ГЕОМЕТРИЯ

Академик лицей ва касб-ҳунар
коллежлари учун

ЎЗБЕКИСТОН РЕСПУБЛИКАСИ
ОЛИЙ ВА ЎРТА МАХСУС ТАЪЛИМ ВАЗИРЛИГИ

ЎРТА МАХСУС КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИ МАРКАЗИ

ЎРТА МАХСУС КАСБ-ҲУНАР ТАЪЛИМИНИ
РИВОЖЛАНТИРИШ ИНСТИТУТИ

Ҳ.М.Сайфуллаева

ГЕОМЕТРИЯ

*Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари
учун ўқув қўлланма сифатида тавсия этилган*

ТОШКЕНТ «ЎҚИТУВЧИ» 2002

Тақризчилар: педагогика фанлари номзоди,
доцент **О.Примов**,
доцент **С.У.Узоқов**

Масъул
муҳаррир: физика-математика фанлари
номзоди, доцент **Қ.Ҳ.Абдуллаев**

Мазкур қўлланма академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун математикадан янги дастурлар ва Давлат таълим стандартларига мувофиқ ёзилган. Унда геометрия курсининг асосий бўлимлари баён этилган. Назарий материални мустаҳкамлаш ва ривожлантиришга ёрдам берадиган кўплаб масала ва машқлар, шунингдек, амалий масалалар ҳам келтирилган.

С $\frac{4306020502-73}{353(04)-2002}$ қатъий буюрт.—2002

ISBN 5-645-03864-9

СЎЗ БОШИ

Ушбу ўқув қўлланма Ўзбекистон Республикаси Олий ва ўрта махсус таълим вазирлиги томонидан «Академик лицейлар ва касб-ҳунар коллежлари» учун тасдиқланган ўқув дастурига мувофиқ ёзилди.

«Кадрлар тайёрлаш миллий дастури»нинг таркибий қисмларидан бири узлуксиз таълим бўлиб, бунда академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари муҳим ўрин тутади. Академик лицей Давлат таълим стандартларига мувофиқ ўқувчиларнинг имкониятлари ва қизиқишларини ҳисобга олган ҳолда уларни жадал интеллектуал ривожлантириш, чуқур соҳалаштириш, табақалаштириш, касбга йўналтирилган таълим олишларини таъминлайди. Ўқувчилар ўзлари танлаб олган таълим йўналиши бўйича билим-савияларини ошириш ҳамда фанни чуқур ўрганишга қаратилган махсус касб-ҳунар кўникмаларини эгаллаш имкониятига эга бўладилар.

Касб-ҳунар коллежида тегишли Давлат таълим стандартлари доирасида ўқувчиларнинг касб-ҳунарга мойиллигини, билим ва кўникмаларини чуқур ривожлантириш, бир ёки бир неча замонавий касб-ҳунарни эгаллаш ҳамда тегишли ўқув фанларидан чуқур назарий билим олиш имкони берилади.

Таълимнинг бу янги замонавий турларида геометрияни ўқитишдан асосий мақсад ўқувчиларга чуқур илмий асосланган назарий билим бериш, олинган билимларни касбларга татбиқ эта олиш бўйича малака ва кўникмаларни ҳосил қилиш, мустақил фикрлаш қобилиятларини ривожлантириш, мустақил билим олишнинг йўл-йўриқларини ўргатишдан иборат бўлмоғи лозим.

Қўлланмани ёзишда муаллиф маълум (кўрсатилган) адабиётлардан ва ўзининг кўп йиллик педагогик тажрибасидан фойдаланди.

Қўлланманинг қўлёзмасини эътибор билан ўқиб чиқиб, камчиликларни кўрсатиш билан бирга, уни тузатиш учун маслаҳатларини ва хизматларини аямаган Ўрта махсус касб-ҳунар таълимини ривожлантириш институти академик лицейларда таълим мазмуни ва методикаси бўлими мудири, физика-математика фанлари номзоди, доцент Қ.Ҳ.Абдуллаевга, шунингдек, китобнинг қўлёзмасини кўриб чиқиб, фикр-мулоҳазалар берган ҳамда амалий ёрдам кўрсатган Қарши давлат университети доценти С.У.Узоқовга, шунингдек, китобнинг қўлёзмасини компьютерда тайёрлашда хизмати сингган, «Ўзбекўқувавтоматика» Қашқадарё ихтисослаштирилган маркази бош муҳандиси С.А.Жўраевга муаллиф самимий миннатдорчилик изҳор этади.

Муаллиф

ГЕОМЕТРИЯ ФАНИНИНГ ТАРАҚҚИЁТИ

Геометрия геометрик шаклларнинг хоссалари ҳақидаги фандир. «Геометрия» сўзи грекча сўз бўлиб, ўзбекча «ер ўлчаш» деган маънони билдиради. Бундай аталиш геометриянинг пайдо бўлиши ер устида ўлчаш ишлари билан боғлиқлигидан дарак беради.

Биз геометрияни ўрганишни планиметриядан бошлаймиз. Планиметрия бу геометриянинг бир бўлими бўлиб, унда текисликдаги шакллар ўрганилади.

Қадим замонлардан бизгача етиб келган геометрия фанининг тараққиёт йўлига назар ташлайлик.

Кўпгина адабиётларда математика фани, жумладан геометриянинг биринчи даври қадимги юнонларгача бўлган даврни ўз ичига олади. Юнонларгача бўлган давр геометрияни асослашга тўлиқ қизиқиш бўлмаганлиги билан характерланади.

Мисрликлар ва бобилликлар, ҳиндлар ва бошқа қадимий халқлар бизнинг эрамиздан бир неча минг йиллар аввал ҳам таърифсиз, аксиомасиз ва исботсиз қабул қилинган геометрик маълумотларга эга бўлганлар. Уларнинг геометрияси тажриба ва кузатишлардан олинган қоидалар ва формулалардан иборат бўлиб, юзларни ва ҳажмларни ҳисоблашда ишлатилган, ҳисоблашларда қўлланилган формулаларнинг айримлари, ҳатто тўғри ҳам бўлмаган, уларнинг геометриясини эмпирик (тажриба) геометрия деб юритилади.

Геометриянинг фан сифатида шакллана боришининг иккинчи даври қадимги юнонлар даври ҳисобланиб, улар илмий маълумотларни кашф этибгина қолмасдан, балки такомиллашган мантиқий усулларни ишлаб чиқиб, тажриба ва кузатишлардан тўпланган геометрик материалларни қатъий бир системага ҳам келтирдилар.

Геометрия фанини мантиқий умумлаштирилган фанга айлантиришда Фалес, Пифагор, Гиппократ, Евдокс, Эвклид, Архимед каби олимларнинг хизмати бениҳоят каттадир.

Эвклиднинг «Бошланғичлар» («Негизлар») деб номланган китоби геометрияга асос бўлишда қадимги юнонларнинг энг буюк ютуғи саналади. «Бошланғичлар» китобининг аҳамияти ва буюклиги шундан иборатки, у қарийб 2300 йилдан ортиқроқ вақт давомида бутун дунёда геометриядан ягона дарслик сифатида хизмат қилиб келган.

«Бошланғичлар» 13 китобдан иборат бўлиб, бу асарнинг дастлабки 6 та китоби планиметрияга, VII–X китоблари сон ҳақидаги таълимотга, XI–XIII китоблари эса стереометрияга оиддир.

Геометрия тарихий тараққиётининг учинчи даври *ҳозирги замон даври* деб юритилади.

Ҳозирги давр геометриясининг ўзига хос хусусияти шундан иборатки, у ҳар қандай кўргазмали намойиш этишга ёки геометрик тушунчаларни ҳар хил чизма тасвирлариин кўрсатишга асосланмасдан, балки етарли аниқ қоидалар, аксиомалар ва таърифлар асосида тузилгандир. Шунинг учун уни *аксиоматик геометрия* деб юритилади.

Учинчи давр геометрия фанининг ўзгаришлари сифатида *Н.И.Лобачевский* (1792–1856) яратган янгиликларни кўрсатиш мумкин. У Эвклид геометриясидан фарқли янги бир геометрияни яратдики, у *Лобачевский геометрияси* номи билан юритилмоқда. Бу геометриянинг яратилиши эса фанда бурилиш деб алоҳида қайд этиб келинмоқда.

Бу иккала геометрия орасидаги энг асосий фарқ улардаги «Параллеллар назарияси»нинг турличалигидан иборатдир.

«Геометрия» фанининг ривожланишида ватандош олимларимизнинг ҳам хизматлари буюкдир.

Масалан, тиббиёт илмида бутун дунёга донғи кетган Ўрта Осиёлик улуғ аллома *Абу Али ибн Сино* (980–1037) ўзининг «Билимлар китоби»да планиметрия асослари ва стереометрия асосларини бир қисмга бирлаштириб баён этади (Эвклид «Бошлангичлар» китобида планиметрияни биринчи китобида, стереометрияни иккинчи китобида баён этади). Масалан, 1- бўлимининг «Стереометриянинг кесишувчи чизиқларга тегишли бўлган бошланғичлари ҳақида» деган қисмида тўғри чизиққа бўлган перпендикуляр ҳақида, қарийб шу ернинг ўзидаёқ текисликка перпендикуляр ҳақида ҳам сўз юритилади.

Фанда ёрқин из қолдирган улуғ ватандошимиз Абу Райҳон Берунийнинг илмий мероси ичида мактабларимиз учун фойдали бўлган маълумотлар жуда кўпдир. Масалан, «Маъсуд қонунлари» номли йирик асарнинг геометрия ва тригонометрияга бағишланган бобларидаги кўп маълумотларни академик лицей ва касб-ҳунар коллежларида тўгарак машғулотларида ўрганилиши таълим ва тарбиявий жиҳатдан катта фойда келтиради.

Хўш, «геометрия» фани ўзи нимани ўрганади ва у қандай пайдо бўлган деган саволнинг туғилиши табиийдир.

Биз ҳар хил нарсалар ва воқеалар орасида яшаймиз, бизни ўраб олган нарсалар ҳар хил хоссаларга эга. Нарсаларнинг хусусиятлари ва хоссаларини турли фанлар ўрганади. Масалан, металлдан ясалган шарни қарайдиган бўлсак, химия бу шарда қанча темир, углерод ва бошқа элементлар борлиги билан қизиқса, физика эса қандай ҳароратда эришлиги, босимга қандай куч билан қаршилик кўрсатиши каби хоссаларни ўрганади, геометрия шарнинг юқоридаги хоссалардан фарқ қилувчи бошқа хоссаларини ўрганади. Геометрия шарнинг шакли, ўлчами, бошқа нарсаларга нисбатан вазиятига қизиқиб, унинг оғирлиги, ранги, қаттиқлиги, таркиби каби бошқа хоссаларини эътиборга олмайди.

Кишилар меҳнат фаолиятида фойдаланиши қулай бўлиши учун нарсаларнинг шакли ва ўлчамига жуда катта эътибор билан қарайдилар. Масалан, ёзишда ноқулай бўлганлиги учун узунлиги 2 метр бўлган қалам ҳеч вақт ишлатилмайди. Темир йўл рельслари поезд ва вагонлар ғилдираклари орасидаги масофадан катта кенгликда ўрнатилмайди.

Яна шуни ҳам айтиш керакки, кишилар амалий меҳнат фаолиятларида нарсалар орасидаги масофани ўлчаш ва уларни маълум тартибда жойлаштиришга дуч келадилар. Масалан, завод цехларида станокларни тўғри жойлаштириш меҳнат унумдорлигини оширишга ёрдам беради, машина механизмининг айрим қисмларини мақсадга мувофиқ жойлаштириш улардан фойдаланишга қулайлик туғдиради.

Демак, нарсаларнинг шаклини, ўлчамларини ва уларнинг ўзаро вазиятларини (жойлашувини) ўрганувчи фан *геометрия* дейилади.

