан икки баравар катта. Асос томонидан ўтиб, шу томон билан айқаш бўлган ён қиррага перпендикуляр текислик ўтказинг

**451.** Тўртбурчакли $ABCDA_1B_1C_1D_1$ мунтазам призманинг баландлиги асос томонининг $\frac{3}{4}$ қисмини ташкил қилади. Призма асосининг учи $D_1$ орқали ўтиб, $AC$ диагоналга перпендикуляр бўлган текислик ўтказинг.

**452.** Мунтазам тетраэдрнинг тасвири берилган. Тетраэдр иккиёқли бурчагининг чизиқли бурчагини ясанг.

**453.** Учбурчак томонларининг узунликлари $2:\sqrt{3}:\sqrt{3}$ нисбатда бўлганда учбурчакни ва унинг ортомарказини тасвирланг.

**454** $ABCD$—квадратнинг тасвири, $P$ эса $AB$ нинг ўртаси, $Q$—$AC$ билан $DP$ нинг кесишган нуқтаси. 1) $C$ уч орқали ўтиб, $DP$ га перпендикулярни; 2) $APQ$ учбурчакнинг ортомарказини тасвирланг.

**455.** Тенг ёнли тўғри бурчакли $ABC(AC=BC)$ учбурчакнинг тасвири берилган. Учбурчак текислигидаги $D$ нуқтадан $AC$, $BC$, $AB$ тўғри чизиқларга перпендикулярлар ўтказинг.

**456.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $AB$, $BC$, $DD_1$ қирраларнинг ўрталаридан ўтадиган текислик билан кесимини ясанг; куб қиррасини $a$ га тенг деб олиб, шу кесим юзини ҳисобланг.

**457.** Учбурчакли пирамиданинг ҳар бир қирраси $a$ га тенг. Пирамида асосининг марказидан ўтиб, ён қиррасига перпендикуляр текислик билан пирамиданинг кесимини ўтказинг ва кесим юзини топинг.

**458.** Кубнинг бир учи ва бу уч тегишли бўлмаган икки ён ёқларининг марказларидан ўтган текислик билан кубнинг кесимини ясанг. Куб қиррасини $a$ га тенг деб олиб, кесим юзини ҳисобланг.

**459.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг $D_1$ учи орқали ўтиб, кубнинг диагоналига перпендикуляр бўлган текислик ўтказинг. Кубнинг қиррасини $a$ га тенг деб олиб, кесим юзини ҳисобланг.

**460.** Учбурчакли мунтазам $ABCD_1B_1C_1$ призманинг ҳар бир қирраси $a$ га тенг. $AB$, $AA_1$, $A_1C_1$ қирраларнинг ўрталари орқали ўтган кесим юзини топинг.

**461.** Кубнинг қирраси $a$ га тенг. Кубнинг икки қўшни қирраларининг ўрталаридан ўтган ва унинг бу қирраларни кесиб ўтадиган диагоналига параллел бўлган текислик билан кесими юзини топинг.

**462.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубнинг қирраси $a$ га тенг. Кубнинг $B$ учи, $CC_1$ ва $A_1D_1$ қирралари ўрталаридан ўтган текислик билан кесими юзини топинг.

**463.** Тўртбурчакли $SABCD$ мунтазам пирамида асосининг томони 12 га, пирамида баландлиги 6 га тенг. Пирамиданинг $A$ учи, $SB$, $SD$ қирраларнинг ўрталари орқали ўтган кесими юзини топинг.

**464.** Тўртбурчакли мунтазам призмада асос томони $a$ га, ён қирраси $b$ га тенг; призма асосининг икки қўшни томонларининг ўртаси ва призма ўқининг ўртаси орқали текислик ўтказинг. Кесим юзини ҳисобланг.

**465.** $ABCDA_1B_1C_1D_1$ кубда $AB_1C_1D$ ва $CB_1A_1D$ кесимлар ўтказилган. Шу икки кесим текисликлари ташкил қилган иккиёқли бурчакни топинг.

**466.** Тўртбурчакли мунтазам пирамиданинг ҳар бир қирраси $a$ га тенг. Пирамида ён қиррасига перпендикуляр ва шу қиррани, пирамида учидан бошлаб, $1:5$ нисбатда бўладиган кесим юзини ҳисобланг.

**467.** Учбурчакли мунтазам пирамиданинг учидан ўтиб, асосининг медианасига перпендикуляр кесимининг юзи $Q$ га тенг. Медианага перпендикуляр ва уни, асос учидан бошлаб, $5:1$ нисбатда бўладиган кесим юзини ҳисобланг.

**468.** Тўртбурчакли мунтазам $SABCD$ пирамиданинг асос диагонали $AC$ орқали ўтиб, $SB$ қиррасига параллел кесимининг юзи $S_0$ га тенг. $AB$, $BC$ асос қирраларининг ўртаси ҳамда пирамида баландлигининг ўртасидан ўтган кесимни ясанг ва унинг юзини ҳисобланг.

**469.** Қирраси $a$ га тенг кубнинг марказидан ўтиб, унинг диагоналига перпендикуляр бўлган кесимини ясанг ва унинг юзини ҳисобланг.

**470.** Тўғри бурчакли $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллелепипедда қирраларининг узунликлари $AB=a$, $AD=b$, $AA_1=c$ га тенг; $O_1$ нуқта — $A_1B_1C_1D_1$ асоснинг маркази; $O$ эса $ABCD$ асос маркази; $S$ нуқта $OO_1$ ни $1:3$ нисбатда бўлади. $S$ нуқта орқали ўтиб, параллелепипеднинг $CA_1$ диагоналига ва асосининг $B_1D_1$ диагоналига параллел кесимни ясанг ва унинг юзини топинг.

**471.** Тўртбурчакли мунтазам призмада иккита параллел кесим ўтказилган: бири асосдаги икки қўшни томоннинг ўртаси ва асослар марказларини туташтирувчи $OO_1$ кесманинг ўртасидан ўтади, иккинчиси эса $OO_1$ кесмани $1:3$ нисбатда бўлади. Биринчи кесимнинг юзи $S_0$ га тенг. Иккинчи кесим юзини топинг.

**472.** Олтибурчакли мунтазам $SABCDEF$ пирамидада асос текислиги билан кесим текислиги $SAC$ $60^\circ$ ли бурчак ташкил қилади. $SAB$, $SDE$ ёқлар орасидаги бурчакни топинг.

**473.** Учбурчакли мунтазам пирамиданинг асос томони $a$ га, ён қирраси $b$ га тенг. Пирамиданинг айқаш икки қиррасига параллел бўлиб, пирамида баландлигининг ўртасидан ўтган кесим юзини топинг.

**474.** Тўртбурчакли мунтазам призмада иккита параллел кесим ўтказилган; бири призма асосининг диагонали орқали ўтиб, призманинг айқаш диагоналига параллелдир, иккинчиси — призманинг ўқини $1:3$ (юқоридан) нисбатда бўлади. Биринчи кесимнинг юзи $Q$ га тенг. Иккинчи кесим юзини топинг.

**475.** Учбурчакли мунтазам пирамида ён ёғининг юзи $S$ га тенг. Пирамида баландлигининг ўртасидан ўтиб, ён ёғига параллел кесимнинг юзини топинг.

**476.** Тўртбурчакли мунтазам пирамида асосининг томони 18 га, ён қирраси эса 15 га тенг. Пирамида асосидаги иккиёқли бурчакни тенг иккига бўлувчи кесим юзини топинг.

**477.** Тўғри учбурчакли $ABCA'B'C'$ призма берилган, унинг асоси $ABC$ тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакдан иборат бўлиб, $B$ тўғри бурчак учи, $h$ катетдир. $AB$, $BB'$, $B'C'$ қирралар ўрталаридан кесим ўтказинг ва кесимнинг юзини ҳисобланг, бунда призма баландлигини ҳам $h$ деб олинг.

**478**. Асоси квадратдан иборат тўғри бурчакли параллелепипедни текислик ўткир бурчаги $\alpha$ бўлган ромб бўйича кесиб ўтади. Бу текислик параллелепипеднинг ён қирраларини қандай бурчак остида кесиб ўтади?

**479.** Қирраси $a$ бўлган $ABCDA'B'C'D'$ кубда $AB$ қирранинг ўртаси $F$, $BB'$ қирранинг ўртаси $H$, $BB'C'C$ ёқнинг диагоналлари кесишадиган нуқта $O$ маълум. $O$ нуқта орқали ўтган тўғри чизиқ $AH$ ва $CF$ тўғри чизиқларни мос ҳолда $P$, $Q$ нуқталарда кесиб ўтади. $PQ$ масофани топинг.

**480**. $ABCD$ тетраэдрда $AC$, $BC$, $DC$ қирралар ўзаро перпендикулярдир $M$ нуқта $ABC$ текислигида жойлашган бўлиб, $AB$, $BC$, $CD$ қирралардан тенг масофададир. $N$ нуқта $BCD$ текислигида жойлашиб, ўша қирралардан бир хил узоқлашган $BC=CD=\sqrt{3}$, $AC=3$ бўлса, $MN$ нинг узунлигини топинг.

**481**. Тўртбурчакли мунтазам пирамидага куб ички чизилган. Кубнинг тўртта учи пирамиданинг ён қирраларида, қолган тўртта учи эса пирамида асосининг текислигида жойлашган. Пирамиданинг баландлиги $h$, асосининг қирраси $a$ га тенг. Кубнинг қиррасини топинг.

**482**. Мунтазам призманинг асосида учлари асос томонларининг ўрталаридан иборат учбурчак жойлашган. Призма ва пирамида асос текислиги билан чегараланган ярим фазода жойлашган ва пирамиданинг баландлиги призма баландлигининг учдан бир қисмини ташкил қилади. Призма ҳажмининг қандай қисми пирамидадан ташқарида жойлашади?

**483**. Кубнинг қирраси 1 га тенг. Доиравий цилиндрнинг сиртида кубнинг 6 та учи жойлашган бўлиб, цилиндрнинг ўқи куб диагоналига параллелдир. Цилиндрнинг радиусини топинг.

**484**. Қирраси $a$ га тенг мунтазам тетраэдрнинг икки айқаш қирралари доиравий цилиндр асосининг диаметрларидир. Цилиндр ҳажмини топинг.

**485**. Баландлиги $h$, асосига ички чизилган доиранинг радиуси $r$ бўлган учбурчакли мунтазам пирамиданинг асосида, асос марказига уриниб шар жойлашган. Пирамиданинг учи ва асосининг икки томони ўрталаридан ўтган текислик шарга уриниб ўтмоқда. Шарнинг радиусини топинг

**486**. Қирраси $a$ га тенг кубга шар ички чизилган.

Кубнинг учта ёғига ҳамда шарга уриниб ўтадиган иккинчи шарнинг радиусини аниқланг.

**487.** Ўқ кесимининг учидаги бурчаги 60° га тенг бўлган доиравий тўғри конус ичига $r$ радиусли 3 та бир хил шар жойлаштирилган. Бу шарларнинг ҳар бири қолган икки шарга, конуснинг асоси ва сиртига уринади. Конус асосининг радиусини топинг.

**488.** Конус асосининг радиуси $R$ га тенг. Шар шу конус асосига уриниб, унинг ҳар бир ясовчисини 3 та тенг бурчакка ажратади. Конус ҳажмини топинг.

## V боб

# ТОПОЛОГИЯ ЭЛЕМЕНТЛАРИ

## 18-§. МЕТРИК ФАЗОНИНГ ЭНГ СОДДА ТОПОЛОГИК ХОССАЛАРИ

$R$ — метрик фазо бўлсин, унинг қисм тўпламларини $A$, $B$, . . . , $X$, . . . бош ҳарфлар билан, унинг нуқталарини эса $a$, $b$, . . ., $x$, . . . кичик ҳарфлар билан белгилаймиз. $E^n$ — $n$ ўлчовли Евклид фазоси.

**489.** Метрик фазода олинган очиқ шар очиқ тўплам эканлигини исботланг.

**490.** $[a, b]$ кесма $<M>$ бўлсин, $[a, b] \subset R$. Агар

1) $R = E^1$;

2) $R = E^2$ бўлса,

$<M> = I$ nt $M$ нинг ички қисмини кўрсатинг.

**491.** Очиқ тўпламларнинг қуйидаги асосий хоссаларини исботланг:

1) Сони ихтиёрий (чекли ёки чексиз) бўлган очиқ тўпламларнинг бирлашмаси ҳам очиқ тўпламдир.

2) Сони чекли очиқ тўпламларнинг кесишмаси очиқ тўпламдир.

3) Бутун фазо, ҳамда бўш тўплам очиқдир.

**492.** Сони чексиз очиқ тўпламларнинг кесишмаси очиқ бўлмаган ҳолга мисол келтиринг.

**493.** Қуйидаги икки ўзгарувчили функцияларнинг аниқланиш соҳалари очиқ тўпламдан иборат. Шу тўпламларни текисликда тасвирланг:

$$1)\quad z = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} + \lg(x^2 + y^2 - 1);$$

2) $z = \frac{1}{\sqrt{|x-1|-2}} + \lg(1-|y|)$;

3) $z = \frac{1}{\sqrt{y^2 - x}}$;

4) $z = \ln \sin \pi (x^2 + y^2)$;

5) $z = \operatorname{ctg} \pi (x + y)$.

**494.** $M$ тўпламнинг $[M]$ ёпилмасининг қуйидаги хоссаларини исботланг:

1) $M \subset [M]$;

2) $[[M]] = [M]$;

3) $A \subset B \Rightarrow [A] \subset [B]$;

4) $[A \cup B] = [A] \cup [B]$.

**495.** $\langle M \rangle = R \setminus [R \setminus M]$ ни исботланг.

**496.** $[A] \subset [B]$ дан $A \subset B$ келиб чиқмаслиги мумкин бўлган ҳолга мисол келтиринг.

**497.** $R$ фазода олинган ихтиёрий $M$ тўпламнинг ёпилмаси $R$ фазонинг $M$ ни ўз ичига олган энг кичик ёпиқ тўплам эканлигини кўрсатинг.

**498.** $M$ очиқ тўплам $\Longleftrightarrow$ $R \setminus M$ ёпиқ тўплам. Шу муносабатни исботланг.

**499.** Метрик фазода олинган ёпиқ шарнинг ёпиқ тўпламлигини исботланг.

**500.** Ёпиқ тўпламларнинг қуйидаги асосий хоссаларини исботланг:

1) Ёпиқ тўпламларнинг ихтиёрий (чекли ёки чексиз) кесишмаси ёпиқ тўпламдир;

2) Ёпиқ тўпламларнинг ихтиёрий чекли бирлашмаси ёпиқ тўпламдир;

3) Бутун фазо, ҳамда бўш тўплам ёпиқдир.

**501.** Ёпиқ тўпламларнинг чексиз бирлашмаси ёпиқ бўлмаган ҳолга мисол келтиринг.

**502.** $\partial M = [M] \cap [R \setminus M]$ муносабатни исботланг, бунда $\partial M$ орқали $M$ тўпламнинг чегараси белгиланган.

**503.** $M$ ёпиқ тўплам $\Longleftrightarrow$ $\partial M \subset M$. Шу муносабатни исботланг.

**504.** Тўғри чизиқда жойлашган шундай тўпламга мисол келтирингки, бу тўплам:

1) очиқ; 2) ёпиқ; 3) очиқ ҳам эмас, ёпиқ ҳам эмас; 4) ҳам очиқ, ҳам ёпиқ бўлсин.

**505.** 1) $\partial M = \sigma[M]$; 2) $\partial M = \partial < M >$; 3) $\partial M = \partial(R \setminus M)$ муносабатлар ҳар доим тўғрими?

**506.** $M \subseteq L$; $L \subset R$ бўлсин. $[M]_L = L \cap [M]_R$ муносабатни исботланг. Бунда $[M]_L$ орқали $M$ тўпламнинг $L$ фазодаги ёпилмаси белгиланган.

**507.** $M \subseteq L$, $L \subset R$ бўлсин. $M$ тўпламнинг $L$ да ёпиқ (очиқ) бўлиши учун $M$ тўплам $L$ билан $R$ фазода ёпиқ (очиқ) бўлган тўпламнинг кесишмасидан иборат бўлиши зарур ва етарлидир. Шуни исботланг.

**508.** $R = E^2$, бунда $L$ тўплам $R$ фазода олинган айланадир. $L$ да очиқ ва ёпиқ тўпламлар ҳосил қилинг.

**509.** $L$ чегараси $l$ дан иборат $E^2$ да жойлашган ясси квадрат бўлсин. $a \in l$ нуқтанинг $L$ даги $\varepsilon$ атрофини ҳосил қилинг.

**510.** $E^2$ да ёпиқ ва бир нуқтасини олиб ташлаш натижасида очиқ тўпламга айланадиган тўпламга мисол келтиринг.

**511.** Очиқ бўлмаган икки тўпламнинг бирлашмаси очиқ бўладиган тўпламларга мисол келтиринг.

## 19-§. ТОПОЛОГИК ФАЗО

$R$ — топологияси $\tau$ дан иборат топологик фазо.

**512.** $M$ тўплам $R$ да очиқ $(M \in \tau) \Longleftrightarrow M$ нинг барча нуқталари ички. Шу муносабатни исботланг.

**513.** $M$ тўплам $R$ да ёпиқ $(M = R \setminus H,\ H \in \tau) \Longleftrightarrow$ $\Longleftrightarrow M = [M]$. Шу муносабатни исботланг.

**514.** $L \subset R$ бўлсин. $R$ даги $\tau$ топологияга қараб, $L$ да топология қандай киритилади?

**515.** $f: X \to Y$ узлуксиз $\Longleftrightarrow$ $Y$ да очиқ (ёпиқ) бўлган ихтиёрий тўпламнинг асли $X$ да очиқ (ёпиқ) бўлади. Шуни исботланг.

**516.** $X \to Y$ узлуксиз акслантиришда $X$ да олинган очиқ (ёпиқ) тўпламнинг образи $Y$ да очиқ (ёпиқ) бўлмаслиги мумкинлигига мисол келтиринг.

**517.** Тескари акслантириши $f^{-1}$ узлуксиз бўлмаган ўзаро бир қийматли ва узлуксиз $f$ акслантиришга мисол келтиринг.

**518.** Қуйидаги фигураларнинг гомеоморфлигини исботланг:

1) ихтиёрий икки кесма;
2) ихтиёрий икки оралиқ;
3) оралиқ ва тўғри чизиқ;
4) яриморалиқ ва ёпиқ нур.

**519.** Текисликнинг бир нуқтаси олиб ташланган сферага гомеоморфлигини исботланг.

**520.** Чегаравий айланаси олиб ташланган яримсферанинг очиқ доирага гомеоморфлигини исботланг.

**521.** Очиқ квадрат ва очиқ доира гомеоморф эканлигини исботланг.

**522.** Очиқ доиранинг бутун текисликка гомеоморфлигини исботланг.

Бу мисолни $E^n$ даги очиқ шарнинг $E^n$ га гомеоморфлиги ҳолига умумлаштиринг ва исботланг.

523. Чегаравий айланалари олиб ташланган, чекли баландликдаги доиравий цилиндр сиртини қуйидагиларга ўтказадиган гомеоморфизмни топинг (13-чизма):

1) чегаравий айланалари олиб ташланган ясси ҳалқага (14-чизма).

2) икки нуқтаси олиб ташланган сферага;

3) бир кавакли гиперболоидга.

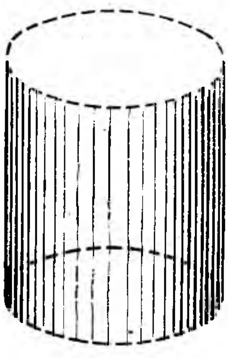
**524.** Бир нуқтаси очиб ташланган очиқ доирани очиқ ясси ҳалқага ўтказадиган гомеоморфизмга мисол келтиринг.

525. Бир нуқтаси олиб ташланган айланани тўғри чизиққа ўтказадиган гомеоморфизмга мисол келтиринг.

**526.** Қуйидагиларнинг гомеоморфлигини исбот қилинг: 1) синусоида ва тўғри чизиқ; 2) парабола ва тўғри чизиқ.

527. Боғланишликнинг топологик инвариантлигидан фойдаланиб, қуйидаги фигураларнинг гомеоморф эмаслигини исбот қилинг: 1) гипербола ва парабола; 2) кесма ва тўғри чизиқ; 3) эллипс ва парабола; 4) айлана ва тўғри чизиқ; 5) ярим оралиқ ва айлана.

**528.** Компактликнинг топологик инвариантлигидан



13-чизма.

14-чизма.

фойдаланиб, қуйидаги фигураларнинг гомеоморф эмаслигини исбот қилинг: 1) кесма ва оралиқ; 2) чегаравий айланаси билан олинган ярим сфера ва айланма параболоид; 3) сфера ва текислик.

529. Узлуксиз акслантиришда боғланган тўпламнинг асли ҳар доим ҳам боғланган бўлавермайди, шунга мисол келтиринг.

530. Тордан бир меридиан ва бир параллель олиб ташланган, қолган нуқталар тўплами боғланган тўплам бўладими?

531.
$$y = \begin{cases} x \cdot \sin \frac{1}{x}, \ x \neq 0 \text{ да}, \\ 0, \ x = 0 \text{ да} \end{cases}$$

функциянинг графиги боғланган тўпламни ташкил қиладими?

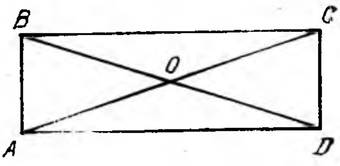
532. Уриниш нуқтаси олиб ташланган бир-бирига уринадиган икки айланадан тузилган тўплам боғланган тўплам бўладими?

533. Узлуксиз акслантиришда компакт тўпламнинг асли компакт бўлмаслиги ҳам мумкинлигига доир мисол келтиринг.

534. Қуйидаги кўпхилликларга мисоллар келтиринг: 1) чети йўқ икки ўлчовли компакт; 2) чеги бор икки ўлчовли компакт; 3) икки ўлчовли компактмас; 4) бир ўлчовли компактмас; 5) бир ўлчовли.

535. Кўпхиллик бўлмаган эгри чизиқ ва сиртга мисоллар келтиринг.

536. Маркази $O$ нуқтада бўлган $ABCD$ тўғри тўртбурчак берилган (15-чизма). $O$ га нисбатан марказий-симметрик $AB$ ва $CD$ томонларнинг нуқталарини бир хил, яъни айнанлаштирилган деб ҳисоблаймиз. Натижада, **Мёбиус япроғи** деб аталадиган сирт ҳосил бўлади. Мёбиус япроғида учбурчакларнинг ориентирланмаган кетма-кетлигини ҳосил қилинг, яъни $T_1$, $T_2$, . . ., $T_n$ кетма-кетликда $T_i$ ва $T_{i+1}$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$) қўшни учбурчаклар бир хил ориентирланган ва $T_n$ ҳам $T_1$ лар қўшни бўлиб, қарама-қарши ориентирланган (ориентирланмаган учбурчаклар кетма-кетлигининг мавжудлиги сиртнинг ориентирланмаслигини исботлайди).



15-расм.

**537**. Қуйидаги фигураларнинг сиртлари ориентирланувчилигига ишонч ҳосил қилинг: 1) куб; 2) призма; 3) пирамида.

**538**. Сиртни икки қўшниси бир хил ориентирланган топологик учбурчакларга ажратиш йўли билан қуйидаги сиртларнинг ориентирланувчи эканлигини исботланг: 1) сфера. 2) тор.

**539**. Қуйидаги сиртларнинг Эйлер характеристикасини ҳисобланг:

1) сфера; 2) тор; 3) Мёбиус япроғи.

**540**. Сферадан доира қирқиб олиниб, қирқим чегарасига Мёбиус япроғи ёпиштирилган (чегара бўйича) ва ёпиқ $\Phi$ сирт ҳосил қилинган. $\Phi$ нинг проектив текисликка гомеоморф эканлигини кўрсатинг.

**541**. Проектив текисликнинг компакт ориентирланмаган икки ўлчовли чети йўқ кўпхиллик эканлигини кўрсатинг.

**542**. Проектив текисликнинг Эйлер характеристикасини ҳисобланг.

VI боб

# ДИФФЕРЕНЦИАЛ ГЕОМЕТРИЯ

## 20 §. СКАЛЯР АРГУМЕНТЛИ ВЕКТОР ФУНКЦИЯЛАР

Вектор ва скаляр функциялар таърифига асосланиб, қуйидагиларни исботланг ($\lim\limits_{t\to t_0} \vec{r}_i(t) = \vec{a}_i$, $\lim f(t) = a$):

**543**. $\lim\limits_{t\to t_0} [\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)] = \vec{a}_1 \pm \vec{a}_2$.

**544**. $\lim\limits_{t\to t_0} [f(t) \cdot \vec{r}_1(t)] = a \cdot \vec{a}_1$.

**545**. $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \cdot \vec{r}_2(t)) = (\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_2)$.

**546**. $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t) \wedge \vec{r}_2(t)) = (\vec{a}_1 \wedge \vec{a}_2)$.

**547**. $\lim\limits_{t\to t_0} (\vec{r}_1(t)\, \vec{r}_2(t)\, \vec{r}_3(t)) = (\vec{a}_1\, \vec{a}_2\, \vec{a}_3)$.

$r_i(t)$, $i = 1, 2, 3$ ва $f(t)$ дифференциалланувчи функциялар берилган. Қуйидаги формулаларни исботланг:

**548**. $[\vec{r}_1(t) \pm \vec{r}_2(t)]' = \vec{r}_1'(t) \pm \vec{r}_2'(t)$.

549. $[f(t)\cdot\vec{r}_1(t)]' = f'(t)\vec{r}_1(t) + f(t)\vec{r}\,'_1(t)$.

550. $(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t))' = (\vec{r}\,'_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)) + (\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}\,'_2(t))$.

551. $(\vec{r}_1(t)\wedge\vec{r}_2(t))' = \vec{r}\,'_1(t)\wedge\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\wedge\vec{r}\,'_2(t)$.

552. $(\vec{r}_1(t)\,\vec{r}_2(t)\,\vec{r}_3(t))' = (\vec{r}\,'_1(t)\vec{r}_2(t)\vec{r}_3(t)) + (\vec{r}_1(t)\vec{r}\,'_2(t)\times$
$\times\,\vec{r}_3(t)) + (\vec{r}_1(t)\,\vec{r}_2(t)\,\vec{r}\,'_3(t))$.

Қуйидаги вектор-функцияларнинг биринчи тартибли ҳосилаларини топинг, бу ерда $\vec{r} = \vec{r}(t)$.

553. $\sqrt{\vec{r}^2}$. 554. $\dfrac{1}{\sqrt{\vec{r}^2}}$. 555. $\dfrac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$.

556. $\left(\vec{r}\,\dfrac{d\vec{r}}{dt}\right)$. 557. $\vec{r}\wedge\dfrac{d\vec{r}}{dt}$. 558. $\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,''$.

559. $\left(\dfrac{d\vec{r}}{dt}\left(\vec{r}\wedge\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)\right)$. 560 $(\vec{r}\,\vec{r}\,'\,\vec{r}\,'')$.

561. $\sqrt{(\vec{r}\,'\wedge\vec{r}\,'')^2}$.

562. $\vec{r}^2(t) = 1$ дан фойдаланиб $(\vec{r}\,\vec{r}\,'\,\vec{r}\,'')^2$ ни ҳисобланг.

563. $\vec{r} = (t^2+1)\vec{i} + (3t-5)\vec{j} + t^3\vec{k}$, $\vec{r}\,'$, $\vec{r}\,''$ ни топинг.

564. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор функциянинг координаталари берилган. $\dfrac{d\vec{r}}{dt}$ нинг координаталарини ҳисобланг:

а) $\vec{r}(t^3-2t,\ t^2-2)$;

б) $\vec{r}(a\sin^2 t,\ b\cos^2 t)$;

в) $\vec{r}\left(\dfrac{a-t}{a+t},\ \dfrac{t}{a+t}\right)$;

г) $\vec{r}(t,\ t^2,\ e^t)$;

д) $\vec{r}(\sin 2t,\ 1-\cos 2t,\ 2\cos t)$;

е) $\vec{r}(a\sin^2 t,\ b\sin t\cos t,\ c\cos t)$.

565. $\vec{e}(\varphi) = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j}$ кўринишдаги вектор-функция *доиравий бирлик вектор-функция* дейилади. Қуйидаги муносабатларнинг тўғрилигини исботланг:

а) $\vec{e}(\varphi + \alpha) = \vec{e}(\varphi)\cos\alpha + \vec{g}(\varphi)\sin\alpha$, бу ерда $\vec{g}(\varphi) = \vec{e}(\varphi + \pi/2)$.

б) $\dfrac{d\vec{e}}{d\varphi} = \vec{g}(\varphi)$, $\dfrac{d\vec{g}}{d\varphi} = -e(\varphi)$.

566. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор-функциянинг бирор оралиқдаги $t$ нинг ҳамма қийматларида ҳосиласи $\vec{0}$ бўлиши учун, шу оралиқда $\vec{r} = \mathrm{const}$, яъни у $t$ га боғлиқ бўлмаслиги зарур ва етарли эканлигини исботланг.

567. $(t_1, t_2)$ да $|\vec{r}| = \mathrm{const}$ бўлса, $\vec{r}' \perp \vec{r}$ эканлигини кўрсатинг. $\vec{r}' \perp \vec{r}$ бўлса, $|\vec{r}| = \mathrm{const}$ бўладими?

568. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор-функция доимо бир текисликка параллел бўлиши учун $(\vec{r}(t)\ \vec{r}'(t)\ \vec{r}''(t)) = 0$ шартнинг зарур ва етарли эканлигини исботланг.

569. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ вектор-функциянинг бирор оралиқдаги $t$ нинг ҳамма қийматларида ҳосиласи $\vec{r}(t)$ га коллинеар бўлиши учун, шу оралиқда вектор функциянинг йўналиши ўзгармас бўлиши зарур ва етарли эканлигини исботланг.

570. Қуйидаги тенгликларнинг қайсилари тўғри:

а) $|\vec{r}|' = |\vec{r}|'$; б) $(\overline{\vec{r}\,\vec{r}'}) = |\vec{r}|\,|\vec{r}'|$?

571. Қуйидаги функцияларнинг биринчи ва иккинчи тартибли хусусий ҳосилаларини топинг $(\vec{r} = \vec{r}(u, v))$:

а) $\vec{r}^2$; б) $(\vec{r}_u\ \vec{r}_v)$; в) $(\vec{r}\ \vec{r}_u\ \vec{r}_v)$.

572. $u$, $v$ параметрларнинг ўзгариш соҳасида: $\vec{r}_u = \vec{r}_v = \vec{0}$. Шу соҳада $\vec{r} = \mathrm{const}$ эканлигини исбот қилинг.

**573.** Цилиндрик координаталар системасида аниқланган вектор-функциялар берилган:

$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\,\vec{i} + \sin\varphi\,\vec{j},$$

$$\vec{e}_z = \vec{k};$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$

Қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини кўрсатинг:

а) $\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\rho} = \vec{0}$; б) $\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} = \vec{e}_\varphi$; в) $\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\vec{e}_\varphi$;

г) $\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\varphi} = \vec{0}$; д) $\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial z} = \vec{0}$.

**574.** Сферик координаталар системасида аниқланган вектор-функциялар берилган:

$$\vec{e}_z = \sin\theta\cos\varphi\,\vec{i} + \sin\theta\sin\varphi\,\vec{j} + \cos\theta\,\vec{k}.$$

$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{i} + \cos\varphi\,\vec{j}.$$

$$\vec{e}_\theta = \cos\varphi\cos\theta\,\vec{i} + \sin\varphi\cos\theta\,\vec{j} - \sin\theta\,\vec{k}.$$

Қуйидаги тенгликларни исбот қилинг:

а) $\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta$; б) $\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta} = -\vec{e}_z$; в) $\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\theta} = \vec{0}$.

г) $\frac{\partial\vec{e}_z}{\partial\varphi} = \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$; д) $\frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi} = \cos\theta\,\vec{e}_\varphi$;

е) $\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = -\sin\theta\,\vec{e}_z - \cos\theta\,\vec{e}_\theta$.

## 21-§. ЧИЗИҚНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

575. $\vec{r}_0$, $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$ векторлар доимий бўлиб, $\vec{r}_1 \nparallel \vec{r}_2$. Қуйидаги вектор-функцияларнинг годографи нимадан иборатлигини аниқланг:

а) $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1$;

б) $\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{r}_1 + t^2\vec{r}_2$;

в) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \cos t\, \vec{r}_1 + \sin t\, \vec{r}_2$;

г) $\vec{r} = \vec{r}_0 + \frac{1+t^2}{1-t^2} \vec{r}_1 + \frac{2t}{1+t^2} \vec{r}_2$.

576. Узунлиги $a$ га тенг $AB$ кесманинг учлари $Ox$ ва $Oy$ ўқлар бўйлаб сирпанади. ($A$ нуқта $Oy$ ўққа тегишли.) $OACB$ тўғри тўртбурчакнинг $C$ учидан $AB$ га перпендикуляр қилиб $CM$ туширилган. Бу перпендикуляр асосларининг, яъни $M(x, y)$ нинг геометрик ўрни астроида ҳосил қилади. Астроиданинг параметрик тенгламасини тузинг.

577. $x = a\cos u$, $y = a\sin u$ ва $x = a\frac{1-u^2}{1+u^2}$, $y = a \times \frac{2u}{1+u^2}$ чизиқлар маркази координаталар бошида ва радиуси $a$ га тенг айлана эканлигини кўрсатинг.

578. Радиуси $a$ га тенг айлананинг қутб координаталарнинг бирор системасидаги тенгламасини тузинг.