Қадим замонларда одамлар масофаларни ўлчаш, меҳнат қуролларини ясаш, турли шаклдаги ва турли катталикдаги ер майдонларининг юзларини ҳисоблаш, режаларини олиш, режаларга қараб уларнинг ҳақиқий катталикларини аниқлаш, турли иншоотларнинг ва идишларнинг сиғимларини ҳисоблаш ишлари билан шуғулланишларига тўғри келган, турмушнинг ўзи одамлар олдига ҳар хил геометрик масалаларни ечиш вазифасини қўйган.

Мана шундай масалалардан бири:

Нил дарёсининг ҳар йили тошиб туриши натижасида ҳосилнинг нобуд бўлиши, ер майдонлари чегарасининг ювиб кетилиши содир бўлар эди. Тошқиндан сўнг кўп мисрликлар ўз ерларини топишлари ва уларнинг чегараларини қайтадан тиклашлари лозим эди. Ер майдонлари шаклини ва ўлчамларини қайта аниқ тиклаш эса ўлчаш, чизиш ва ҳисоблашга доир мураккаб ишлар билан боғлиқ эди. Савдо, денгизда сузиш ва ҳунармандчиликнинг ривожланиши идишларнинг сиғимини ўлчашни, нарсаларнинг шакли, ўлчамлари ва ўзаро жойлашувларига доир ҳар хил масалаларни ҳал қилишни талаб этар эди. Кишилар бу ишларни бажариш асосида аста-секин ҳисоблаш қоидаларини топа бошлайдилар.

Бу ўринда фанда ёрқин из қолдирган юртдошимиз Ал-Фарғонийнинг номини тилга олиш ўринлидир. Ал-Фарғоний Бағдод шаҳрида «Байтул ҳикма» («Ҳикматлар уйи») деб аталган илмий анжуманнинг раҳбари Ал-Хоразмий ҳузурида фаол иш олиб борган.

У яратган «Астролябия» ёки «Устурлаб» деб аталган асбобдан амалий ҳисоблаш ишларида кенг фойдаланганлар. У илмнинг ҳаётийлиги, амалда қўлланилишига кўп эътибор берган. У «қайси билим ҳаёт талабларига кўпроқ жавоб бера олса, ўша муқим ўрнашади» деб таъкидлайди.

I боб. ПЛАНИМЕТРИЯ АСОСЛАРИ

1- §. Қадимги масалалар

Бизгача етиб келган моддий-маданий ёдгорликлар, кўпгина қадимий ёзма ҳужжатлар бундан тахминан тўрт минг йиллар илгари Қадимий Миср ва Бобил халқлари анчагина геометрик маълумотларга эга эканликларидан далолат беради.

Масалан, Миср пирамидалари (фиръавнлар қабрлари)нинг шакллари ҳайратда қоларли даражада мунтазамлиги билан ажралиб туради.

Бу иншоотларнинг қурилишига фақат геометрик билимларга эга бўлган кишиларгина раҳбарлик қилиши равшандир.

Эрамиздан аввалги 2000−1700 йилларга тааллуқли бўлган Қадимги Миср папирусларида бир қатор геометрик масалаларнинг ечимлари бор, улардан баъзилари эса бенуқсон ечилган.

Геометрик маълумотларни бундан кейинги тўплаш ва системалаштириш ишидаги хизматлар қадимги юнон олимларига мансубдир.

Геометрик далилларнинг дастлабки исботлари милетлик Фалес (эрамиздан аввалги 639−548 йиллар) номи билан боғлиқ. Фалес мулоҳазаларнинг қандай усулларини қўллаганлигини биз фақат фаҳмлашимиз мумкин.

Масалан, Фалеснинг:

а) «Диаметр доирани тенг иккига бўлади».

б) «Вертикал бурчаклар тенг».

в) «Тенг ёнли учбурчак асосидаги бурчаклар тенг» каби теоремалари ифодаланишини кўздан кечириб, бу хоссаларнинг тўғрилиги бир шаклни иккинчи шакл устига қўйиш йўли билан топилган деб фараз қилиш мумкин.

Кўпгина теоремалар исботининг муаллифи Пифагор (эрамиздан аввалги 564−473 йиллар) дейишади. Аммо машҳур «Пифагор теоремаси» ундан анча олдин ҳам маълум бўлиб, уни ким исботлаганлиги ва Пифагорнинг ўзи қандай исботни берганлиги аниқланмаган.

Геометрик фактлар тўғрилигининг исботлари, фандаги муҳокамаларнинг умумий методлари, қадимги буюк файласуфлар Демокрит, Платон, Аристотелларнинг диққатини ўзига тортган. Қадимги буюк математик Архимед (эрамиздан аввалги 287−212 йиллар) Эвклиднинг назарий фикрларини чуқурлаштирди ва тўлдирди.

Архимеднинг кашфиётлари орасида айлана узунлигини ва доира юзини ўлчаш билан шаклларнинг ҳажмини, шу жумладан цилиндр ва шарнинг ҳажмларини ҳисоблаш билан боғлиқ бўлган масалаларни атрофлича ишлаб чиққанлигини қайд қилиш лозим.

Масалан, Архимед она шаҳри Сиракузани Рим босқинчилари ҳужумидан мудофаа қилиш пайтида қаҳрамонона ҳалок бўлган. У қабр тошига цилиндрга ички чизилган шарни тасвирлашни васият қилган. Шу шарнинг ҳажми цилиндр ҳажмининг 2/3 қисмига тенглигининг исботи Архимеднинг илмий ютуқларидан бири бўлган.

Масалалар:

а) учбурчакнинг юзини учала томонининг берилган узунликлари бўйича топиш;

б) ватарлар жадвалида 0° дан 180° гача бурчаклар учун ватар узунликлари 0,5° дан оралатиб берилган.

Циркуль ва чизгич ёрдамида бевосита ечиб бўлмайдиган ***классик масалалар:***

а) кубни шакллантириш;

б) бурчакни учта тенг қисмга бўлиш;

в) доира квадратураси.

Бу масалаларни бошқа геометрик қуроллар билан ечиш мумкин, циркуль ва чизғич билан эса тақрибан ечиш мумкин.

Кубни иккилантириш масаласи Қадимги Юнонистондан маълум бўлган ясашга доир учта асосий масаланинг биридир.

Масала (Деловс масаласи):

Ҳажми берилган куб ҳажмидан икки марта катта бўлган куб ясанг.

Берилган кубнинг қирраси a бўлсин, ясалиши керак бўлган кубнинг қиррасини x билан белгилаймиз.

Масала шартига кўра $x^3 = 2a^3$ бўлиб, берилган кубнинг қиррасини $a = 1$ десак, $x^3 - 2 = 0$ тенглама ҳосил бўлади.

Алгебрадан маълумки, бош ҳади олдидаги коэффициенти бирга тенг ва қолган коэффициентлари бутун сонлардан иборат бир номаълумли алгебраик тенгламанинг рационал илдизлари фақат бутун сонлардан иборат бўлиши учун улар озод ҳаднинг бўлувчилари таркибига ҳам кириши керак, лекин 2 сонининг бўлувчилари фақат ±1; ±2 сонларидан иборат бўлиб, улар тенгламани қаноатлантирмайди. Демак, $x^3 - 2a^3 = 0$ тенглама ҳам рационал илдизларга эга эмас, яъни кубни иккилантириш масаласи циркуль ва чизғич ёрдамида ҳал қилинмайди.

2- §. Айлана ёйининг градус ўлчовлари

Айланада иккита ихтиёрий A ва B нуқтани белгилайлик. Улар айланани иккита ёйга ажратади.

Бу ёйларнинг ҳар бири *айлана ёйи* деб аталади. Айлана ёйларини бир-биридан фарқлаш учун улар орасида оралиқ нуқта белгиланади ёки кичик лотин ҳарфи қўйилади.

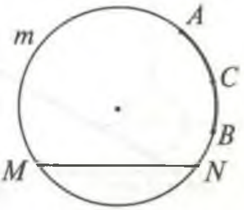
Масалан, 1- расмда ажратиб кўрсатилган ёй $\smile ACB$ (ўқилиши: ACB ёй) ёки, шунингдек, $\overset{\smile}{ACB}$ ёки $\overset{\smile}{AmB}$ каби белгиланади.

1- расмда MN ватар (кесма) ва MN ёй кўрсатилган. Одатда MN ватар MN ёйни тортиб туради дейилади.

Айлана бутун ёйининг 360 дан бир бўлаги *бир градус* деб аталади ва 1° каби белгиланади. Градус айлана ёйининг ўлчов бирлиги қилиб олинган. Масалан, AB ёйнинг градус ўлчови 105° га тенг бўлса, у $\overset{\smile}{AB} = 105°$ шаклида ёзилади.

Айлана диаметри унинг ёйини 180° га тенг бўлган иккита ёйга ажратади.

Айлана ёйининг градус ўлчови унинг радиусига боғлиқ эмас.



1- расм

Машқлар

1. Айлананинг $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{12}$ бўлаги неча градусли ёйлар бўлади?

(*Жавоб:* 180°; 120°; 90°; 36°; 30°.)

2. Айланани 1, 4, 8, 11 сонларига пропорционал бўлган ёйларга бўлинг.

(*Жавоб:* 15°; 60°; 120°; 165°.)

3. Соатнинг соат мили 1 соатда неча градусли ва минут мили неча градусли ёй чизади?

(*Жавоб:* 30°; 360°.)

4. Соатнинг минут мили 15 минутда неча градусли ёй чизади?

(*Жавоб:* 90°.)

5. Соатнинг минут мили 1 минутда неча градусли ёй чизади?

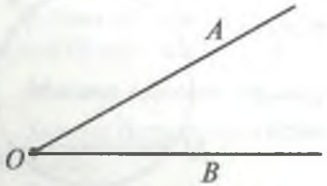
(*Жавоб:* 6°.)

3- §. Бурчак ва унинг турлари

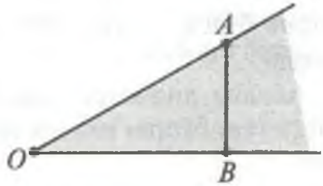
Умумий учга эга бўлган икки нурдан ташкил топган геометрик шакл *бурчак* деб аталади (2- расм).

Нурлар бурчакнинг *томонлари*, уларнинг умумий нуқтаси *бурчакнинг учи* деб аталади. O нуқта – бурчакнинг учи; OA ва OB нурлар – бурчакнинг томонлари. Бурчак $\angle AOB$ ёки $\angle O$ кўринишда белгиланади.

3- расмда бурчакнинг ички қисми (соҳаси) чизиб кўрсатилган.



2- расм



3- расм

Агар бурчакларнинг томонлари бир тўғри чизиқни ташкил қилса, бурчак *ёйиқ бурчак* деб аталади.

Бурчакнинг томонлари текисликни иккита бўлакка ажратади. Бурчак томонларидаги нурлардан ихтиёрий бирини тўғри чизиққа тўлдирайлик. Бу тўғри чизиқ текисликнинг бурчак ҳосил қилган бўлакларидан қайси бирини кесмаса, шу бўлак бурчакнинг *ички қисми* (соҳаси) деб аталади, иккинчиси эса *ташқи қисми* (соҳаси) деб аталади.

Агар алоҳида таъкидланмаса, бурчак деганда текисликнинг шу бурчак томонлари билан чегаралаган ички соҳаси тушунилади.

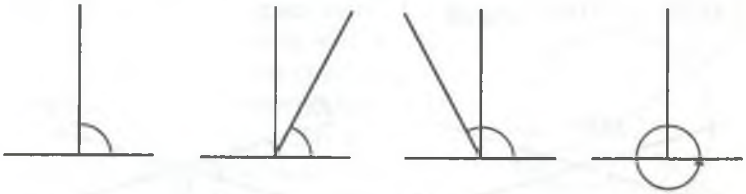
1-таъриф. Айлана тўла ёйининг $\frac{1}{4}$ (тўртдан бир) қисми 90° га тенг. Катталиги 90° га тенг бурчак *тўғри бурчак* дейилади.

2-таъриф. Тўғри бурчакдан кичик бурчак *ўткир бурчак* дейилади.

3-таъриф. Тўғри бурчакдан катта, аммо ёйиқ бурчакдан кичик бурчак *ўтмас бурчак* дейилади.

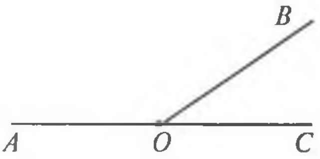
4-таъриф. Бир нуқтадан чиққан нур, ўша нуқта атрофида айланиб, аввалги ҳолатини олиши натижасида ҳосил бўлган бурчак *тўла бурчак* дейилади (4- расм).

Ҳар қандай тўғри бурчаклар бир-бирига тенг, ёйиқ бурчак 180° бўлгани учун у иккита тўғри бурчакка тенг.



Тўғри бурчак Ўткир бурчак Ўтмас бурчак Тўла бурчак

4- расм



5- расм

Ер устида ўлчашларда бурчакларни ўлчаш учун эккер, астролябия ва теодолит номли асбоблардан, ўқув жараёнида эса бурчакларни ўлчашда транспортирдан фойдаланилади.

Тўғри бурчакнинг катталиги d ҳарфи билан белгиланади (французча «*droit* – тўғри» сўзининг биринчи ҳарфи): $d = 90°$.

Биттадан томонлари умумий бўлиб, қолган томонлари тўғри чизиқни ташкил этган бурчаклар *қўшни бурчаклар* дейилади (5- расм).

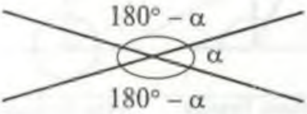
$\angle BOC$ ва $\angle AOB$ – қўшни бурчаклар.

Қўшни бурчаклар биргаликда ёйиқ бурчакни ташкил қилгани учун уларнинг катталиклари йиғиндиси 180° га тенг бўлади.

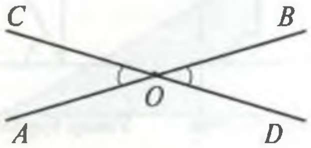
Берилган ҳар қандай бурчак учун унинг ҳар бир томонини давом эттириб, икки усул билан қўшни бурчакларни ясаш мумкин (6- расм).

Вертикал бурчаклар деб, бирининг томонларини учига нисбатан давом эттириш натижасида ҳосил бўлган бурчакларга айтилади (7- расм).

DOB бурчакнинг учига нисбатан OB томоннинг давоми OA томон, OD томоннинг давоми OC томон деб олсак, $\angle DOB$ ва $\angle AOC$ вертикал бурчаклар бўлади. Худди шунингдек, AOD бурчак AO томонининг давоми OB ва OD томонининг давоми OC бўлгани сабабли $\angle AOD$ ва $\angle COB$ вертикал бурчаклар. Вертикал бурчаклар ўзаро тенгдир, яъни $\angle DOB = \angle AOC$ ва $\angle AOD = \angle COB$ (7- расм).



6- расм



7- расм

Машқлар

1. Иккита тўғри чизиқ O нуқтада кесишади. Нечта бурчак ҳосил бўлади?
2. 370° ли бурчакни қандай ясаш мумкин?
3. Транспортир ёрдамида 15° ли; 30° ли бурчаклар ясанг.
4. Агар $\alpha = 80°$ бўлса, унга қўшни бурчакнинг катталиги қанча бўлади?
5. $\beta = 24°$ бўлса, унга вертикал бурчакнинг катталиги қанча бўлади? Шу бурчакни ясанг.

4- §. Бурчакларни ўлчаш

Бурчакларни ўлчаш учун маркази бурчак учида бўлган ихтиёрий радиусли айлана чизайлик (8- расм).

A ва B нуқталар $\angle AOB$ томонларининг айлана билан кесишиш нуқталари бўлади.

Таъриф. Икки радиус орасидаги бурчак *марказий бурчак* дейилади.

Бурчакнинг OA ва OB радиуслар билан чегараланган бўлаги *марказий бурчак*, айлананинг AB ёйи эса *марказий бурчакка тиралган ёй* деб аталади.

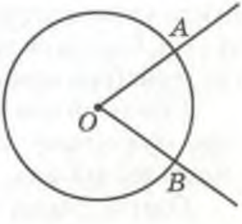
Битта айланада ёки бир нечта айланаларда:

1) марказий бурчаклар тенг бўлса, уларга тиралган ёйлар ҳам тенг бўлади;

2) тенг ёйларга тенг марказий бурчаклар мос келади.

Марказий бурчакнинг катталиги айлананинг бурчак орасидаги бўлаги ёйининг градус ўлчовига тенг. Кесманинг узунлиги чизғич ёрдамида ўлчангани сингари, бурчакнинг катталиги транспортир ёрдамида ўлчанади. Масалан, AB ёйнинг градус ўлчови 15° га тенг бўлса, $\angle AOB = 15°$ деб ёзилади.

Транспортир марказий бурчак хоссаларига асосан ясалган.



8- расм

Айлана ёйининг градус ўлчови ҳам кесма узунлиги хоссаларига ўхшаш хоссаларга эга (мустақил таърифланг).

1. Тенг кесмаларнинг узунликлари тенгдир.

2. Кесмалар йиғиндисининг узунлиги қўшилувчи кесмаларнинг узунликлари йиғиндисига тенг.

3. Кесмалар айирмасининг узунлиги шу кесмалар узунликларининг айирмасига тенг.

4. Исталган нурга унинг бошланғич нуқтасидан берилган узунликдаги ягона (яъни фақат битта) кесмани қўйиш мумкин.

Градус ўлчови аниқлигини ошириш учун бир градуснинг $\frac{1}{60}$ қисми 1 минут (1′) ва бир минутнинг $\frac{1}{60}$ қисми 1 секунд (1″) деб қабул қилинган.

Машқлар

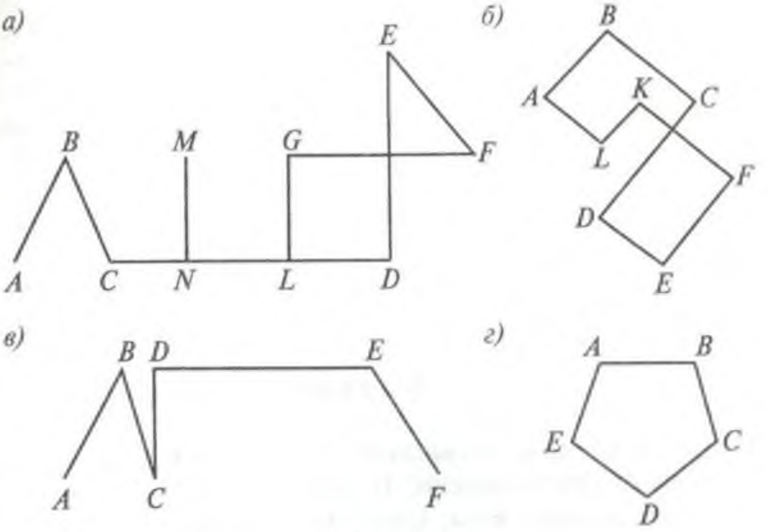
1. Транспортирнинг ясалиши қандай геометрик хоссаларга асосланган?
2. Транспортир ёрдамида 25° ли, 15° ли бурчак ясанг.
3. Транспортир ёрдамида 120° ли, 140° ли бурчак ясанг.
4. 380° ли бурчакни қандай ясаш мумкин?
5. Тўғри бурчак (90°), 45° ли ўткир бурчак, 105° ли ўтмас бурчакларни транспортир ёрдамида ясанг.

5- §. Синиқ чизиқ узунлигини ҳисоблаш

Бир нечта кесмалар берилган бўлсин. Кесмаларнинг бирининг охирига иккинчисининг бошини, иккинчисининг охирига учинчисининг бошини устма-уст қўяйлик ва ҳоказо. Бунда кесмалардан ташкил топган геометрик шакл ҳосил бўлади. Бир тўғри чизиқда ётмаган кесмалардан ташкил топган геометрик шакл *синиқ чизиқ* деб аталади (9-*а*, *б* расмлар).

Синиқ чизиқни ташкил қилган кесмалар унинг *томонлари* (*бўғинлари*), кесмаларнинг учлари синиқ чизиқнинг *учлари* деб аталади.

Одатда, синиқ чизиқ унинг учларидаги нуқталарни белгиловчи ҳарфларни кетма-кет ёзиш билан белгиланади: *ABCDEF* синиқ чизиқ.



9- расм

Агар синиқ чизиқнинг бирор томони бошқа томони билан кесишса (9- *а, б* расмлар) ёки бошқа томоннинг қисми бўлса, синиқ чизиқ *махсус синиқ чизиқ*, акс ҳолда эса *содда синиқ чизиқ* дейилади (9- *в, г* расмлар).

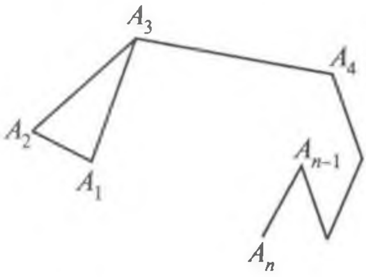
Синиқ чизиқнинг томонлари узунликлари йиғиндиси унинг *периметри* деб аталади. Бошланғич ва охирги нуқталари устма-уст тушадиган синиқ чизиқ *ёпиқ синиқ чизиқ* деб аталади (9-*г* расм) .

Содда ёпиқ синиқ чизиқдан ташкил топган шакл *кўпбурчак* деб аталади (9-*г* расм).

Теорема. *Синиқ чизиқ узунлиги унинг охирларини туташтирувчи кесма узунлигидан кичик эмас.*

Исботи. $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ берилган синиқ чизиқ бўлсин. Унинг A_1A_2, A_2A_3 бўғинларини битта A_1A_3 бўғин билан алмаштирамиз, у ҳолда $A_1A_3A_4 \ldots A_n$ синиқ чизиқ ҳосил бўлади (10- расм).

Учбурчак тенгсизлигига биноан $A_1A_3 < A_1A_2 + A_2A_3$, шу сабабли бу синиқ чизиқ $A_1A_2A_3A_4 \ldots A_n$ синиқ чизиқ узунлигидан катта бўлмаган узунликка эга. Энди A_1A_2 ва A_3A_4 бўғинларни A_1A_4 кесма билан алмаштириб, $A_1A_4 \ldots A_n$ синиқ



10- расм

чизиқни ҳосил қиламиз, унинг узунлиги ҳам берилган синиқ чизиқ узунлигидан катта бўлмайди. Шу усулда давом этиб, пировардида A_1A_n кесмани ўтказамиз, унинг узунлиги берилган синиқ чизиқ узунлигидан катта бўлмайди. Теорема исбот қилинди.

Машқлар

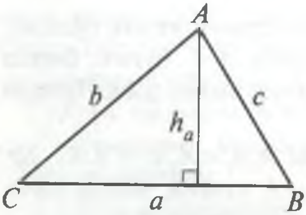
1. 3; 6; 6,5 см ли кесмаларни кетма-кет қўйинг. Қандай ҳоллар бўлиши мумкин? Тушунтиринг.
2. $AB = 3$ см, $BC = 4$ см, $CD = 5$ см ли кесмалар ясаб, DA кесманинг узунлиги қанча бўлишини топинг.

6- §. Учбурчакларнинг асосий элементлари ва уларни томонлари орқали ифодалаш

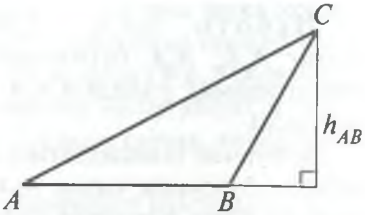
1-таъриф. Учта кесмадан ташкил топган содда ёпиқ синиқ чизиқ *учбурчак* деб аталади.