579. $x = a\cos\varphi$, $y = b\sin\varphi$, $x = a\frac{1-t^2}{1+t^2}$, $y = b \times \frac{2t}{1+t^2}$ тенгламаларнинг битта чизиқни ифодалашини исботланг.

580. $x = a\frac{1+t^2}{1-t^2}$, $y = b\frac{2t}{1-t^2}$; бу тенгламалар гиперболани ифодалашини исботланг.

581. Қуйидаги тенгламалар қандай чизиқларни ифода қилади:

а) $x = t^2 - t + 1, \qquad y = t^2 + t - 1$;

б) $x = t^2 - 2t + 3, \qquad y = t^2 - 2t + 1$;

в) $x = a\sin^2 t, \qquad y = b\cos^2 t$.

г) $x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}$;

д) $x = \frac{a-t}{a+t}, \qquad y = \frac{t}{a+t}$;

е) $x = a + R\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = b + R\frac{2t}{1+t^2}$?

582. Ушбу $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ гиперболанинг параметрик тенгламаларини тузинг.

**583.** $x^3+y^3-3axy=0$ (декарт япроғи) учун $\frac{y}{x}=$ $=t$ деб, унинг параметрик тенгламаларини тузинг.

**584.** Ҳар биридан $F_1$, $F_2$ нуқталаргача бўлган масофалар кўпайтмаси $\frac{1}{4}\rho^2(F_1, F_2)$ га тенг бўлган текислик нуқталарининг геометрик ўрни *Бернулли лемнискатаси* дейилади. Унинг тенгламисини тузинг.

**585.** $x^2+y^2-2ax=0$ чизиқнинг параметрик тенгламаларини ёзинг ва параметрнинг геометрик маъносини аниқланг.

**586.** Қуйидаги чизиқларнинг махсус нуқталарини топинг:

а) $x=a\cos^3 t, \qquad y=a\sin^3 t$;

б) $x=a\sin t, \quad y=a\left(\cos t+\ln\operatorname{tg}\frac{t}{2}\right), \ t\in(0, \pi)$;

в) $x^4-x^2y+y^3=0$;

г) $y^2=x^3(2-x)$.

**587.** $K(-1, -1)$, $Z(4, 2)$, $M(1, 2)$ нуқталар $x=$ $=t^3-2t$, $y=t^2-2$ чизиқда ётадими? Бу чизиқнинг координата ўқлари билан кесишган нуқталарини топинг.

**588.** Радиуси $R$ га тенг сфера билан, ясовчиларидан бири сферанинг марказидан ўтадиган доиравий цилиндрнинг кесишиш чизиғи *Вивиани чизиғи* дейилади. Унинг параметрик тенгламаларини тузинг.

**589.** Ўзгармас $a$ узунликка эга бўлган $AB$ кесма $Oz$ ўққа тик бўлиб, унинг $A$ учи шу ўқда ётади. Бу кесма $Oz$ ўқ бўйлаб силжиб, айни вақтда бу ўқ атрофида шундай айланадики, кесманинг $B$ учи айланиш бурчагига пропорционал йўлни босиб боради. Бу кесманинг иккинчи $B$ учи *винт чизиқ* чизади. Унинг параметрик тенгламаларини тузинг.

**590.** Ушбу сиртларнинг кесишишидан қандай чизиқ ҳосил бўлади:

$$x^2+y^2-z^2=1 \text{ ва } y^2+z^2-x^2=1?$$

**591.** $x=t$, $y=t^2$, $z=e^t$ чизиқни иккита сиртнинг кесишиш чизиғи сифатида кўрсатинг.

**592.** $x=\sin 2t$, $y=1-\cos 2t$, $z=2\cos t$ чизиқнинг сферада ётишини кўрсатинг.

**593.** $x=\frac{t}{1+t^2+t^4}$, $y=\frac{t^2}{1+t^2+t^4}$, $z=\frac{t^3}{1+t^2+t^4}$

чизиқнинг маркази $C\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$ нуқтадаги сферада ётишини кўрсатинг ва сферанинг радиусини ҳисобланг.

**594.** $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ чизиқнинг координата текисликларидаги проекциясини топинг.

**595.** Ушбу $\begin{cases} z = x^2 - y^2, \\ x + y - z - 1 = 0 \end{cases}$ чизиқнинг $Oxy$ текисликдаги проекциясини топинг.

**596.** $\begin{cases} x = y^2 + z^2, \\ x - 2y + 4z - 4 = 0 \end{cases}$ чизиқнинг $Oyz$ текисликдаги проекциясини топинг.

**597.** $\begin{cases} z = x^2 + 2y^2, \\ 2x - 4y + z = 0 \end{cases}$ чизиқнинг $Oxy$ текисликдаги проекцияси эллипс эканлигини кўрсатинг ва унинг ярим ўқларини топинг.

**598.** $x = at\cos t$, $y = at\sin t$, $z = \frac{a^2t^2}{2p}$ чизиқнинг айланма параболоидда ётишини кўрсатинг ва унинг $Oxy$ текисликдаги проекциясини топинг.

## 22-§. ЧИЗИҚНИНГ УРИНМАСИ ВА НОРМАЛИ

**599.** Қуйидаги чизиқларнинг $t = 0$ нуқтасида ўтказилган уринма ва нормалнинг тенгламаларини тузинг:

а) $x = t^2$, $y = t^3$;

б) $x = t^2 + 1$, $y = t^4 - t^5$.

**600.** Қуйидаги чизиқларнинг махсус нуқталаридаги уринмаларининг тенгламасини ёзинг:

а) $(x^2 + y^2)\,x - 2ay^2 = 0$;

б) $(2a - x)\,y^2 = x\,(x - a)^2$;

в) $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2\,(x^2 - y^2)$;

г) $(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = 4a^2\,(x^2 + y^2)$.

**601.** $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги уринмасининг координата ўқлари орасидаги кесмаси узунлиги $a$ га тенг эканлигини исботланг.

**602.** а) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; б) $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ кўринишларда берилган эллипснинг ихтиёрий нуқтасидаги уринмаси ва нормалининг тенгламасини тузинг.

**603.** Парабола уринмаси парабола ўқи ва фокусидан чиққан радиус-вектор билан ҳамма нуқтада бир хил бурчак ташкил қилишини исбот қилинг.

**604.** $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг уринмаси ва нормалининг тенгламасини тузинг.

**605.** $x^2+y^2=2$ айланага уринадиган, тенгламаси $y=x^2+ax+b$ кўринишдаги параболани топинг.

**606.** Текисликдаги $y=f(x)$ чизиқнинг $M_0(x_0, y_0)$ нуқтасида

> $M_0T$ уринма ва $M_0N$ нормал ўтказилган $M_0T$ — уринма узунлиги, $M_0N$ — нормаль узунлиги, $PT$ — уринма ости, $PN$ — нормал ости дейилади.

Шу кесмаларнинг узунликларини топинг.

**607.** $y^2=2px$ параболанинг нормаль остини ҳисобланг.

**608.** Ҳар бир нуқтасига ўтказилган нормаль узунлиги доимий бўлган чизиқни топинг.

**609.** Ҳар бир нуқтасидаги уринма узунлиги доимий $a$ кесмага тенг бўлган чизиқни топинг.

**610.** Фокуслари умумий бўлиб, ўқларининг йўналишлари қарама-қарши бўлган параболаларнинг тўғри бурчак остида кесишишини кўрсатинг.

**611.** Эллипснинг шундай нуқтасини топингки, бу нуқтада ўтказилган уринманинг эллипс ўқлари орасидаги кесмаси шу нуқтада тенг иккига бўлинсин.

**612.** Агар чизиққа ўтказилган уринмалар битта нуқтадан ўтса, у ҳолда бу чизиқнинг тўғри чизиқ ёки унинг қисми эканлигини исботланг.

**613.** Агар чизиққа ўтказилган нормал ар битта нуқтадан ўтса, у ҳолда бу чизиқнинг айлана эканлигини кўрсатинг.

**614.** Эллипснинг $M$ нуқтасида ўтказилган уринма унинг битта радиус-вектори билан иккинчи радиус-векторининг давоми орасидаги бурчакни тенг иккига бўлишини исбот қилинг.

**615.** Гиперболанинг уринмаси ва нормалининг тенгламасини тузинг.

**616.** Гиперболага ўтказилган уринма уриниш нуқтасида ўтказилган радиус-векторлар ташкил қилган бурчакни тенг иккига бўлишини исбот қилинг.

## 23-§. ЧИЗИҚЛАР ОИЛАСИ. ЎРАМА

Қуйидаги чизиқлар оиласини текшириб, уларни чизинг ($c$, $r$, $k$ — параметрлар).

**617.** $x^2 + 2cy = 0$. **618.** $c^2x^2 + y^2 = cx$.

**619.** $x^2 + 2cy = 2xy$. **620.** $y^2 = 2cx$.

**621.** $(x-3)^2 + (y-4)^2 = r^2$. **622.** $y = kx + 3$.

Қуйидаги чизиқлар оиласининг ўрамасини топинг:

**623.** $y = c^2(x-c)^2$. **624.** $(x-c)^2 + y^2 = 25$.

**625.** $(y-c)^2 - x^3 = 0$. **626.** $x = c^2 + t$, $y = c^3 + t$.

**627.** $x^2 = 2py$ параболанинг учидан ўтган ва марказлари шу параболанинг устида ётган айланалар оиласининг ўрамасини топинг.

**628.** Тўғри чизиклар оиласи $Ox$, $Oy$ ўқлар билан кесишиб, юзлари $S = 2a^2$ га тенг учбурчаклар ташкил қилади. Шу тўғри чизиқлар оиласининг ўрамасини топинг.

**629.** Берилган икки нуқтадан ўтадиган айланалар оиласини тўғри бурчак остида кесиб ўтадиган чизиқлар оиласининг тенгламасини тузинг.

**630.** $y^2 = 2ax$ параболалар оиласига ортоганал бўлган чизиқлар оиласини топинг.

**631.** $x^2 + y^2 = R$ айлананинг $Ax + By + C = 0$ тўғри чизиқлар оиласи учун ўрама бўлиши учун $A$, $B$, $C$ коэффициентларга нисбатан қандай шартлар бажарилиши керак?

**632.** Марказлари радиуси $R$ га тенг айланада ётувчи $r$ радиусли айланалар оиласининг ўрамасини топинг.

**633.** $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 1$, $p + q = 1$ чизиқлар оиласининг ўрамасини топинг.

## 24-§. ЁЙ УЗУНЛИГИ. ЭГРИЛИК

**634.** $x = 8at^3$, $y = 3a(2t^2 - t^4)$ чизиқнинг $M_1$ $(t = 0)$ ва $M_2$ $(t = 2)$ нуқталари орасидаги ёй узунлигини топинг.

**635.** $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ циклоида бир гармоғининг $(0 < t \leqslant 2\pi)$ ёй узунлигини ҳисобланг.

**636.** $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\ln x$ чизиқнинг $x_1 = 1$ ва $x_2 = 4$ нуқталари орасидаги ёй узунлигини топинг.

637. $y=\ln\cos x$ чизиқнинг $(0, 0)$, $\left(\frac{\pi}{3}, -\ln 2\right)$ нуқталари орасидаги ёй узунлигини ҳисобланг.

638. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроиданинг ёй узунлигини ҳисобланг.

639. Чизиқ тенгламаси қутб координаталарида $r=r(\varphi)$ кўринишда берилган; унинг ёй узунлигини ҳисобланг.

640. $r=a\varphi$ Архимед спирали битта ўрамининг ёй узунлигини ҳисобланг.

641. $x^2=2py$ параболанинг учидан абсциссаси $x$ га тенг нуқтасигача бўлган ёй узунлигини ҳисобланг.

642. $y=x^4$ чизиқнинг $O(0, 0)$ нуқтасидаги эгрилигини ҳисобланг.

Қуйидаги чизиқларнинг эгрилигини ҳисобланг.

643. $x=t^2$, $y=t^3$.

644. $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$.

645. $y^2=2px$. 646. $a^2y=x^3$. 647. $a^3y=x^4$.

648. Эллипснинг эгрилигини ҳисобланг ва унинг эллипс марказидан уринмагача бўлган масофанинг кубига пропорционал эканлигини исботланг.

649. Ушбу $P(x, y)\,dx+Q(x, y)\,dy=0$ дифференциал тенглама билан ифодаланган чизиқнинг эгрилигини ҳисобланг.

650. $x^2=2py$ параболанинг уринмаси $Ox$ ўқи билан $\alpha$ бурчак ташкил қилади. Парабола эгрилик радиусининг $R=\frac{p}{\cos 3\alpha}$ га тенг эканлигини исботланг.

651. $x=a\cos\varphi$, $y=b\sin\varphi$ эллипснинг эгрилик радиусини топинг.

652. $y=\sin x$ синусоиданинг эгрилик радиусини ҳисобланг.

653. Агар чизиқнинг тенгламаси $x=x(s)$, $y=y(s)$ ($s$ — ёй узунлиги) кўринишда берилган бўлса, у ҳолда унинг эгрилик радиусини қуйидаги тенгликдан аниқлаш мумкинлигини кўрсатинг:

$$\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2+\left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

654. $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ астроиданинг эгрилик радиусини ҳисобланг.

## 25-§. ЭВОЛЮТА ВА ЭВОЛЬВЕНТА

Қуйидаги тенгламалар билан аниқланган чизиқларнинг эволютаси тенгламасини тузинг ва графигини чизинг

655. $x^2-4x+y^2-13=0$.

656. $x=a\cos t,\ y=b\sin t$.

657. $x^2=2py$.

658. $x=a\cos^3 t,\ y=a\sin^3 t$.

659. $x=a\theta\cos\theta,\quad y=a\theta\sin\theta$.

660. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

661. $x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$ циклоиданинг эволютаси яна циклоида эканлигини исбот қилинг.

662. $x^2+y^2=R^2$ айлана эвольвентасининг тенгламасини тузинг ва уни чизмада тасвирланг.

663. $y=\frac{1}{4}x^2$ парабола эвольвентасининг тенгламасини тузинг.

664. Архимед спиралининг $x=a\theta\cos\theta,\ \ y=a\theta\sin\theta$ параметрик тенгламаси бўйича унинг эвольвентаси тенгламасини тузинг.

Қуйидаги тенгламалар билан берилган чизиқларнинг табиий тенгламаларини тузинг.

665. $x=a\cos t,\ \ y=a\sin t$.

666. $x=a(t+\sin t),\ \ y=a(1+\cos t)$.

667. $x=a(\cos\varphi+\varphi\sin\varphi),\ \ y=a(\sin\varphi-\varphi\cos\varphi)$.

668. $y=a\ln\frac{a-\sqrt{a^2-x^2}}{x}+\sqrt{a^2-x^2}$.

669. $y^2=x^3$.

670. $x=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}e^{m\alpha}\cos\alpha,\ \ y=\frac{m}{\sqrt{m^2+1}}e^{m\alpha}\sin\alpha$.

671. $y=\frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}}+e^{-\frac{x}{a}}\right)$.

672. Чизиқнинг табиий тенгламаси $k=\frac{s}{a^2}$ бўйича унинг параметрик тенгламаларини тузинг.

673. Қандай чизиқнинг табиий тенгламаси $R^2=16a^2-s^2$ дан иборат. Бу ерда $a$ — доимий сон.

## 26-§. ФАЗОВИЙ ЧИЗИҚЛАР УЧУН ФРЕНЕ ФОРМУЛАЛАРИ. ЭГРИ ЧИЗИҚ ЁЙИНИНГ УЗУНЛИГИ

Қуйидаги тенгламалар билан берилган чизиқларга берилган нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламаларини тузинг.

**674.** $x = t,\ y = t^2,\ z = t^3,\ (t = 1)$.

**675.** $x = 3t - t^3,\ y = 3t^2,\ z = 3t + t^3$.

**676.** $x = 2\cos t,\ y = 2\sin t,\ z = t;\ (t = 0)$.

**677.** $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\sin\frac{t}{2};$ $\left(t = \frac{\pi}{2}\right)$.

**678.** $x = \frac{a}{2}(1 + \cos t),\ y = \frac{a}{2}\sin t,\ z = a\sin\frac{t}{2},\quad (0,\ 0,\ 0)$.

**679.** Агар чизиқнинг тенгламаси ушбу

$$f(x,\ y,\ z) = 0$$
$$\varphi(x,\ y,\ z) = 0$$

кўринишда берилган бўлса, унинг $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ нуқтасида ўтказилган уринманинг тенгламалари қуйидаги кўринишда бўлишини исботланг:

$$\frac{X - x_0}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ \varphi_y & \varphi_z \end{vmatrix}} = \frac{Y - y_0}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ \varphi_z & \varphi_x \end{vmatrix}} = \frac{Z - z_0}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ \varphi_x & \varphi_y \end{vmatrix}}$$

**680.** $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1, \\ x^2 + y^2 = x \end{cases}$ эгри чизиққа $M_0(0,\ 0,\ 1)$ нуқтасидаги уринманинг тенгламасини тузинг.

**681.** $\begin{cases} 2x^2 + 3y^2 + z^2 - 47 = 0, \\ x^2 - 2y^2 - z = 0 \end{cases}$ тенгламалар билан берилган эгри чизиқнинг $M_0(-2,\ 1,\ 6)$ нуқтасидаги уринманинг тенгламасини тузинг.

**682.** Агар эгри чизиққа уринмаларининг ҳаммаси бирор текисликка параллел бўлса, бу эгри чизиқнинг ясси эканлигини исбот қилинг.

**683.** $x = t,\quad y = t^2,\quad z = t^3$ чизиққа уринмаларнинг $Oxy$ текислик билан кесишиш нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.

Қуйидаги тенгламалар билан аниқланган чизиқларнинг кўрсатилган нуқтасидаги бош нормали ва бинормалининг тенгламасини тузинг.

684. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3;\ M_0(t=1)$.

685. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$; ихтиёрий нуқтасида.

686. $x=\sin t,\quad y=\cos t,\quad z=\operatorname{tg} t,\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$; $M_0\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

687. $x=t,\ y=t^2,\ z=e^t;\ M_0(0)$.

688. $x=t\sin t,\ y=t\cos t,\ z=te^t;\ M_0(0)$.

689. $x=\frac{2}{t},\ y=\ln t,\ z=-t^2$ чизиқнинг шундай нуқтасини топингки, шу нуқтадаги чизиқнинг бинормали $x-y+8z+2=0$ текисликка параллел бўлсин.

690. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\quad z=bt$ винт чизиқнинг бош нормали унинг ўқини тўғри бурчак остида кесишини исбот қилинг.

691. Қуйидаги чизиқлар учун Френе репери бирлик векторлари $\vec{\tau},\ \vec{\nu},\ \vec{\beta}$ нинг координаталарини топинг:

а) $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$;

б) $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$.

692. $x=t,\ y=t^2,\ z=t^3$ чизиқнинг ёпишма, нормаль ва тўғриловчи текисликлари координата текисликлари билан устма-уст тушишини кўрсатинг.

693. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt$ чизиқнинг ёпишма, нормал ва тўғриловчи текисликларининг тенгламасини тузинг.

694. $x=t\cos t,\ y=-t\sin t,\ z=at$ чизиқнинг координата бошидаги ёпишма текислигининг тенгламасини тузинг.

695. $\begin{cases}\varphi(x,\ y,\ z)=0,\\ \psi(x,\ y,\ z)=0\end{cases}$ тенглама билан берилган чизиқнинг ёпишма текислигининг тенгламасини топинг.

696. $\begin{cases}x^2+y^2+z^2=9,\\ x^2-y^2=3\end{cases}$ чизиқнинг $M_0(2;\ 1;\ 2)$ нуқтасидаги ёпишма текислик тенгламасини тузинг.

697. Ҳамма нуқталаридаги ёпишма текисликлари битта нуқтадан ўтган чизиқнинг ясси чизиқ эканлигини исботланг.

698. Ёпишма текислигининг тенгламаси $A(t)x+B(t)y+C(t)z+D(t)=0$ дан иборат чизиқнинг тенгламасини топиш мумкинми?

699. $\vec{r}=\vec{r}(t)$ чизиқнинг ясси бўлиши учун зарурий ва етарли шарт $(\vec{r'}\ \vec{r''}\ \vec{r'''})=0$ дан иборатлигини исботлаб беринг.

Қуйидаги тенгламалар билан ифодаланган чизиқларнинг кўрсатилган нуқтасидаги нормал текислигининг тенгламасини тузинг.

700. $x=\frac{t^4}{4},\ y=\frac{t^3}{3},\ z=\frac{t^2}{2},\ M_0(t=1).$

701. $x=a(t-\sin t),\ y=a(1-\cos t),\ z=4a\sin\frac{t}{2},$ $M_0\left(t=\frac{\pi}{2}\right).$

702. $x=2\cos t,\ y=2\sin t,\ z=4t;\ M_0(t=0).$

703. $\begin{cases} y^2=x, \\ z=x^2; \end{cases}$ $M_0(1,\ 1,\ 1).$

704. $\begin{cases} y^2+z^2=25, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ $M_0(1,\ 3,\ 4).$

705. $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1, \\ x^2+z^2=1 \end{cases}$ $M_0(0,\ 0,\ 1).$

Қуйидаги тенгламалар билан берилган чизиқларнинг кўрсатилган нуқталари орасидаги ёй узунлигини топинг.

706. $x=t,\ y=\sqrt{2}\ln t,\ z=\frac{1}{t};\ M_1(1),\ M_2(10).$

707. $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\ z=e^t;\ M_1(0),\ M_2(\pi).$

708. $x=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t}),\ y=\frac{a}{2}(e^t-e^{-t}),\ z=at+c;$ $(a\neq 0),\ M_1(0),\ M_2(1).$

709. $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt,\ (a\neq 0,\ b\neq 0),$ $M_1(0),\ M_2(2\pi).$

710. $x=t+\frac{t^3}{3},\ y=t-\frac{t^3}{3},\ z=t^2;\ M_1(1),\ M_2(t).$

711. $x^2=3y,\ 2xy=3z;\ M_0(0,\ 0,\ 0),\ M_1(x,\ y,\ z).$

712. $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t;\ (0<t\leqslant 2\pi)$, бу ёпиқ чизиқнинг узунлигини топинг.

713. Винт чизиқ берилган: $x=3a\cos t,\ y=3a\sin t,$ $z=4at$. Бу чизиқнинг $Oxy$ текислик билан кесишган нуқтасидан ихтиёрий $M(t)$ нуқтасигача бўлган ёй узунлигини ҳисобланг.

Қуйидаги мисолларда параметр сифатида ёй узунлигини олиб, чизиқларнинг тенгламасини ёзинг:

714. $x = t + \frac{t^3}{3}, \quad y = t - \frac{t^3}{3}, \quad z = t^2.$

715 $x = \frac{t^2}{2}, \quad y = 1 - t, \quad z = \frac{t^3}{3}.$

716. $x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ z = bt.$

717. $x = e^t \cos t, \ y = e^t \sin t, \ z = e^t.$

Ушбу мисолларда Френе формулаларидан фойдаланиб, $\vec{r} = \vec{r}(s)$ учун қуйидаги тенгликларнинг тўғрилигини исбот қилинг:

718. $\left|\frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right|^3 = k^4 + k^2\varkappa^2 + \left(\frac{d\varkappa}{ds}\right)^2.$

719. $\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^2\vec{r}}{ds^2}\right) = 0.$

720. $\left(\frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{d^3\vec{r}}{ds^3}\right) = -k^2.$

721. $(\vec{\beta}' \ \vec{\beta}'' \ \vec{\beta}''') = k_1\varkappa - \varkappa' k.$

722. $(\vec{\tau}' \ \vec{\tau}'' \ \vec{\tau}''') = -k^5\left(\frac{\varkappa}{k}\right)'.$

723. $(\vec{\nu}' \ \vec{\nu}'' \ \vec{\nu}''') = -\varkappa^5\left(\frac{k}{\varkappa}\right)'.$

724. $x = a\cos t, \ y = a\sin t, \ z = bt$ винт чизиғи учун Френе формулаларини ёзинг.

725. Агар $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$, $\vec{\nu} = \vec{\nu}(s)$, $\vec{\beta} = \vec{\beta}(s)$ векторлардан фақат бири берилган бўлса, чизиқнинг тенгламасини ёзиш мумкинми?

726. Френе формулаларини Дарбу вектори $\vec{\omega}$ орқали қуйидагича ёзиш мумкинлигини кўрсатинг ва уни топинг:

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = (\vec{\omega} \wedge \vec{\tau}), \quad \frac{d\vec{\nu}}{ds} = (\vec{\omega} \wedge \vec{\nu}), \quad \frac{d\vec{\beta}}{ds} = (\vec{\omega} \wedge \vec{\beta}).$$

727. Чизиқнинг ҳамма нуқталарида $\varkappa = 0$ бўлса, унинг ясси чизиқ эканлигини исботланг.

728. $x = t\cos t, \ y = t\sin t, \ z = at$ чизиқнинг (0, 0, 0) нуқтадаги эгрилигини ҳисобланг.

**729.** $x=\cos^3 t,\ y=\sin^3 t,\ z=\cos 2t$ чизиқнинг эгрилигини топинг.

Тенгламалари билан берилган қуйидаги чизиқларнинг эгрилиги ва буралишини ҳисобланг.

**730.** $x=2t,\ y=\ln t,\ z=t^2.$

**731.** $x=3t-t^3,\ y=3t^2,\ z=3t+t^3.$

**732.** $x=a\cos\omega t,\ y=a\sin\omega t,\ z=bt.$

**733.** $x=e^t,\ y=e^{-t},\ z=\sqrt{2}\,t.$

**734.** $x=t,\ \ y=\sqrt{2}\ln t,\ z=\frac{1}{t}.$

**735.** $x=\frac{s}{2}-\frac{1}{4}\sin 2s,\ y=\frac{1}{4}\cos 2s,\ z=\sin s.$

**736.** $x^2=2xy,\ x^3=6a^2z$ чизиқнинг эгрилик радиусини ҳисобланг.

**737.** Қуйидаги чизиқларнинг ясси эканлигини исботланг, тегишли тенгламаларни тузинг:

а) $x=\frac{1+t}{1-t},\quad y=\frac{1}{1-t^2},\quad z=\frac{1}{1+t};$

б) $x=\cos^3 t,\quad y=\sin^3 t,\quad z=\cos 2t.$

Қуйидаги чизиқларнинг табиий тенгламаларини тузинг:

**738.** $x=\frac{a}{2}(e^t+e^{-t}),\ y=\frac{a}{2}(e^t-e^{-t}),\ z=at.$

**739.** $x=t,\ y=\sqrt{2}\ln t,\ z=\frac{1}{t}.$

**740.** $x=a\cos t,\ y=a\sin t,\ z=bt.$

## 27-§. СИРТНИНГ ТЕНГЛАМАСИ

**741.** $Oxz$ текисликда $z=f(r)$ чизиқ берилган бўлиб, $r$ — чизиқнинг нуқтасидан $Oz$ ўқигача масофани билдиради. Шу чизиқнинг $Oz$ ўқи атрофида айланишидан ҳосил қилинган сиртнинг параметрик тенгламаларини $x=r\cos v,\ y=r\sin v,\ z=f(r)$ кўринишда ёзиш мумкинлигини исбот қилинг.

**742.** $Oxz$ текисликда $Oz$ ўқини кесмайдиган $x=f(u),\ z=g(u)$ чизиқ берилган. Шу чизиқнинг $Oz$ ўқи атрофида айланишидан ҳосил этилган сиртнинг параметрик тенгламаларини тузинг.

742- масаланинг шартидан фойдаланиб, қуйида берилган чизиқларнинг $Oz$ ўқи атрофида айланишидан ҳосил этилган сиртларнинг параметрик тенгламаларини тузинг.

743. $x = a\cos u,\ y = 0,\ z = a\sin u.$

744. $x = a\sin u,\ y = 0,\ z = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right).$

745. $x = \frac{a(e^{u/a} + e^{-u/a})}{2},\ y = 0,\ z = u.$

746. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 2z$ гиперболик параболоиднинг параметрик тенгламаларини $x = a(u+v),\ y = b(u-v),\ z = 2uv$ кўринишда ёзиш мумкинми?

747. $x = a\frac{uv+1}{u+v},\ y = b\frac{u-v}{u+v},\ z = \frac{uv-1}{u+v}$ тенгламалар бир паллали гиперболоиднинг параметрик тенгламалари эканлигини асосланг.

748. $x = \frac{u}{u^2+v^2},\ y = \frac{v}{u^2+v^2},\ z = \frac{1}{u^2+v^2}$ ва $x = u\cos v,\ y = u\sin v,\ z = u^2$ тенгламалар битта сиртни ифода этадими?

749. $x = u + \sin v,\ y = u + \cos v,\ z = u + a$ тенгламалар қандай сиртнинг параметрик тенгламалари эканлигини аниқланг ва бу сиртнинг ноошкор кўринишидаги тенгламасини ёзинг.

750 $M(4, 2, 3)$, $N(1, 4, -2)$ нуқталарнинг қайси бири $x = u + v,\ y = u - v,\ z = uv$ сиртда ётади?

751. Ушбу $x = 3u + v^2 + 1,\ y = 2u + v^2 - 1,\ z = -u + 2v$ сиртга қарашли бир нечта нуқтани топинг ва $\frac{x-16}{3} = \frac{y-12}{2} = \frac{z-4}{-1}$ тўғри чизиқнинг унда ётишини исботланг.

752. $x^2 + y^2 - z^2 - 6x - 8y - 10z = 0$ сиртнинг махсус нуқтасини топинг ва координаталар бошини шу нуқтага кўчириб, унинг тенгламасини соддалаштиринг.

753. $x = \sin u\cos v,\ y = \sin u\sin v,\ z = \cos u + \ln \operatorname{tg}\frac{u}{2}$ псевдосфера махсус нуқталарининг геометрик ўрнини топинг.

Қуйидаги сиртларнинг координата чизиқлари нимадан иборат эканлигини аниқланг.

754. $x = a\cos u\cos v,\ y = a\cos u\sin v,\ z = a\sin u.$

755. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$

756. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.$

757. $x=a\cos u,\ y=a\sin u,\ z=bu+v.$

758. $x=a\cos(u+v),\ y=a\sin(u+v),\ z=bu.$

759. $x=a\cos(u+v),\ y=a\sin(u+v),\ z=b(u-v).$

## 28- §. СИРТНИНГ УРИНМА ТЕКИСЛИГИ ВА НОРМАЛИ

Сиртларнинг кўрсатилган нуқтасидаги уринма текислиги ва нормалининг тенгламаларини ёзинг.

760. $x=2u-v,\ y=u^2-v^2,\ z=u^3-v^3,\ M(3,5,7).$

761. $x=u+v,\ y=u-v,\ z=uv;\ M(3,\ 1,\ 2).$

762. $x=u,\ y=u^2-2uv,\ z=u^3-3u^2v;\ M(1,\ 3,\ 4).$

763. $x^2+y^2+z^2=169;\ M(3,\ 4,\ 12).$

764. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1;\ M(x_0,\ y_0,\ z_0).$

765. $x=u\cos v,\ y=u\sin v,\ z=av;\ M(u,\ v).$

766. $xyz=a^3$ сиртга шундай уринма текислик ўтказингки, бу текислик координата ўқларидан тенг кесмалар ажратсин.

767. $\frac{x^3}{a^3}+\frac{y^3}{b^3}+\frac{z^3}{c^3}=1$ сиртнинг $\frac{x}{0}=\frac{y}{1}=\frac{z-c}{-1}$ тўғри чизиқдан ўтадиган уринма текисликларини топинг.

768. Координаталар бошидан $x=u\cos v,\ y=u\sin v,$ $z=kv$ сиртга ўтказилган уринма текисликларгача бўлган масофани ҳисобланг.

769. $x=2\sqrt{p}\,u\cos v,\ y=2\sqrt{q}\,u\sin v,\ z=2u^2$ параболоиднинг уринма текисликларига координаталар бошидан туширилган перпендикулярлар асосларининг геометрик ўрнини аниқланг.

770. Конуснинг ихтиёрий нуқтасидаги уринма текислигининг конус учидан ўтишини исбот қилинг.

771. Сферанинг нормаллари бир нуқтада кесишишини исботланг.

772. Айланма сирт нормалларининг айланиш ўқи билан кесишишини исбот қилинг.

773. Сиртнинг нормаллари битта тўғри чизиқ билан кесишса, унинг айланма сирт эканлигини исботланг.

774. Ушбу $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = g(u)$ айланма сиртнинг биринчи квадратик формасини топинг.

774- масаладан фойдаланиб, қуйидаги (775—780) айланма сиртларнинг биринчи квадратик формасини ҳисобланг.

775. Сфера: $x = a\cos u\cos v$, $y = a\cos u\sin v$, $z = a\sin u$.

776. Айланма эллипсоид: $x = a\cos u\cos v$, $y = a \times \cos u\sin v$, $z = c\sin u$.

777. Айланма параболоид: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$.

778. Доиравий цилиндр: $x = R\cos v$, $y = R\sin v$, $z = u$.

779. Тор: $x = (a + b\cos u)\cos v$, $y = (a + b\cos u) \times \sin v$, $z = b\sin u$.

780. Псевдосфера: $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos\frac{u}{2}\right)$.

781. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ тенгламалари билан берилган сирт тўғри геликоид дейилади. Унинг биринчи квадратик формасини топинг.

782. $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган сиртнинг биринчи квадратик формасини топинг.

783. $ds^2 = du^2 + 4dudv - 2dv^2$ квадратик форма бирор сиртнинг биринчи квадратик формаси бўладими?

784. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ $(|u| + |v| \neq 0)$ сирт устидаги $v - u = 0$ чизиқнинг $M_1(1, 1)$ ва $M_2(2, 2)$ нуқталари орасидаги ёйи узунлигини ҳисобланг.