2-таъриф. Учбурчакнинг ихтиёрий томонини унинг *асоси* деб олиш мумкин. Асосга қарама-қарши бурчакнинг учи эса *учбурчакнинг учи* деб аталади.

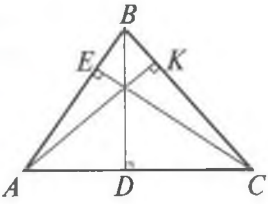
3-таъриф. Учбурчак учидан унинг асоси ётган тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр кесма *учбурчакнинг баландлиги* деб аталади (11, 12- расмлар).



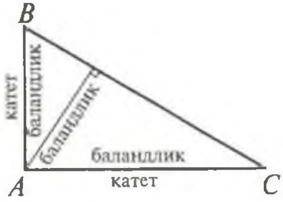
11- расм



12- расм



13- расм



14- расм

Учбурчакнинг баландлиги унинг ичида (11- расм) ёки ташқарисида (12- расм) бўлиши мумкин. Асосга туширилган баландлик h_a ёки h_{AB} деб белгиланади.

Агар учбурчак асосидаги бурчаклардан бири ўтмас бўлса, унинг баландлиги учбурчак ташқарисида ётади.

Агар учбурчак асосидаги иккала бурчак ҳам ўткир бўлса, у ҳолда баландлик учбурчак ичида ётади.

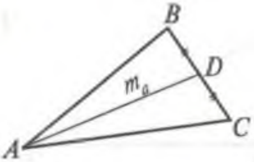
Учбурчакда учала томонни асос деб олиш мумкинлиги сабабли унинг учта баландлиги бўлади (13- расм). $\triangle ABC$ да BD, AK, CE – баландликлар.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг иккита баландлиги унинг катетлари билан устма-уст тушади (14- расм).

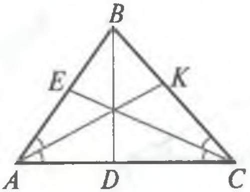
4-таъриф. Учбурчакнинг учи билан бу учнинг қаршисида ётган томоннинг ўртасини туташтирувчи кесма учбурчакнинг *медианаси* дейилади (15- расм). $\triangle ABC$ да AD – медиана, у m_a ёки m_{BC} деб ёзилади.

5-таъриф. Учбурчакда бурчак учидан чиқиб, бу бурчакни тенг иккига бўлувчи нур унинг *биссектрисаси* дейилади.

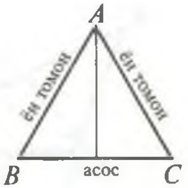
$\triangle ABC$ да AK – биссектриса, у l_a ёки l_{BC} деб ёзилади, бунда $\angle BAK = \angle KAC$ бўлади (16- расм).



15- расм



16- расм



17- расм

Тенг ёнли учбурчакда тенг томонлар *ён томонлар*, учинчи томон *асос*, тенг томонлар ҳосил қилган бурчак *учбурчакнинг учи* деб аталади (17- расм).

Машқлар

1. Томонлари 6 см, 5 см ва улар орасидаги бурчак 30°, 60°, 90° бўлган учбурчакларни чизинг.
2. Икки томони ва учинчи томонига ўтказилган баландлиги бўйича учбурчак ясанг.
3. 60° ли бурчакнинг биссектрисасини ясанг.
4. Томонлари қуйидагича бўлган учбурчак ясаш мумкинми:

1) 12 см, 2 дм, 8 см;	3) 45 см, 45 см, 1 м;
2) 0,5 см, 1 м, 0,5 м;	4) 1 дм, 5 см, 5 см ?

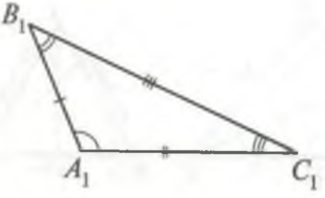
7- §. Учбурчакларнинг тенглиги

Аввало, қандай учбурчакларни бир-бирига тенг дейиш лозимлигини аниқлаб олайлик. Агар иккита $A_1B_1C_1$ ва $A_2B_2C_2$ учбурчакларни мос равишда устма-уст туширилганда, уларнинг учала учлари устма-уст тушса, бундай учбурчаклар бир-бирига тенг бўлади.

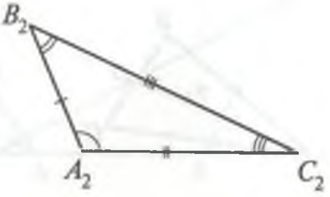
Учбурчакларнинг учлари устма-уст тушганда, учларни туташтирувчи томонлар ҳам, улар орасидаги бурчаклар ҳам устма-уст тушади.

Устма-уст тушган томонлар ва бурчаклар *мос томонлар* ва *бурчаклар* дейилади. Демак, тенг учбурчакларда уларнинг мос томонлари ва мос бурчаклари тенг бўлади.

Таъриф. Мос томонлари ва мос бурчаклари тенг бўлган учбурчаклар *тенг* дейилади.



18- расм



19- расм

Агар $\triangle A_1B_1C_1$ ва $\triangle A_2B_2C_2$ тенг бўлса (18, 19- расмлар), у ҳолда

$$A_1B_1 = A_2B_2,\ A_1C_1 = A_2C_2,\ B_1C_1 = B_2C_2,$$

$$\angle A_1 = \angle A_2,\ \angle B_1 = \angle B_2,\ \angle C_1 = \angle C_2$$

бўлади ва аксинча.

Учбурчакларнинг тенглигини ёзиш учун ҳам одатдаги тенглик белгиси «=» қўлланилади ва $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ кўринишда ёзилади. Бунда учбурчакларнинг учлари бир-бирига мос келиши тартибида ёзилади. Бир-бирига мос томонлар ва бурчаклар бир хил сондаги чизиқлар ва ёйлар билан белгиланади (18, 19- расмлар).

8- §. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломати

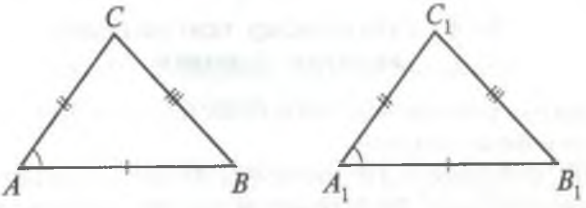
Теорема. *Агар бир учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги иккинчи учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар тенг бўлади.*

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$ бўлсин (20- расм).

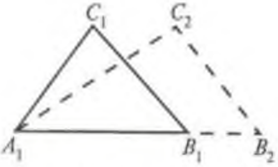
Бу учбурчакларнинг тенглигини исботлаймиз. $A_1B_2C_2$ учбурчак B_2 учи A_1B_1 нурда, C_2 учи A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан C_1 учи ётган ярим текисликдаги учбурчак бўлиб, у ABC учбурчакка тенг бўлсин (21- расм).

$A_1B_1 = A_1B_2$ бўлгани учун B_2 уч B_1 уч билан устма-уст тушади (22- расм).

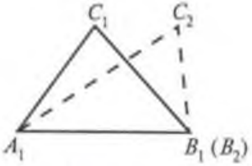
$\angle B_1A_1C_1 = \angle B_2A_1C_2$ бўлгани учун A_1C_2 нур A_1C_1 нур билан устма-уст тушади (23- расм).



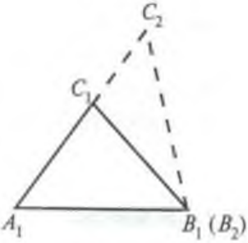
20- расм



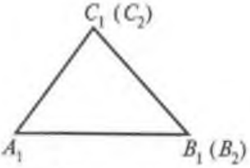
21- расм



22- расм



23- расм



24- расм

$A_1C_1 = A_1C_2$ бўлгани учун C_2 уч C_1 уч билан устма-уст тушади (24- расм).

Шундай қилиб, $A_1B_1C_1$ учбурчак $A_1B_2C_2$ учбурчак билан устма-уст тушади, демак, у ABC учбурчакка тенг.

Теорема исботланди.

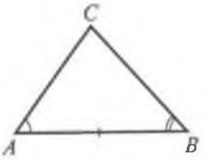
Машқлар

1. Томонлари 5 см, 8 см ва бурчакларидан бири 30° бўлган учбурчак чизинг. Буни неча усулда бажариш мумкин? Агар 30° ли бурчак узунликлари 5 см ва 8 см бўлган томонлар орасида бўлса-чи?
2. Томонлари $AB = 4$ см, $AC = 3$ см ва $\angle A = 40°$ бўлган тенг учбурчакларни ясанг. Шу учбурчакларнинг тенглиги ҳақида қандай хулосага келиш мумкин?

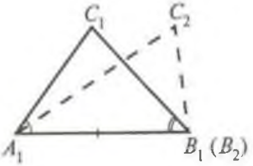
9- §. Учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломати

Ҳар қандай учбурчакда учта томон ва учта бурчак мавжуд эканлиги бизга маълум.

ABC учбурчакда *AB* томон *A* ва *B* бурчакларнинг *умумий томони* дейилади, бу бурчаклар эса шу *томонга ёпишган бурчаклар* деб аталади.



25- расм



26- расм

Теорема. *Агар бир учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган бурчаклари бошқа учбурчакнинг мос томони ва унга ёпишган бурчакларига тенг бўлса, бу учбурчаклар тенг бўлади.*

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AB = A_1B_1$, $\angle A = \angle A_1$ ва $\angle B = \angle B_1$ бўлсин (25, 26- расмлар).

Бу учбурчакларнинг тенглигини исботлаймиз.

$A_1B_2C_2$ учбурчак B_2 учи A_1B_1 нурда ва C_2 учи A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан C_1 учи ётган ярим текисликдаги учбурчак бўлиб, у ABC учбурчакка тенг бўлсин.

$A_1B_2 = A_1B_1$ бўлгани учун B_2 уч B_1 уч билан устма-уст тушади. $\angle B_1A_1C_2 = \angle B_1A_1C_1$ ва $\angle A_1B_1C_2 = \angle A_1B_1C_1$ бўлгани учун A_1C_1 нур A_1C_2 нур билан, B_1C_2 нур эса B_1C_1 нур билан устма-уст тушади. Бундан C_2 учнинг C_1 уч билан устма-уст тушиши келиб чиқади.

Шундай қилиб, $A_1B_1C_1$ учбурчак $A_1B_2C_2$ учбурчак билан устма-уст тушади, демак, у ABC учбурчакка тенг.

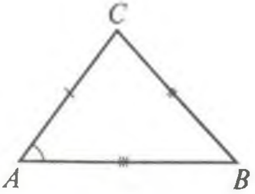
Теорема исботланди.

Машқлар

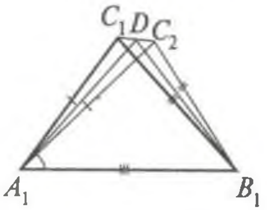
1. Узунлиги 4 см ли кесма олиб, шу кесманинг учларида 30° ва 45° ли бурчакларни ясанг. Қайси ҳолда учбурчак ҳосил бўлади?
2. $AB = 3$ см, $\angle A = 50°$, $\angle B = 60°$ бўлган учбурчак ясанг.

10- §. Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломати

Теорема. *Агар бир учбурчакнинг учта томони иккинчи учбурчакнинг учта томонига мос равишда тенг бўлса, бу учбурчаклар тенг бўлади.*



27- расм



28- расм

Исботи. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчаклар шундай иккита учбурчакларки, уларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$ бўлсин (27, 28- расмлар).

Бу учбурчакларнинг тенглигини исботлаймиз.

Учбурчаклар тенг эмас деб фараз қилайлик. У ҳолда бу учбурчакларда $\angle A \neq \angle A_1$, $\angle C \neq \angle C_1$, $\angle B \neq \angle B_1$ бўлади.