785. Биринчи квадратик формаси $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$ бўлган сирт устида ётадиган $u = \frac{3}{2}v^2$, $u = -\frac{3v^2}{2}$, $v = 1$ чизиқлар эгри чизиқли учбурчак ҳосил қилади. Шу учбурчакнинг периметрини ҳисобланг.

786. $x = a\cos u\cos v$, $y = a\cos u\sin v$, $z = a\sin u$ сфера координат тўрларининг ортогоналлигини исбот қилинг.

787. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ тўғри геликоид устида ётадиган $u + v = 0$ ва $u - v = 0$ чизиқлар қандай бурчак ҳосил қилади?

**788** $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$ сирт устидаги $v = u + 1$ ва $v = 3 - u$ чизиқлар орасидаги бурчакни топинг.

**789.** Биринчи квадратик формага эга бўлган $ds^2 = du^2 + dv^2$ сирт устидаги $u = t$, $v = 2t$ чизиқ билан $u = -t$, $v = 2t$ чизиқ орасидаги бурчакни ҳисобланг.

**790.** $\frac{x^2}{p} - \frac{y^2}{q} = 2z$ гиперболик параболоиднинг тўғри чизиқли ясовчилари оиласига ортогонал бўлган чизиқлар оиласини топинг.

**791.** $x = (a + b\cos v)\cos u$, $y = (a + b\cos v)\sin u$, $z = b\sin v$ $(0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant 2\pi)$ торнинг сиртини (юзини) ҳисобланг.

**792.** $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ тўғри геликоид устидаги $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$ чизиқлар эгри чизиқли тўртбурчак ташкил қиладилар

Щу тўртбурчакнинг юзини ҳисобланг.

## 30-§. СИРТНИНГ ИККИНЧИ КВАДРАТИК ФОРМАСИ

**793.** Айланма сирт ўқи $Oz$ дан иборат $x = f(u)\cos v$, $y = f(u)\sin v$, $z = g(u)$ сиртнинг иккинчи квадратик формасини топинг.

Қуйидаги айланма сиртларнинг иккинчи квадратик формасини ҳисобланг.

**794.** Сфера: $x = R\cos u\cos v$, $y = R\cos u\sin v$, $z = \sin u$.

**795.** Айланма параболоид: $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = u^2$.

**796.** Доиравий цилиндр: $x = R\cos v$, $y = R\sin v$, $z = u$.

**797.** Псевдосфера: $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \cos u\right)$.

**798.** Катеноид: $x = \sqrt{u^2 + a^2}\cos v$, $y = \sqrt{u^2 + a^2} \times \sin v$, $z = a\ln\left(u + \sqrt{u^2 + a^2}\right)$.

**799.** $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = av$ тўғри геликоиднинг иккинчи квадратик формасини топинг.

**800.** $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган сиртнинг иккинчи квадратик формасини топинг.

**801.** Сиртнинг ҳамма нуқтасида иккинчи квадратик формаси нолга айланса, бундай сиртнинг текисликдан иборатлигини исботланг. Тескари даъво ҳам тўғрими?

802. Сфера учун биринчи ва иккинчи квадратик формаларнинг мос коэффициентлари пропорционал эканлигини кўрсатинг.

803. Қуйидаги сиртларнинг юмалоқланиш нуқталарини топинг:

а) $2z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $(a > b)$;

б) $xyz = a^3$.

804. $x = u\cos\varphi$, $y = u\sin\varphi$, $z = \varphi(u) + mv$, $(m = \text{const})$ сиртнинг биринчи ва иккинчи квадратик формаларини ҳисобланг.

805 $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = f(u)$ айланма сиртнинг бош йўналишларини аниқланг.

806. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = bv$ тўғри геликоид бош йўналишларининг тенгламаларини аниқланг.

807. Тўғри геликоиднинг бош йўналишлари ясовчилари унинг билан винт чизиқлари орасидаги бурчакни тенг иккига бўлади. Шуни исбот қилинг

808 $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\cos u + a\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}$ псевдосферанинг бош эгриликларини ҳисобланг.

809. $x = \sqrt{u^2+a^2}\cos v$, $y = \sqrt{u^2+a^2}\sin v$, $z = a\ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$ катеноиднинг бош эгриликларини топинг.

810. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = bv$ геликоиднинг бош эгриликларини ҳисоблаб, унинг ўртача эгрилиги нолга тенг эканлигини кўрсатинг.

811. $x = u^2 + v^2$, $y = u^2 - v^2$, $z = uv$ сиртнинг $M(1, 1)$ нуқтасидаги бош эгриликларини ҳисобланг.

812. $z = a(x^2 + y^2)$ параболоиднинг координаталар бошидаги бош эгриликларини топинг.

813. $z = z(x, y)$ тенглама билан берилган сиртнинг тўлиқ ва ўрта эгриликларини ҳисобланг.

814. $z = axy$ гиперболоиднинг $x = y = 0$ нуқтасидаги тўлиқ ва ўрта эгриликларини топинг.

815. Қуйидаги сиртларнинг тўлиқ эгрилигини топинг:

а) $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = bv$;

б) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} = 2z$.

816. $x = \sqrt{u^2+a^2}\cos v$, $y = \sqrt{u^2+a^2}\sin v$, $z = a\ln(u + \sqrt{u^2+a^2})$ катеноиднинг ўрта эгрилиги нолга тенг эканлигини кўрсатинг.

817. $\vec{r}=\vec{r}(s)$ чизиқнинг бош нормалларидан тузилган сиртнинг тўлиқ эгрилигини топинг.

818. $\vec{r}=\vec{r}(u, v)$ сиртнинг тўлиқ эгрилигини қуйидаги формула билан ҳисоблаш мумкинлигини исбот қилинг:

$$K=-\frac{2}{\sqrt{EG}}\left[\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{E_v}{\sqrt{EG}}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{G_u}{\sqrt{EG}}\right)\right],$$

бу ерда

$$E_v=\frac{\partial E}{\partial v},\quad G_u=\frac{\partial G}{\partial u}.$$

819 818-масаланинг шартидан фойдаланиб, биринчи квадратик формаси $ds^2=du^2+(u^2+b^2)dv$ бўлган сиртнинг тўлиқ эгрилигини ҳисобланг.

820. Текисликка ёйиладиган сиртнинг биринчи квадратик формаси ушбу кўринишда берилган: $ds^2=(1+k^2v^2)du^2+2du\,dv+dv^2$.

Бу сиртнинг тўлиқ эгрилиги нолга тенг. Шуни исбот қилинг.

821. Биринчи квадратик формаси $ds^2=du^2+G(u, v)dv^2$ кўринишдаги сиртнинг тўлиқ эгрилигини $k=-\frac{(\sqrt{G})_{uu}}{\sqrt{G}}$ формула орқали аниқлаш мумкинлигини исботланг.

Қуйидаги иккинчи тартибли сиртлар нуқталарининг характерини текширинг.

822 Сфера: $x^2+y^2+z^2=R^2$.

823. Эллипсоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$.

824. Бир паллали гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

825. Икки паллали гиперболоид: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$.

826. Эллиптик цилиндр: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

827. $2x^2+\frac{9}{2}y^2=z$ сиртнинг (0, 0, 0) нуктасидаги Дюпен индикатрисасининг тенгламасини тузинг.

828. $z=a(x^2+y^2)$ сиртнинг координаталар бошидаги индикатрисаси радиуси $\frac{1}{\sqrt{2a}}$ га тенг айлана эканлигини исботланг.

**829.** $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=av$ сиртда ётувчи $v^2du^2-u^2dv^2=0$ чизиқлар оиласининг қўшма тўр ташкил қилишини исбот қилинг.

**830.** $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=u+v$ сирт устида $u+v=c$ чизиқлар оиласи берилган. Бу чизиқларга қўшма бўлган чизиқлар оиласининг дифференциал тенгламасини тузинг.

**831.** $2z=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ эллиптик параболоидда $x+y=$ $=\text{const}$ текисликлар ёрдамида кесимлар ҳосил қилинган. Шу кесимлар билан қўшма тур ҳосил қиладиган чизиқлар оиласини топинг.

**832.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ эллипсоиддаги $y=\text{const}$ чизиқлар оиласи билан қўшма тўр ҳосил қиладиган чизиқлар оиласини топинг.

**833.** $x=u\cos v$, $x=u\sin v$, $z=v$ геликоиддаги асимптотик чизиқлар оиласидан бири тўғри чизиқлар, иккинчиси винт чизиқлардан иборат эканлигини исбот қилинг.

**834.** $x=a\sin u\cos v$, $y=a\sin u\sin v$, $z=a\left(\cos u+\right.$ $\left.+\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}\right)$ псевдосферадаги асимптотик чизиқларни топинг.

**835.** Бир паллали гиперболоиднинг тўғри чизиқли ясовчилари асимптотик чизиқлар эканлигини исбот қилинг.

**836.** $x=\sqrt{u^2+a^2}\cos v$, $y=\sqrt{u^2+a^2}\sin v$, $z=u\ln(u+$ $+\sqrt{u^2+a^2})$ катеноиднинг асимптотик чизиқларини топинг.

837. $x=\frac{2}{1+t}$, $y=\frac{2}{1-t}$, $z=t$ чизиқ $z=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}$ сиртнинг асимптотик чизиғи эканлигини кўрсатинг.

**838** Ўрта эгрилиги нолга тенг сиртнинг асимптотик чизиқлари тўғри ортогонал бўлишини исботланг.

**839** $x=u\cos v$, $y=u\sin v$, $z=bv$ тўғри геликоид эгрилик чизиқларининг тенгламасини тузинг.

**840.** $z=z(x, y)$ тенглама билан берилган сирт эгрилик чизиқларининг дифференциал тенгламасини топинг.

**841.** $z=axy$ параболоиднинг эгрилик чизиқларини топинг.

**842.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, $(a>b<c)$ эллипсоид эгрилик чизиқларининг дифференциал тенгламасини тузинг.

**843.** Параметрик тенгламалар билан берилган

$$x=\sqrt{p}(u+v),\quad y=\sqrt{q}(u-v),\quad z=2uv$$

параболоид эгрилик чизиқларининг дифференциал тенгламасини тузинг.

**844.** Ушбу $x=3u-u^3+3uv^2$, $y=v^3-3u^2v-3v$, $z=3(u^2-v^2)$ сиртнинг координата чизиқлари эгрилик чизиқларидан иборат эканлигини исбот қилинг.

**845.** $x=\frac{1}{3}u^3-uv^2+\frac{u}{u^2+v^2}$, $y=u^2v-\frac{1}{3}v^3+\frac{v}{u^2+v^2}$ $z=2u$ сиртнинг эгрилик чизиқларини топинг.

**846.** $az^2=xy$ сирт эгрилик чизиқларининг $xOy$ текисликдаги проекциялари гиперболалардан иборат эканлигини исбот қилинг.

**847.** Қуйидаги айниятларни исбот қилинг:

а) $\frac{\partial g_{ik}}{\partial u^2}=\sum_{\mu}\Gamma^{\mu}_{le}g_{k\mu}+\sum_{\mu}\Gamma^{\mu}_{ke}g_{l\mu}$;

б) $\frac{\partial\ln\sqrt{g}}{\partial u^3}=\sum_{e}\Gamma^{\alpha}_{\alpha e}$.

Сирт геодезик чизиқларининг қуйидаги хоссалар билан тўлиқ характерланишини кўрсатинг.

**848.** Эгрилик нолдан фарқли ҳар бир нуқтасида геодезик чизиқнинг бош нормали сиртнинг нормалидан иборат бўлади.

**849.** Геодезик чизиқнинг тўғриловчи текислиги сиртнинг уринма текислиги бўлади.

**850** Геодезик чизиқнинг ихтиёрий нуқтасидаги ёпишма текислиги сиртнинг шу нуқтасидаги уринма текислигига перпендикуляр бўлади.

**851.** Сиртнинг тўғри чизиқли ясовчилари геодезик чизиқлар эканлигини кўрсатинг.

**852.** Сферанинг катта доиралари геодезик чизиқ эканлигини исботланг.

**853.** $x=R\cos\frac{u}{R}$, $y=R\sin\frac{u}{R}$, $z=v$ доиравий цилиндрнинг геодезик чизиқларини топинг.

**854.** Айланма сиртнинг ихтиёрий меридиани геодезик чизиқ эканлигини исботланг.

**855.** Тўғри геликоиддаги винт чизиқларнинг геодезик эгрилиги шу чизиқнинг эгрилигига, цилиндр устидаги винт чизиқнинг геодезик эгрилиги эса 0 га тенг эканлигини исбот қилинг.

856. $x = u\cos v$, $y = u\sin v$, $z = z(u)$ айланма сиртнинг геодезик чизиқларини топинг.

857. $x = a\sin u\cos v$, $y = a\sin u\sin v$, $z = a\left(\ln \operatorname{tg}\frac{u}{2} + \right.$ $\left. + \cos u\right)$ псевдосферанинг геодезик чизиқлари топилсин.

858. Псевдосфера устидаги геодезик учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси $\pi$ дан кичик эканлигини исбот қилинг.

## VII боб

# ҲИСОБЛАШГА ДОИР МАСАЛАЛАР

### 32- §. УЧБУРЧАКЛАРГА ДОИР МАСАЛАЛАР

859. $C$ учидаги бурчаги $\alpha$ га тенг $ABC$ учбурчакнинг $BC$ ва $AC$ томонларида шундай $A_1$ ва $B_1$ нуқталар олинганки, $ABB_1$ ва $BAA_1$ учбурчаклар тенг. $ABC$ учбурчакнинг $A$ ва $B$ учларидаги бурчакларини топинг.

860. Тўғри бурчакли учбурчакда гипотенузанинг учларидан бошлаб унинг давомларига шу учларга мос катетларга тенг узунликдаги кесмалар қўйилган. Ҳосил бўлган нуқталарни тўғри бурчак учи билан бирлаштирувчи тўгри чизиқлар ўтказилган. Бу тўғри чизиқлар ораидаги бурчакни топинг.

861. Томонлари $AB = 25$ см, $BC = 30$ см, $AC = 25$ см бўлган учбурчакнинг $AB$ томонига туширилган баландлигини топинг.

862. $ABC$ учбурчакда $\angle A = 70°$, $\angle C = 80°$ бўлиб, унинг $A$ ва $C$ учларидан ўтказилган баландликлари $O$ нуқтада кесишади. $\angle AOC$ ни топинг.

863. $ABC$ учбурчакнинг $B$ учидаги бурчаги 115°. $AC$ томонининг ўртасидан ўтказилган перпендикуляр $BC$ томонни $D$ нуқтада кесади, $AD$ нур эса $A$ учдаги бурчакни $AC$ томондан бошлаб 5 : 3 нисбатда бўлади. Учбурчакнинг қолган бурчакларини топинг.

864. Учбурчакнинг периметри $p$ бўлса, унинг томонлари ўрталарини бирлаштирувчи учбурчак периметрини топинг.

865. Периметри 64 см бўлган тенг ёнли учбурчакнинг ён томони асосидан 11 см ортиқ бўлса, ён томонига туширилган баландлигини топинг.

866. $ABC$ учбурчакнинг $BD$ биссектрисаси $AB$ томонга ва $DC$ кесмага тенг. Агар учбурчакнинг $AC$ то-

мони узунлиги $b$ бўлса, қолган томонларининг узунликларини топинг.

867. Агар учбурчакнинг бир учидан чиққан медиана ва баландлик шу учдаги бурчакни тенг уч бўлакка ажратса, бу учбурчак бурчакларини топинг.

868. Томони $a$ га тенг бўлган мунтазам учбурчакнинг томонида ихтиёрий олинган $M$ нуқтадан учбурчак томонларигача масофалар йиғиндисини топинг.

869. Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонига туширилган баландлиги узунлиги шу томон узунлигининг ярмига тенг. Учбурчак бурчакларини топинг.

870. Тенг ёнли учбурчакнинг асоси $4\sqrt{2}$ см, ён томонига ўтказилган медианаси 5 см бўлса, учбурчакнинг ён томонини топинг.

871. Катетлари 6 см ва 12 см бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги биссектрисасини топинг.

872. $ABC$ учбурчакда $A$ учидан биссектриса ва баландлик ўтказилган. Агар учбурчакнинг $A$ ва $C$ учидаги бурчаклари $\beta$ ва $\gamma$ га тенг бўлса, биссектриса ва баландлик орасидаги бурчакни топинг.

873. Учбурчакнинг $a$, $b$ томонлари ва улар орасидаги $\gamma$ бурчаги берилган. Шу бурчак биссектрисаси ва баландлигини топинг.

874. $ABC$ учбурчакда $AC = b$, $AB = c$ берилган. $A$ учидаги бурчакнинг биссектрисаси қаршисидаги томонни $D$ нуқтада кесади ва $AD = BD$. Учбурчакнинг $BC$ томонини топинг.

875. Тенг ёнли тўғри бурчакли $ABC$ учбурчакда $C$ учидаги бурчаги $90°$. $AA_1$ ва $BB_1$ медианалар орасидаги бурчак косинусини топинг.

876. Тенг ёнли ўтмас бурчакли учбурчакнинг ўтмас бурчаги учидан ён томонига перпендикуляр ўтказиб учбурчак асоси билан кесишгунча давом эттирилган. Агар учбурчакнинг асоси 32 см, баландлиги 12 см бўлса, ўтказилган перпендикулярнинг асосда ҳосил қилган кесмаларини топинг

877. Косинуслар теоремасидан фойдаланиб, томонларининг узунликлари $a$, $b$, $c$ бўлган учбурчак юзини ҳисоблаш формуласи (Герон формуласи)ни чиқаринг.

878. Учбурчакнинг $a$ ва $b$ томонлари берилган. Улар орасидаги бурчак қандай бўлганда учбурчак юзи энг катта бўлади?

879. Тўғри бурчакли учбурчак тўғри бурчагининг биссектрисаси гипотенузани узунликлари $m$ ва $n$ га

тенг кесмаларга ажратади. Учбурчакнинг тўғри бурчагидан ўтказилган баландлигининг узунлигини топинг.

**880.** Учбурчакнинг $a$ томони ва унга ёпишган $\alpha$, $\beta$ бурчаклари берилган. Унинг юзини топинг.

**881.** $ABC$ учбурчакнинг $S$ юзи ва $\alpha$. $\beta$ бурчаклари берилган. Учбурчак томонларини топинг.

**882.** Тенг ёнли учбурчакнинг ён томонлари орасидаги $B$ бурчаги $2\alpha$ га тенг. $B$ учидан туширилган баландликнинг ўртасидан ўтиб, асоснинг давоми билан $\beta$ бурчак ҳосил қилувчи тўғри чизиқ учбурчакни икки қисмга ажратган. Бу қисмлар юзларининг нисбатини топинг.

**883** $ABC$ учбурчакда $A$ учдаги бурчак $B$ учдаги бурчакдан икки марта катта, $AC=b$, $AB=c$ бўлса, $BC$ томон узунлигини топинг.

**884.** $ABC$ учбурчакда $AC$ томонининг узунлиги 5 см. $BC$ томони $AB$ томонидан 2 см узун ва $A$ учидаги бурчаги $C$ учидаги бурчагидан 2 марта катта. Учбурчакнинг $AB$ ва $BC$ томонлари узунликларини топинг.

**885.** Тўғри бурчакли учбурчакда гипотенузага ўтказилган медиана узунлиги 5, гипотенузага ўтказилган ўрта перпендикулярнинг учбурчак томонлари орасидаги бўлагининг узунлиги эса $\frac{15}{8}$ бирлик. Учбурчак катетларини топинг.

**886.** Томонлари $a$ ва $b$ бўлган учбурчакнинг шу томонларга ўтказилган медианалари тўғри бурчак остида кесишади. Учбурчакнинг учинчи томонини топинг.

**887.** Ўткир бурчакли учбурчакнинг иккита баландлиги 3 см ва $2\sqrt{2}$ см бўлиб, учинчи баландликни баландликлар кесишган нуқта учидан бошлаб $5:1$ нисбатда бўлади. Учбурчак юзини топинг.

**888.** Учбурчакнинг $\alpha$ ва $\beta$ га тенг икки бурчаги берилган. Учинчи учидан чиққан медиана билан баландлик орасидаги бурчакни топинг.

**889.** Томонлари $a$, $b$, $c$ га тенг учбурчакнинг учинчи томонига ўтказилган медианаси ва биссектрисасини топинг.

**890.** Тенг ёнли $ABC$ учбурчакнинг ён томонига ўтказилган $AD$ биссектриса учбурчакни юзлари мос равишда $S_1$ ва $S_2$ бўлган $ABD$ ва $ADC$ учбурчакларга ажратади. $ABC$ учбурчакнинг асосини топинг.

**891.** Учбурчак томонларининг нисбати $4:5:6$ каби. Унга ўхшаш учбурчакнинг энг кичик томони 8 дм га тенг бўлса, шу ўхшаш учбурчак кичик томони қаршисидаги бурчагининг косинусини топинг.

892. Учбурчак томонларининг нисбати $2:5:4$ каби. Унга ўхшаш учбурчакнинг периметри 55 м га тенг бўлса, шу ўхшаш учбурчак томонларини топинг.

893. Тенг ёнли икки учбурчакнинг ён томонлари орасидаги бурчаклари тенг. Бу учбурчаклар асосларининг нисбати 2, биринчи учбурчакнинг ён томони 3 см га тенг бўлса, иккинчи учбурчакнинг ён томонини топинг.

894. $ABC$ учбурчакнинг $h_1$, $h_2$, $h_3$ баландликлари берилган. Унинг томонларини ва бурчакларини топинг.

895. Асоси $AC$ бўлган тенг ёнли $ABC$ учбурчакнинг $B$ учидаги бурчаги $36°$. Унинг $AD$ биссектрисаси ўтказилган. Агар $CD$ кесма узунлиги $a$ бўлса, учбурчакнинг ён томонини топинг.

896. $ABC$ учбурчакда $C$ учдан $AB$ томонга туширилган перпендикулярнинг асоси $C_1$. Агар $CC_1^2 = C_1A \cdot C_1B$ муносабат ўринли бўлса, учбурчак томонларининг узунликлари орасидаги боғланишни топинг.

897. $ABC$ учбурчак томонларининг узунликлари $a$, $b$, $c$ бўлса, унга ички чизилган айлана радиусини топинг.

898. Асоси $a$, ён томони $b$ бўлган тенг ёнли учбурчакка ички чизилган айлана радиусини топинг.

899. Тенг ёнли учбурчакнинг учидаги бурчаги $120°$, ён томони $a$ бўлса, унга ички чизилган айлана радиусини топинг.

900. $ABC$ учбурчакка ички чизилган айлана маркази $O$ нуқтада. Учбурчакнинг $BC$ ва $AC$ томонларида шундай $P$ ва $Q$ нуқталар олинганки, улар учун $BP \cdot AB = BO^2$, $AQ \cdot AB = AO^2$ муносабатлар ўринли. $P$, $O$, $Q$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётишини кўрсатинг.

901. Катетлари $a$ ва $b$ га тенг тўғри бурчакли учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар радиусларини топинг.

902. Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусининг ички чизилган айлана радиусига нисбати $5:2$ каби бўлса, бу учбурчак томонларининг нисбатини топинг.

903 Катетлари 3 ва 4 бўлган тўғри бурчакли учбурчакка ички ва ташқи чизилган айланалар марказлари орасидаги масофани топинг.

904. Мунтазам учбурчакка ички ва ташқи чизилган айлана радиусларини унинг томони орқали ифодаланг.

905. $ABC$ учбурчакнинг $AH_1$ ва $BH_2$ баландликлари ўтказилган. $AB$ томонининг ўртасида олинган $M$ нуқта учун $\angle H_1MH_2=90^\circ$ бўлса, учбурчакнинг $C$ учидаги бурчагини топинг.

906. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан туширилган баландлиги гипотенузани 1,8 см ва 3,2 см узунликдаги икки кесмага ажратади. Учбурчакнинг катетларини топинг.

907. Тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари бири иккинчисидан бир бирлик узун. Тўғри бурчак учидан туширилган баландликнинг гипотенузада ажратган кесмаларининг кичиги 1,8 бўлса, учбурчак томонларини топинг.

908. Тўғри бурчакли учбурчакда тўғри бурчак учидан гипотенузага туширилган баландликнинг гипотенузада ажратган кесмалари $p$ ва $q$ бўлса, учбурчак юзини топинг

909. $ABC$ учбурчакнинг баландликлари $AA_1$ ва $BB_1$ бўлса. $A_1B_1C$ учбурчакнинг $ABC$ учбурчакка ўхшаш бўлишини исбот қилинг.

910. $ABC$ учбурчакнинг юзи $S$, ички чизилган айланасининг радиуси $r$, $A$ учидаги бурчаги $\alpha$ берилган. Бу учбурчакнинг $BC$ томонини топинг.

911. Учбурчакнинг иккита $\alpha$, $\beta$ бурчаги ва ташқи чизилган айлана радиуси $R$ берилган. Учбурчак юзини топинг.

912. Томонлари $a, b, c$ бўлган учбурчакка диаметри $c$ томонда ётган ички ярим доира чизилган. Бу ярим доиранинг диаметрини топинг.

## 33-§. КЎПБУРЧАКЛАРГА ДОИР МАСАЛАЛАР

913. Қавариқ тўртбурчак диагоналлари $a$ ва $b$ га тенг. Учлари берилган тўртбурчак томонларининг ўрталарида ётган тўртбурчак периметрини топинг

914. Қавариқ тўртбурчакда қарама-қарши томонларининг ўрталарини туташтирувчи кесмаларнинг узунликлари $a$ ва $b$ га тенг бўлиб, улар ўзаро 60° ли бурчак ҳосил қилади. Тўртбурчак диагоналларининг узунликларини топинг.

915. Қавариқ тўртбурчакнинг диагоналлари уни тўртта учбурчакка ажратади. Агар тартиб билан улардан учтасининг юзлари $S_1$, $S_2$, $S_3$ бўлса, тўртинчи учбурчак юзини топинг.

**916.** Қарама-қарши томонлари ўзаро параллел ва тенг бўлган қавариқ $ABCDEF$ олтибурчак берилган. $ACE$ учбурчак юзининг $ABCDEF$ олтибурчак юзига нисбатини топинг.

**917.** Қарама-қарши томонлари параллел ва тенг $ABCDEF$ олтибурчак берилган. Унинг параллел бўлмаган $AB$ ва $DC$, $DC$ ва $EF$, $EF$ ва $AB$ томонлари давом эттирилганда $M$, $N$, $Q$ нуқталарда кесишади. Агар олтибурчакнинг учта томонида ҳосил бўлган $BCM$, $EDN$, $AQF$ учбурчакларнинг периметрлари $p_1$, $p_2$, $p_3$ бўлса, $MNQ$ учбурчак периметрини топинг.

**918.** Тенг ёнли учбурчакнинг ён томони $a$ га тенг. Учбурчак асосида олинган нуқтадан унинг ён томонларига параллел тўғри чизиқлар ўтказилганда ҳосил бўлган параллелограмм периметрини топинг.

**919.** Параллелограмм икки томонининг нисбати $3:4$ га тенг. Унинг периметри эса 2,8 м га тенг, параллелограмм томонларини топинг.

**920.** $ABC$ учбурчакнинг $AA_1$ ва $BB_1$ медианалари $M$ нуқтада кесишади $ABM$ учбурчакнинг $AB$ томонига параллел $PQ$ ўрта чизиғи ўтказилган: 1) $A_1B_1PQ$ тўртбурчак параллелограмм эканлигини исбот қилинг; 2) учбурчакнинг икки медианаси кесишиб, бу нуқтада ҳар бири учидан бошлаб $2:1$ нисбатда бўлинишини исбот қилинг; 3) учбурчакнинг учала медианаси бир нуқтада кесишишини исбот қилинг.

**921.** Тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакка тўғри тўртбурчак шундай ички чизилганки, унинг икки учи гипотенузада, қолган икки учи катетларда ётади. Агар тўғри тўртбурчак томонларининг нисбати $5:2$ га тенг, учбурчак гипотенузаси 45 см га тенг бўлса, тўғри тўртбурчакнинг томонларини топинг.

**922.** $ABCD$ параллелограммда $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ томонларнинг ўрталари мос равишда $P$, $Q$, $R$, $S$ нуқталар бўлиб, $PD$, $AQ$, $RB$, $SC$ тўғри чизиқлар ўтказилганда, бу тўғри чизиқлар кесишишидан яна параллелограмм ҳосил бўлган. Агар $ABCD$ параллелограмм юзи $S$ бўлса, ҳосил бўлган параллелограмм юзини топинг.

**923.** $ABCD$ параллелограммда $AB=a$, $AD=b$, $(b>a$. $\angle A=\alpha$ $(\alpha<90°)$ берилган. $AD$ ва $BC$ томонларда шундай $E$ ва $F$ нуқталар олинганки, $BEDF$ фигура ромбдан иборат. Шу ромбнинг томонини топинг.

**924.** $ABCD$ параллелограммда $AB=a$, $BC=b$,

$\angle ABC=\alpha$. $ABC$ ва $ADC$ учбурчакларга ташқи чизилган айланалар марказлари орасидаги масофани топинг.

925. $ABCD$ ромбда $ABC$ ва $ABD$ учбурчакларга ташқи чизилган айланаларнинг радиуслари $R$ ва $r$ берилган бўлса, ромбнинг юзини топинг.

926. Ромбга ички чизилган доира юзи ромбнинг юзидан икки марта кичик бўлса, ромбнинг бурчакларини топинг.

927. Ромбнинг баландлиги унинг томонини узунликлари $m$ ва $n$ бўлган икки кесмага ажратади. Ромбнинг диагоналларини топинг.

928. Ўткир бурчакларидан бири $60°$ бўлган тўғри бурчакли учбурчакка ички ромб шундай чизилганки, $60°$ ли бурчак бу ромбга ҳам ички бурчакдан иборат бўлиб, ромбнинг учлари учбурчакнинг томонларида ётади. Ромбнинг томони 6 см бўлса, учбурчакнинг томонларини топинг.

929. Учбурчакка битта бурчаги умумий бўлган ромб ички чизилган. Ромбнинг бу учга қарама қарши учи учбурчакнинг томонини $2:3$ нисбатда бўлади. Ромбнинг диагоналлари $m$ ва $n$ бўлса, учбурчакнинг ромб билан умумий учга эга бўлган томонлари узунликларини топинг.

930. $ABCD$ ромбнинг $A$ учидаги бурчаги $120°$, томони $a$ га тенг. $BC$ ва $AD$ томонларда мос равишда $E$ ва $F$ нуқталар олинган. $EF$ $AC$ диагональ билан $O$ нуқтада кесишади ва $AO:OC=1:3$; $BEFA$, $ECDF$ тўртбурчаклар юзларининг нисбати $1:2$ каби. $EO$ кесма узунлигини топинг.

931 Параллелограммнинг ўткир бурчаги $\alpha$, томонларининг узунликлари $a$ ва $b$ га тенг. $\alpha$ бурчак учидан чиққан диагональ параллелограмм томонлари билан ҳосил қилган бурчакларининг тангенсларини топинг.

932. Квадратнинг томонларига унинг ташқарисида мунтазам учбурчаклар ясалган. Бу учбурчакларнинг квадратга тегишли бўлмаган учларини бирлаштиришдан ҳосил бўлган тўртбурчак периметрининг квадрат периметрига нисбатини топинг.

933. Томони $a$ га тенг бўлган икки квадратдан бири иккинчисининг учи атрофида $45°$ га буришдан ҳосил қилинган бўлса, бу квадратлар умумий қисмининг юзини топинг.

934. Томони $a$ га тенг бўлган икки квадратнинг марказлари устма-уст тушиб, диагоналлари орасидаги

бурчак 45° га тенг. Бу квадратлардан ҳосил бўлган саккиз учли юлдузнинг периметри ва юзини топинг.

**935.** Тўғри тўртбурчакнинг диагонали унинг бурчагини $m:n$ нисбатда бўлади. Тўртбурчак периметрининг диагональ узунлигига нисбатини топинг.

**936.** $ABCD$ тўғри тўртбурчакда қўшни томонларининг нисбати $\sqrt{2}$ ва $AB$ томоннинг ўртаси $E$ нуқта бўлсин. $DE$ билан $AC$ диагональ орасидаги бурчакни топинг.

**937.** Тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига учбурчакдан ташқарида квадрат ясалган. Агар учбурчак катетларининг йиғиндиси $l$ га тенг бўлса, учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан квадрат марказигача бўлган масофани топинг.

**938.** Катетлари $a$ ва $b$ бўлган тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузасига ташқи квадрат ясалган. Унинг диагоналлари кесишган нуқтаси учбурчакдаги тўғри бурчак учи билан бирлаштирилганда бу тўғри чизиқ гипотенуза билан кесишиб, гипотенузада ҳосил қилган кесмаларининг узунликларини топинг.

**939.** Квадратга бир учи квадрат билан умумий бўлган мунтазам учбурчак ички чизилган. Бу учбурчак юзининг квадрат юзига нисбатини топинг.

**940** Трапециянинг диагоналлари уни тўртта учбурчакка ажратади. Ён томонларига ёпишган учбурчакларнинг юзлари тенглигини исбот қилинг.

**941.** Трапециянинг диагоналлари уни тўртта учбурчакка ажратади. Асосларга ёпишган учбурчакларнинг юзлари $S_1$ ва $S_2$ бўлса, трапеция юзини топинг.

**942.** Диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлган тенг ёнли трапециянинг ўрта чизиғи $m$ га тенг. Унинг баландлигини топинг.

**943.** Асосларининг узунликлари $a$ ва $b$ $(a>b)$ бўлган трапеция диагоналлари ўрталарини туташтирувчи кесма узунлигини топинг.