$A_1B_1C_2$ учбурчак ABC учбурчакка тенг бўлиб, унинг C_2 учи A_1B_1 тўғри чизиққа нисбатан C_1 уч билан битта ярим текисликда ётадиган учбурчак бўлсин.

D нуқта C_1C_2 кесманинг ўртаси бўлсин. $A_1C_1C_2$ ва $B_1C_1C_2$ учбурчаклар C_1C_2 умумий асосга эга бўлсин. Шу сабабли улардаги A_1D ва B_1D тўғри чизиқлар C_1C_2 тўғри чизиққа перпендикулярдир. A_1D ва B_1D кесмалар устма-уст тушмайди, чунки A_1, B_1, D нуқталар бир тўғри чизиқда ётмайди. Аммо C_1C_2 тўғри чизиқнинг D нуқтаси орқали шу тўғри чизиққа фақат битта перпендикуляр ўтказишимиз мумкин. Биз қарама-қаршиликка дуч келдик.

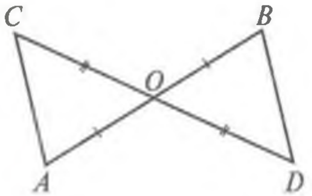
Теорема исботланди.

Юқорида келтирилган учала аломат ҳар қандай учбурчаклар учун ҳам ўринлидир.

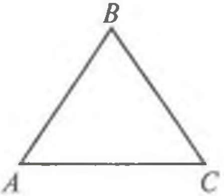
1-масала. AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишади, бу нуқта ҳар қайси кесманинг ўртаси, $AC = 10$ бўлса, BD кесма нимага тенг?

Ечилиши. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра AOC ва BOD учбурчаклар тенг (29- расм).

Уларда $\angle AOC$ ва $\angle BOD$ вертикал бурчаклар бўлгани учун тенг, $AO = OB$, $OC = OD$, чунки O нуқта AB ва CD кесмаларнинг ўртаси. AOC ва BOD учбурчаклар тенглигидан уларнинг AC ва BD томонлари ҳам тенглиги келиб чиқади. Масала шартига кўра $AC = 10$. Шунинг учун $BD = 10$.



29- расм



30- расм

2-масала. Тенг томонли учбурчакларнинг барча бурчаклари тенглигини исботланг.

Исботи. ABC берилган тенг томонли учбурчак бўлсин: $AB = BC = AC$ (30- расм).

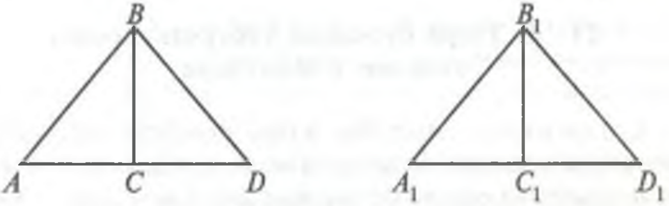
Шартга кўра $AB = BC$, демак, бу учбурчак AB асосли тенг ёнли учбурчакдир. Шунинг учун ҳам $\angle C = \angle A$. Сўнгра $BC = AC$, демак, ABC учбурчак AB асосли тенг ёнли учбурчакдир, у ҳолда $\angle A = \angle B$. Шундай қилиб, $\angle C = \angle A = \angle B$, яъни бурчаклар тенг.

3-масала. ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларда $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle C = 90°$. $\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1$ эканини исботланг.

Исботи. AC томоннинг давомида AC га тенг CD кесмани қўямиз (31- расм).

Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ABC ва DBC учбурчаклар тенг, чунки уларнинг C учидаги бурчаги 90°, демак, улар тенг, BC умумий томон, AC ва CD томонлар ясалишига кўра тенг. Учбурчакларнинг тенглигига асосан AB ва DB томонлар тенг: $AB = DB$.

A_1C_1 томоннинг давомида A_1C_1 томонга тенг C_1D_1 кесмани қўямиз. ABC ва DBC учбурчаклар билан иш кўрганимиз сингари $A_1B_1C_1$ ва $D_1B_1C_1$ учбурчаклар тенглигини исботлаймиз. Учбурчакларнинг тенглиги сабабли томонлар тенг: $A_1B_1 = D_1B_1$.



31- расм

Энди учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра ABD ва $A_1B_1D_1$ учбурчакларнинг тенглиги ҳақидаги хулосани чиқарамиз.

Бу учбурчакларда шартга кўра $AB = A_1B_1$, $BD = AB$, $B_1D_1 = A_1B_1$ бўлгани учун $BD = B_1D_1$, ниҳоят, $AC = A_1C_1$ бўлгани учун $AD = A_1D_1$. ABD ва $A_1B_1D_1$ учбурчакларнинг тенглигидан уларнинг бурчаклари тенг: $\angle A = \angle A_1$.

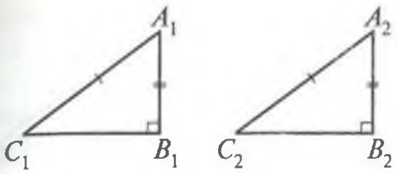
Энди учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра берилган ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг тенглиги ҳақидаги хулосага келамиз, чунки уларда шартга кўра $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, исботга кўра $\angle A = \angle A_1$.

Машқлар

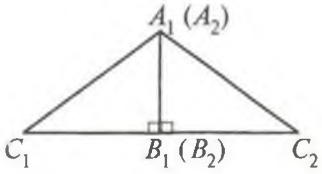
1. Асоси AB бўлган тенг ёнли ABC учбурчакнинг C учидан кесмалар: CA томонга CA_1 кесма, CB томонга CB_1 кесма қўйилган.
   а) CAB_1 ва BA_1C учбурчаклар тенглигини;
   б) AB_1B ва BAA_1 учбурчакларнинг тенглигини исботланг.
2. AB ва CD кесмалар O нуқтада кесишади. Агар ACO бурчак DBO бурчакка тенг экани ва $BO = CO$ экани маълум бўлса, $ACO = DBO$ учбурчакларнинг тенглигини исботланг.
3. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 7,5 см, ён томони эса 2 м. Асосини топинг.
4. Тенг ёнли учбурчакнинг периметри 15,6 м га тенг. Агар: 1) асоси ён томонидан 3 м кам бўлса; 2) асоси ён томонидан 3 м катта бўлса, унинг томонларини топинг.
5. Асоси AC бўлган тенг ёнли ABC учбурчакда BP медиана ўтказилган. Унда D нуқта олинган: 1) ABD ва CBD; 2) APD ва CPD учбурчакларнинг тенглигини исботланг.

11- §. Тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенглик аломатлари

1-теорема. *Агар бир тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва катети иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва катетига мос равишда тенг бўлса, бу учбурчаклар тенг бўлади.*



32- расм



33- расм

Исботи. $A_1B_1C_1$ ва $A_2B_2C_2$ тўғри бурчакли учбурчакларда $A_1C_1 = A_2C_2$ — гипотенузалар, $A_1B_1 = A_2B_2$ — катетлар (32- расм).

$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ эканини исбот қилиш керак.

Тўғри бурчакли учбурчакларнинг тенг катетларини мос равишда шундай устма-уст туширамизки, гипотенузалар катетнинг икки томонига жойлашиб, тенг ёнли учбурчак ҳосил қилсин (33- расм).

Бунда иккинчи катетлар устма-уст тушган катетларга перпендикуляр бўлгани учун C_1C_2 кесмани ҳосил қилади. $C_1A_1C_2$ учбурчак тенг ёнли учбурчак, A_1B_1 томон эса унинг ҳам баландлиги, ҳам биссектрисаси бўлади. Демак, $\angle C_1A_1B_1 = \angle C_2A_2B_2$, у ҳолда учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$. Теорема исботланди.

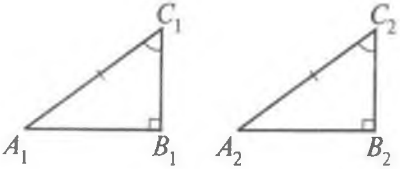
Учбурчаклар тенглигининг биринчи ва иккинчи аломатлари тўғри бурчакли учбурчаклар учун анча соддалашади. Биринчи аломатда катетларнинг тенглигини талаб қилиш етарли.

Юқорида биз ҳар қандай учбурчакларнинг тенглик аломатлари билан танишган эдик. Тўғри бурчакли учбурчаклар эса учбурчакнинг хусусий ҳоли ҳисобланади. Тўғри бурчакли учбурчакларда тенглик аломатлари юқоридагиларга нисбатан соддароқдир.

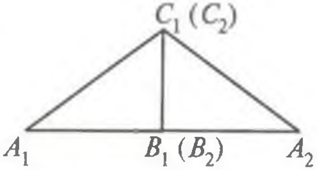
2-теорема. *Агар бир тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва ўткир бурчаги иккинчи тўғри бурчакли учбурчакнинг гипотенузаси ва ўткир бурчагига мос равишда тенг бўлса, бундай учбурчаклар ўзаро тенг бўлади.*

Исботи. $A_1B_1C_1$ ва $A_2B_2C_2$ тўғри бурчакли учбурчакларда $A_1C_1 = A_2C_2$ ва $\angle C_1 = \angle C_2$ бўлсин (34, 35- расмлар).

$\triangle A_1B_1C_1 = \triangle A_2B_2C_2$ эканини кўрсатамиз.



34- расм



35- расм

Учбурчакларни ўзаро тенг бўлган ўткир бурчакларга ёпишган катетлари бўйича устма-уст туширайлик. Бунда C_1 нуқта C_2 нуқта билан устма-уст тушсин, A_1 ва A_2 нуқталар эса B_1C_1 тўғри чизиқнинг турли томонларида ётсин. Агар B_1 нуқта B_2 нуқта билан устма-уст тушса, бу теореманинг тўғрилиги учбурчаклар тенглигининг иккинчи аломатига кўра келиб чиқади.

Фараз қилайлик, B_1 нуқта B_2 нуқта билан устма-уст тушмасин. Бунда B_1 ва B_2 нуқталарни A_1A_2 кесма билан туташтириб, $A_1C_1A_2$ тенг ёнли учбурчакларни ҳосил қиламиз. Бу учбурчакларда C_1D биссектриса. Демак, C_1D баландлик ҳам бўлади, яъни $\angle A_2DC_2 = 90°$.

Бу эса A_1 нуқтада иккита перпендикуляр A_1B_1 ва A_1D ўтказилганлигини кўрсатади. Бундай бўлиши эса мумкин эмас. Демак, A_1 ва D нуқталар устма-уст тушади. Шундай усул билан B_2 ва D_2 нуқталар устма-уст тушишини кўрсатамиз. Бундан B_1 ва B_2 нуқталарнинг устма-уст тушиши келиб чиқади.

Машқлар

1. 60° ли бурчак биссектрисасини ясанг.
2. Иккита параллел тўғри чизиқни учинчи тўғри чизиқ кесишидан ҳосил бўлган бурчаклардан бири 72° га тенг. Қолган еттита бурчакни топинг.
3. Тенг ёнли учбурчакда: 1) асосидаги бурчаклардан чиқарилган биссектрисалар тенглигини; 2) шу бурчаклардан чиқарилган медианалар ҳам тенглигини исботланг.
4. Тенг ёнли учбурчакнинг ташқи бурчакларидан бири 70° га тенг. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

12- §. Геометрик ясашлар

Биз берилган узунликдаги кесмани ва маркази ҳамда радиуси маълум бўлган айланани чизғич ва циркуль ёрдамида ясашни биламиз.

Энди баъзи геометрик шаклларни ясаш учун талаб қилинадиган шартларни ўрганамиз. Геометрик шаклларни ясашда фақат чизғич ва циркулдан фойдаланамиз.