**944.** Асосларининг узунликлари $a$ ва $b$ бўлган трапециянинг диагоналлари кесишган нуқтадан асосларга параллел тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг ён томонлар орасидаги кесмасининг узунлигини топинг.

**945.** Тенг ёнли трапециянинг диагонали унинг ўтмас бурчагини тенг иккига бўлади. Трапециянинг катта асоси унинг периметридан $a$ га кам, ўрта чизиғи $b$ га тенг бўлса, унинг кичик асосини топинг

**946.** Тўғри бурчакли трапеция диагонали уни бири томонининг узунлиги $a$ га тенг бўлган тенг томонли, иккинчиси тўғри бурчакли иккита учбурчакка ажратади. Трапеция ўрта чизиғини топинг.

**947.** Трапеция асосларининг узунликлари $a$ ва $b$ $(a > b)$ маълум. Трапеция ён томонларининг давомлари кесишган нуқтадан асосларига параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқнинг диагоналлар орқали ўтувчи тўғри чизиқлар орасидаги кесмаси узунлигини топинг.

**948.** Асослари $a$ ва $b$, баландлиги $h$ бўлган трапеция ён томонларининг давомлари кесишиб, унинг асоси билан ҳосил қилган учбурчак баландлигини топинг.

**949.** Трап ция асосларининг узунликлари $AB = a$ ва $CD = b$ га тенг. Трапециянинг диагоналлари $DAB$ ва $ABC$ бурчакларниг биссектрисаларидан иборат бўлса, трапеция юзини топинг.

**950.** Учбурчак томонларининг узунликлари 52, 56, 60. Катта томонига параллел қилиб ўтказилган кесувчи периметри 156 га тенг трапеция ажратади. Шу трапеция юзини топинг.

**951.** Тўғри бурчакли трапециянинг бурчакларидан бири 60°, бу бурчакка ёпишган асоси $a$, ён томони $c$ берилган. Трапеция юзини топинг.

**952.** Тенг ёнли трапециянинг диагоналлари ўзаро перпендикуляр бўлиб, унинг ўрта чизиғи $m$ га тенг. Трапеция юзини топинг.

**9 3.** Ички айлана чизилган тенг ёнли трапециянинг юзи $S$, баландлиги эса ён томонидан икки марта кичик бўлса, унга ички чизилган айлана радиусини топинг.

**954.** $ABCDEF$ мунтазам олтибурчакнинг томони $a$ га тенг Унинг $A$ учидан $CD$ томонининг ўртасигача масофани ҳисобланг.

**955.** Томони $a$ га тенг бўлган мунтазам $ABCDEF$ олтибурчакнинг $BC$ ва $CD$ томонларининг ўрталари $M$ ва $N$ бўлса, $M$ нуқтадан $AN$ кесманинг ўртаси булган $P$ нуқтагача масофани топинг.

**956.** Томони $a$ га тенг бўлган мунтазам олтибурчакнинг учидан ўтувчи тўғри чизиқ уни юзларининг нисбати 2:3 каби булган икки купбурчакка ажратади. Бу тўғри чизиқнинг мунтазам олти бурчакка тегишли кесмасининг узунлигини топинг.

## 34-§. АЙЛАНАГА ДОИР МАСАЛАЛАР

**957.** Айлананинг бир нуқтасидан ўзаро перпендикуляр иккита ватар ўтказилган. Бу ватарлар марказдан

6 см ва 10 см узоқликда бўлса, шу ватарлар узунликларини топинг.

**958.** $r$ радиусли айланага ташқи нуқтадан ўзаро перпендикуляр иккита ўринма ўтказилган. Уринмаларнинг узунликларини (берилган нуқтадан уриниш нуқтасигача масофани) топинг.

**959.** Айлана радиуси 5 см га тенг. Айлана марказидан 13 см наридаги нуқтадан айланага уринмалар ўтказилган. Уринмалар узунлигини ва улар орасидаги бурчакни топинг.

**960.** Айланадан 4 см наридаги нуқтадан айланага узунлиги 6 см уринма ўтказилган. Айлана радиусини топинг.

**961.** Айлана диаметрининг учлари айланага ўтказилган уринмадан 1,6 м ва 0,6 м узоқликда жойлашган бўлса, диаметр узунлигини топинг.

**962.** Айланадаги нуқтадан унинг диаметрига туширилган перпендикуляр бу диаметрни икки кесмага ажратади. Бу кесмаларнинг айирмаси 12 см, перпендикулярнинг узунлиги 8 см бўлса, диаметрни топинг.

**963.** Айланага учбурчак ички чизилган. Бу учбурчакнинг бир бурчаги 150°, шу бурчак қаршисидаги томони 10 см. Айлананинг радиусини топинг.

**964.** Айланадан ташқарида берилган нуқтадан айланага ўтказилган уринмаларнинг узунликлари тенглигини исбот қилинг.

**965.** Айланага ташқи чизилган тўғри бурчакли учбурчакнинг катетлари $a$ ва $b$ бўлса, айлана радиусини топинг.

**966.** Тўғри бурчакли учбурчакка айлана ички чизилган, агар учбурчак гипотенузаси $c$, катетларининг йиғиндиси $l$ берилган бўлса, айлана диаметрини топинг.

**967.** Тўғри бурчакли учбурчакка ташқи чизилган айлана радиусининг шу учбурчакка ички чизилган айлана радиусига нисбати 5:2 каби бўлса, учбурчак томонларининг нисбатини топинг.

**968.** Радиуси 24 см бўлган айланага тенг ёнли трапеция ташқи чизилган, унинг ён томони 50 см. Трапециянинг асосларини топинг.

**969.** Айланага ички чизилган тўртбурчак қарама-қарши бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенглигини исбот қилинг.

**970** Айланага ташқи чизилган тўртбурчакнинг қарама-қарши томонлари узунликларининг йиғиндиси тенг эканлигини исботланг.

**971.** Томонлари $a$ $b$, $c$ бўлган учбурчакка ички айлана чизилган. Айланага шундай уринма ўтказилганки, у учбурчакнинг биринчи икки томонлари билан кесишиб, учбурчакни тўртбурчак ва учбурчакдан иборат икки фигурага ажратган. Ҳосил бўлган учбурчак периметрини топинг.

**972.** $r$ радиусли айлана ташқарисида унинг марказидан $d$ масофада нуқта олинган. Шу нуқтадан айлана нуқталаригача бўлган энг катта ва энг кичик масофаларни топинг.

**973.** Айланага ички чизилган мунтазам учбурчак томони $a$ га тенг. Шу айланага ички чизилган квадрат томонини топинг.

**974.** Радиуси $R$ га тенг бўлган айланага ички чизилган мунтазам ўнбурчакнинг ва мунтазам бешбурчакнинг томонларини топинг.

**975.** Диаметри 1,4 м бўлган доиравий темир листдан томони 1 м квадрат ясаш мумкинми?

**976.** $r$ радиусли айлана ичига ўзаро уринувчи ва берилган айланага уринувчи 6 та тенг айлана чизилган. Шу айланаларнинг радиусларини топинг.

**977.** $r$ радиусли доирага мунтазам олтибурчак ички чизилган. Доиранинг мунтазам олтибурчакдан ташқаридаги қисмининг юзини топинг.

**978.** $r$ радиусли доирага ички чизилган мунтазам 12 бурчакнинг юзини топинг.

**979.** Радиуслари $R$ ва $r$ бўлган иккита кесишувчи доиралар марказлари орасидаги масофа $d$ га тенг. Улар кесишмасидан ҳосил бўлган умумий қисм юзини топинг.

**980.** Асоси $a$, унинг қаршисидаги бурчаги $\alpha$ бўлган учбурчакка айлана ички чизилган. Бу айлана маркази ва асоснинг учлари орқали ўтувчи иккинчи айлана чизилган. Бу айлананинг радиусини топинг.

**981.** Айланага ички чизилган $ABC$ учбурчакнинг томонлари $BC=2$, $AC=3$ ва $C$ учидаги бурчаги $60°$. Айлана марказидан ва учбурчакнинг $A$ ва $B$ учларидан ўтувчи айлананинг радиусини топинг.

**982.** $60°$ ли бурчакка ўзаро ташқи уринувчи икки айлана ички чизилган. Кичик айлана радиуси $r$ га тенг. Катта айлана радиусини топинг.

**983.** Маркази $O$ нуқтада, $R$ радиусли айлана берилган. Бу айлананинг шундай тўртта $A$, $B$, $C$, $D$ нуқталари олинганки, улардан тузилган $AC$ ва $BD$ нурлар айланадан ташқарида ётувчи $P$ нуқтада тўғри бурчак остида кесишади $P$ нуқтадан $AB$ ватарга туширилган перпендикулярнинг асоси $P_1$ учун $AB$ ватарда $OP_1 = P_1M$ нуқта олинган. $MP$ нинг узунлигини топинг.

984. $R$ радиусли айланага учидаги бурчаги $\alpha$ бўлган тенг ёнли учбурчак ички чизилган. Учбурчакнинг ён томонига ўтказилган баландлигининг узунлигини топинг

985. Айланага ички $ABC$ учбурчак чизилган. $B$ ва $C$ учларидаги бурчаклар $\beta$ ва $\gamma$ бўлса, $A$ нуқтада айланага ўтказилган уринма билан $BC$ томон орасидаги бурчакни топинг.

986. Радиуслари $R$ ва $r$ бўлган икки айлана ташқи уринади. Бу айланаларга ташқи умумий уринма ўтказилган. Айланаларнинг уриниш нуқтаси билан умумий уринманинг уриниш нуқталари бирлаштирилганда ҳосил бўлган учбурчакнинг томонларини топинг.

987. $R$ радиусли ярим доиранинг диаметрига мунтазам учбурчак ясалган. Бу учбурчакнинг ярим доирадан ташқаридаги қисмининг юзини топинг.

988. Ромбнинг диагоналлари $a$ ва $b$ га тенг. Унинг ҳар бир томонини диаметр қилиб ромб ичига ярим айланалар чизилган. Бу ярим айланалар ҳосил қилган япроқнинг юзини топинг.

989. Радиуси $R$ га тенг бўлган тўғри бурчакли сектор унинг ёйи учини марказ қилиб, $R$ радиусли ёй чизиш билан икки бўлакка ажратилган. Бўлаклардан кичигига ички чизилган доира юзини топинг.

990. $R$ радиусли доирага ўзаро ташқи уринувчи учта тенг айлана ички чизилган. Бу айланаларнинг радиусини топинг.

991. Радиуслари $r_1$, $r_2$, $r_3$ бўлган учта айлана бирбири билан ўзаро ташқи уринади. Уриниш нуқталари орқали ўтувчи айлананинг радиусини топинг.

992. Ярим айлананинг ўртаси диаметр учлари билан бирлаштирилганда ҳосил бўлган ватарларнинг ўрталаридан яна ватар ўтказилган ва у ўрта нуқталар ёрдамида 3 бўлакка бўлинган. Ватарнинг икки ён кесимларининг ҳар бири $c$ га тенг бўлса, ярим айлана радиусини топинг.

993. Айланага учбурчак ташқи чизилган. Айлананинг учбурчак томонларига параллел уринмалари ўтказилганда улар бу учбурчакдан учта кичик учбурчак-

лар ажратадилар. Агар бу учбурчакларга ички чизилган айланаларнинг радиуслари $r_1$, $r_2$, $r_3$ бўлса, катта айлана радиусини топинг.

**994.** $r$ радиусли доирада марказий бурчаги $60^\circ$ га тенг бўлган сегментнинг баландлигини топинг.

**995.** Доира сегментининг баландлиги $h$, асоси $a$ берилган. Доира радиусини топинг.

**996.** Баландлиги 6 дм бўлган мунтазам учбурчакка ташқи чизилган доирага тенгдош квадрат томонини топинг.

VIII боб

## ГЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ

**997.** $A$ нуқта $m$ тўғри чизиққа, $B$ нуқта $n$ тўғри чизиққа қарашли бўлиб, $m$, $n$ тўғри чизиқлар кесишади. $A$ нуқта $n$ тўғри чизиқда ётиши мумкинми?

**998.** Агар $AC = 9$ см, $CD=8$ см, $DB= 9$ см бўлса, $AD=CB$ эканлигини кўрсатинг.

**999.** Агар $\angle(ac)=20^\circ$, $\angle(cd)=25^\circ$, $\angle(bd)=20^\circ$ бўлса $\angle(ad)=\angle(cb)$ эканлигини кўрсатинг.

**1000** Текисликда бирор бурчак берилган. Фақат чизғичдан фойдаланиб, шу бурчакка тенг бурчак ясаш мумкинми?

**1001.** $\triangle MNP=\triangle ABC$, $MN=5$, $BC=7$, $\angle MNP=71^\circ$ бўлса, бу учбурчакларда берилганларга мос томонлар ва бурчакларни топинг.

**1002.** Учбурчакнинг энг катта томонига энг кичик баландлиги мос келишини кўрсатинг.

**1003.** Учбурчакнинг катта томонига кичик медианаси мос келишини исбот қилинг.

**1004.** Учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси $S(\Delta) = 2d$ эканлигини исбот қилинг.

**1005.** Мунтазам учбурчакнинг учта медианаси бир нуқтада кесишишини исботланг.

1006—1014 даги теоремаларни қайси аксиома ва теоремаларга таяниб исбот қилиш мумкин.

**1006.** $\triangle ABC$ ичида $M$ нуқта олинган. $(\widehat{ABC})<(\widehat{AMC})$ дир. Агар учбурчакнинг баландлиги унинг периметрини тенг иккига бўлса, бу учбурчак тенг ёнлидир.

**1007.** Тўртбурчак қарама-қарши томонларининг йиғиндиси бир-бирига тенг бўлса, у ҳолда уларнинг биссектрисалари бир нуқтада кесишади.

**1008.** Диагоналлари тенг бўлган трапеция тенг ёнлидир Бир тўғри чизиқда ётмаган учта нуқтадан битта ва фақат битта айлана ўтади.

**1009.** Учбурчакнинг ички бурчаклари йиғиндиси $2d$ га тенг. Тенг ёнли учбурчак медианаси шу учбурчак учун ҳам биссектриса, ҳам баландлик бўлади.

**1010.** Перпендикуляр оғмадан кичик.

**1011.** Учбурчакда катта томон қаршисида катта бурчак ётади.

**1012.** Бир тўғри чизиққа перпендикуляр бўлган икки тўғри чизиқ кесишмайди.

**1013.** Учбурчакнинг бирор учидан чиққан нур шу бурчак ичидан ўтса, бу нур шу бурчак қаршисидаги томонни кесади.

**1014.** Учбурчакнинг учта биссектрисаси битта нуқтада кесишади ва бу нуқта учбурчакнинг ички нуқтаси бўлади.

1015—1019 даги жумлалар бешинчи постулатга эквивалент эканлигини кўрсатинг.

**1015.** Учбаурчакнинг баландликлари доимо кесишади.

**1016.** Юзи етарлича катта бўлган учбурчак мавжуд.

**1017.** Айланага ички чизилган мунтазам олтибурчак томони шу айлана радиусига тенг.

**1018.** Бурчак ичида олинган нуқтадан шу бурчакнинг иккала томонини кесувчи тўғри чизиқ ўтказиш мумкин.

**1019.** Лобачевский аксиомасидан фойдаланиб 1020—1024 даги теоремаларни исботланг.

**1020.** Лобачевский текислигида учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° дан кам.

**1021.** Олдинги теореманинг Лобачевский аксиомасига эквивалент эканлигини кўрсатинг.

**1022.** Лобачевский текислигида учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси турли учбурчаклар учун турлидир.

**1023.** Ҳар қандай ўткир бурчакнинг бир вақтда бир томонига перпендикуляр бўлиб, иккинчи томонига параллел тўғри чизиқ мавжуд.

**1024.** Икки тўғри чизиқ билан учинчи тўғри чизиқ кесишиб, ҳосил қилинган мос бурчаклар тенг бўлса, бу тўғри чизиқлар узоқлашувчи бўлади.

**1025.** Айлана, эквидистан чизиқ, орицикл — бу уч чизиқнинг ҳақиқатан эгри чизиқ эканлигини исбот қилинг: уларнинг ҳар бирига қарашли ҳеч қандай уч нуқта битта тўғри чизиқда ёта олмайди.

**1026.** Евклид геометрияси учун А. В. Погорелов таклиф қилган аксиоматикада таърифсиз қабул қилинадиган объектлар ва уларни боғловчи муносабатлар нималардан иборат?

**1027.** Берилган аксиомалар системасида зидликнинг юз бермаслиги қандай исбот қилинади? Мисол келтиринг.

**1028.** Гильберт аксиомаларининг биринчи группаси қандай моделларда тўла бажарилади (тетраэдр, аналитик изоҳ-интерпретация).

**1029.** Пуанкаре томонидан Лобачевский геометрияси учун таклиф этилган модель нимадан дарак беради?

**1030.** Г. Вейль аксиоматикасидан ўрин олган ўлчам (размерность) аксиомаларини алгебра ва геометрия тилларида қандай ифода қилинади?

**1031.** 1) Лобачевский геометриясида параллел тўғри чизиқлар аксиомаси қандай киритилади?

2) Бу аксиоманинг мустақиллиги, яъни эркинлигини исботлашда қайси ғоялардан фойдаланилади?

**1032.** $ch\frac{c}{k} = ch\frac{a}{k} \cdot ch\frac{b}{k}$ тенглик Лобачевский геометриясида нимани ифода қилади?

**1033.** Узлуксизлик тушунчасини киритишда Дедекинд аксиомаси қандай роль ўйнайди? Унинг Архимед ва Кантор аксиомаларига эквивалентлиги қандай далилланади?

**1034.** Икки учбурчакнинг учала томон бўйича тенглигини Гильберт қандай исботланган?

**1035.** Лобачевский геометриясида ҳаракат тушунчаси қандай киритилади?

# ЖАВОБЛАР ВА КЎРСАТМАЛАР

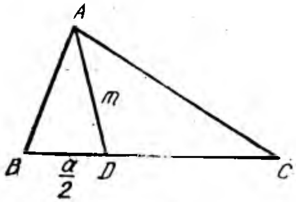
## I боб

**4.** Берилган нуқтани марказ, берилган кесмани радиус қилиб айлана чизинг.

5. Кесманинг ўрта перпендикулярини ўтказинг.

**8.** Аввал берилган радиус билан айлана чизинг.

**10.** Бундан олдинги масалага келтириб ечинг.




16-чизма.

**11.** 16- чизмадаги $\triangle ABD$ ёрдамчи фигура бўлади.

**12.** Берилган бурчакни ясанг ва берилган баландликларга тенг кесмаларни бурчак томонларига перпендикуляр қилиб жойлаштиринг.

**13.** Аввал ташқи чизилган айланани ясаб олинг.

**14.** $O$ нуқтадан $AB$ тўғри чизиққа туширилган перпендикулярнинг узунлиги учбурчакка ички чизилган айлана радиуси $r$ га тенг бўлишидан фойдаланинг.

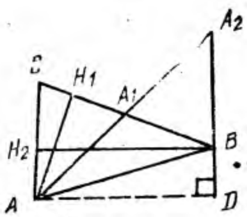
**17.** Бир катети берилган баландликка, гипотенузаси берилган медианага тенг бўлган тўғри бурчакли учбурчакни ясаб олинг.

**20.** $h_a$, $m_a$, $h_b$ берилган бўлсин. Агар $AA_2=2m_a$, $AD=h_b$ қилиб $\triangle AA_2D$ ни ясаб олсак, ундан $\triangle ABC$ га ўтиш мумкин: $(A,\ h_a)$ айланага $A_1$ дан ўтказилган уринма билан $A_2D$ га $A$ дан ўтказилган параллел кесишиб $C$ нуқта топилади (17- чизма).

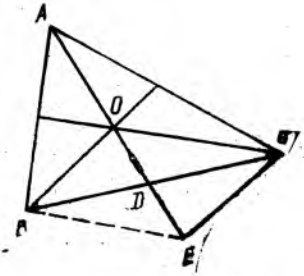
**21.** Медианаларнинг $\frac{2}{3}$ қисмлари ва учинчи томондан фойдаланиб, учала томони маълум бўлган ёрдамчи фигурани ясаб олишдан иш бошланг.

**22.** $OD=DE$ кесмани $AD$ медиана ётган тўғри чизиқда олсак, $OBEC$ параллелограмм ҳосил бўлади. $BO=EC$ бўлгани учун $OEC$ ёрдамчи фигурани ясаш мумкин (18- чизма).

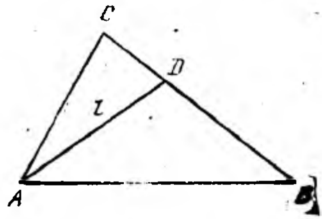
**23.** Аввал берилган радиусли айланани ясаб олинг.



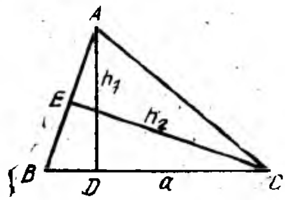

17-чизма.




18-чизма.




20-чизма.




19-чизма.

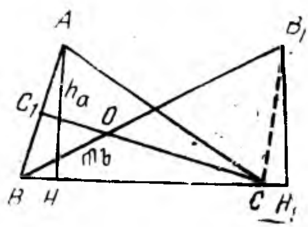
28. $ABD$ ёрдамчи фигура (бир томони ва бурчаклари бўйича)ни ясаб олинг (19-чизма).

30. $\triangle BCE$ ёрдамчи фигура бўлади (20- чизма).

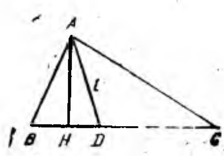
32. Учбурчак ўрта чизиғининг ҳоссасидан фойдаланинг.

33. Тўғри бурчак учидан гипотенузага ўтказилган медиана ташқи айлана радиусига тенглигидан фойдаланинг.

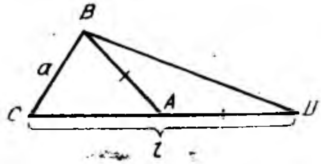
34. $h_a$, $m_b$, $m_c$ берилган бўлсин. У ҳолда 21-чизмада кўрсатилган $BB_1H$ ёрдамчи фигура бўлади: $BH=h_a$, $BB_1=2m_b$, $C_1O:OC=1:2$ дан $OC=\frac{2}{3}m_c$, $BO=\frac{12}{3}m_b$



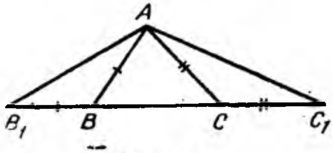

21-чизма.




22-чизма.



23-чизма.



24-чизма.

бўлгани учун $BB_1$ да $O$ нуқта ясалади ва $OC=\frac{2}{3}m_c$ дан фойдаланиб, $C$ топилади.

35. $\triangle ABH$ ёки $\triangle AHD$ ёрдамчи фигура бўлади (22-чизма).

36. $\triangle BCD$ ёрдамчи фигура бўлади (икки томони, улар орасида бурчаги маълум) (23-чизма).

37. $\triangle AB_1C_1$ ёрдамчи фигура бўлади. $\angle B_1$, $\angle C_1$ лар берилган бурчакларнинг ярмига тенг (24-чизма).

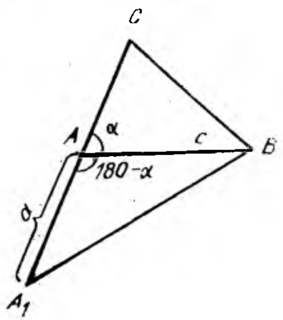
38. $\triangle AA_1B$ ёрдамчи фигура бўлади (25-чизма).

39. Катетларни тўғрилашдан фойдаланиб ёрдамчи фигура ҳосил қилинг.

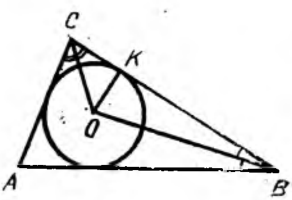
40. Берилмаган катетнинг давомига гипотенузани жойлаштиришдан фойдаланиб ёрдамчи фигура ҳосил қилинг.

41. Айланада берилган бурчакни қўйиб, учбурчакнинг битта томони узунлигини топиб олинг.

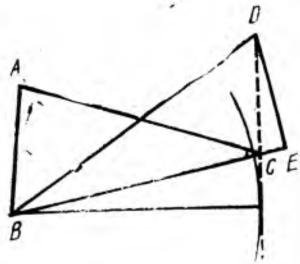
43. $\angle A$, $OC$, $OB$ лар берилган бўлсин (26-чизма). $\triangle OBC$ да $OC$ ва $OB$ берилган, $\angle BOC=180°-\left(\frac{\angle B}{2}+\frac{\angle C}{2}\right)=90°+\frac{\angle A}{2}$ бўлиб, бу учбурчакни ясаш мумкин



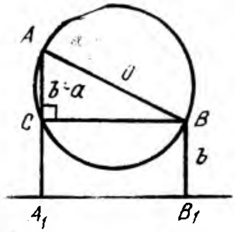
25-чизма.



26-чизма.




27-чизма.




28-чизма.

$O$ дан $OK \perp BC$ ўтказиб, $r = OK$ ни топамиз. $(O, OK)$ айланани чизиб унга $B$ ва $C$ нуқталардан уринмалар ўтказилса, улар кесишиб $A$ ҳосил бўлади.

**44.** $BD = 2m_b$, $DE = h_a$, $\angle E = 90°$ бўлган $\triangle BDE$ ёрдамчи фигура бўлади (27-чизма).

**49.** Параллелограмм томонларининг ўрталарини бирлаштиришдан ҳосил бўлган параллелограмм диагоналларидан фойдаланинг.

**55.** Изланаётган айлана маркази берилган айланаларнинг марказларидан тенг узоқликда ётади.

**58.** $AC$ нурда $AD = l$ қўйиб, $BD$ нинг ўрта перпендикулярини ўтказсак, у $AC$ билан $X$ нуқтада кесишади.

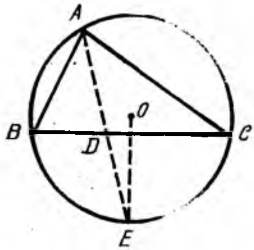
**59.** 28-чизмадаги $A_1B_1$ изланган тўғри чизиқ бўлса, кесмалар айирмасини кўрсатувчи $C$ нуқтани ясашдан изланган тўғри чизиққа ўтиш осон. Масаланинг иккинчи ечимини ҳам кўрсатинг.

**60.** Аввал берилган радиусли айланани чизиб олинг.

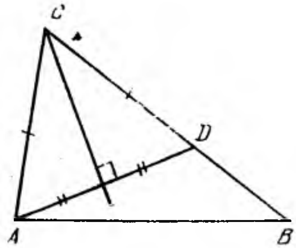
**63.** Айлана маркази $M$ нуқтадан $r = \frac{1}{2}\rho(a, b)$ масофада ётувчи нуқталар геометрик ўрни билан берилган параллел тўғри чизиқлардан тенг узоқлашган нуқталарнинг геометрик ўрнига тегишли.

**64.** Учбурчакнинг икки учи берилган бурчакнинг томонларидан берилган баландликлар қадар масофаларда ётган геометрик ўринларга тегишли.

**68.** Берилган кесма берилган бурчак остида кўринувчи нуқталар геометрик ўрни билан берилган кесманинг ўртасидан берилган медиана қадар узоқликда ётган нуқталар геометрик ўрнидан фойдаланинг.




29-чизма.

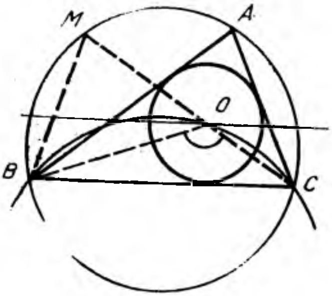



30-чизма.

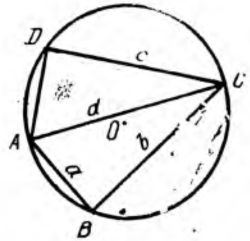
**71.** Учбурчакнинг $A$ учи берилган асос берилган бурчак остида кўринувчи нуқталар геометрик ўрни билан 29-чизмадаги $\overset{\frown}{BFC}$ нинг ўртаси $E$ ва берилган $D$ нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқнинг кесишган нуқтасидан иборат.

**74.** 30-чизмадаги $ABD$ ёрдамчи фигура бўлади, у $DB = l$, $\angle ADB = 180° - \frac{\angle A + \angle B}{2}$ лардан фойдаланиб ясалади.

**77.** Агар $A$ учидаги бурчаги, $R$ ва $r$ берилган деб олсак, $R$ радиусли айлананинг ихтиёрий нуқтасидан $\angle A$ га тенг бурчакни ясаш билан учбурчакнинг $BC$ томони маълум бўлиб қолади (31-чизма). $ABC$ учбурчакка ички чизилган айлана маркази $O_1$ $BC$ дан $r$ масофада ётган геометрик ўрин билан $BC$ кесма $\angle BO_1C$ остида кўринувчи геометрик ўрин кесишмасидан иборат: $\angle BO_1C = 180° - (\angle O_1BC + \angle O_1CB) = 180° - \left(\frac{\angle B}{2} + \frac{\angle C}{2}\right) = 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle A) = 90° + \frac{\angle A}{2}$.




31-чизма.




32-чизма.

**80.** $\triangle ABC$ ни ясаб, унга ташқи айлана чизинг (32-чизма).

**83.** Асоси ва учидаги бурчагидан фойдаланиб изланган учбурчакка ташқи чизилган айланани ясаш мумкин. Бу айланада $C$ нуқтадан чиққан ватарлар ўрталарининг геометрик ўрни $OC$ диаметрли айланадан иборат бўлгани учун бу айлана $(b, m_b)$ айлана билан $D$ нуқтада кесишади, $AC = 2DC$ (33-чизма).

**84.** Бир учидаги бурчаги $\frac{\angle A}{2}$, унга ёпишган томони $2p$, баландлиги $h_c$ бўлган ёрдамчи фигурани чизиб олинг.

**85.** 77-масаладан фойдаланиб ички чизилган айлана марказини ясанг.

**89.** $c$ ўқли симметрияда $S_c(a) = a'$ ни ясаб олинг.

**90.** $M$ нуқтани бурчакнинг томонларига нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг.

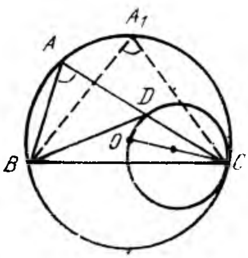
**91.** $a$ тўғри чизиққа нисбатан $A$ ни симметрик алмаштиришдан фойдаланинг.

**92.** $B$ ни $l$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг.

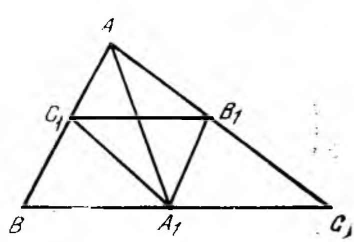
**93.** Берилган нуқталардан бирини қолган икки нуқтада учлари ётган кесманинг ўртасига нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг (34-чизма).

**94** Берилган нуқталардан бошқа ихтиёрий $K$ нуқта олиб, уни кетма-кет берилган нуқталарга нисбатан симметрик алмаштира борилса, охирги нуқтага нисбатан алмаштириш натижасида ҳосил бўлган $K_5$ билан $K$ нуқтани бирлаштиришдан ҳосил бўлган кесманинг ўртаси изланган бешбурчакнинг бир учи бўлади.

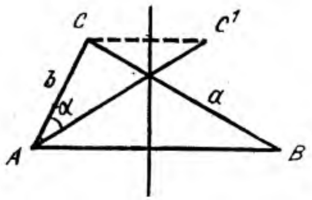
**95.** Берилган нуқтани берилган биссектрисалар ётган тўғри чизиқларга нисбатан кетма-кет симметрик алмаштира боришдан фойдаланинг.



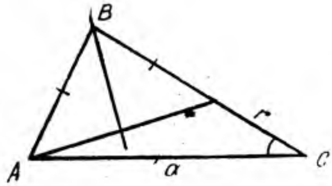
33-чизма.



34-чизма.




35-расм.




36-расм,

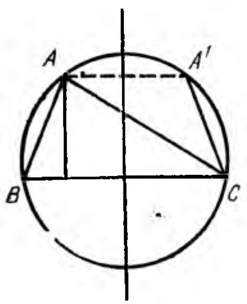
**96.** Берилган нуқталарни берилган марказга нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг.

**97.** Берилмаган томоннинг ўрта перпендикулярига нисбатан симметрик алмаштириш бажариб, берилган айирма бурчакни ҳосил қилишдан фойдаланинг. $\triangle ACC'$ ёрдамчи фигура ҳосил бўлади (35- чизма).

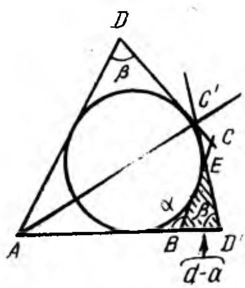
**98.** Айирмаси берилган томонлар орасидаги бурчакнинг биссектрисасига нисбатан кичик томонни акслантириб, айирма кесмани ҳосил қилишдан фойдаланинг (36- чизма)

**99.** Изланаётган учбурчакни асосининг ўрта перпендикулярига нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг. 37- чизмада $AA'C$ учбурчакни ёрдамчи фигура деб олиш мумкин.