Айлана

Текисликнинг берилган нуқтадан бир хил узоқлашган ҳамма нуқталаридан иборат шакл *айлана* дейилади. Берилган нуқта айлананинг *маркази* дейилади.

Айлана нуқталаридан унинг марказигача бўлган масофа айлананинг *радиуси* дейилади (36- расм).

Айлананинг иккита нуқтасини туташтирувчи кесма *ватар* дейилади.

Айлана марказидан ўтувчи ватар айлана *диаметри* дейилади (37- расм). BC ва MN – ватарлар, AD – диаметр.

Учбурчакнинг барча учларидан ўтган айлана шу учбурчакка *ташқи чизилган айлана* дейилади.

Теорема. *Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчак томонларининг ўртасидан ўтказилган перпендикулярнинг кесишиш нуқтасидан иборат.*

Исботи. ABC берилган учбурчак, O нуқта шу учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази бўлсин (38- расм).

O марказни учбурчакнинг учлари A, B ва C нуқталари билан туташтирамиз. У ҳолда AOC учбурчак тенг ёнли, чунки унинг OA ва OC томонлари радиуслар сифатида тенг. Бу

36- расм

37- расм

38- расм

учбурчакнинг OD медианаси бир вақтнинг ўзида унинг баландлиги ҳамдир.

Шу сабабли айлананинг маркази жойлашган OD баландлик AC томонга перпендикуляр бўлиб, унинг ўртасидан ўтувчи тўғри чизиқда ётади.

Худди шунингдек, OBC ва OAB учбурчаклар тенг ёнли бўлгани сабабли, уларнинг учидан асосига туширилган OE ва OF медианалар бир вақтнинг ўзида баландлик ҳам бўлади. Шу сабабли айлананинг марказидан ўтган OE ва OF баландликлар BC ва AB томонларнинг ўртасига перпендикуляр бўлади. Демак, учбурчакка ташқи чизилган айлананинг маркази учбурчак томонларининг ўртасига ўтказилган перпендикулярларнинг кесишиш нуқтасида бўлар экан.

Теорама исбот қилинди.

Кесманинг ўртасидан унга перпендикуляр ҳолда ўтувчи тўғри чизиқ *ўрта перпендикуляр* деб аталади.

Ясашга доир масаланинг моҳияти

Геометрик мазмунли масалалар ечилишига кўра уч гуруҳга бўлинади:

1 . Ҳисоблашга доир масалалар.

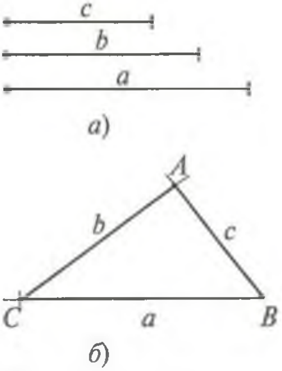
2. Исботлашга доир масалалар.

3. Ясашга доир масалалар.

Ясашга доир масалада геометрик шаклларни берилган чизмачилик асбоблари ёрдамида ясаш ҳақида сўз боради. Бу асбоблар циркуль ва чизғичдир. Бундай масалани ечиш фақат шаклни ясашдан иборат бўлмай, балки бу ишни қандай амалга ошириш ва тегишли исботни беришдан иборатдир. *Агар шаклни ясаш усули кўрсатилса ҳамда кўрсатилган ясашларни бажариш натижасида талаб қилинган хоссаларга эга бўлган шакл ҳосил қилиниши исботланса, масала ечилган ҳисобланади.*

Чизғичдан геометрик ясашлар асбоби сифатида фойдаланиб, ихтиёрий тўғри чизиқни; берилган нуқтадан ўтувчи ихтиёрий тўғри чизиқни; берилган икки нуқта орқали ўтувчи тўғри чизиқни чизиш мумкин. Чизғич билан ясашга доир бошқа бирорта ишни бажариш мумкин эмас. Ҳатто бўлинмалари белгилаб қўйилган чизғич ёрдамида кесмаларни қўйиб чизиш ҳам мумкин эмас.

Циркуль геометрик ясаш асбоби сифатида берилган марказдан берилган радиусли айлана чизиш имконини беради. Жумладан, циркуль ёрдамида берилган тўғри чизиққа берилган нуқтадан кесмани қўйиб чизиш, берилган кесмани тенг иккига бўлиш мумкин ва ҳ.к.



39- расм

13- §. Берилган томонларга кўра учбурчак ясаш

Масала. Берилган *a*, *b*, *c* томонларга кўра учбурчак ясалсин (39- расм).

Ечилиши. Чизғич ёрдамида ихтиёрий тўғри чизиқ ўтказамиз ва унда ихтиёрий *B* нуқтани белгилаймиз .

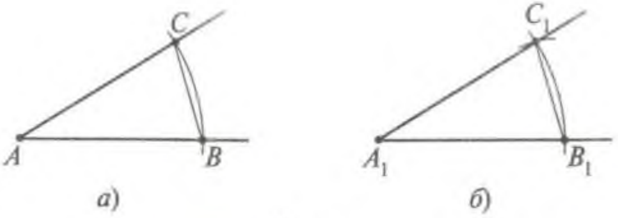
Циркуль оёқларини *a* га тенг қилиб очиб, маркази *B* нуқтада ва радиуси *a* га тенг айлана чизамиз. *C* — шу айлананинг тўғри чизиқ билан кесишиш нуқтаси бўлсин. Энди циркуль оёқларини *c* га тенг қилиб очиб, маркази *B* нуқтада бўлган айлана чизамиз. Шу каби *C* нуқтани марказ қилиб, *b* радиусли айлана чизамиз. *A* нуқта шу айланаларнинг кесишиш нуқталаридан бири бўлсин. *AB* ва *AC* кесмаларни ўтказамиз. *ABC* учбурчак томонлари *a*, *b*, *c* га тенг ва у изланаётган учбурчакдир.

14- §. Берилган бурчакка тенг бурчак ясаш

Масала. Берилган бурчакка тенг бурчак ясалсин (40-*а* расм).

Ечилиши. 40-*а* расмда $\angle CAB$ берилган бўлсин.

Энди *OM* нурнинг A_1 нуқтасини марказ қилиб, радиуси *AB* бўлган айлана чизамиз (40-*б* расм). Бу айланани берилган *OM* нур билан кесишиш нуқтасини B_1 билан белгилаймиз. Маркази B_1 нуқтада ва радиуси *BC* бўлган айлана чизамиз.



40- расм

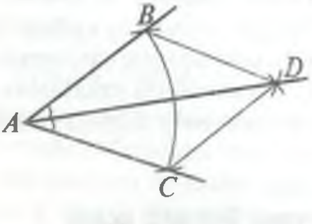
Текисликда ясалган бу айланаларнинг кесишиш нуқтаси C_1 изланаётган бурчак томонида ётади. CAB ва $C_1A_1B_1$ бурчакларнинг тенглигини исботлаш учун ABC ва $A_1B_1C_1$ учбурчакларнинг тенглигини назарга оламиз, чунки бу учбурчакларнинг мос томонлари тенг. Демак, $\angle C_1A_1B_1$ — изланаётган бурчак.

15- §. Бурчак биссектрисасини ясаш

Масала. Берилган бурчакнинг биссектрисаси ясалсин.

Ечилиши. Берилган бурчакнинг A учини марказ қилиб, ихтиёрий радиусли айлана чизамиз (41- расм).

B ва C нуқталар айлананинг бурчак томонлари билан кесишиш нуқталари бўлсин. Энди B ва C нуқталарни марказ қилиб, BC радиусли айланалар чизамиз. D нуқта уларнинг берилган бурчак ичидаги кесишиш нуқтаси бўлсин. AD нурни ўтказамиз. У $\angle BAC$ бурчакни тенг иккига бўлади, чунки ABD ва ACD учбурчаклар тенг (AD томон умумий, $AB = AC$ ва $BD = DC$ бўлгани сабабли) ва уларнинг DAC, DAB бурчаклари мос бурчаклардир. Демак, AD — биссектриса.



41- расм

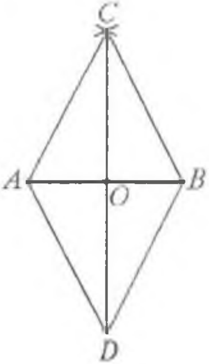
16- §. Кесмани тенг иккига бўлиш

Масала. Берилган кесма тенг иккига бўлинсин.

Ечилиши. AB берилган кесма бўлсин (42- расм). A ва B нуқталарни марказ қилиб, AB радиусли айланалар чизамиз. C ва D нуқталар айланаларнинг кесишиш нуқталари бўлсин.

Улар AB тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётади. CD кесма AB тўғри чизиқни бирор O нуқтада кесиб ўтади. Ана шу O нуқта AB кесманинг ўртасидир.

Ҳақиқатан ҳам, учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра CAD ва CBD учбурчакларнинг тенглиги келиб чиқади. Бундан $\angle ACO = \angle BCO$. Учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра ACO ва BCO учбурчаклар тенг. Бу учбурчакларнинг AO ва BO томонлари мос томонлардир, шу сабабли улар тенг. Шундай қилиб, O нуқта AB кесманинг ўртасидир.



42- расм

17- §. Перпендикуляр тўғри чизиқ ясаш

Масала. Берилган O нуқта орқали берилган a тўғри чизиққа перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилсин.

Ечилиши. Икки ҳол бўлиши мумкин: 1) O нуқта a тўғри чизиқда ётади; 2) O нуқта a тўғри чизиқда ётмайди.

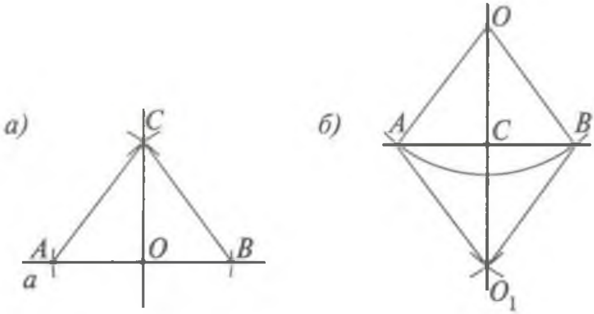
1- ҳолни қараймиз (43-*а* расм).

O нуқтадан ихтиёрий радиусли айлана ўтказамиз. Бу айлана a тўғри чизиқни иккита A ва B нуқталарда кесиб ўтади, бу A ва B нуқталарни марказ қилиб, AB радиусли айланалар ўтказамиз. C нуқта уларнинг кесишиш нуқталаридан бири бўлсин. Изланаётган тўғри чизиқ O ва C нуқталардан ўтади. ACO ва BCO учбурчакларнинг O учидаги бурчаклари тенглигидан OC ва AB тўғри чизиқларнинг перпендикулярлиги келиб чиқади. Учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра ACO ва BCO учбурчаклар тенг.

2- ҳолни қарайлик (43-*б* расм).

O нуқтадан a тўғри чизиқни кесувчи айлана ўтказамиз. A ва B нуқталар айлананинг a тўғри чизиқ билан кесишиш нуқталари бўлсин.

A ва B нуқталардан ўша радиусли айланалар ўтказамиз. O_1 нуқта бу айланаларнинг кесишиш нуқтаси бўлиб, у O нуқта ётган ярим текисликдан бошқа ярим текисликда ётади.



43- расм

Изланаётган тўғри чизиқ O ва O_1 нуқталар орқали ўтади. Шуни исботлаймиз. AB ва OO_1 тўғри чизиқларнинг кесишиш нуқтасини C билан белгилаймиз. $\triangle AOB$ ва $\triangle AO_1B$ лар учбурчаклар тенглигининг учинчи аломатига кўра тенг. Шу сабабли OAC бурчак O_1AC бурчакка тенг. У ҳолда $\triangle OAC$ ва $\triangle O_1AC$ биринчи аломатга кўра тенг. Демак, уларнинг ACO ва ACO_1 бурчаклари тенг. Булар қўшни бурчаклар бўлгани учун тўғри бурчаклардир. Шундай қилиб, OC берилган O нуқтадан a тўғри чизиққа туширилган перпендикуляр.

Машқлар

1. Айлана марказидан чиқадиган ҳар қандай нур айланани битта нуқтада кесиб ўтишини исботланг. (*Кўрсатма*: нурда радиусга тенг кесма қўйинг.)

2. Айланани берилган нуқтасидан диаметр ва радиусга тенг ватар ўтказилган. Диаметр билан ватар орасидаги бурчакни топинг.

3. Берилган a, b, c томонлар бўйича учбурчак ясанг:

1) $a = 2$ см, $b = 3$ см, $c = 4$ см;
2) $a = 3$ см, $b = 4$ см, $c = 5$ см;
3) $a = 4$ см, $b = 5$ см, $c = 6$ см.

4. ABC учбурчак берилган. Унга тенг бошқа ABD учбурчак ясанг.

5. Берилган радиуси бўйича берилган икки нуқтадан ўтувчи айлана ясанг.

6. Қуйидаги маълумотларга кўра ABC учбурчакни ясанг.
   1) Икки томони ва улар орасидаги бурчагига кўра:
   а) $AB = 5$ см, $AC = 6$ см, $\angle A = 40°$;
   б) $AB = 3$ см, $BC = 5$ см, $\angle B = 70°$.
   2) Бир томони ва унга ёпишган бурчаклари бўйича:
   а) $AB = 6$ см, $\angle A = 30°$, $\angle B = 40°$;
   б) $AB = 4$ см, $\angle A = 45°$, $\angle B = 60°$.
7. Бурчакни тўртта тенг қисмга бўлинг.
8. 60° ли ва 30° ли бурчак ясанг. (*Кўрсатма*: тенг томонли учбурчакни ясашдан бошланг.)
9. Гипотенузаси ва бир катетига кўра тўғри бурчакли учбурчак ясанг.
10. A, B, C нуқталар айланада ётади. Агар ABC бурчак 30° га, айлана диаметри эса 10 см га тенг бўлса, AC ватар нимага тенг бўлади?

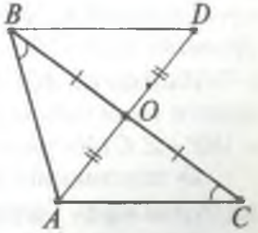
18- §. Учбурчак ички бурчаклари йиғиндиси

Теорема. *Учбурчак ички бурчакларининг йиғиндиси 180° га тенг.*

Исботи. $\triangle ABC$ берилган учбурчак бўлсин (44- расм).

BC томоннинг ўртасини O билан белгилаймиз. AO кесма давомида OA кесмага тенг OD кесмани қўямиз. BOD ва COA учбурчаклар тенг, чунки уларнинг O учидаги бурчаклари вертикал бурчаклар сифатида тенг, ясашга кўра эса $OB = OC$, $OA = OD$.

Бу учбурчакларнинг тенглигидан DBO ва ACO бурчакларнинг тенглиги келиб чиқади.



44- расм

AC, BD тўғри чизиқлар ва BC кесувчига нисбатан DBO ва ACO бурчаклар ички алмашинувчи бурчаклардир.

Ҳақиқатан ҳам, A ва D нуқталар BC тўғри чизиққа нисбатан турли ярим текисликларда ётади, чунки AD кесма BC тўғри чизиқни кесиб ўтади.

Ички алмашинувчи *DBO* ва *ACO* бурчакларнинг тенглигидан:

агар ички алмашинувчи бурчаклар тенг бўлса ёки ички бир томонли бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг бўлса, тўғри чизиқлар параллел бўлади, деган теоремага асосан *AC* ва *BD* тўғри чизиқлар параллел деган натижа келиб чиқади.

AC, *BD* тўғри чизиқлар ва *AB* кесувчи учун *DBO* ва *CAB* бурчаклар ички бир томонли бурчаклардир.

Ҳақиқатан ҳам, *C* ва *D* нуқталар *AB* тўғри чизиққа нисбаган битта ярим текисликда, яъни *O* нуқта ётган ярим текисликда ётади. *AC* ва *BD* тўғри чизиқлар параллел бўлгани учун ички бир томонли *CAB* ва *DBA* бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг.

DBA бурчак *DAC* ва *ABC* бурчакларнинг йиғиндисига тенг, чунки *BC* нур охирлари *ABD* бурчак томонларида ётган *AD* кесмани кесиб ўтади. Исботланганига кўра *DBC* бурчак *ACB* бурчакка тенг. Демак, *ABC* учбурчак бурчакларининг йиғиндиси, яъни $\angle BCA + \angle ABC + \angle CAB$ йиғинди *AC* ва *BD* параллел тўғри чизиқлар билан *AB* кесувчи ҳосил қилган ички бир томонли бурчакларнинг йигиндисига, яъни 180° га тенг.

19- §. Учбурчакнинг ташқи бурчаги

Таъриф. Учбурчакнинг берилган учидаги *ташқи бурчаги* деб, учбурчакнинг шу учидаги бурчагига қўшни бурчакка айтилади (45- расм).

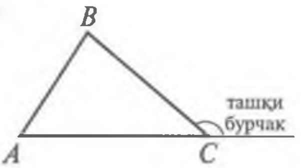
Учбурчакнинг берилган учидаги бурчагини шу ичидаги ташқи бурчаги билан алмаштириб юбормаслик учун у *ички бурчак* деб аталади. Олдинги мавзудаги теорема учбурчакнинг фақат ички бурчакларига тааллуқли эди.

Теорема. *Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган иккита ички бурчак йиғиндисига тенг.*

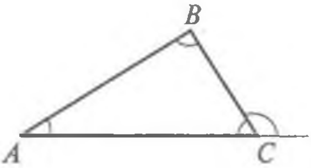
Исботи. *ABC* учбурчакнинг бурчаклари йиғиндиси ҳақидаги теоремага кўра $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$, бундан $\angle A + \angle B =$ $= 180° - \angle C$ (46- расм).

Бу тенгликнинг ўнг қисми учбурчакнинг *C* учидаги ташқи бурчагидир. Теорема исботланди.

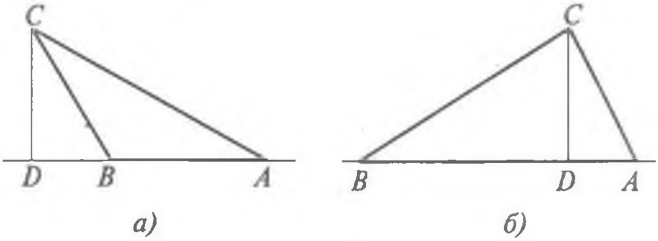
Хулоса. *Учбурчакнинг ташқи бурчаги ўзига қўшни бўлмаган исталган ички бурчагидан катта.*



45- расм



46- расм



а) *б)*

47- расм

Масалалар кўриб чиқамиз.

1-масала. Тенг томонли учбурчакнинг бурчаклари нимага тенг?

Ечилиши. Тенг томонли учбурчакнинг бурчаклари ўзаро тенг бўлишини биламиз. Шу бурчакларнинг йиғиндиси 180° га тенг, шунинг учун уларнинг ҳар бири 60° га тенг.

2-масала. *ABC* учбурчакнинг *CD* баландлиги ўтказилди. Агар учбурчакнинг *A* ва *B* бурчаклари ўткир бўлса, учта — *A*, *B* ва *D* нуқталардан қайси бири қолган иккитасининг орасида ётади?

Ечилиши. *B* нуқта *A* ва *D* нуқталар орасида ёта олмайди, чунки бу ҳолда *B* бурчак ўткир бурчак бўла олмайди (47-*а* расм). Худди шундай, *A* нуқта ҳам *A* ва *D* нуқталар орасида ёта олмайди, сабаби *ABC* учбурчакда *D* бурчак тўғри бурчак ва *A* бурчак ўткир бурчакдир.

Демак, *D* нуқта *A* ва *B* нуқталар орасида ётади (47-*б* расм).

Машқлар

1. Агар бирор тўғри чизиқ иккита параллел тўғри чизиқдан бирини кесиб ўтса, у иккинчисини ҳам кесиб ўтишини исботланг.

2. Агар учбурчакнинг иккита бурчаги маълум бўлса, унинг номаълум бурчагини топинг:

1) 50° ва 30°; 2) 40° ва 75°;

3) 65° ва 80°; 4) 25° ва 120°.

3. Тенг ёнли учбурчакнинг ташқи бурчакларидан бири 70° га тенг. Учбурчакнинг бурчакларини топинг.

(*Жавоб*: 110°, 35°, 35°).

4. Учбурчакнинг иккита ташқи бурчаги 100° ва 150° га тенг. Унинг учинчи ташқи бурчагини топинг.

(*Жавоб*: 110°).

5. Учбурчакнинг ички бурчакларидан бири 30° га, ташқи бурчакларидан бири 40° га тенг. Учбурчакнинг қолган ички бурчакларини топинг.

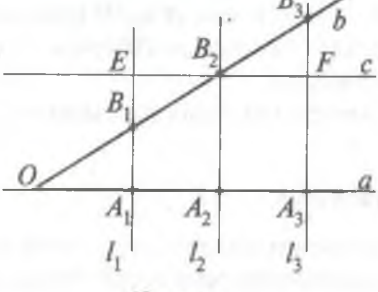
(*Жавоб*: 140° 10°).

20- §. Фалес теоремаси

Томонлари a ва b нурлардан иборат бурчакни ўзаро параллел l_1, l_2, l_3 тўгри чизиқлар кесиб ўтган (48- расм).

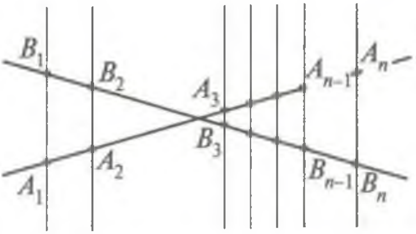
Бурчак томонларида уларни параллел тўғри чизиқлар кесишидан ҳосил бўлган нуқталарни A_1, A_2, A_3 ва B_1, B_2, B_3 билан белгилайлик. Бунда бурчак томонларида A_1A_2, A_2A_3 ва B_1B_2, B_2B_3 кесмалар ҳосил бўлади.

Теорема (Фалес теоремаси). *Агар параллел тўғри чизиқларнинг бурчакнинг бир томонидан ажратган кесмалари тенг бўлса, иккинчи томонда ажратилган кесмалар ҳам ўзаро тенг бўлади.*



48- расм

Исботи. Теоремани исботлаш учун $A_1A_2 = A_2A_3$ эканидан фойдаланиб, $B_1B_2 = B_2B_3$ эканини кўрсатиш керак. B_2 нуқта орқали a томонга параллел қилиб c тўғри чизиқни ўтказамиз. Тўғри чизиқнинг l_1 ва l_2 тўғри чизиқлар билан кесишишидан ҳосил бўлган нуқталарни E ва F ҳарфлари билан белгилаймиз. Ҳосил бўлган $A_1A_2B_2E$; $A_2A_3FB_2$ тўртбурчаклар параллелограммдир. Шунинг учун $A_1A_2 = EB_2$; $A_2A_3 = B_2F$ (48- расм). Расмда ҳосил бўлган B_1B_2E ва B_2B_3F учбурчаклар тенг (учбурчаклар тенглигини иккинчи аломатига кўра), чунки уларда $EB_2 = B_2F$.



49- расм

B_2 учдаги бурчаклар вертикал бурчаклар, E ва F бурчаклар эса l_1 ва l_3 тўғри чизиқларни c тўғри чизиқ кесганда ҳосил бўлган ички алмашинувчи бурчаклар бўлгани учун тенг. Учбурчакларнинг тенглигидан уларнинг мос томонлари бўлган B_1B_2 ва B_2B_3 кесмаларнинг тенглиги келиб чиқади.