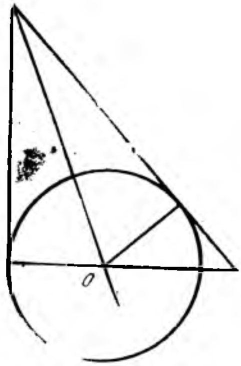
**100.** Таҳлил чизмасида берилган томонлар орасидаги бурчакнинг биссектрисасига нисбатан симметрик акслантириш бажариб, ёрдамчи $BED'$ учбурчакни ҳосил қилинг. $\triangle BED'$ да $\angle EBD' = 180° - \alpha$, $\angle BD'E = \beta$, $BD = d - a$ (38- чизма).



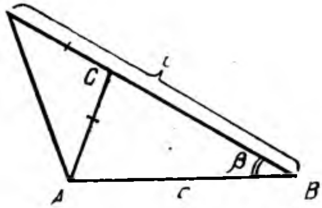

37-чизма.




38-чизма.




39-чизма.




40-чизма.

**101.** Берилган $a$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг.

**102.** $MN$ тўғри чизиққа нисбатан симметрик аксалантиришдан фойдаланинг.

**103.** Берилган учбурчакда изланаётган айлана маркази жойлашган катетга қарши ётган бурчакнинг биссектрисасига нисбатан симметрик алмаштиришдан фойдаланинг (39- чизма).

**104.** Берилган йиғиндини ҳосил қилиш учун $C$ уч атрофида $AC$ ни $BC$ томоннинг давоми билан устма-уст тушгунча буришдан фойдаланинг (40- чизма).

**105.** Берилган тўғри чизиқлардан бирини $M$ нуқта атрофида 60° га буришдан фойдаланинг.

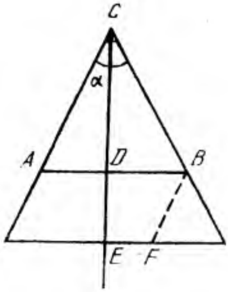
**106.** Тўғри чизиқлардан бирида квадратнинг бир учини иҳтиёрий танлаб бу нуқта атрофида 90° га буришдан фойдаланинг.

**109.** $AD$ медиананинг $D$ учи атрофида 180° га буришдан фойдаланинг.

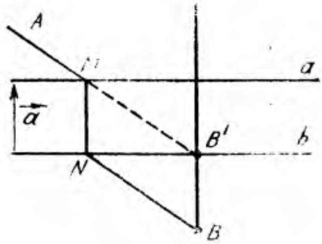
**113.** $O$ нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш бажариб, $M'$ ва $N'$ нуқталарни топинг ва $MN'$, $NM'$ тўғри чизиқларни $O$ нуқта атрофида 90° га буринг.

**114.** Берилган тўғри чизиқлардан бирини $O$ нуқта атрофида $\alpha$ бурчакка буришдан фойдаланинг.

**117.** $C$ бурчакнинг биссектрисасида олинган ихтиёрий $E$ нуқтадан биссектрисага перпендикуляр тўғри чизиқ $KE$ ўтказиб унда берилган асосга тенг бўлган $KF$ ни ҳосил қилинг ва $F$ нуқтани $B$ вазиятга ўтказувчи параллел кўчириш бажаринг (41- чизма).




41-чизма,




42-чизма.

**118.** Айланаларнинг бирини $MN$ йўналишда $a$ масофага параллел кўчиришдан фойдаланинг.

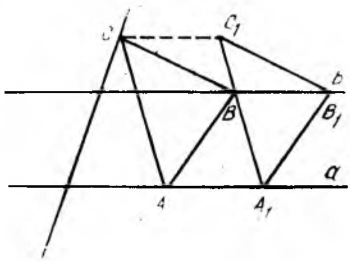
**119.** $B$ нуқтани $\vec{a}$ қадар параллел кўчиришдан фойдаланинг (42-чизма).

**120.** Томони $a$ га тенг бўлган, икки учи $a$ ва $b$ да ётган ихтиёрий $A_1B_1C_1$ учбурчак ясаб, унинг $C_1$ учини параллел тўғри чизиқлар йўналишида $C$ вазиятга ўтказувчи параллел кўчиришдан фойдаланинг (43-чизма).

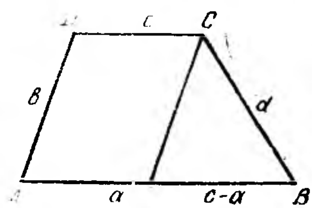
**121.** Трапециянинг $A$ учини $\overrightarrow{DC}$ қадар параллел кўчириб ҳосил қилинган $CEB$ учбурчакдан фойдаланинг (44-чизма).

**124.** $B$ учни $\overrightarrow{OA}$ қадар параллел кўчиришдан фойдаланиб ҳосил қилинган $OBB'$ учбурчакдан фойдаланинг (45-чизма).

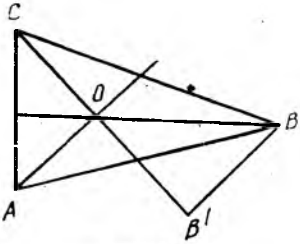
**125.** Берилган тўғри чизиқларга уринувчи ихтиёрий



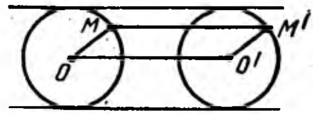

43-чизма.




44-чизма.




45-чизма.



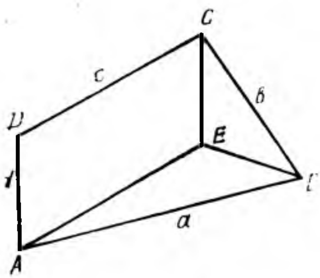

46-чизма.

айлана чизиб, $M$ ни $M'$ га ўтказувчи параллел кўчиришдан фойдаланинг (46- чизма).

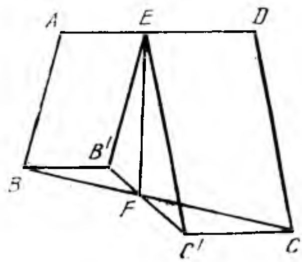
**128.** $A$ учини $\overrightarrow{DC}$ қадар параллел кўчиришдан фойдаланинг (47- чизма).

**129.** $AB$ ни $\overrightarrow{AE}$ қадар, $DC$ ни $\overrightarrow{DE}$ қадар параллел кўчириб $B'EC'$ учбурчак ҳосил қилиш мумкин, $EF$ унинг медианаси. Шу учбурчакни ёрдамчи фигура қилиб олинг (48- чизма).

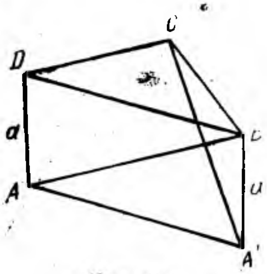
**130.** $AD$ ни $\overrightarrow{DB}$ қадар параллел кўчириб $BA'$ топилса, $A'BC$ учбурчакни ёрдамчи фигура қилиб олиш мумкин (49- чизма).



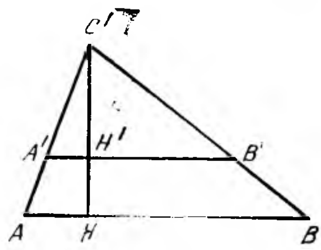

47-чизма



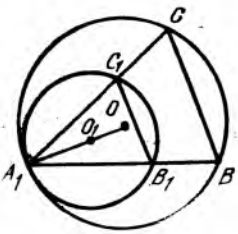

48-чизма.



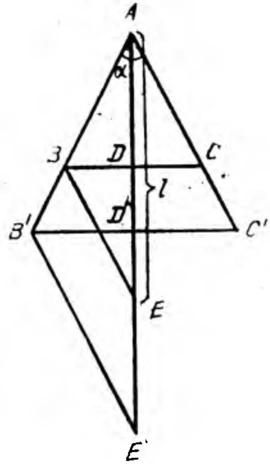

49-чизма.




50-чизма.




51-чизма.




52-чизма.

**131**. Бурчаклари берилган бурчакларга тенг бўлган ихтиёрий $A'B'C'$ учбурчак ясаб, унинг бирорта баландлигини ўтказинг, масалан, $C'H'$ ни олиб, унга $C'$ нуқтадан бошлаб берилган $CH$ баландликни қўйинг ва $H$ни $H'$ га ўтказувчи $C'$ марказли гомотетиядан фойдаланиб изланган учбурчакни ясанг (50- чизма).

**132**. Икки бурчагига кўра изланган учбурчакка ўхшаш бўлган $\triangle A_1B_1C_1$ ни ясаб, $A_1O_1$ да $R = A_1O$ ни қўйинг. $\overrightarrow{A_1O} = kA_1O_1$ гомотетияда $A_1$ ва $B_1$ нинг образини топинг. Изланган учбурчак $A_1BC$ бўлади (51-чизма).

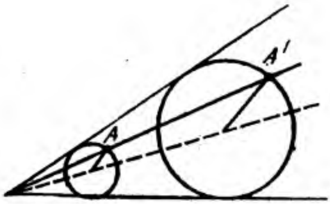
**133**. Томонларининг нисбатига кўра изланаётган учбурчакка ўхшаш учбурчак ясаб олинг, сўнгра берилган чизиқли элементга ясалган фигурадаги чизиқли элементни мос келтирувчи гомотетик алмаштириш бажаринг.

**135**. Катетининг гипотенузага нисбати берилган тўғри бурчакли учбурчакни ясаб олинг, кейин берилган томондан фойдаланиб гомотетик алмаштириш бажаринг.

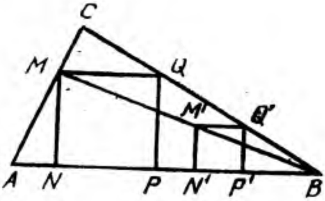
**140**. $A$ марказли, $k = \frac{l}{l'} = \frac{AD + BC}{AD' + B'C'} = \frac{AE}{AE'}$ коэффициентли гомотетиядан фойдаланинг (52- чизма).

**141**. Берилган бурчакларга кўра изланаётган учбурчакка ўхшаш учбурчакни ясаб олинг.

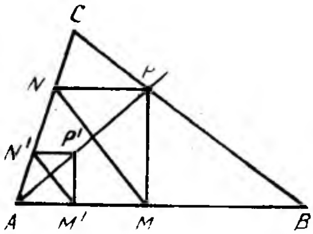
**145**. Бурчак томонларига уринувчи бирорта айланани ясаб олинг ва бу айланани бурчакнинг учини



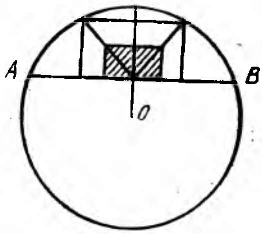

**53-чизма.**




**54-чизма.**




55-чизма.




56-чизма.

гомотетия маркази қилиб $A$ нуқтадан ўтувчи айланага гомотетик алмаштиринг (53- чизма).

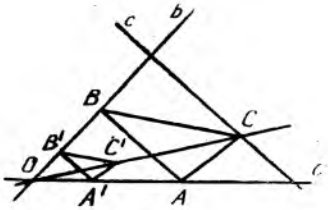
146. $ABC$ учбурчакда бир учи $BC$ да иккинчи учи $AB$ да ётган квадратлардан бирини чизиб олинг ва $B$ марказли $M$ ни $M'$ га ўтказувчи гомотетиядан фойдаланинг (54- чизма).

149. Икки учи учбурчакнинг икки томонида ётган, изланган учбурчакка ўхшаш учбурчакни ёрдамчи фигура қилиб олинг (55- чизма).

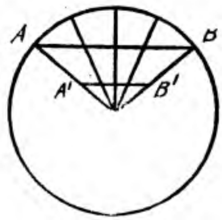
150 Сегментнинг симметрия ўқига нисбатан симметрик жойлашган, икки учи сегмент ватарида ётувчи ихтиёрий квадратни ёрдамчи фигура қилиб олинг ва уни ватарнинг ўртасига нисбатан гомотетик алмаштиришдан фойдаланинг (56- чизма).

155. Учлари бу тўғри чизиқларнинг иккитасида ётувчи мунтазам учбурчакни олинг ва уни $O$ нуқтага нисбатан гомотетик алмаштиринг (57- чизма).

157. Берилган радиуслар орасидаги бурчакнинг биссектрисасига нисбатан учта тенг бўлакка бўлинган ихтиёрий $AB$ кесма олинг ва уни айлана марказига нисбатан гомотетик алмаштиришдан фойдаланинг (58-чизма).




57-чизма.




58-чизма.

**159.** 1) $y=\frac{ab}{d}$ ни, сўнгра $x=\frac{yc}{l}$ ни ясанг;

2) аввал $y=\sqrt{bc}$ ни ясаб олинг;

3) $x=\frac{a^3+b^3}{a^2}=a+\frac{b^3}{a^2}$ аввал $y=\frac{b^3}{a^2}$ ни ясаб олинг;

4) $x=\sqrt{(2l)^2+l^2}$ ифодага келтиринг, $l$ — бирлик кесма.

**161.** 1) 59-чизмага қаранг.

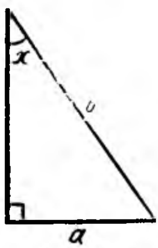
3) $y=\frac{a^2}{b}$ кесмани ясаб олинг.

4) $\cos x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}=\frac{a-\frac{b^2}{a}}{a+\frac{b^2}{a}}$ да аввал $y=\frac{b^2}{a}$ кесмани ясаб олинг.

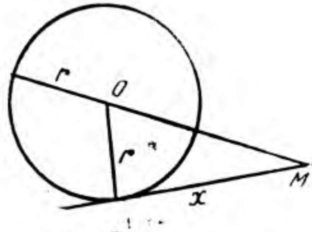
**162.** $ax=bc$ тенгликда $x=\frac{bc}{a}$ кесма ясаб олинг.

**163.** $x=\sqrt{ab}$ кесмани ясашдан фойдаланинг.

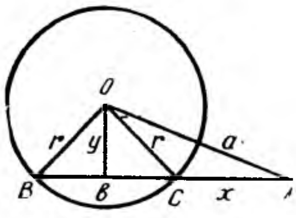
**164.** $x^2=ab+cd$ учун $x=\sqrt{(\sqrt{ab})^2+(\sqrt{cd})^2}$ бўлиб, $y=\sqrt{ab}$, $z=\sqrt{cd}$ кесмаларни ясаб олинг.



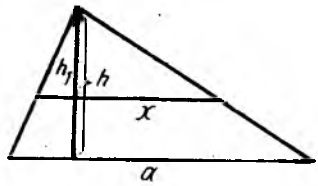

59-чизма.




60-чизма.




61-чизма.




62-чизма.

**167.** $OM + r = 2x$, $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ лардан $x$ топилади: $x = \frac{4}{3}r$. $N$ нуқтадан ўтказилган уринмада $x$ кесмани $N$ нуқтадан бошлаб ясанг (60-чизма).

**168.** $y = \sqrt{r^2 - \frac{b^2}{4}}$ (1), $y = \sqrt{a^2 - \left(\frac{b}{2} + x\right)^2}$ (2). (1) ва (2) дан $x$ ни топинг (61-чизма).

**169.** $\frac{a}{x} = \frac{h}{h_1}$ (1), $xh_1 = \frac{1}{2}ah$, $\frac{a}{2x} = \frac{h_1}{h}$. (2) (1) ва (2) дан $x$ ни топинг (62-чизма).

**170.** $\begin{cases} xy = m^2, \\ x^2 + y^2 = l^2 \end{cases}$ система ечимларини топинг.

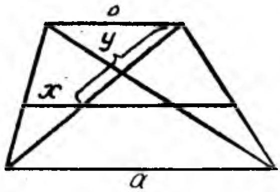
**172.** $\frac{b}{x} = \frac{d}{d-y}$ (1), $d$ — трапеция диагонали, $\frac{a}{x} = \frac{d}{y}$ (2) дан $y = \frac{2xd}{a}$ ни (1) га қўйиб, $x$ ни топамиз: $x = \frac{ab}{a + 2b}$ (63-чизма).

**173.** Айланаларнинг радиуслари $R_1, R_2, R_3, \ldots, R_k, \ldots$ бўлсин. $2R_2^2 = R_1^2$, $R_2^2 = \frac{R_1^2}{2}$; $2R_3^2 = R_2^2$, $R_3^2 = \frac{R_1^2}{2^2}$;

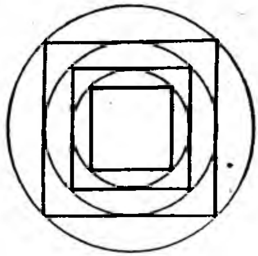
$R_4^2 = \frac{R_1^2}{2^3}$; ...; $R_k^2 = \frac{R_1^2}{2^{k-1}}$; ...; $S = \pi R^2 = S_1 + S_2 + \ldots + S_k + \ldots = \pi R_1^2\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^k} + \ldots\right) = \pi R_1^2 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \pi R_1^2 \cdot \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\pi R_1^2$; $R^2 = 2R_1^2$.

$R = R_1\sqrt{2}$ кесма ясалади (64-чизма).

**174** Косинуслар теоремаси ва биссектриса хоссасидан фойдаланиб, $\cos\frac{A}{2} = \frac{l(b+c)}{2bc}$ ни топинг. Бу бур-




63-чизма.



64-чизма.

чакни ясаш учун $y = \frac{l(b+c)}{2b}$ ни ясаб олиб, ундан $\cos\frac{A}{2} = \frac{y}{c}$ ни ясашга ўтиш мумкин (65-чизма).

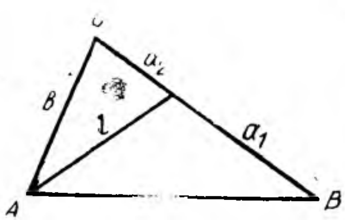
**175.** $AB = c$ кесма тўғри бурчак остида кўринадиган айланани ясанг ва унда $FD \perp AB$ ўтказинг. $\triangle FCD \sim \triangle OKD$, $KD = x$ деб олсак, $\frac{r}{x} = \frac{l+x}{2r}$, бундан $x = \sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 + (r\sqrt{2})^2} - \frac{l}{2}$ (66-чизма), $x$ кесмани ясаш билан $C$ учни топиш мумкин.

**176.** $A(1:1)$, $B(-2:1)$, $C(0:1)$, $D\left(-\frac{2}{3}:1\right)$.

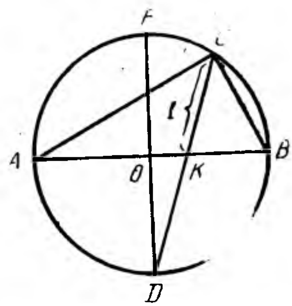
**177.** $M_x\,(1:0)$.

**178.** $a' \in S$, $a' \parallel a$.

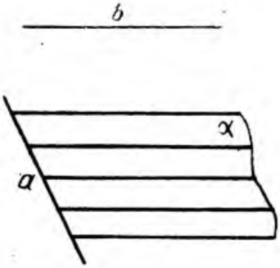
**180.** Фараз қилайлик, $A_\infty$ бирор $a$ тўғри чизиқнинг хос эмас нуқтаси бўлсин. У ҳолда $A_\infty B$ тўғри чизиқ $B$ дан $a$ га параллел қилиб ўтказилган тўғри чизиқ бўлади Агар $A_\infty$ ва $B_\infty$ хос эмас нуқталар бўлса, у



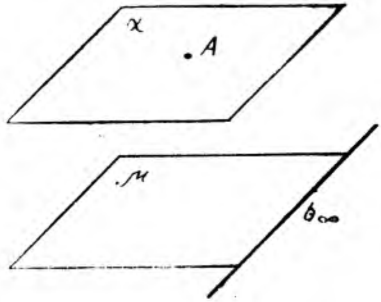

65-чизма.




66-чизма.




67-чизма.




68-чизма.

ҳолда изланган тўғри чизиқ хос эмас тўғри чизиқ бўлади.

**181.** $A(1)$, $B\left(\frac{2}{3}\right)$, $C\left(\frac{3}{5}\right)$, $D(\infty)$, $E(0)$.

**183.** $A(2:5:1)$, $B(-3:1:1)$, $C(2:-1:1)$, $E(1:0:1)$, $O(0:0:1)$.

**184.** а) $2x_1+3x_2-x_3=0$; б) $x_1+x_2-5x_3=0$;
в) $3x_1-x_2+2x_3=0$; г) $x_1=0$; д) $x_2=0$.

**185.** $x_3=0$.

**186.** $(5:3:0)$.

**187.** а) $x_1-2x_2-x_3=0$; б) $9x_1+3x_2-7x_3=0$;
в) $x_3=0$; г) $2x_1+5x_2+4x_3=0$; д) $x_1+x_3=0$.

188. $(1:1:-3)$.

189 $A_\infty$ бирор $b$ тўғри чизиқнинг хос эмас нуқтаси бўлсин. У ҳолда изланган текислик $a$ орқали ўтиб, $b$ тўғри чизиққа параллел текислик бўлади. Бундай текислик ягонадир (67- чизма).

**190.** $b_\infty$ бирор текисликнинг хос эмас тўғри чизиғи бўлсин. У ҳолда $A\in b_\infty$, яъни $A\in\bar{\mu}$. Изланган текислик $A$ дан ўтиб $\mu$ га параллел бўлган $\alpha$ текислик бўлади. Бундай текислик ягонадир (68- чизма).

**191.** Берилган нуқталар бир тўғри чизиққа қарашли бўлмаса, у ҳолда изланган текислик хос эмас текислик бўлади. У фазода ягонадир.

**192.** $A_\infty$ нуқта $a$ **тўғри** чизиқнинг хос эмас нуқтаси бўлсин. У ҳолда $b$ ва $c$ тўғри чизиқлар орқали $a$ тўғри чизиққа параллел қилиб $\beta$ ва $\gamma$ текисликларни ўтказамиз. У ҳолда бу текисликларнинг кесишган чизиғи $d \parallel a$ изланган тўғри чизиқ бўлади (69- чизма).

193. $4x_1+3x_2-2x_3=0$.

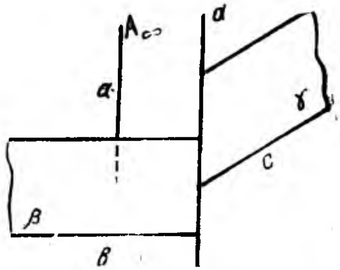
194. $(-5:4:6)$.

195. $x_1-x_2-x_3=0$.

196. $6x_1-3x_2-4x_3=0$.

197. $x_3=0$.

198. $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}=0$.



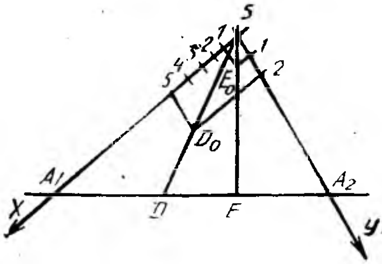

69-чизма.

200. Коллинеар.

201. Коллинеар эмас.

202. $AA'$ билан $BB'$ нинг кесишган $(2:1:0)$ нуқтаси $CC': x_1-2x_2+$ $+14x_3=0$ га қарашли.

204. Аффин координаталар системасини 70- чизмада кўрсатилгандек қилиб танлаб оламиз. Мисол тариқасида $D(5:2)$ нуқтани ясаш учун танлаб олинган аффин координаталар системасига нисбатан $D_0(5, 2)$ ни ясаймиз. У ҳолда $SD_0 \cap S=D$ изланган нуқта бўлади.




70-чизма.

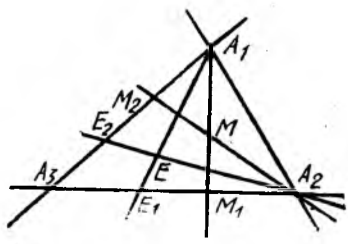
205. $\overline{d}$ тўғри чизиқ билан $S$ марказли даста орасида ўрнатилган перспектив мосликда $E_\infty \in \overline{d}$ нуқтага $S$ нинг $d_0 \parallel \overline{d}$ тўғри чизиғи мос келади.

206. $X_\infty(-1:1)$.

210. $R=\{A_1, A_2, A_3, E\}$ берилган бўлса, $M(x_1:$ $:x_2:x_3)$ нуқтани ясаш учун (71- чизмада) кўрсатилгандек, $A_1A_2$ кесмада, $M_2(x_1:$ $:0:x_3)$, $A_2A_3$ да $M_1(0:$ $:x_2:x_3)$ нуқталарни ясаб оламиз. У ҳолда $A_2M_2 \cap$ $\cap A_1M_1=M$ изланган нуқта бўлади (71- чизма).

211. $A_1'(0:1:1)$, $A_2'(1:$ $:0:1)$, $A_3'(1:1:0)$.

212. Бу тўғри чизиқни ясаш учун унинг коорди-




71-чизма.

наталар системасининг ихтиёрий икки координата чизиқлари билан кесишган нуқтасини топиш керак.

213. а) $A(0:1)$; $B(1:-1)$, $C(4:5)$.
б) $D(1:-1)$.

216. а) $\rho x_1' = x_1 - x_3$, $\rho x_2' = x_1 - x_2$, $\rho x_3' = x_1$;
б) $\rho x_1' = x_1 + 2x_2$, $\rho x_2' = x_2$, $\rho x_3' = x_1 + x_2$;
в) $\rho x_1' = -x_1 + 2x_2$, $\rho x_2' = x_2$, $\rho x_3' = x_1 + x_2$.

217. а) $\rho x_1 = 3x_1' - 4x_2'$, $\rho x_2' = -2x_1' + 3x_2'$;
б) $A_1'(4:3)$, $A_2'(3:2)$, $E'(7:5)$;
в) $A_1^*(-4:3)$, $A_2^*(3:-2)$, $E^*(-1:1)$.

218. $P'(-2)$, $A'(\infty)$.

219. а) $A'(3:3:1)$; б) $B^*(8:-2:3)$;
в) $l': 4x_1 + x_2 - 9x_3 = 0$; г) $m^*: x_1 + 3x_2 + x_3 = 0$.

220. а) $(1:1:1)$ ва $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ тўғри чизиқ;
б) $(0:0:1)$ ва $x_1 - 2x_3 = 0$ тўғри чизиқ;
в) $(1:1:0)$ ва $6x_1 - x_2 = 0$ тўғри чизиқ.

221. $A_1'A_2': 2x_1 - x_2 - 7x_3 = 0$; $l^*: 4x_1 - x_2 - 43x_3 = 0$.

222. а) $A_1'A_2': x_1 + x_2 - x_3 = 0$; $A_1^*A_2^*: x_1 - x_2 - x_3 = 0$;
б) $M^*(-1:2:-1)$.

223. а) $(1:-1)$ ва $(1:1)$; б) $(1:-1)$ ва $(1:2)$;
в) $(1:1)$ ва $(1:-1)$.

224. а) $\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 - x_2, \\ \rho x_2' = x_1 - 2x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho x_1' = 3x_1 + 2x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 + 3x_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1 - x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 - x_2. \end{cases}$

225. а) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + 2x_2, \\ \rho x_2' = 2x_1 - x_2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 - 4x_2, \\ \rho x_2' = x_1 - 2x_2; \end{cases}$

в) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + x_2, \\ \rho x_2' = 5x_1 - x_2. \end{cases}$

226. а) гиперболик; б) параболик; в) эллиптик инволюция.

227. Агар $|a|$ 2 бўлса, гиперболик, агар $|a| < 2$ бўлса, эллиптик инволюция бўлади.

**228.** а) $\begin{cases} \rho x_1' = 2x_1 - x_2 + 2x_3, \\ \rho x_2' = 5x_1 - 3x_2 + 3x_3, \\ \rho x_3' = -x_1 - 2x_3; \end{cases}$

б) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1 + x_2 + x_3, \\ \rho x_2' = x_1 - x_2, \\ \rho x_3' = 2x_1 + x_3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} \rho x_1' = x_1, \\ \rho x_2' = x_2, \\ \rho x_3' = x_1 - x_3. \end{cases}$

**229.** Текисликдаги проектив алмаштириш тўрт жуфт мос нуқталар билан ягона аниқланади (228- масала). Берилган нуқталар уч жуфт бўлгани учун бундай алмаштиришлар чексиз кўп бўлади.

**230.** Бунинг учун ихтиёрий равишда $A$, $B \in d$, $C$, $D \in g$ олиб, уларни $A'$, $B' \in d'$, $C'$, $D' \in g'$ нуқталарга проектив алмаштирамиз. Бундай алмаштириш ягонадир. Лекин $A$, $B$, $C$, $D$ нуқталарни ихтиёрий танлаб олганимиз сабабли, берилган тўғри чизиқларни алмаштирувчи проектив алмаштириш чексиз кўпдир.

**231.** Бундай алмаштиришлар чексиз кўпдир. Шулардан бири:

$$x_1' = x_3, \quad x_3' = x_2, \quad x_3' = x_1.$$

**232.** $x_1' = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3$, $x_2' = x_2$, $x_3' = x_3$.

**233** $\rho x_1' = x_2$, $\rho x_2' = x_2 - x_3$, $\rho x_3' = -x_1 + x_2$.

**234.** а) параболик гомология, чунки алмаштириш чексиз кўп қўзғалмас нуқталарга эга бўлиб, уларнинг хаммаси битта $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ тўғри чизиқда ётади $S \in s$;

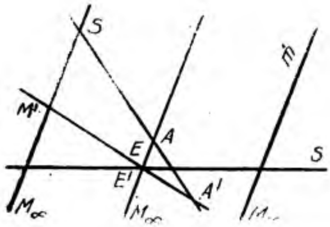
б) гиперболик гомология, чунки алмаштириш $S(1:1:1)$ қўзғалмас нуқта ва $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ қўзғалмас $S$ тўғри чизиққа эга бўлиб, $S$ нуқта $s$ тўғри чизиқда ётмайди;

в) коллинеация битта қўзғалмас нуқтага эга.

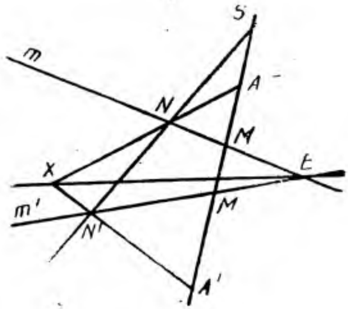
**235.** Бунинг учун проектив репернинг $A_1$ нуқтасини қўзғалмас нуқтада, $A_2$ ва $A_3$ нуқтасини қўзғалмас тўғри чизиқда олиш керак.

**236.** Бу ҳолда $A_1$ ни қўзғалмас нуқтада, $A_2$ ни қўзғалмас тўғри чизиқда олиш керак.

**237.** $M_\infty$ га мос $M'$ ни топиш усули 72- чизмада кўрсатилган. $S$ нуқтадан $m$ га параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. $M_\infty$ шу тўгри чизиққа қарашли бўлади. $A$ ва $M_\infty$ орқали $AM_\infty = AE$ тўғри чизиқни ўтказамиз. $AE$ га $A'E$ тўғри чизиқ мос келади. Бу тўғри чизиқ $SM_\infty$ ни $M'$ нуқтада кесади. Бу изланган нуқтадир.




72-чизма.




73-чизма.

**238.** $x' = 4x - 4y;\ y' = x + y.$

**239.** $x' = \frac{x-1}{x+1};\quad y' = \frac{y}{1+x}.$

**240.** $M'$ ни топиш усули 73-чизмада кўрсатилган. Бунинг учун $M$ дан ўтувчи ихтиёрий $m$ нинг образи $m'$ ни ясайлик. У ҳолда $M' = m' \cap AA'$.

**241.** а) тўғри чизиқлар дастаси; б) биринчи тартибли қатор; в) текисликлар дастаси — бир нуқтага қарашли бўлган текисликлар тўплами; биринчи тартибли қатор.

**242.** а) иккита турли $a$, $b$ тўғри чизиқлар битта ва фақат битта тўғри чизиққа қарашлидир;

б) битта нуқтага қарашли бўлмаган учта тўғри чизиқ мавжуддир;

**243.** а) ихтиёрий нуқтадан ўтувчи бир тўғри чизиққа қарашли бўлмаган учта текислик мавжуддир;

б) ҳар қандай тўғри чизиққа қарашли бўлган камида иккита нуқта мавжуддир;

в) учёқлик.

**244.** $\triangle ABC$ га мос келувчи фигура учёқлик бўлади. $\triangle A_0B_0C_0$ га ҳам учёқлик мос келади, лекин у биринчи учёқликнинг ичида бўлади. $\triangle ABC$ қарашли бўлган текисликка учёқликнинг учи $S$ мос келади.

**247.** Бу нуқталар коллинеар бўлиши учун $AP$, $BD$, $CO$ тўғри чизиқлар бир нуқтадан ўтиши керак. $AP: x_1 + x_2 - 5x_3 = 0$; $BD: 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 0$; $CO: x_1 + x_2 - 7x_3 = 0$ ва $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \\ 1 & 1 & -7 \end{vmatrix} \neq 0$. Демак, бу нуқталар коллинеар эмас.

248. Бўлади, чунки $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ тўғри чизиқлар бир нуқтадан ўтади.

249 $\triangle ABC$ ва $\triangle A_1B_1C_1$ Дезарг учбурчакларидир. Бу ерда $A_1$, $B_1$, $C_1$ — медианаларнинг иккинчи учларидир. Шу сабабли $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ тўғри чизиқлар бир нуқтадан ўтади, яъни медианалар бир нуқтада кесишади.

250. $\triangle BFQ$ ва $\triangle DEH$ Дезарг учбурчакларидир. Шунинг учун $EF$, $QH$, $BD$ тўғри чизиқлар бир нуқтада кесишади.

252. $\triangle DMN$ ва $\triangle CPQ$ лар учун Дезарг теоремасини қўлланг.

257. $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ Дезарг учбурчакларидир. Шу сабабли $AA_1$, $BB_1$, $CC_1$ тўғри чизиқлар кесишади. Агар кесишиш нуқтаси хос эмас бўлса, у ҳолда улар ўзаро параллел бўлади.

258. $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$ Дезарг учбурчакларидир. Шу сабабли $AC \cap A_1C_1$, $AB \cap A_1B_1$, $BC \cap B_1C_1$ нуқталар бир тўғри чизиқда ётади. Берилганларга кўра бу тўғри чизиқ текисликнинг хос эмас тўғри чизиғидан иборат. Демак, $BC \parallel B_1C_1$.

260. $A(\infty)$, $B(0)$, $C(1)$, $D(\lambda)$.

261. $\lim\limits_{D \to \infty}(ABD) = 1$ тенгликдан фойдаланинг.

262 Тўғри нуқтанинг мураккаб нисбатининг таърифидан фойдаланинг.

265. $(ABCD) = \dfrac{\xi_3 - \xi_1}{\xi_3 - \xi_2} : \dfrac{\xi_4 - \xi_1}{\xi_4 - \xi_2}$.

266. $$(ABCD) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}} : \frac{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ d_1 & d_2 \end{vmatrix}}.$$

268. Кўрсатма: дастани $x = 1$ тўғри чизиқ билан кесиб, тўғри чизиқда $A_1(1, K_1)$, $A_2(1, K_2)$, $A_3(1 : K_3)$, $A_4(1 : K_4)$ нуқталарни ҳосил қилинг. $(ABCD) = (abcd)$ тенгликдан фойдаланинг. $(a_1a_2a_3a_4) = \dfrac{K_3 - K_1}{K_3 - K_2} : \dfrac{K_4 - K_1}{K_4 - K_2}$.

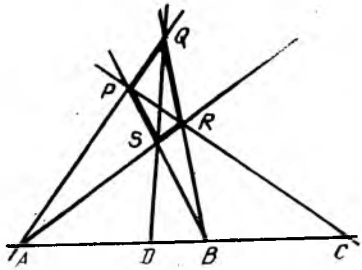
269. $C = A + B$, $D = 2A + B$ бўлганлиги сабабли $(ABCD) = 2$.

270. а) $(abcd) = 1/2$; б) $(abcd) = 6/5$.

272. 96- масаланинг шартидан фойдаланинг.

273. $(ABMX_\infty) = -1$.

274. $(ABCD) = -1$ эканлигидан фойдаланинг.




74- чизма.

**275.** $E_3$, $M_3$ нуқталарнинг координаталарини топиб, 266- масаладан фойдаланинг.

**276.** Берилган дастани бирор $S$ тўғри чизиқ билан кесиб, $A$, $B$, $C$ нуқталарни топинг. $(ABCD)=-1$ шартни бажарадиган $D$ нуқтани ясаб, у орқали берилган тўғри чизиқларга параллел тўғри чизиқ ўтказинг.

**277.** $D$ нуқтани ясаш усули 74- чизмада кўрсатилган.

**278.** Дастани $s$ тўғри чизиқ билан кесиб, унда $A$, $B$, $C$ нуқталарни ҳосил қилинг. Сўнгра $(ABCD)=-1$ шартни бажарадиган $D$ нуқтани ясанг (277- масала). $SD=d$ изланган тўғри чизиқ бўлади.

**279.** $\frac{x_3-x_1}{x_3-x_2}+\frac{x_4-x_1}{x_4-x_2}=0.$

**280.** Ҳа.

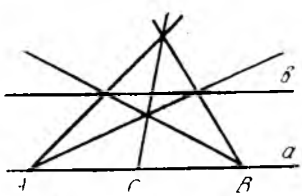
**281.** $AB$ кесманинг ўртаси $C$ ни ясаш усули 75- чизмада кўрсатилган.

**282.** $c$ тўғри чизиқни ясаш усули 76- чизмада кўрсатилган.

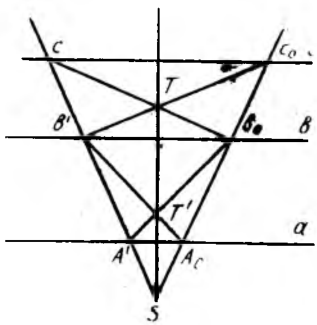
**283.** $ABCD$ параллелограмм ва унинг диагоналлари биргаликда тўлиқ тўртбурчак бўлади. Шундан фойдаланинг.

**284.** 282- масала шартидан фойдаланинг.

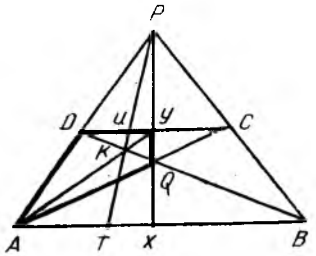
**285.** 280- масаладан фойдаланинг.



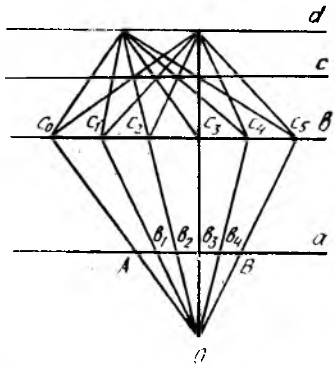

75-чизма.




76- чизма,




77-чизма.




78- чизма.

**286.** $ABCD$ трапеция диагоналлари билан биргаликда тўлиқ тўртбурчак деб қаранг.

**287.** Агар $a \cap b = D_\infty$ бўлса, изланаётган $x$ нуқта $(AXBD_\infty) = -1$ шартни бажаради.

**288.** $d \perp c$ бўлади.

**289.** $(acbd) = -1$ шартни бажарадиган $d$ тўғри чизиқни ясанг.

**290.** $u = KP \cap DC$ бўлсин (77- чизма). У ҳолда $ADYQ$ тўлиқ тўртбурчакда $(DYCU) = -1$, $Y - CD$ кесмани ўртаси. 286- масалага қаранг.

**291.** 290- масала шартидан фойдаланинг.

**292.** Кесмани 5 га бўлиш 78- чизмада кўрсатилган.

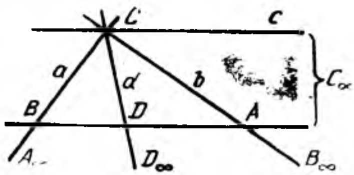
**293.** Кўрсатма. $C(a, b, c, \ldots) \overline{\wedge} S(B, A, C_\infty, \ldots)$

$$(BAC_\infty D) = (ABDC_\infty) = (ABD) = -1.$$

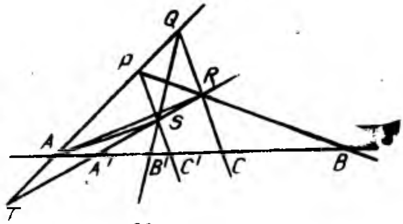
Демак, $D - AB$ нинг ўртаси (79- чизма). $D_\infty - CD$ медиананинг хос эмас нуқтасидан иборат.

**294** $MD$ тўғри чизиқни ясаш учун, $M$ нуқтадан $K$, $l$ тўғри чизиқларни мос равишда $K$, $L$ нуқталарда кесиб ўтадиган тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқда $(KLFG) = -1$ шартни бажарадиган $G$ ни ясаймиз. $AG \cap l = C$, $AL \cap CK = B$ бўлсин. У ҳолда $MB$ изланган тўғри чизиқ бўлади ва у $D$ нуқтадан ўтади (исбот қилинг).

**295.** $PQRS$ тўлиқ тўртбурчак томонларини $s$ тўғри чизиқ билан кесиб, $A$, $A'$, $B$, $B'$, $C$, $C'$ нуқталарни хосил қиламиз (80- чизма).




79-чизма.




80- чизма.

$$S(A, A', B, C, \ldots) \overset{R}{\wedge} PQ(A, T, P, Q \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (AA'BC) = (ATPQ).$$

$$PQ(A, T, P, Q) \overset{S}{\overline{\wedge}} S(A, A', C', B', \ldots) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (ATPQ) = (AA'C'B').$$

Бундан $(AA'BC) = (AA'C'B') = (A'AB'C')$.

296. $a_{12}x_1x_2 + a_{13}x_1x_3 + a_{23}x_2x_3 = 0$.

297. а) $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$ — овал чизиқ;

б) $x_1^2 - x_2^2 = 0$ — иккита тўғри чизиқ;

в) $x_2^2 - x_3^2 = 0$ — иккита тўғри чизиқ.

298. $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$ орқали берилган тенгламани $a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0$, кўринишга келтирилади, чунки $x \neq 0$.

299. $R = \{A_1, A_2, A_3, E\}$ ни $A_1 = S_1$, $A_2 = S_2$ нуқталарда танлаб олинг.

301. а) $20x^2 + 10x_1x_2 - 3x_2x_3 = 0$.

302. 299- масала шартидан фойдаланинг.

304. 299- масала шартидан фойдаланинг. Мос фигура — иккинчи тартибли даста дейилади.

305. $A(AC, AD, AE, \ldots) \overline{\wedge} B(BC, BD, BE, \ldots)$ дан фойдаланинг.

306. $x^2 + y^2 = 1$ — айлана.

307. $\begin{cases} x_1' = x_3, \\ x_2' = x_2, \\ x_3' = x_1. \end{cases}$

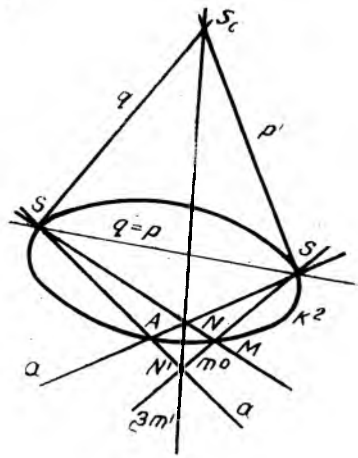
309. $(1:1:0)$ ва $(0:1:1)$.

310. $(1:1:0)$ ва $(0:1:1)$.

312. $5x_1 - 4x_2 + x_3 = 0$.

315. $(a_{11}\alpha + a_{12}\beta)x_1 + (a_{21}\alpha + a_{22}\beta)x_2 + (a_{31}\alpha + a_{32}\beta)x_3 = 0$, бу уринма — чизиқнинг асимптотасидан иборат.

317. $M \in K^2$ ни ясаш усули 81-чизмада кўрсатилган. $S(a, p, q \ldots \ldots) \barwedge S'(a', p', q', \ldots)$, $m_0 \in S_0$ ўтказамиз. $N' = m_0 \cap a$, $N = m_0 \cap a'$, $SN = m$, $SN' = m'$, $M = m \cap m' \in K^2$.



81-чизма.

318. Иккита нуқта бўлиб, улар ҳақиқий (уст-ма-уст тушиши ҳам мумкин) ёки қўшма мавҳум бўлади.

320. $x_2 - 2x_3 = 0$.

321. $(1:2:1)$.

322. $A$ нуқтанинг полярасини ясаш учун, ундан иккита ихтиёрий кесувчи ўтказамиз. Фақат чизғич ёрдамида бу чизиқларда квадрикага нисбатан $A$ га гармоник қўшма бўлган $B_1$, $B_2$ нуқталарни ясаймиз. $B_1B_2$ —тўғри чизиқ поляра бўлади.

323. $A$ нуқтанинг поляраси $a$ ни ясанг. Унинг айлана билан кесишган нуқталари уриниш нуқталари бўлади. Уларни $A$ билан туташтирсак, изланган уринмалар ҳосил бўлади.

325. $A(-3:1:-3)$ нуқтанинг поляраси билан берилган тўғри чизиқнинг кесишган нуқтаси изланган нуқта бўлади.

326. $p$ нуқтага мос полярани ясанг. Изланаётган ватар $P$ нинг полярасига параллел бўлиб, унинг хос эмас нуқтасидан ўтиши шарт.

336. $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, $A_6$ нуқталарнинг иккинчи тартибли битта эгри чизиққа қарашли эканини кўрсатинг ва Паскаль теоремасини қўлланг.

337. $A$, $B$, $C$, $P$, $D$, $O$ нуқталар иккинчи тартибли чизиққа қарашли. Шу сабабли Брианшон теоремасини қўлланг.

338. $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, $F \in K^2$ бўлсин. Бу нуқталарни бирор тартибда бирлаштирсак, $K^2$ га ички чизилган олтибурчакни ҳосил қиламиз. Бундай олтибурчакларнинг сони 60 та бўлади. Демак, Паскаль тўғри чизиқларининг сони ҳам 60 та бўлади.

339. Кичик иккилик принципидан фойдаланинг.

## IV боб

**363.** Ихтиёрий параллелограммни бирор параллелограммнинг аффин образи деб олиш мумкинлигидан фойдаланинг ва айлананинг аффин образи бўлган эллипсни ҳосил қилинг.

**364.** Айланага ташқи чизилган квадратнинг тасвири қилиб эллипсга ташқи чизилган параллелограммни олишдан фойдаланинг.

**365.** $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ эллиптик цилиндрнинг $z=\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}y$ текислик билан кесимини олинг ($a>b$).

**366.** 3) Айлананинг тасвиридан фойдаланиб, унга ички тенг томонли учбурчак чизинг, бунда айлананинг бирорта диаметрининг $\frac{3}{4}$ қисмини учбурчакнинг баландлиги қилиб олиш мумкин.

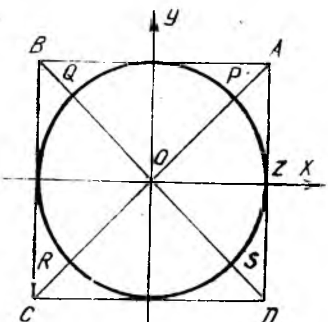
**379.** Аввал бутун пирамиданинг тасвирини ясаб олиб, ундан кесик пирамида тасвирини ҳосил қилинг.

**383.** Агар тасвир текислигида $A$, $B$ — эллипснинг уриниш нуқталари бўлса, $O$ нуқта $AB$ кесмага тегишли бўлмайди, чунки эллипснинг диаметри учларидан унга ўтказилган уринмалар параллел.

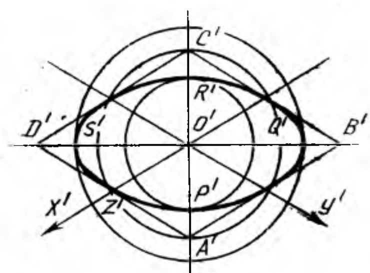
**386.** 4 : 1. **387.** $\frac{3}{4}\pi a^3$. **388.** $\frac{3}{4}l$. **389.** $\frac{RH}{H+R\sqrt{2}}$.

**390.** $\frac{RH\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}$. **393.** $u=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\approx 0{,}8$. **395.** 120°.

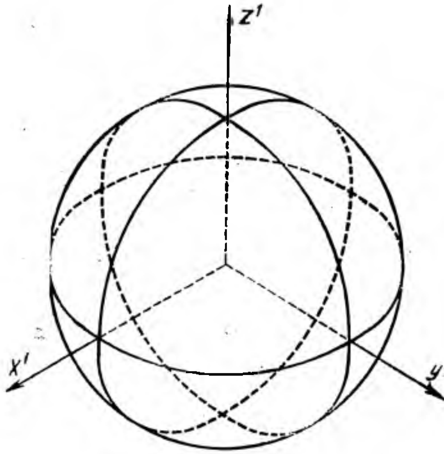
**396.** Аввал $Oxy$ система текислигида $\omega(O, r)$ айланани ясаб оламиз (82-чизма), кейин $O'x'y'$ система текислигида $\omega'$ эллипсни ясаймиз (83-чизма). $O'Z'\approx$



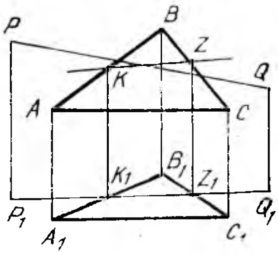

82-чизма.




83-чизма.




84-чизма.




85-чизма.

$\approx 0{,}8 \cdot OZ = 0{,}8r$, $A'B'C'D'$ эса бурчаги 120° бўлган ромб. $Q'S' = QS$, чунки $QS$ излар учбурчагининг томонига параллел. Шундай қилиб $O'Q'$ берилган айлананинг радиуси $r$ га тенг. $O'Q' : O'B' = OQ : OB$ бўлгани учун $O'B' = OB$. $O'R'$ ни топамиз: $O'R' : O'C' = OR : : OC$ дан $O'R'$ ни топиб, уни ясаш мумкин. Агар, масалан, $r = 5$ см бўлса, $O'Z' \approx 4$ см, $O'Q' = 5$ см, $O'R' \approx 2{,}8$ см. $O'S'$ ва $P'R'$ лар эллипснинг ўқлари, $A'B'C'D'$ ромб эса эллипсга ташқи чизилган.

**397.** Сферанинг координата текисликлари билан кесимларини ва абрисини ясанг (84-чизма).

**401.** $ABC$ текислик билан $PP_1$, $QQ_1$ тўғри чизиқлар орқали ўтувчи проекцияловчи текисликнинг кесишиш чизиғидан фойдаланинг. Бу чизиқ $KZ$ бўлсин (85-чизма).

**402.** $X_1$ ни берилган ихтиёрий нуқтанинг проекцияси, масалан, $A_1$ билан туташтирамиз. $A_1X_1$ тўғри чизиқни ихтиёрий берилган тўғри чизиқнинг проекцияси, масалан, $B_1C_1$ билан кесамиз: $B_1C_1 \cap A_1X_1 = F_1$, $F_1 \in B_1C_1$

бўлгани учун $BC$ га тегишли $F$ нуқта мавжуд бўлиб, $F_1$ нинг проекциясидан иборат. $AF$, $d$ тўғри чизиқлар битта текисликда ётади, шунинг учун уларнинг кесишган нуқтаси $X$ ни ясаш мумкин. Бу масалани ички проекциялаш марказий бўлган ҳол учун ҳам ечиб кўринг.

**408.** $ABC$ текисликнинг призма асосидаги изидан фойдаланинг.

**422.** $\frac{3}{4}a\sqrt{5}+\frac{25}{12}a+\frac{a\sqrt{13}}{6}$. **423.** $\frac{4}{3}a\sqrt{10}$.

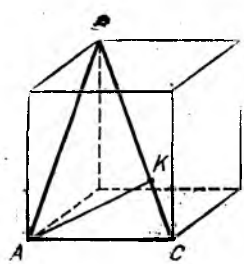
**424**. $\frac{a\sqrt{2}}{2}+a\sqrt{10}$.

**425.** Агар $AA_1D_1D$ ёқнинг марказини $F$ деб олсак, $ABPF$ — параллелограмм бўлади.

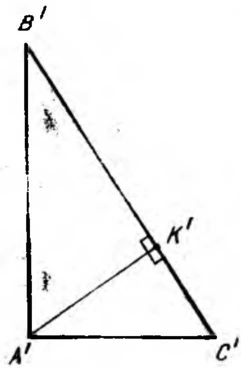
**435.** „Агар $l$ тўғри чизиқ бўйича кесишувчи икки текислик $\alpha$ текисликни параллел тўғри чизиқлар бўйлаб кесса, $l$ тўғри чизиқ текисликка параллел бўлади" деган теоремадан фойдаланинг.

**436.** Оригиналга ўхшаш бўлган фигурада $R'Z'$ баландликни ясаб олинг ва бу ясашни уч нуқта оддий нисбатидан фойдаланиб $(PQ, R) = (P'Q', R')$ тасвирга кўчиринг.

**439.** $A$ нуқта кубнинг учи, $BC$ — унинг диагонали бўлсин (86- чизма). Оригиналга ўхшаш $A'B'C'$ учбурчакни ясаймиз (87- чизма). $A'K' \perp B'C'$ бўлсин. $B'K'$ : $K'C'$ нисбат $(a\sqrt{2})^2 : a^2 = 2:1$ дан фойдаланиб топилади. Демак, $BC$ ни тенг уч бўлакка бўлиб, $BK$ : $KC = 2:1$ шарт билан $K$ танланса, $AK$ изланган перпендикуляр бўлади.




86-чизма.




87-чизма.

**444.** $\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Умумий перпендикуляр ясашнинг бизга маълум „мактаб усули“ дан ташқари яна қуйидаги усулни кўрсатиш мумкин. $l_1$, $l_2$ айқаш тўғри чизиқлар, $\alpha$ — $l_1$ га перпендикуляр ихтиёрий текислик, $l_1$ нинг $\alpha$ билан кесишган нуқтаси $A$ бўлсин (88-чизма). $l_2$ нинг $\alpha$ га ортогонал проекцияси $l_2'$ тўғри чизиқни топайлик. $AX \perp l_2'$, $X \in l_2'$ ва $Y \in l_2$ $X$ га проекцияланувчи нуқта бўлсин. Энди $Y$ дан ўтиб, $AX$ га параллел бўлган тўғри чизиқни ясаймиз, агар $Z$ бу тўғри чизиқнинг $l_1$ билан кесишган нуқтаси бўлса, $YZ \perp l_1$, $YZ \perp l_2$ бўлади. Шундай қилиб $YZ$ изланган перпендикулярдир. Шу йўл билан изланган перпендикулярни ясаш ва кейин унинг узунлигини ҳисоблаш қулайроқ ($YZ = AX$).

Агар фақат масофани ҳисоблашгина талаб қилинса (ёки айқаш тўғри чизиқлар орасидаги бурчак), аналитик геометрия методларини қўллаш қулай.

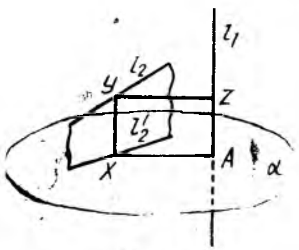
**445.** $\frac{a\sqrt{6}}{6}$, 90°. **446.** $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$. **447.** 12. **456.** $\frac{7}{24}a^2\sqrt{11}$.

**457.** $\frac{a^2\sqrt{2}}{9}$. **458.** $\frac{a^2\sqrt{11}}{3}$. **459.** $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$. **460.** $\frac{3a^2\sqrt{15}}{16}$.

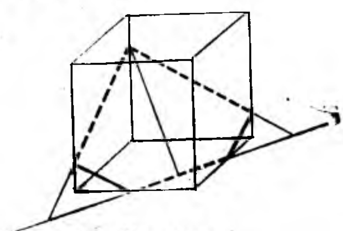
*Кўрсатма.* $S' = S\cos\varphi$ формуладан фойдаланиб, кесим текислиги билан асос текислиги орасидаги $\varphi$ бурчак косинусини топиш қулай.

**461.** $\frac{7a^2\sqrt{6}}{6}$. 89-чизмада кесим кўрсатилган.

**462.** $\frac{1\sqrt{29}}{48}a^2$. *Кўрсатма.* Бу масалада кесим текислиги билан асос текислиги орасидаги иккиёқли бурчак $\varphi$ ни координаталар системасини киритиб, аналитик усулда топиш қулай. $\cos\varphi = \frac{4}{\sqrt{29}}$.



88-чизма.


89-чизма.

463. $36\sqrt{2}$. 464. $\frac{3}{4}a\sqrt{a^2+2b^2}$. 465. $120°$.

466. $\frac{a^2\sqrt{2}}{4}$. 467. $Q$. 468. $\frac{5}{4}S_0$. *Кўрсатма.* Иккинчи кесим биринчига параллел.

469. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$. 470. $\frac{7}{16}\sqrt{a^2c^2+b^2c^2+4a^2b^2}$. 471. $\frac{11}{12}S_0$.

472. $90°$. 473. $\frac{2}{9}ab$. 474. $\frac{7}{4}Q$. 475. $\frac{25}{36}S$.

476. $\frac{1134}{25}\sqrt{14}$. 477. $\frac{3\sqrt{3}}{8}h^2$. 478. $\sin x = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

479. $\frac{a\sqrt{14}}{3}$. *Кўрсатма.* $O$ нуқта билан $AH$ орқали текислик ўтказинг.

480. $\sqrt{7}$. 481. $\frac{ah}{a+h}$. 482. $\frac{29}{36}$. 483. $\frac{\sqrt{6}}{3}$. 484. $\frac{\pi a^3\sqrt{2}}{8}$.

485. $\frac{rH}{r+\sqrt{r^2+4H^2}}$. 486. $\frac{a(2-\sqrt{3})}{2}$. 487. $\frac{5}{3}r\sqrt{3}$.

488. $\frac{\pi R^3\sqrt{14}}{6}$. *Кўрсатма.* Битта шарга бир нуқтадан ўтказилган кесувчи ва уринманинг хоссасидан фойдаланинг.

490. 1) $(a, b)$ оралиқ: 2) $\varnothing$.

492. Мисол учун $E^2$ да жойлашган маркази $X_0(0, 0)$ да бўлган $x^2+y^2<\frac{1}{n}$ $(n\in N)$ очиқ доиралар $H_n$ тўпламини оламиз. Равшанки, $\bigcap_n H_n = x_0$, лекин текисликда бир нуқтали тўплам очиқ эмас.

499. Тўлдирувчисининг очиқлигини исботланг. 505. 1), 2) ҳар доим эмас; 3) ҳар доим. 522. $\vec{r}' = \frac{\vec{r}}{1+|\vec{r}|}$ радиус-векторлар ёрдамида бериладиган акслантиришни олиб қараш керак.

530. Ҳа. 531. Ҳа. 532. Ҳа. 535. Лемниската, 2-тартибли конус.

539. 1) 2; 2) 0; 3) 0. 542. 1.

553. $\frac{(\vec{r}\,\vec{r}')}{\sqrt{\vec{r}^2}}$. 554. $-\frac{(\vec{r}\,\vec{r}')}{\left(\sqrt{\vec{r}^2}\right)^3}$. 556. $\left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right|^2+\left(\vec{r}\,\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\right)$.

557. $(\vec{r}\wedge\vec{r}'')$. 558. $(\vec{r}'\wedge\vec{r}''')$. 559. $(\vec{r}'\,\vec{r}\,\vec{r}''')$.

560. $(\vec{r}\,\vec{r}'\vec{r}''')$. 561. $\dfrac{\vec{r}'^2(\vec{r}''\vec{r}''') - (\vec{r}'\vec{r}''')(\vec{r}'\vec{r}'')}{\sqrt{(\vec{r}'\wedge\vec{r}'')^2}}$.

562. $(\vec{r}'\wedge\vec{r}'')^2 - (\vec{r}'^2)^3$. *Кўрсатма.* Ушбу тенгликдан фойдаланинг:

$$(\vec{r}\,\vec{r}'\,\vec{r}'')^2 = \begin{vmatrix} \vec{r}^2 & (\vec{r}\vec{r}') & (\vec{r}\,\vec{r}'') \\ (\vec{r}'\vec{r}) & \vec{r}'^2 & (\vec{r}'\vec{r}'') \\ (\vec{r}''\vec{r}) & (\vec{r}''\vec{r}') & \vec{r}''^2 \end{vmatrix}.$$

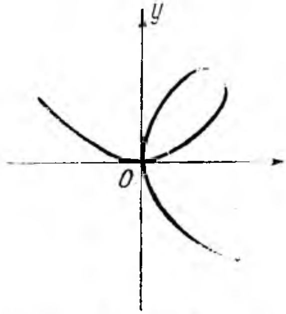
563. $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = 2t\vec{i} + 3\vec{j} + 3t^2\vec{k}$, $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = 2\vec{i} + 6t\vec{k}$.

564. в) $\vec{r}'\left(\dfrac{2t}{(a+t)^2}, \dfrac{a}{(a+t)^2}\right)$, е) $\vec{r}'(a\sin 2t,\ b\cos 2t,\ -c\sin t)$.

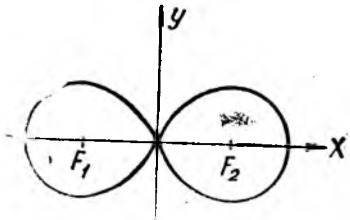
567. Бўлади. Ҳақиқатан ҳам, $\vec{r}'\perp\vec{r} \Rightarrow (\vec{r}\vec{r}') = 0$. Бундан $\left(\frac{1}{2}\vec{r}^2\right)' = 0 \Rightarrow \vec{r}^2 = \text{const} \Rightarrow \sqrt{\vec{r}^2} = |\vec{r}| = \text{const}$.

568. *Кўрсатма.* Агар $\vec{r} = \vec{r}(t)$ маълум бир текисликка параллел вазиятда ўзгарса, у ҳолда $\vec{r}(t)$ бу текисликнинг нормал вектори $\vec{n}$ га перпендикуляр бўлади. Яъни $(\vec{r}(t)\cdot\vec{n}) = 0$. Бу тенгликдан $(\vec{r}'(t)\vec{n}) = 0$, $(\vec{r}''(t)\vec{n}) = 0$. Бу учта тенгликдан $\vec{r}(t), \vec{r}'(t), \vec{r}''(t)$ векторларнинг ҳар бири $\vec{n}$ га перпендикуляр эканлигини кўрамиз. Демак, буларнинг учаласи ҳам бир текисликка параллел, яъни улар компланардир. Демак, $(\vec{r}(t)\times \vec{r}'(t)\vec{r}''(t)) = 0$.

569. $\vec{r} = \vec{r}(t)$ нинг йўналиши доимий дейлик; у ҳолда $\vec{r}(t) = |\vec{r}(t)|\vec{e}$, бу ерда $\vec{e} - r(t)$ нинг бирлик вектори. У ҳолда $\dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}\cdot\vec{e} + \vec{l}\cdot\dfrac{d\vec{e}}{dt} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}\,\vec{e} = \dfrac{d\vec{l}}{dt}\,\dfrac{\vec{r}(t)}{\vec{l}} = \dfrac{\vec{l}'}{\vec{l}}\times$




90-чизма.




91-чизма.

$\times \vec{r}(t)$. Энди $\dfrac{\vec{l}'}{\vec{l}} = \lambda$ десак, $\dfrac{d\vec{r}}{dt} = \lambda\vec{r}(t)$ бўлади. Бу эса $\dfrac{d\vec{r}}{dt} \parallel \vec{r}(t)$ эканлигини кўрсатади.

**570.** а) Йўқ. Масалан, $\vec{r}(t) = (\sin t, \cos t)$ дан $|\vec{r}'| = 1$, $|\vec{r}|' = 0$ дан кўриниб турибди.

**571.** а) $\dfrac{\partial \vec{r}^2}{\partial u} = 2(\vec{r}\vec{r}_u)$; $\dfrac{\partial \vec{r}^2}{\partial v} = 2(\vec{r}\vec{r}_v)$; $\dfrac{\partial^2}{\partial u^2}(\vec{r}^2) = 2\vec{r}_u^2 + 2(\vec{r}\vec{r}_{uu})$; $\dfrac{\partial^2(\vec{r}^2)}{\partial u\,\partial v} = 2(\vec{r}_u\vec{r}_v) + 2(\vec{r}\vec{r}_{uv})$; $\dfrac{\partial^2(\vec{r}^2)}{\partial v^2} = 2\vec{r}_v^2 + 2(\vec{r}\vec{r}_{vv})$.

**575.** а) тўғри чизиқ; б) парабола; в) эллипс; г) гипербола.

**576.** *Кўрсатма.* $\angle ABO$ ни $t$ деб олинг.

$$x = a\cos^3 t,\ y = a\sin^3 t.$$

**578.** $\rho = 2a\cos\varphi$.

**581.** а) парабола. *Кўрсатма.* $t$ ни йўқотиш керак.

б) $x - y - 2 = 0$, $x \geqslant 2$ — нур;

в) $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$ тўғри чизиқнинг координата ўқлари орасидаги кесмаси;

г) ярим айлана; д) $x + 2y - 1 = 0$;

е) $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$.

582. $x=\frac{a(e^t+e^{-t})}{2}$, $y=\frac{b(e^t-e^{-t})}{2}$, бу ерда $e^t=$ $=\frac{x}{a}-\frac{y}{b}$.

583. $x=\frac{3at}{1+t^3}$, $y=\frac{3at^2}{1+t^3}$ (90- чизма).

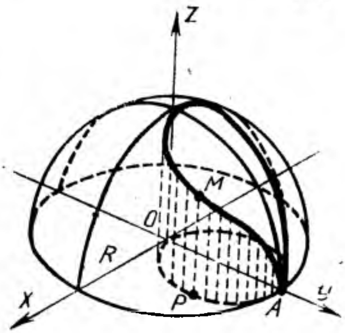
584. $(x^2+y^2)^2-2c^2(x^2-y^2)=0$, бу ерда $c=\frac{1}{2}\rho\times$ $\times(F_1, F_2)$ ёки қутб координаталарда: $\rho^2=2c^2\cos 2\varphi$, бунда $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi=\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$. (91- чизма).

585. $x=\frac{2a}{1+k^2}$, $y=\frac{2ak}{1+k^2}$, бу ерда $k$ — координаталар боши ва айлананинг бирор нуқтасидан ўтувчи тўғри чизиқнинг бурчак коэффициенти. Агар айлананинг марказидан ўтувчи тўғри чизиқ $Ox$ ўқи билан $\varphi$ бурчак ташкил қилса, у ҳолда унинг параметрик тенгламасини $x=a(1+\cos\varphi)$, $y=a\sin\varphi$ кўринишда ёзиш мумкин.

586. а) $(\pm a, 0)$, $(0, \pm a)$; б) $(a, 0)$; в) $(0, 0)$.

587. $K$, $Z$ нуқталар берилган чизиқда ётади. $M$ нуқта унга қарашли эмас. $Ox$ ўқи чизиқ билан координаталар бошида кесишади. $Oy$ ўқини чизиқ $(0, 0)$ ва $(0, -2)$ нуқталарда кесади. *Кўрсатма.* Чизиқнинг ошкормас кўринишидаги тенгламасини $y^3+2y^2-x^2=0$ кўринишда ёзиш мумкин.

588. *Кўрсатма.* Координаталар системасини 92-чизмада кўрсатилгандек қилиб олсак, Вивиани чизиғи таърифининг мазмунига кўра ушбу $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x^2+y^2-Rx=0 \end{cases}$ тенгламалар билан ифода қилинади. $x^2+y^2-Rx=0$ тенгламани $\left(x-\frac{R}{2}\right)^2+y^2=\frac{R^2}{4}$ кўринишда ёзиб, $x-\frac{R}{2}=\frac{R}{2}\cos u$, $y=\frac{R}{2}\sin u$ десак, у ҳолда бу чизиқнинг ушбу параметрик тенгламаларини ҳосил қиламиз:



92-чизма.

$x = \frac{R}{2}(1+\cos u)$, $y = \frac{R}{2}\sin u$, $z = \pm R\sin\frac{u}{2}$. Агар $u$ сифатида сферадаги $M$ нуқтанинг узоқлигини олсак, у ҳолда: $x = R\cos^2 u$, $y = R\cos u \sin u$, $z = \pm R\sin u$.

589. $x = a\cos\varphi$, $y = a\sin\varphi$, $z = b\varphi$, $a$, $b \in R$ ($R$ — ҳақиқий сонлар тўплами).

590. Тўртта тўғри чизиқ: $x = y$, $z = 1$; $x = -y$; $z = 1$; $x = y$, $z = -1$; $x = -y$, $z = -1$.

591. $y = x^2$, $x = e^z$.

593. $R = \frac{1}{2}$.

594. $y = x^2$, $z = 0$; $z = x^3$, $y = 0$; $z^2 = y^3$, $x = 0$.

595. $x^2 - y^2 - x - y + 1 = 0$, $z = 0$.

596. $x^2 + (y-1)^2 + (z+2)^2 = 9$, $x - 2y + 4z - 4 = 0$.

597. $a = 2$, $b = \sqrt{2}$.

598. *Кўрсатма.* $t$ параметрни йўқотинг.

599. а) $x = 0$, $y = 0$; б) $y = 0$, $x = 1$.

600. а) $y = 0$; б) $y = \pm(x - a)$; в) $y = \pm x$; г) $y = 0$.

602. а) $\frac{(X-x)x}{a^2} + \frac{(Y-y)y}{b^2} = 0$; $\frac{(X-x)a^2}{x} = \frac{(Y-y)b^2}{y}$;

б) $\frac{X - a\cos t}{-a\sin t} = \frac{Y - b\sin t}{b\cos t}$;

$(X - a\cos t)\, a\sin t - (Y - b\sin t)\, b\cos t = 0$.

604. $\frac{X - a(t - \sin t)}{1 - \cos t} = \frac{Y - a(1 - \cos t)}{\sin t}$;

$[X - a(t - \sin t)](1 - \cos t) +$
$+ [Y - a(1 - \cos t)]\sin t = 0$.

605. $y = x^2 - 3x + 3$.

606. $M_0T = \left|\frac{y_0}{y_0'}\sqrt{1 + y_0'^2}\right|$, $M_0N = |y_0\sqrt{1 + y_0'^2}|$,

$PT = \left|\frac{y_0}{y_0'}\right|$, $PN = |y_0 y_0'|$.

607. $PN = p$.

608. $(x + c)^2 + y^2 = r^2$.

609. $x + c = \sqrt{a^2 - y^2} - a\ln\frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. Бу чизиқ актриса деб аталади. $c$ — доимий сон.

618. $c \neq 0$, эллипслар оиласи.

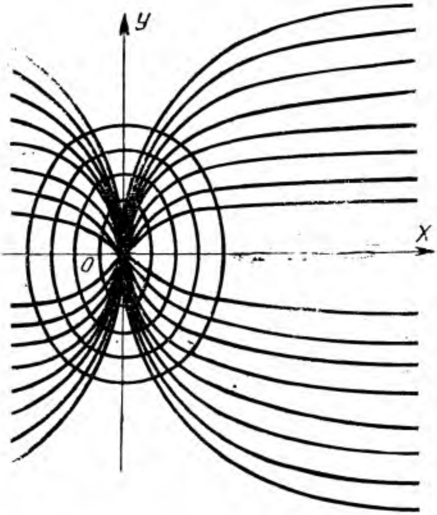
619. $c \neq 0$, гиперболалар оиласи.

620. $c \neq 0$, параболалар оиласи.

621. Концентрик айланалар оиласи.

622. Тўғри чизиқлар оиласи.

623. $y = 0$ ва $16y - x^4 = 0$.




93- чизма.

**624.** $y = \pm 5$.

**625.** Ўрамаси йўқ.

**627.** Оила тенгламаси: $x^2 + y^2 - 2cx = \frac{c^2}{p}y$.

Ўрама тенгламаси: $y(x^2 + y^2) + px^2 = 0$.

**628** $xy = \pm a^2$.

**629.** $x^2 + (y-c)^2 = c^2 - a^2$, бу ерда $a = \frac{1}{2}\rho(A, B)$, $A$, $B$ берилган нуқталар, $c$ — доимий сон.

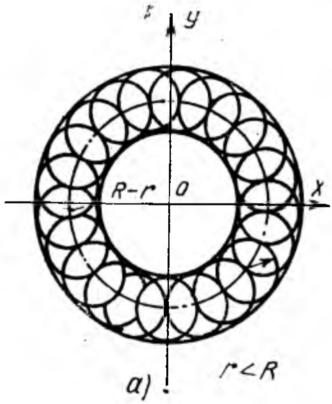
**630.** $x^2 + \frac{y^2}{2} = c$ (93-чизма).

**631.** $A^2 + B^2 = \frac{C^2}{R^2}$.

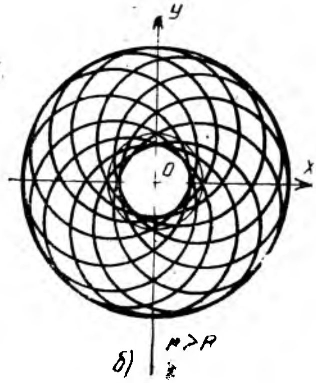
**632.** $x^2 + y^2 = (R-r)^2$, $x^2 + y^2 = (R+r)^2$ (94-чизма).

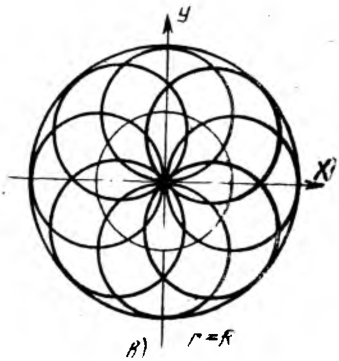
**633.** $x + y = \pm 1$, $x - y = \pm 1$ (95-чизма).

**634.** $s = 48a$. **635.** $s = 8a$. **637.** $s = \ln \frac{\operatorname{tg}\frac{\pi}{12}}{\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$.




94 а- чизма.






94 б, в-чизма.

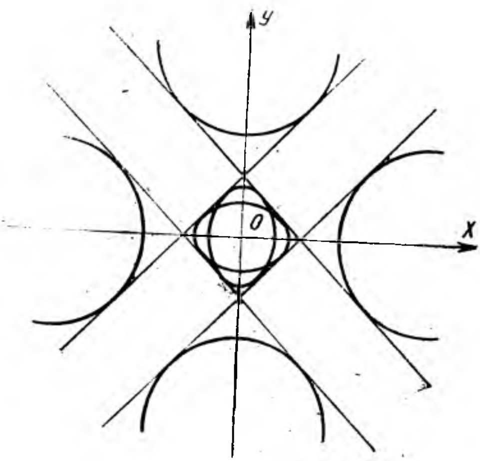
638. $s = 6a.$

639. $s = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{r^2 + r'^2}\, d\varphi.$

640. $s = \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{1 + 4\pi^2} + \ln (2\pi + \sqrt{1 + 4\pi^2}].$

641. $s = \frac{x}{2p} \sqrt{x^2 + p^2} + \frac{p}{2} \ln \frac{x + \sqrt{x^2 + p^2}}{p}.$

642. $k = 0.$




95-чизма.

643. $k=\frac{6}{t(4+9t^2)^{3/2}}$.

644. $k=\frac{1}{4a\left|\sin\frac{t}{2}\right|}$.

645. $k=\frac{p^2}{(p^2+y^2)^{3/2}}$. 646. $k=\frac{6a^4x}{(\sqrt{a^4+9x^4})^3}$.

647. $k=\frac{12a^6x^2}{(\sqrt{a^6+16x^6})^3}$.

649. $k=\frac{\left|P\left(Q\frac{\partial Q}{\partial x}-P\frac{\partial Q}{\partial y}\right)+Q\left(P\frac{\partial P}{\partial y}-Q\frac{\partial P}{\partial x}\right)\right|}{(P^2+Q^2)^{3/2}}$.

651. $R=\frac{(a^2\sin^2\varphi+b^2\cos^2\varphi)^{3/2}}{ab}$.

652. $R=-\frac{(1+\cos^2 x)^{3/2}}{\sin x}$.

653. *Кўрсатма.* $x'^2+y'^2=1$, $\frac{1}{R}=\begin{vmatrix}x' & y'\\ x'' & y''\end{vmatrix}$. Детерминантларни кўпайтириш хоссасидан фойдаланиб,

$$\frac{1}{R}=\begin{vmatrix}x'^2+y'^2 & x'x''+y'y''\\ x'x''+y'y'' & x''^2+y''^2\end{vmatrix}$$

ни ҳосил қиламиз. $x'^2+y'^2=1$ тенгликни $s$ бўйича дифференциаллаймиз: $x'x''+y'y''=0$. У ҳолда:

$$\frac{1}{R}=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & x''^2+y''^2\end{vmatrix}\Rightarrow\frac{1}{R^2}=\left(\frac{d^2x}{ds^2}+\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2.$$

654. $R=-9a\,|\sin t\cos t|$.

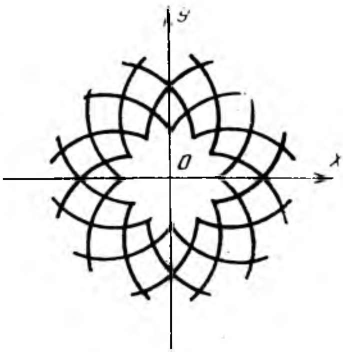
655. $C(2,\ 0)$.

656. $\xi=\frac{a^2-b^2}{a}\cos^3 t$, $\eta=\frac{b^2-a^2}{b}\sin^3 t$ ёки бу тенгламалардан $t$ ни йўқотсак: $(a\xi)^{\frac{2}{3}}+(b\eta)^{\frac{2}{3}}=c^{\frac{4}{3}}$ астроида ҳосил бўлади.

657. $(\eta-p)^2=\frac{27}{8}p\xi^2$ — ярим кубик парабола.

658. $\xi=\frac{a}{2}(3\cos t-\cos 3t)$, $\eta=\frac{a}{2}(3\sin t+\sin 3t)$; бу чизиқ эпициклоида дейилади.

659. $\xi=\frac{a\theta\cos\theta}{\theta^2+2}-\frac{a(\theta^2+1)}{\theta^2+2}\sin\theta$, $\eta=\frac{a\theta\sin\theta}{\theta^2+2}+$ $+\frac{a(\theta^2+1)}{\theta^2+2}\cos\theta$.



96-чизма.

660. $(a\xi)^{\frac{2}{3}} - b$ бу ерда $c' = a^2 + b^2$.

662. $x = a(\cos t + (t - c)\sin t)$, $y = a(\sin t - (t - c)\cos t)$, $c$ — доимий сон (96-чизма).

663. $x = \frac{t}{2} + \frac{2}{\sqrt{t^2+4}} \times (c - \ln(t + \sqrt{t^2+4}))$, $y = \frac{t}{\sqrt{t^2+4}} \cdot (c - \ln(t + \sqrt{t^2+4}))$; $c$ — доимий сон.

*Кўрсатма.* Параболанинг тенгламасини параметрик кўринишда ёзиб олинг. Масалан, $x = t$, $y = \frac{t^2}{4}$.

664. $x = a\theta\cos\theta - (s + c)\frac{\cos\theta - \theta\sin\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$,

$y = a\theta\sin\theta - (s + c)\frac{\sin\theta + \theta\cos\theta}{\sqrt{\theta^2+1}}$.

$c$ — доимий сон. $s$ — ёй узунлиги.

665. $k = \frac{1}{a} = \text{const}$. 666. $R^2 + s^2 = 16a^2$, $R$ — эгрилик радиуси. 667. $R^2 = 2as$.

668. *Кўрсатма.* Трактрисанинг параметрик тенгламасини ёзиб олинг, $R = -a\sqrt{e^{-2\frac{s}{a}} - 1}$.

669. $(27s + 8) = \left[4 + \frac{324R^2}{27s + 8}\right]^3$.

670. $R = ms$. 671. $R = a + \frac{s^2}{a}$.

672. $x = \int_0^s \cos\frac{s^2}{2a^2}\,ds$, $y = \int_0^s \sin\frac{s^2}{2a^2}\,ds$.

673. $x = a(2t + \sin 2t)$, $y = a(2 + \cos 2t)$.

674. $\frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-1}{3}$.

675. $\frac{x+2}{0} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z+4}{1}$.

**676.** $\dfrac{x-2}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{2}$.

**678.** $x = 0,\ z = x + a$.

**680.** $\dfrac{x}{0} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{\theta}$.

**681.** $x = -2 + 3t,\ y = 1 - 4t,\ z = 6 + 4t$.

**683.** $y = \dfrac{3}{4}x^2,\ z = 0$.

**684.** $\dfrac{x-1}{11} = \dfrac{y-1}{8} = \dfrac{z-1}{9};\ \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y-1}{-3} = \dfrac{z-1}{1}$.

**685.** $x = (a+\lambda)\cos t,\ y = (a+\lambda)\sin t,\ z = bt$.
$x = a\cos t + \lambda b\sin t,\ y = a\sin t - b\lambda\cos t$,
$z = bt + \lambda a$, бу ерда $\lambda$ — параметр.

**686.** $x = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1 - 7\lambda),\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+\lambda),\ z = 1 + 4\lambda$.

**687.** $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{-4} = \dfrac{z-1}{-1};\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-1}{-2}$.

**688.** $\dfrac{x}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z}{1};\ x = y = -z$.

**689.** $(1,\ \ln 2,\ -4)$.

**691.** а) $\vec{\tau}(1,\ 0,\ 0),\ \vec{\nu}(0,\ 1,\ 0),\ \vec{\beta}(0,\ 0,\ 1)$;

б) $\vec{\tau} = \dfrac{a\vec{e}(t) + b\vec{k}}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \vec{\nu} = -\vec{e}(t),\ \vec{\beta} = \dfrac{a\vec{k} - b\vec{e}(t)}{\sqrt{a^2+b^2}}$;

бу ерда $\vec{e}(t) = \cos t\vec{i} + \sin t\vec{j}$.

**693.** $(b\sin t)x - (b\cos t)y + a\dot{z} - abt = 0$;
$(a\sin t)x - (a\cos t)y - bz + b^2t = 0$;
$x\cos t + y\sin t - a = 0$.

**694.** $z - ax = 0$

**695**

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} \varphi_y & \varphi_z \\ \psi_y & \psi_z \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \varphi_z & \varphi_x \\ \psi_z & \psi_x \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \varphi_x & \varphi_y \\ \psi_x & \psi_y \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

**696.** $4x - y + z - 9 = 0$.

698. $x = x(t),\ y=y(t),\ z = z(t)$
$$\begin{cases} Ax + By + Cz + D = 0, \\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \\ A''x + B''y + C''z + D'' = 0 \end{cases}$$ системадан топилади.

700. $12x + 12y + 12z - 13 = 0.$

702. $y + 2z = 0.$ 703. $2x + y + 4z - 7 = 0.$ 705. $y = 0.$

706. $s = 9{,}9.$ 707. $\sqrt{3}(e^{\pi} - 1).$ 708. $s = \dfrac{a(e^2 - 1)}{\sqrt{2e}}.$

709. $s = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$ 711. $s = x + \dfrac{2}{9}x^3.$ 712. $s = 10.$

713. $s = 5at.$

714. *Кўрсатма.* 710- масаладан фойдаланинг.

716. $x = a\cos\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ y = a\sin\dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}},\ z = \dfrac{s}{\sqrt{a^2+b^2}}.$

717. $x = \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\cos\ln\left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right),\ y =$
$= \left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right)\sin\ln\left(\dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1\right),\ z = \dfrac{s}{\sqrt{3}} + 1.$

724. $\dfrac{d\vec{\tau}}{ds} = \dfrac{a}{a^2+b^2}\vec{\nu},\ \dfrac{d\vec{\nu}}{ds} = -\dfrac{a}{a^2+b^2}\vec{\tau} + \dfrac{b}{a^2+b^2}\vec{\beta},$
$\dfrac{d\vec{\beta}}{ds} = -\dfrac{b}{a^2+b^2}\vec{\nu}.$

725. Мумкин. Масалан, $\vec{\tau} = \vec{\tau}(s)$ берилган бўлсин. У ҳолда $\dfrac{d\vec{r}}{ds} = \vec{\tau}(s) \Rightarrow \vec{r}(s) = \int \vec{r}(s)ds.$ Агар $\vec{\beta} = \vec{\beta}(s)$ берилган бўлса, $\vec{r}(s) = \int \dfrac{(\vec{\beta}\wedge\vec{\beta}')}{(\vec{\beta})}ds$ бўлади.

726. $\vec{\omega} = \chi\vec{\tau} + k\vec{\beta}.$ 728. $k = \dfrac{2}{1+a^2}.$ 729. $k = \dfrac{6}{25\,|\sin 2t\,|}.$

730. $k = -\chi = \dfrac{2t}{(1+2t^2)^2}.$ 731. $k = \chi.$

732. $k = \dfrac{a\omega^2}{b^2 + a^2\omega^2},\qquad \chi = \dfrac{b\omega}{b^2 + a^2\omega^2}.$

733. $k = \dfrac{\sqrt{2}e^{2t}}{(1+e^{2t})^2},\qquad \chi = -\dfrac{\sqrt{2}e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}.$

734. $k=\chi$.

735. $k=\sqrt{1+\sin^2 s}$.

736. $k=a\left(1+\frac{x^2}{2a^2}\right)^2$.

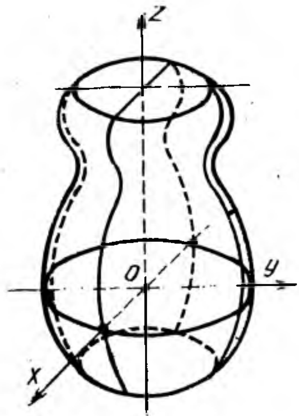
737. а) $\chi=0$,
$x-4y+2z+1=0$.
б) $\chi=0$,
$2x+3y+19z-27=0$.

738. $k=\chi=\frac{a}{2a^2+s^2}$.

739. $k=\chi=\frac{\sqrt{2}}{s^3+4}$.

740. $k=\frac{a}{a^2+b^2}$, $\chi=\frac{b}{a^2+b^2}$.

742. $x=f(u)\cos v$, $y=$
$=f(u)\sin v$, $z=g(u)$
(97-чизма).



97- чизма.

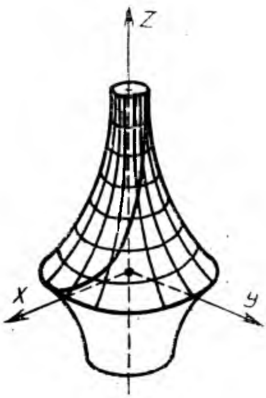
743. Сфера: $x=\cos u\cos v$, $y=a\cos u\sin v$, $z=a\sin u$.

744. Псевдосфера, $x=a\sin u\cos v$, $y=a\sin u\sin v$,

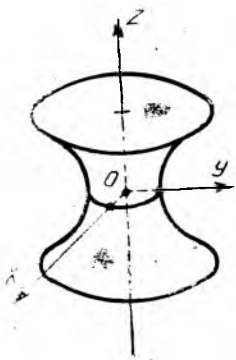
$z=a\left(\ln\operatorname{tg}\frac{u}{2}+\cos u\right)$ (98- чизма).

745. Катеноид, $x=\frac{a(e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}})\cos v}{2}$, $y=\frac{a(e^{\frac{u}{2}}+e^{-\frac{u}{2}})\sin v}{2}$,

$z=b\sin u$ (99- чизма).



98-чизма.



99-чизма.

**746.** Мумкин. Бунинг учун сиртнинг 2 та тўғри чизиқли ясовчилари оиласининг тенгламаларини ёзиб, уларда $x, y, z$ ни топиш керак.
**749.** Эллиптик цилиндр.
**750.** $M$ нуқта сиртда ётади.
**752.** $M(3, 4, -5)$ махсус нуқта. $x^2+y^2-z^2=0$ доиравий конус.
**753.** *Кўрсатма.* $F_x : F_y : F_z = (\sin^2 u \cos v - \cos v) : (\sin^2 u \sin v - \sin v) : \sin u \cos v$.

$$F_x = F_y = F_z = 0 \text{ шартдан: } \begin{cases} (\sin^2 u - 1)\cos v = 0, \\ (\sin^2 u - 1)\sin v = 0, \\ \sin u \cos v = 0. \end{cases}$$

У ҳолда $u = \frac{\pi}{2}$, $v$ — ихтиёрий,

**754.** $u = \text{const}$ параллеллардир, яъни параллел текисликлардаги айланалар. $v = \text{const}$—меридианлар. Меридианлар оиласи диаметри $Oz$ ўқида ётган айланалардан иборат.

**755** $\frac{y}{x} = \frac{b}{a} \operatorname{tg} v$ бўлгани учун $v = \text{const}$. $Oz$ ўқидан ўтувчи текисликдаги эллипслардан иборат. $u = \text{const}$ эса $Oxy$ текислигига параллел текисликлардаги эллипслардан иборат, чунки $u = \text{const}$ шартда $z = \text{const}$.
**756.** Тўғри чизиқли ясовчилар.
**757.** Винт чизиқлар ва тўғри чизиқли ясовчилар.
**758.** Винт чизиқлар ва айланалар.
**759.** Иккита винт чизиқлар оиласи.

**760.** $18x + 3y - 4z - 41 = 0$, $\frac{x-3}{8} = \frac{y-5}{3} = \frac{z-7}{-4}$.

**761.** $3x - y - 2z - 4 = 0$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{-2}$.

**762.** $6x + 3y - 2z - 7 = 0$, $\frac{x-1}{6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z-4}{-2}$.

**763.** $3x + 4y + 12z - 169 = 0$, $\frac{x-3}{3} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-12}{12}$.

**764.** $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1$, $x = x_0\left(1 + \frac{t}{a^2}\right)$, $y = y_0\left(1 + \frac{t}{b^2}\right)$, $z = z_0\left(1 + \frac{t}{c^2}\right)$.

765. $xa\sin v - ya\cos v + zu - auv = 0$, $\dfrac{x - u\cos v}{a\sin v} = \dfrac{y - u\sin v}{-a\cos v} = \dfrac{z - av}{u}$.

766. $x + y + z - 3a = 0$.

767. Тўртта текислик. Уларнинг тенгламаси $\frac{x^2}{a^3}X + \frac{y^2}{b^3}Y + \frac{z^2}{c^3}Z - 1 = 0$ кўринишда бўлиб, $x$, $y$, $z$ $x = a\sqrt[3]{1 - \frac{y^3}{b^3} - \frac{z^3}{c^3}}$, $y = \pm b\sqrt{\frac{b}{c}}$, $z = \pm c$ шартлардан топилади.

768. $p = \dfrac{kuv}{\sqrt{u^2 + k^2}}$.

769. $px^2 + qy^2 + 2z(x^2 + y^2 + z^2) = 0$.

774. $ds^2 = (f'^2 + g'^2)du^2 + f^2dv^2 = 0$.

775. $ds^2 = a^2du^2 + a^2\cos^2 u\, dv^2$.

776. $ds^2 = (a^2\sin^2 u + c^2\cos^2 u)du^2 + a^2\cos^2 u\, dv^2$.

777. $ds^2 = (1 + 4u^2)du^2 + u^2dv^2$.

778. $ds^2 = du^2 + R^2dv^2$.

779. $ds^2 = b^2du^2 + (a + b\cos u)^2dv^2$.

780. $ds^2 = a^2\operatorname{ctg}^2 u\, du^2 + a^2\sin^2 u\, dv^2$.

781. $ds^2 = du^2 + (u^2 + a^2)dv^2$.

782. $ds^2 = (1 + p^2)dx^2 + 2pq\,dx\,dy + (1 + q^2)dy^2$, бу ерда $p = \frac{\partial z}{\partial x}$, $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

783. Йўқ, чунки $EG - F^2 > 0$ бўлиши керак. Бу ерда $EG - F^2 = -18 < 0$.

784. $s = 3\sqrt{5}$. 785. $p = 10$. 786. $F = 0$.

787. $\cos\alpha = \pm\frac{1 - a^2}{1 + a^2}$. 788. $\cos\alpha = \frac{2}{3}$. 789. $\cos\alpha = -\frac{3}{5}$.

790. $u = \text{const}$ учун $v\sqrt{p + q + 4u^2} + \frac{p - q}{2}\ln(2u + \sqrt{p + q + 4u^2}) = c_1$. $v = \text{const}$ учун $u\sqrt{p + q + 4v^2} + \frac{p - q}{2}\ln(2v + \sqrt{p + q + 4v^2} = c_2$. 791. $\sigma = 4\pi^2ab$.

792. $\sigma = \frac{a^2}{4}[\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})]$.

793. $\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{f'^2+g'^2}}[(f'g''-f''g')du^2+fg'dv^2]$.

794. $\varphi_2 = R(du^2+\cos^2 u dv^2)$.

795. $\varphi_2 = \frac{2}{\sqrt{1+4u^2}}(du^2+u^2dv^2)$.

796. $\varphi_2 = Rdv^2$.

797. $\varphi_2 = -\operatorname{actg}u(du^2-\sin^2 u dv^2)$.

798. $\varphi_2 = -\frac{a}{u^2+a^2}du^2+adv^2$.

799. $\varphi_2 = -\frac{2a\,du\,dv}{\sqrt{u^2+a^2}}$.

800. $\varphi_2 = \frac{z_{xx}dx^2+2z_{xy}dxdy+z_{yy}dy^2}{\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}}$

802. $\frac{Z}{E}=\frac{M}{F}=\frac{N}{G}=-\frac{1}{R}$, $R$—сферанинг радиуси.

803. а) $\left(0,\ \pm b\sqrt{a^2-b^2},\ \frac{a^2-b^2}{2}\right)$;

б) $x=\pm a,\ y=\pm a,\ z=\frac{a^3}{xy}$.

804. $ds^2=(1+\varphi'^2)du^2+2m\varphi' dudv+(u^2+m^2)dv^2$, $ZN=u\varphi''$, $MH=-m$, $NH=u^2\varphi'$; бу ерда $H=\sqrt{EG-F^2}=\sqrt{u^2(1+\varphi'^2)+m^2}$.

805. $dudv=0$. Демак биринчи бош йўналиш меридианлар ($dv=0$), иккинчиси эса—параллеллар ($du=0$).

806. $\frac{du}{dv}=\pm\sqrt{u^2+b^2}$.

807. *Кўрсатма.* $du:dv=\pm\sqrt{a^2+b^2}$, 806-масалага қаранг. Бу йўналишнинг ҳар бири $dV=0$ йўналиш билан 45° ли бурчак ташкил қилади, чунки $\cos\varphi=\frac{Edu+Fdv}{\sqrt{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}}=\frac{du}{\sqrt{2du^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$, яъни $\varphi=45°$.

810. $k_1=-k_2=\frac{b}{u^2+a^2}$, $H=\frac{1}{2}(k_1+k_2)=0$.

811. $k_1=\frac{1}{2\sqrt{5}}$, $k_2=0$.

812. $k_1 = k_2 = 2a$.

813. $k = \dfrac{rt - s^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}$, $H = \dfrac{(1+q^2)r - 2pqs + (1+p^2)t}{(1+p^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}$.

814. $k = -a^2$, $H = 0$.

815. a) $k = \dfrac{b^2}{(u^2+b^2)^2}$; б) $k = \dfrac{1}{pq\left(1 + \dfrac{x^2}{p^2} + \dfrac{y^2}{q^2}\right)}$.

817. *Кўрсатма.* Сиртнинг тенгламаси $\vec{\rho}(s, V) = \vec{r}(s) + \dfrac{v}{k}\vec{n}(s)$ кўринишда бўлади.

$v$—параметр; $k = -\dfrac{\chi^2}{[(1-vk)^2 + v^2\chi^2)]^2}$, бу ерда $k$, $\chi$—чизиқнинг эгрилиги ва буралиши.

819 $k = \dfrac{b^2}{(u^2+b^2)^2}$.

822—827- масалаларда 813- масала шартидан фойдаланинг.

822. Эллиптик.
823. Эллиптик.
824. Гиперболик.
826. Гиперболик.
827. Параболик.
828. $4x^2 + 9y^2 = 1$.
830. $v = \operatorname{arctg} u + c$.
831. $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = \text{const}$.

832 $\begin{cases} 1 - \dfrac{y^2}{b^2} = Cx^2, \quad C = \text{const.} \\ \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1. \end{cases}$

833. $du^2 = \sin^2 u\, dv^2$.
834. $u \pm v = \text{const}$.
835. $H = 0$; у ҳолда $LM - 2MF + NG = 0$. Координата тўрини шундай танлаб оламизки, улар асимптотик чизиқлардан иборат бўлсин, у ҳолда $L = N = 0$. Демак, $MF = 0$, $M \neq 0$. (Акс ҳолда $L = M = N$ бўлиб, текисликка эга бўламиз.) У ҳолда $F = 0$, яъни координата тўғри ортогоналдир.

**836**. $v = \pm \ln(u + \sqrt{u^2 + b^2}) + C.$

**837**. $[pqr - (1 + p^2)s]dx^2 + [(1+q^2)r - (p^2+1)t]dxdy +$
$+ [(1 + q^2)s - pqt]dy^2 = 0.$

**838**. $\ln(ay + \sqrt{a^2y^2 + 1}) \pm \ln(ax + \sqrt{a^2x^2 + 1}) = \text{const}.$

**839**. *Кўрсатма.* Параметрлар сифатида $x$, $v$ ларни оламиз. У ҳолда $\varphi_1 = (1 + p^2)dx^2 + 2pqdxdy +$
$+ (1 + q^2)dy^2$,

$$\varphi_2 = \frac{rdx^2 + 2sdxdy + tdy^2}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Эгрилик чизиқларининг тенгламасини қуйидаги кўринишда ёзиш мумкин:

$$\begin{vmatrix} dy^2 & -dxdy & dx^2 \\ \dfrac{a^4z^2+c^4x^2}{a^4} & \dfrac{a^4xy}{a^2b^2} & \dfrac{b^4z^2+c^4y^2}{b^4} \\ b^2 - y^2 & xy & a^2 - x^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Детерминантни очиб, $\alpha = b^2 - c^2$, $\beta = c^2 - a^2$, $\gamma = a^2 - b^2$ белгилаб олсак, эгрилик чизиқларининг тенгламасини қуйидагича ёзамиз:

$$b^2\beta xydx^2 - (b^2\beta x^2 - a^2\alpha y^2 + a^2b^2\gamma)dxdy - a^2\alpha xydy^2 = 0.$$

Бу тенгламанинг умумий ечимини $y^2 = C_1x^2 + C_2$ кўринишда ёзиш мумкин.

**840**. $(p + q + 4v^2)du^2 - (p + q + 4u^2)dv^2 = 0.$

**841**. $F = M = 0$ эканлигини исбот қилинг.

**842**. $X = R\cos\dfrac{as+b}{R}$, $y = R\sin\dfrac{as+b}{R}$, $z = cs + d.$

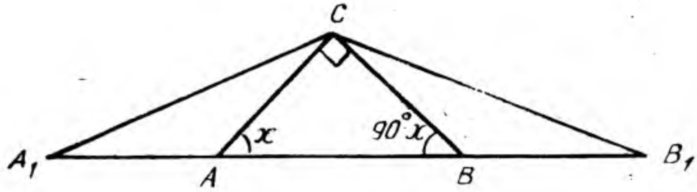
**843**. $V = C_1\displaystyle\int\frac{du}{u\sqrt{u^2 - C_1^2}} + C_2.$

**844**. $V = C_1\displaystyle\int\sqrt{\frac{1 - z'^2}{u^2 - C_1^2}}\,\frac{du}{u} + C_2.$

**845**. $(X - C_2)^2 + y^2 = C_1^2.$

**846**. $\alpha + \beta + \gamma = \pi + \displaystyle\iint_D kdG$ ($K$—псевдосферанинг тўлиқ эгрилиги) формуладан фойдаланинг.

**859**. $90° - \dfrac{\alpha}{2}$. **860**. $135°$. Ечиш. Агар $ABC$ учбур-




100-чизма.

чакда $\angle A = x$ деб олсак, $\angle ACA_1 = \frac{x}{2}$, $\angle BCB_1 = \frac{90° - x}{2}$, $\angle A_1CB_1 = +90° + \frac{x}{2} + \frac{90° - x}{2} = 135°$ (100- чизма).

**861**. 24 см. *Кўрсатма.* Агар $CD$ баландлик бўлса, $BD = x$ деб олинг ва тўғри бурчакли учбурчаклар $ADC$ ва $BDC$ лардан $CD$ ни топинг.

**862**. 150°. **863**. $\angle C = 25°$, $\angle A = 40°$. **864**. $\frac{p}{2}$.

**865**. 13,44 см.

**866**. $\frac{b}{2}(\sqrt{5} - 1)$. Ечиш. Ҳосил бўладиган иккита тенг ёнли учбурчакдан ва биссектриса хоссасидан фойдаланиш мумкин. $AB = BD = DC$; $\triangle BHC$ да $x + \frac{x}{2} + x = 90°$. (101- чизма). $\angle C = x = 36°$, у ҳолда $\angle B = 72°$. $\triangle ABC$ да $\angle A = 180° - 108° = 72°$.

$$\angle A = \angle B \Rightarrow AC = BC = b.$$

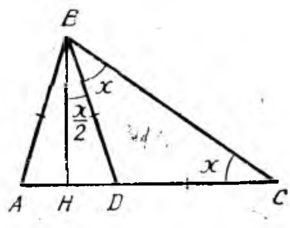
$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}; \ \frac{AB}{b} = \frac{b - AB}{AB}, \ AB = x$$

$\frac{x}{b} = \frac{b - x}{x}$, $x = \frac{(\sqrt{5} - 1)}{2} b$.

**867**. 60°; 90°. **868**. $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

**869**. 30°, 75°.

**870**. 6 см. *Кўрсатма.* Медианалар хоссасидан фойдаланинг.




101-чизма.

871. $4\sqrt{2}$ см. *Кўрсатма.* Биссектриса хоссасидан ва косинуслар теоремасидан фойдаланинг.

872. $\frac{\beta-\gamma}{2}$. *Кўрсатма.* Учбурчак бурчаклари орасидаги муносабатдан фойдаланинг.

873. $h=\frac{ab\sin\gamma}{\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\gamma}}$, $l=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{\gamma}{2}$.

874. $\sqrt{b(b+c)}$. Ечиш. $AD=BD=x$, $DC=y$, $\angle BAD=\alpha$ бўлсин (102-чизма). $\triangle ABD$ да $x^2=x^2+c^2-2cx\cos\alpha$, $\cos\alpha=\frac{c}{2x}$ (1) $\triangle ADC$ да $y^2=b^2+x^2-2bx\cos\alpha$. $\cos\alpha=\frac{b^2+x^2-y^2}{2bx}$ (2), $\frac{b}{c}=\frac{y}{x}$, $y=\frac{bx}{c}$ (3)

(1), (2), (3) лардан: $\frac{c}{2x}=\frac{x^2+b^2-y^2}{2bx}$, $x=\sqrt{\frac{bc^2}{b+c}}$.

875. $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$. *Кўрсатма.* $ABC$ учбурчакда медианалар кесишган нуқтани $O$ билан, учбурчакнинг асосини $x$ билан белгиланг ва $AOB$ учбурчакка косинуслар теоремасини қўлланг.

876. 25 см; 7 см.

877. $s=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, $p=\frac{a+b+c}{2}$.

*Ечиш.* $ABC$ учбурчакда (103-чизма): $s=\frac{1}{2}ab\sin\gamma$.

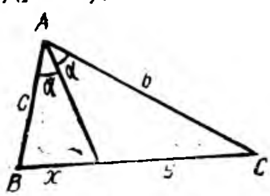
$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$, $\cos\gamma=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$. $\sin^2\gamma=1-\cos^2\gamma=$

$$=(1-\cos\gamma)(1+\cos\gamma)=\left(1-\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)\left(1+\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)=$$

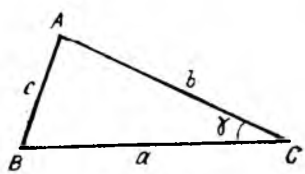
$$=\frac{c^2-(a-b)^2}{2ab}\cdot\frac{(a+b)^2-c^2}{2ab}=\frac{(c-a+b)(c+a-b)(a+b-c)(a+b+c)}{4a^2b^2}=$$

$$=\frac{1}{4a^2b^2}\cdot 2p\cdot(2p-2c)(2p-2b)(2p-2a)=\frac{4}{a^2b^2}p\cdot(p-a)(p-$$

$$-b)(p-c);$$




102-чизма.




103-чизма.

$\sin\gamma = \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$. $S = \frac{1}{2}\, ab\sin\gamma =$

$= \frac{1}{2}\, ab\cdot \frac{2}{ab}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

**878.** $\angle(a, r) = \frac{\pi}{2}$.

**879.** $BH = \frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$. Ечиш. 104-чизмада $AB_1 = m$, $B_1C = n$, $AB = x$, $BC = y$ бўлсин.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = (m+n)^2, \\ \frac{x}{y} = \frac{m}{n} \end{cases}$$ системадан $x = \frac{m(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}$.

$$y = \frac{n(m+n)}{\sqrt{m^2+n^2}}.$$

$ABC$ учбурчак юзи $S = \frac{1}{2}\, xy$ ёки $S = BH(m+n)$.

Булардан $BH = \frac{mn(m+n)}{m^2+n^2}$.

**880.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2\sin\alpha\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)}$. *Кўрсатма.* Синуслар теоремасидан фойдаланинг.

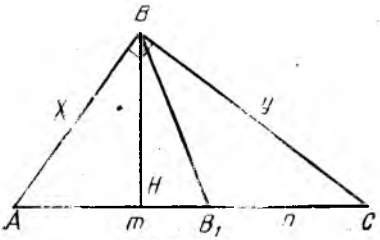
**881.** $a = \sqrt{\frac{2S}{\sin(\alpha+\beta)\cdot\sin\beta}}$, $b = \sqrt{\frac{2S\cdot\sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)\sin\alpha}}$,

$$c = \sqrt{\frac{2S\cdot\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}}.$$

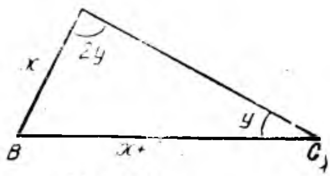
882. $3-4\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\operatorname{tg}^2\beta$. *Кўрсатма.* Синуслар теоремасидан фойдаланинг.

883. $\sqrt{b(b+c)}$. *Кўрсатма.* Синуслар ва косинуслар теоремаларини қўлланг.

884. 4 см, 6 см. Ечиш. (105-чизма). $AB = x$, $BC = x+2$, $\angle A = 2y$, $\angle C = y$; $\frac{x}{\sin y} = \frac{x+2}{\sin 2y} = \frac{5}{\sin(180^\circ - 2y)}$.




104-чизма.




105-чизма.

$$\frac{x}{\sin y}=\frac{x+2}{\sin 2y} \quad (1) \qquad \frac{x}{\sin y}=\frac{5}{\sin 2y} \quad (2)$$

(1) ва (2) дан: $\cos y=\frac{3}{4}$, $x=4$.

885. $\frac{30}{\sqrt{73}}$; $\frac{80}{\sqrt{73}}$. **886.** $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{5}}$. Ечиш. $AC=b$; $BC=a$ берилган, $AB=x$, $OE=y$, $OD=z$ бўлсин (106- чизма).

$\triangle AOB$ дан $x^2=BO^2+AO^2=4y^2+4z^2$.

$$x^2=4y^2+4z^2 \qquad (1)$$

$$\triangle AOE \text{ дан: } y^2+4z^2=\frac{b^2}{4} \qquad (2)$$

$$\triangle BOD \text{ дан: } z^2+4y^2=\frac{a^2}{4} \qquad (3)$$

**(1), (2), (3) лардан тузилган системани ечиб, $x$ топилади.**

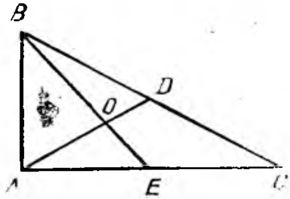
**887.** 6 см$^2$

**888.** $\operatorname{tg} x=\frac{\sin(\alpha-\beta)}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta}$. *Кўрсатма.* Медиана ўтказишдан ҳосил бўлган икки учбурчакка синуслар теоремасини қўлланг.

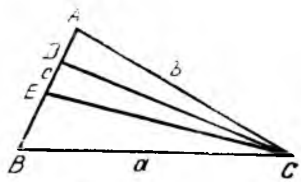
889. $CE=m_c=\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2)-c^2}$. Ечиш. 107- чизмада $CD$ биссектриса бўлса, биссектриса хоссасига кўра

$$\frac{BD}{DA}=\frac{a}{b};\quad \frac{BD}{c-BD}=\frac{a}{b};\quad BD=\frac{ac}{a+b}.$$

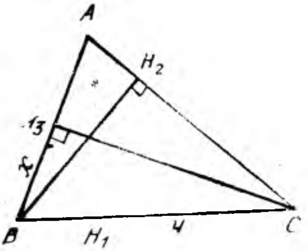
$\triangle ABC$ ва $\triangle BDC$ лар учун косинуслар теоремасини қўллаб, $\cos B$ ни топиб олсак, $\cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$, $\cos B=\frac{a^2+BD^2-CD^2}{2a\cdot BD}$; буларнинг ўнг томонлари тенглаштирилиб, $CD$ топилади.



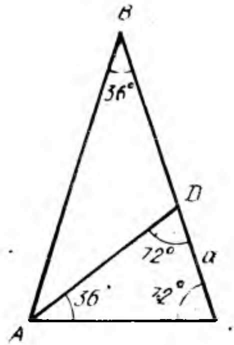

106-чизма.




107-чизма.




108-чизма.




109-чизма.

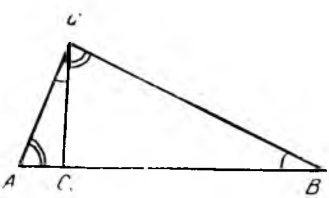
**890.** $\dfrac{\sqrt{S_2(S_1+S_2)}}{\sqrt[4]{4S_1^2-S_2^2}}$.

**891**. $\cos\alpha=\dfrac{3}{4}$. **892.** 10 м; 25 м;20 м. **893.** 6 см.

**894.** $x=\dfrac{h_1}{\sin B}$, $y=\dfrac{h_2}{\sin C}$, $z=\dfrac{h_3}{\sin A}$. *Кўрсатма.* $ABC$ учбурчакда $AB=x$, $BC=y$, $AC=z$ деб белгиласак, $x$, $y$, $z$ ларни $h_1$, $h_2$, $h_3$ орқали ифодалаш керак. Ҳақиқатан, $\frac{1}{2}xh_1=\frac{1}{2}yh_2=\frac{1}{2}zh_3=S$ ёки $\dfrac{x}{\frac{1}{h_1}}=\dfrac{y}{\frac{1}{h_2}}=\dfrac{z}{\frac{1}{h_2}}=2S$

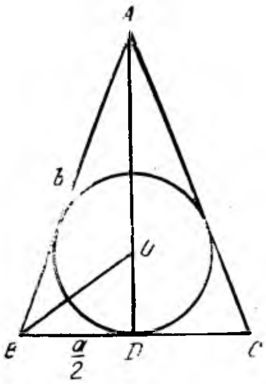
Агар томонлари $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$, $\frac{1}{h_3}$ дан иборат $A_1B_1C_1$ учбурчакни олсак, $\triangle ABC\infty\triangle A_1B_1C_1$ бўлиб, бу учбурчакларнинг мос бурчаклари тенг бўлади. Демак, томонлари маълум $A_1B_1C_1$ учбурчакнинг бурчакларини топамиз. $ABC$ учбурчакда бурчаклар ва баландликлар маълум бўлиб қолади, томонларни топиш мумкин (108-чизма).

**895.** $\dfrac{a}{4\sin^2 18°}$. Ечиш. $\triangle ABC\infty\triangle CAD$ бўлгани учун (109-чизма): $\dfrac{AC}{DC}=\dfrac{BC}{AC}$, $BC=\dfrac{AC^2}{DC}$. $ADC$ тенг ёнли учбурчакдан $AC=$ $=\dfrac{a}{2\sin 18°}$, $BC=$ $=\dfrac{\frac{a^2}{4\sin^2 18°}}{a}=\dfrac{a}{4\sin^2 18°}$.




110-чизма.

**896.** $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Ечиш $CC_1 \perp AB$, $CC_1^2 = C_1A \cdot C_1B$ дан: $\frac{C_1C}{C_1A} = \frac{C_1B}{C_1C}$ (110-чизма). Шартга кўра $\angle CC_1A = \angle CC_1B = 90^\circ$, бу икки тенгликка асосан $\triangle AC_1C \sim \triangle CC_1B$. У ҳолда $\angle A = \angle C_1CB$. $\angle B = \angle ACC_1$, $\angle A + \angle ACC_1 = 90^\circ$ бўлгани учун $\angle C_1CB + \angle ACC_1 = 90^\circ = \angle C$, демак, $\angle C = 90^\circ$, $ABC$ учбурчак учун Пифагор теоремаси ўринлидир.




111-чизма.

**897.** $r = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{\frac{1}{2}(a+b+c)}$, $p = \frac{a+b+c}{2}$. *Кўрсатма.* $S = p \cdot r$ дан фойдаланинг.

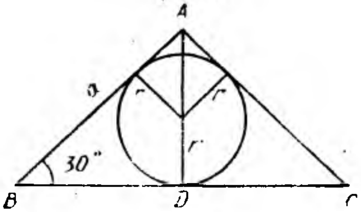
**898.** $r = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{2b-a}{2b+a}}$. Ечиш. $BO$—биссектриса, $AD = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$. $\frac{a}{2} : b = r : (AD - r)$ дан $r$ топилади (111-чизма).

**899.** $r = \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$. Ечиш. $S_{ABC} = \frac{1}{2} a \sin 120^\circ = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, $AD = a\cos 60^\circ = \frac{1}{2}a$. $BC = 2DC = 2 \cdot \sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}} = a\sqrt{3}$. $r = \frac{2S}{2AB+BC} = \frac{2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}}{2a + a\sqrt{3}} = \frac{a\sqrt{3}}{2(2+\sqrt{3})} = \frac{a\sqrt{3}(2-\sqrt{3})}{2}$.
(112-чизма),

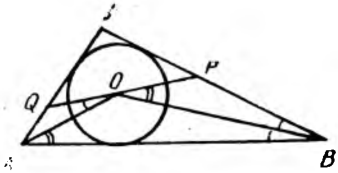
**900.** *Кўрсатма.* $\triangle OBP \sim \triangle AOB$, $\triangle AOQ \sim \triangle AOB$ бўлгани учун $\angle POB + \angle BOA + \angle AOQ = 180^\circ$, демак, $P$, $O$, $Q$ лар бир тўғри чизиқда ётади (113-чизма).

**901.** $r = \frac{a + b - \sqrt{a^2+b^2}}{2}$, $R = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$.

**902.** $AB : BC : AC = 3 : 4 : 5$. Ечиш. Учбурчак томон-




112-чизма.




113-чизма.

ларини унга ички чизилган айлана радиуси орқали ифодалаймиз (114- чизма):

$$R : r = 5 : 2,\ R = \frac{5}{2} r.\ BC = 2R = x + y,$$

$$(r + x)^2 + (r + y)^2 = (x + y)^2.$$

$$2r^2 + 2r \cdot 2R = 2xy,\ xy = 6r^2 \cdot \begin{cases} x + y = 5r, \\ xy = 6r^2; \end{cases}$$

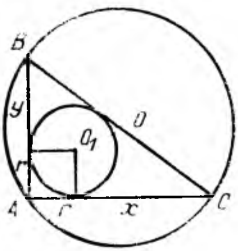
булардан:

$$t^2 - 5rt + 6r^2 = 0,\ t_{1,2} = \frac{5r \pm r}{2},\ x = 3r,\ y = 2r.$$

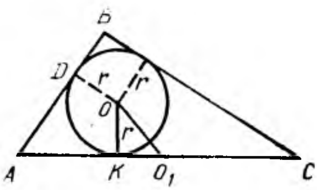
$AB = 3r.\ AC = 4r,\ BC = 5r.\ AB : AC : BC = 3 : 4 : 5.$

**903.** $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Ечиш. $S = pr,\ 6 = \frac{3+4+5}{2} r,\ r = 1.\ AD = AK = 2$ (115- чизма). $KO_1 = 2{,}5 - 2 = 0{,}5$. $\triangle OKO_1$ дан $OO_1 = \sqrt{OK^2 + KO_1^2} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

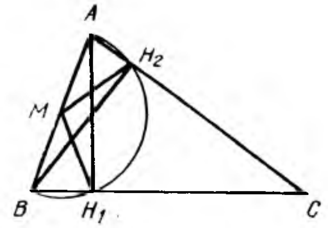
**905.** $\angle C = 45°$. Ечиш. $AB$ кесма $H_1$ ва $H_2$ нуқталардан $90°$ ли бурчак остида кўринади. $MA = MB$ бўлгани учун $A$, $B$, $H_1$, $H_2$ нуқталар $M$ марказли айланада ёта-



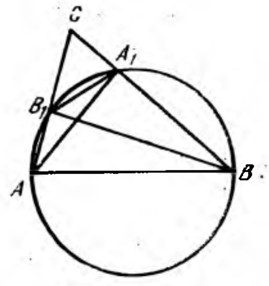

114-чизма.




115-чизма.




116-чизма.




117-чизма.

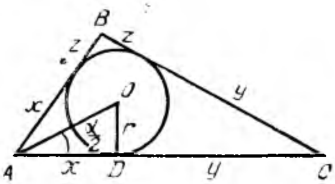
ди: $MA=MH_1=MH_2=MB$ айлана радиуси. $\overset{\smile}{H_1H_2}=90°$. $\angle H_1BH_2=\angle H_1AH_2$ бўлгани учун $\angle H_2BC=45°$, демак, $\angle C=45°$ (116- чизма).

**906**. 3 см, 4 см. **907**. 3, 4, 5. **908**. $\frac{1}{2}(p+q)\sqrt{pq}$.

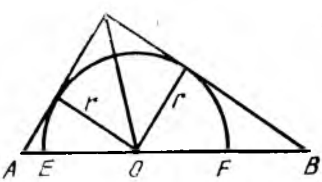
**909**. Исботи. $\angle AB_1B=\angle AA_1B=90°$. $A$, $B_1$, $A_1$, $B$ нуқталар битта айланада ётади. $\angle AB_1A_1+\angle B=180°$, $\angle B=180°-\angle AB_1A_1$, $\angle CB_1A_1=180°-\angle AB_1A_1$; $\angle B=$ $=\angle CB_1A_1$, $\angle A=\angle CA_1B_1$, демак, $\triangle A_1B_1C\sim\triangle ABC$ (117- чизма).

**910**. $BC=\frac{S}{r}-r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$. Ечиш. $S=\frac{1}{2}r(x+y+y+$ $+z+z+x)=r(x+y+z)$. $\frac{S}{r}=x+y+z$, (1) (118- чизма). $\triangle AOD$ дан: $\frac{x}{r}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $x=r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$ (2).

(1) ва (2) дан: $y+z=\frac{S}{r}-x=\frac{S}{r}-r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, $BC=\frac{S}{r}-$ $-r\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$.




118-чизма.




119-чизма.

**911.** $S = 2r^2\sin\alpha\cdot\sin\beta\cdot\sin(\alpha+\beta)$. *Кўрсатма.* Синуслар теоремасини қўлланг.

**912.** $EF = \dfrac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b}$, $\quad p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Ечиш. $S_{ABC} = S_{ACO} + S_{OCB} = \frac{1}{2}r\cdot b + \frac{1}{2}r\cdot a = \frac{1}{2}r(a+b)$,

$r = \dfrac{2S_{ABC}}{a+b}$ (119- чизма).

$$EF = 2r = \frac{4S_{ABC}}{a+b} = \frac{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a+b}.$$

**913.** $a+b$.

**914.** $AC = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2+ab}}{2}$. $\quad BD = \dfrac{\sqrt{a^2+b^2-ab}}{2}$.

**915.** $\dfrac{S_1\cdot S_3}{S_2}$. $\qquad$ Ечиш. $AO\cdot OD\cdot\sin\alpha = 2S_1$.

$OB\cdot OC\cdot\sin\alpha = 2S_3$, $\quad AO\cdot OD\cdot OB\cdot OC\cdot\sin^2\alpha = 4S_1\cdot S_3$. **(1)**

Худди шунга ўхшаш $AO\cdot OB\cdot\sin(180^\circ-\alpha) = 2S_2$.

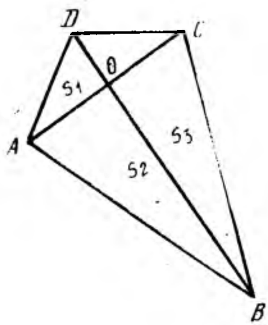
$DO\cdot OC\cdot\sin(180^\circ-\alpha) = 2S_4$.

$AO\cdot OB\cdot DO\cdot OC\cdot\sin^2(180^\circ-\alpha) = 4S_2\cdot S_4$.

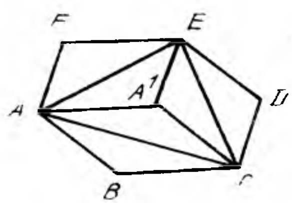
$AO\cdot OB\cdot DO\cdot OC\cdot\sin^2\alpha = 4S_2\cdot S_4$ **(2)**

(1) ва (2) нинг чап томонлари тенг, демак, $S_1\cdot S_3 = S_2\cdot S_4$; $S_4 = \dfrac{S_1\cdot S_3}{S_2}$ (120- чизма)

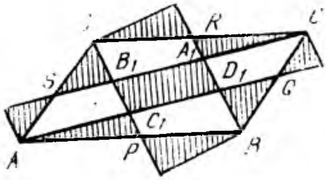
**916.** $\frac{1}{2}$. Ечиш. $AF$ ни $\overrightarrow{FE}$ қадар параллел кўчирсак, $A'E$ ҳосил бўлади (121- чизма). $\triangle AFE = \triangle AEA'$, $\triangle EDC = \triangle EA'C$ $\triangle ABC = \triangle AA'C\cdot S_{ACE} : S_{ABCDEF} = 1:2$.




120-чизма.




121-чизма.




122-чизма.

**917.** $P = p_1 + p_2 + p_3$. **918.** $2a$. **919.** 0,6 м; 0,8 м. **920.** 25 см. 10 см.

**922.** *Кўрсатма.* 122-чизмадан кўринадики, $A_1B_1C_1D_1$ параллелограмминг юзи $\frac{1}{5} \cdot S_{ABCD}$ га тенг.

**923.** $\frac{2ab \cdot \cos\alpha - a^2 - b^2}{2a\cos\alpha - 2b}$. Ечиш. $BF = x$ бўлсин (123-чизма) $AE = b - x$, $AB = a$, $EB = x$, $\triangle ABE$ да косинуслар теоремасига кўра $x^2 = a^2 + (b - x)^2 - 2a(b - x)\cos\alpha$; бундан $x = \frac{2ab\cos\alpha - a^2 - b^2}{2a\cos\alpha - 2b}$.

**924.** $|\mathrm{ctg}\,\alpha| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}$. Ечиш. $AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha$. Синуслар теоремасига кўра:

$$\frac{AC}{\sin\alpha} = 2R. \quad \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{\sin\alpha} = 2R. \quad (124\text{-чизма}).$$

$$AO_1 = R = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}}{2\sin\alpha}; \quad O_1O_2 = 2OO_1 = 2\sqrt{AO_1^2 - AO^2} =$$

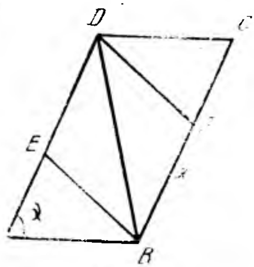
$$= 2\sqrt{\frac{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}{4\sin^2\alpha} - \frac{a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\alpha}{4}} =$$

$$= |\mathrm{ctg}\,\alpha| \cdot \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha}.$$

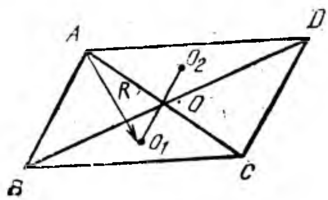
**925.** $\frac{8r^3 \cdot R^3}{(r^2 + R^2)^2}$.

**926.** $\alpha = \arcsin\frac{2}{\pi}$, $\beta = \pi - \arcsin\frac{2}{\pi}$.

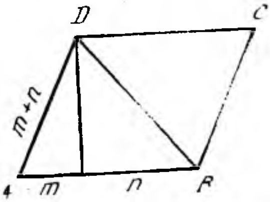
**927.** $\sqrt{2n(m + n)}$, $\sqrt{2(2m + n)(m + n)}$.



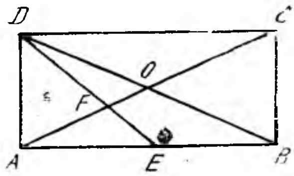

123-чизма.




124-чизма.




125-чизма.




126-чизма.

Ечиш. $DE=h$ бўлса, $h=\sqrt{(m+n)^2-m^2}=$
$=\sqrt{2mn+n^2}$. $\frac{1}{2}d_1d_2=h(m+n)=(m+n)\sqrt{2mn+n^2}$.

$$BD=d_1=\sqrt{h^2+n^2}=\sqrt{2n(m+n)}.$$

$d_2=\frac{2(m+n)\cdot\sqrt{2mn+n^2}}{d_1}=\sqrt{2(2m+n)(m+n)}$. (125-чизма).

928. 18 см, 9 см, $9\sqrt{3}$ см. 929. $\frac{5}{4}\sqrt{m^2+n^2}$, $\frac{5}{6}\sqrt{m^2+n^2}$.

930. $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. 931. $\frac{b\sin\alpha}{a+b\cos\alpha}$, $\frac{a\sin\alpha}{b+a\cos\alpha}$. 932. $\frac{p_1}{p}=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

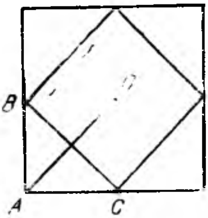
933. $S=a^2(\sqrt{2}-1)$. 934. $P=8a(2-\sqrt{2})$, $S=$
$=2a^2(2-\sqrt{2})$. 935. $\frac{p}{d}=2\sqrt{2}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\cdot\frac{m-n}{m+n}\right)$.

936. 90° Ечиш. $AD=x$ бўлсин (126-чизма). $\triangle ABD$ да $AO$, $DE$ лар медианалар бўлгани учун $EF=\frac{1}{3}DE$, $AF=\frac{2}{3}AO$, $EF=\frac{1}{3}DE=\frac{1}{3}\sqrt{AD^2+AE^2}=\frac{\sqrt{6}}{6}x$.

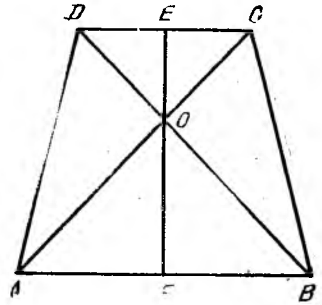
$AF=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}AC=\frac{x\sqrt{3}}{3}$. $\triangle AEF$ дан косинуслар теоремасига кўра:

$$AE^2=AF^2+FE^2-2AF\cdot FE\cdot\cos\varphi;$$
$$\cos\varphi=\frac{AF^2+FE^2-AE^2}{2AF\cdot EF}=0;\ \varphi=90^\circ.$$

937. $AO=\frac{a\sqrt{2}}{2}$. *Кўрсатма.* Квадратнинг ҳар бир томонига берилган учбурчакдан чизилса, изланаётган масофа катта квадратнинг диагонали ярмисига тенг бўлади (127-чизма).




127-чизма




128-чизма.

**938.** $BD = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$;
$DA = \frac{b\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}$.

**939.** $2\sqrt{3}-3$.

**940.** $m$. Ечиш. $\triangle DOE$ дан $EO = DE$ (128-чизма). $\triangle AOF$ дан $OF = AF$; $EO+OF = DE+AF$; $EF = \frac{DC}{2} + \frac{AB}{2} = \frac{AB+DC}{2} = m$.

**943.** $\frac{a-b}{2}$. **944.** $\frac{2ab}{a+b}$. **945.** $4b-a$. **946.** $\frac{3a}{4}$. **947.** $\frac{2ab}{a-b}$.

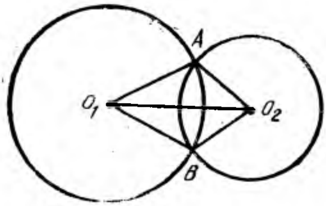
**948.** $\frac{ah}{a-b}$. **949.** $\frac{a+b}{4}\sqrt{3b^2+2ab-a^2}$. **950** 1260 кв. бирлик. **951.** $\frac{\sqrt{3}}{2}ac - \frac{\sqrt{3}}{8}c^2$. **952.** $m^2$. **953.** $r = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{S}{2}}$.

**954.** $\frac{a\sqrt{13}}{2}$. **955.** $\frac{a\sqrt{7}}{4}$. *Кўрсатма.* $ABCN$ тўртбурчакда $\vec{PM} = \frac{1}{2}(\vec{AB}+\vec{NC})$. Бу муносабатнинг скаляр квадратини топинг.

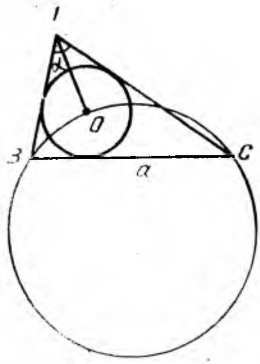
**956.** $\frac{a\sqrt{349}}{10}$. **957.** 12 см; 20 см. **958.** $r$. **959.** 12 м; $45^\circ 14'$. **960.** 2,5 см. **961.** 2,2 м. **962.** 20 см. **963.** 10 см.

**965.** $r = \frac{a+b-c}{2}$. **966.** $l-c$. **967.** $AB:BC:AC = 5:4:3$ ёки $AB:BC:AC = 5:3:4$. **968.** 64 см; 36 см.

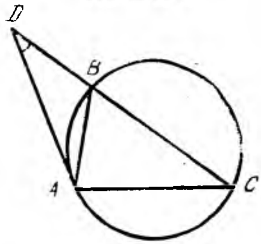
**969.** $p = a+b-c$. **970.** $d-r$, $d+r$. **973.** $a\sqrt{\frac{2}{3}}$.




129-чизма.




130-чизма.




131-чизма.

**974.** $a_{10} = \frac{R(\sqrt{5}-1)}{2}$; $a_5 = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$. **975.** Мумкин эмас. **976** $\frac{r}{2}$.

**977.** $\left(\pi - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \cdot r^2$.

**978.** $S = R^2 \arccos \times \times \frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd} + r^2 \arccos \times \times \frac{d^2+r^2-R^2}{2rd} - -Rd\sqrt{1-\left(\frac{d^2+R^2-r^2}{2Rd}\right)^2}$. *Кўрсатма.* $\left.\begin{matrix}\angle AO_1O_2 = \alpha \\ \angle AO_2O_1 = \beta\end{matrix}\right\}$ белгилаш киритиб, изланаётган юзни $AO_1B$ ва $AO_2B$ секторларнинг юзлари орқали ва $\triangle O_1AO_2$ юзи орқали ифодалаш мумкин.

$$\triangle O_1AO_2 \text{ дан } \frac{R}{\sin\beta} = \frac{r}{\sin\alpha};\quad R\cos\alpha + r\cos\beta = d$$

ларни топиб, $\alpha$, $\beta$ ни системанинг ечими сифатида топиш мумкин (129-чизма).

**980.** $R = \frac{a}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$. *Кўрсатма.* Берилган учбурчакка ва радиуси изланаётган учбурчакка учбурчак ички бурчаклари йиғиндисини татбиқ қилинг, ички чизилган айлана марказидаги берилган томонга тиралган бурчакни топиб олинг, кейин синуслар теоремасидан фойдаланинг (130-чизма).

981. $\sqrt{\frac{7}{3}}$. 982. $3r$. 983. $R$. 984. $4R\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\alpha}{2}$.

985. $\angle B-\angle C=\beta-\gamma$. Ечиш. $\angle D=\frac{1}{2}(\smile AC-\smile AB)=$

$=\frac{1}{2}(2\cdot\angle B-2\cdot\angle C)=\angle B-\angle C$ (131- чизма).

986. $\frac{R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}$, $\frac{2R\sqrt{r}}{\sqrt{R+r}}$, $\frac{2r\sqrt{R}}{\sqrt{R+r}}$.

987. $S=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\cdot R^2$. 988. $\pi\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-\frac{ab}{2}$. 989. $\frac{\pi R^2}{36}$.

990. $R(2\sqrt{3}-3)$. 991. $\sqrt{\frac{r_1\cdot r_2\cdot r_3}{r_1+r_2+r_3}}$. 992. $R=c(\sqrt{3}+1)$.

993. $r_1+r_2+r_3$. 994. $\frac{1}{2}r(2-\sqrt{3})$. 995. $\frac{a^2+\ h^2}{8h}$.

1032. Пифагор теоремаси.

## МУНДАРИЖА

**Назаров Хамидулла Ходияевич**
**Очилова Хатима Очиловна**
**Подгорнова Елена Гавриловна**

**ГЕОМЕТРИЯДАН МАСАЛАЛАР ТУПЛАМИ**

II қисм

Педагогика олий ўқув юртлари талабалари учун

*Ташкент «Ўқитувчи» 1993*

Муҳаррир **Х. Алимов**
Расмлар муҳаррири **Н. Сучкова**
Техмуҳаррирлар **Э. Вильданова, С. Турсунова**
Мусаҳҳиҳ **М. Минаҳмедова**

ИБ № 5411

Теришга берилди 22.12.92. Босишга рухсат этилди. 28.10.93 й. Формати $84 \times 108/32$. Тип. қоғози. Кегли 10 шпонсиз. Литературная гарнитураси. Юқори босма усулида босилди. Шартли б. л. 8,19. Шартли кр-отт. 8,4. Нашр. л. 7,3. Тиражи 3000. Зак. № 1490.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30. Шартнома № 9—31—91.

Область газеталарининг М. В. Морозов номидаги бирлашган нашриёти ва босмахонаси. Самарқанд ш., У. Турсунов кўчаси, 82. 1993.