Фалес теоремаси фақат бурчак учун эмас, балки ихтиёрий икки кесишувчи тўғри чизиқ учун ҳам ўринлидир. Бундан ташқари тўғри чизиқлар сони ҳам исталганча бўлиши мумкин (49- расм).

Бу ҳолда A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, ..., $A_{n-1}A_n$ кесмаларнинг тенглигидан уларга мос B_1B_2, B_2B_3, B_3B_4, ..., $B_{n-1}B_n$ кесмаларнинг тенглиги келиб чиқади.

Машқлар

1. Берилган кесмани: 1) 4 та тенг кесмага; 2) 6 та тенг кесмага бўлинг.
2. Тўғри тўртбурчак томонларининг ўрталари параллелограммнинг учлари эканини исботланг.
3. Бирор *PQRS* тўртбурчак ясанг. Унинг қарама-қарши томонларини ва бурчакларини кўрсатинг.
4. Параллелограммнинг диагонали унинг икки томони билан 25° ли ва 35° ли бурчаклар ҳосил қилади. Параллелограммнинг бурчакларини топинг.

(*Жавоб*: 60°, 60°, 120°).

5. Параллелограммнинг бурчакларидан иккитасининг йиғиндиси: 1) 80° га; 2) 100° га; 3) 160° га тенг бўлса, параллелограммнинг ҳамма бурчакларини топинг.

(*Жавоб*: 1) 40°, 40°, 140°, 140°;
2) 50°, 50°, 130°, 130°;
3) 80°, 80°, 100°, 100°).

6. Параллелограмм бурчакларидан иккитасининг айирмаси: 1) 70° га; 2) 110° га; 3) 140° га тенг бўлса, параллелограммнинг ҳамма бурчакларини топинг.

(*Жавоб*: 1) 55°, 55°, 125°, 125°;
2) 35°, 35°, 145°, 145°;
3) 20°, 20°, 160°, 160°).

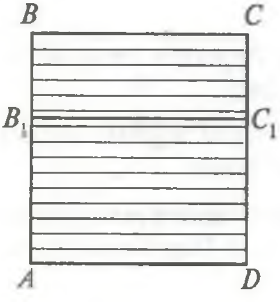
21- §. Тўртбурчак юзини ҳисоблаш

Томонлари a ва b га тенг бўлган тўғри тўртбурчакнинг юзини топамиз. Бунинг учун олдин асослари тенг бўлган иккита тўғри тўртбурчак юзлари нинг нисбати улар баландликларининг нисбати каби бўлишини исботлаймиз.

$ABCD$ ва AB_1C_1D тўғри тўртбурчаклар умумий асослари AD бўлган тўртбурчаклар бўлсин (50- расм).

S ва S_1 — уларнинг юзлари. $\frac{S_1}{S} = \frac{AB_1}{AB}$ эканини исботлаймиз.

Тўғри тўртбурчакнинг AB томонини n та тенг қисмга бўламиз, бу қисмларнинг ҳар бирининг баландлиги $\frac{AB}{n}$ га тенг.



50- расм

m — AB_1 томонда ётган бўлиниш нуқталари сони бўлсин. Шунинг учун:

$$\frac{AB}{n}m \le AB_1 \le \frac{AB}{n}(m+1).$$

Бунда, AB га бўлиб, топамиз:

$$\frac{m}{n} \le \frac{AB_1}{AB} \le \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (*).$$

Бўлиниш нуқталаридан AD асосга параллел тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқлар $ABCD$ тўғри тўртбурчакни n та тенг тўғри тўртбурчакка бўлади. Бу тўртбурчаклардан ҳар бирининг юзи $\frac{S}{n}$ га тенг.

AB_1C_1D тўғри тўртбурчак дастлабки m та тўғри тўртбурчакни, пастдан ҳисоблаганда, ўз ичига олади ва ўзи $m+1$ та тўғри тўртбурчак учида ётади. Шу сабабли

$$\left(\frac{S}{n}\right)m \leq S_1 \leq \left(\frac{S}{n}\right)(m+1),$$

бундан

$$\frac{m}{n} \leq \frac{S_1}{S} \leq \frac{m}{n} + \frac{1}{n} \qquad (**).$$

(*) ва (**) тенгликлардан $\frac{AB_1}{AB}$ ва $\frac{S_1}{S}$ сонларнинг иккаласи ҳам $\frac{m}{n}$ ва $\frac{m}{n}+\frac{1}{n}$ сонлар орасида ётишини кўрамиз. Бу сонлар шунинг учун бир-биридан $\frac{1}{n}$ дан катта бўлмаган сон қадар фарқ қилади, n ни истаганча катта қилиб олиш мумкинлиги туфайли бу фақат $\frac{S_1}{S} = \frac{AB_1}{AB}$ бўлгандагина бўлиши мумкин. Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Тўғри тўртбурчакнинг юзи

$$S = a \cdot b$$

формула билан ифодаланади.

Машқлар

1. Агар тенг ёнли учбурчакнинг асоси 120 см га, ён томони 100 см га тенг бўлса, унинг юзини топинг.

(*Жавоб*: 4800 см^2).

2. Тўғри тўртбурчакнинг томонлари нисбати 4:9 га тенг бўлиб, унинг юзи 144 м^2 бўлса, унинг томонлари нимага тенг?

(*Жавоб*: 8 м, 18 м).

3. Квадрат ва ромбнинг периметри бир хил. Бу шакллардан қайси бирининг юзи катта?

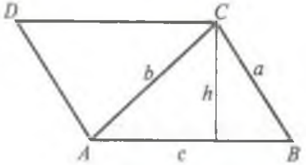
(*Жавоб*: квадрат. Жавобингизни тушунтиринг.).

22- §. Учбурчакнинг юзи

ABC – берилган учбурчак бўлсин (51- расм).

Бу учбурчакни расмда кўрсатилганидек, $ABCD$ параллелограммгача тўлдирамиз. Параллелограммнинг юзи ABC ва CDA учбурчаклар юзларининг йиғиндисига тенг. Бу учбурчаклар тенг бўлгани учун параллелограммнинг юзи ABC учбурчак юзининг иккиланганига тенг. Параллелограммнинг AB томонга мос баландлиги ABC учбурчакнинг AB томонига ўтказилган баландлигига тенг. Бундан, *учбурчакнинг юзи унинг томони билан шу томонга туширилган баландлиги кўпайтмасининг ярмига,* тенг деган хулоса чиқади:

$$S = \frac{1}{2}ch\,.$$



51- расм

Энди *учбурчакнинг юзи унинг исталган иккита томони кўпайтмасини шу томонлар орасидаги бурчак синусига кўпайтирилганининг ярмига тенг* эканини исботлаймиз.

ABC – берилган учбурчак бўлсин (52- расм).

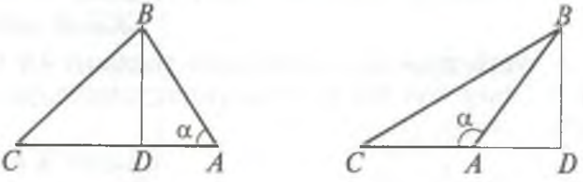
$$S = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin\alpha$$

эканини исботлаймиз.

ABC учбурчакнинг BD баландлигини ўтказамиз.

Ушбу $S = \frac{1}{2}AC \cdot BD$ тенгликка эга бўламиз.

ABD тўғри бурчакли учбурчакдан: агар $\angle\alpha$ ўткир бурчак бўлса, $BD = AB\sin\alpha$ (52-*а* расм), агар $\angle\alpha$ ўтмас бурчак бўлса, $BD = AB\sin(180° - \alpha)$ (52-*б* расм), сўнгра $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha$.



а) *б)*

52- расм

Шу сабабли ҳар қандай ҳолда ҳам $BD = AB\sin\alpha$, шундай қилиб, учбурчакнинг юзи

$$S = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin\alpha .$$

Шуни исботлаш талаб қилинган эди.

Машқлар

1. Уч томонига кўра учбурчакнинг юзини топинг:

1) 13; 14; 15; 2) 6; 8; 10;

3) 8; 8; 14; 4) $\frac{25}{6}$; $\frac{29}{6}$; 6.

Кўрсатма:

Герон формуласидан фойдаланинг:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \text{ бунда } p = \frac{a+b+c}{2}.$$

(*Жавоб*: 1) 84; 4) 10).

2. Учбурчакнинг *a* томони ва унга ёпишган α ва β бурчакларига кўра учбурчакнинг юзини топинг.

3. Томонлари:

1) 13; 14; 15; 2) 5; 5; 6; 3) 17; 65; 80

га тенг учбурчакнинг энг кичик баландлигини топинг.

(*Жавоб*: 2) 4; 3) 7,2).

4. Томонлари:

1) $\frac{25}{6}$; $\frac{29}{6}$; 6; 2) 13; $37\frac{12}{13}$; $47\frac{1}{3}$

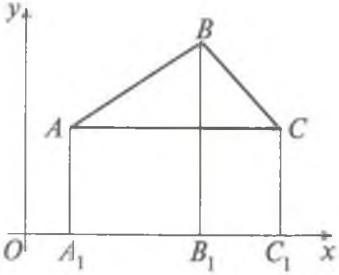
га тенг учбурчакнинг энг катта баландлигини топинг.

(*Жавоб*: 1) 4,6; 2) $\frac{5040}{169}$).

23- §. Учларининг координаталари билан берилган учбурчакнинг юзини топиш

Текисликда учта нуқта $A\ (x_1;\ y_1)$; $B\ (x_2;\ y_2)$; $C\ (x_3;\ y_3)$ координаталари билан берилган бўлиб, *ABC* учбурчакни қараймиз (53- расм).

Масала берилган нуқталарнинг координаталарига кўра шу *ABC* учбурчакнинг юзини топишдан иборат.



53- расм

A, B ва C нуқталардан Ox ўқига перпендикулярлар тушириб, уларнинг асосларини мос равишда A_1, B_1, C_1 билан белгилаймиз. Бунда

$$OA_1 = x_1,\quad OB_1 = x_2,\quad OC_1 = x_3,$$
$$AA_1 = y_1,\quad BB_1 = y_2,\quad CC_1 = y_3$$

бўлиб,

$$A_1B_1 = OB_1 - OA_1 = x_2 - x_1,$$
$$B_1C_1 = OC_1 - OB_1 = x_3 - x_2,$$
$$A_1C_1 = OC_1 - OA_1 = x_3 - x_1$$

бўлади.

Мактаб геометрия курсидан маълумки, трапециянинг юзи иккала асоси йиғиндисининг ярми билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h,$$

бунда: a, b – трапециянинг асослари, h – унинг баландлиги.

AA_1B_1B; BB_1C_1C ва AA_1C_1C трапецияларнинг юзлари $S_{AA_1B_1B}$, $S_{BB_1C_1C}$, $S_{AA_1C_1C}$ учун ушбу тengликларга эга бўламиз:

$$S_{AA_1B_1B} = \frac{AA_1 + BB_1}{2} \cdot A_1B_1 = \frac{y_1 + y_2}{2}(x_2 - x_1),$$

$$S_{BB_1CC_1} = \frac{BB_1 + CC_1}{2} \cdot B_1C_1 = \frac{y_2 + y_3}{2}(x_3 - x_2),$$

$$S_{AA_1C_1C} = \frac{AA_1 + CC_1}{2} \cdot A_1C_1 = \frac{y_1 + y_3}{2}(x_3 - x_1).$$

Равшанки, берилган учбурчакнинг юзи

$$S_{\Delta ABC} = S_{AA_1B_1B} + S_{BB_1C_1C} - S_{AA_1C_1C}.$$

Юқоридаги тенгликлардан фойдаланиб,

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\big((y_1 + y_2)(x_2 - x_1) + (y_3 + y_2)(x_3 - x_2) -$$
$$-(y_3 + y_1)(x_3 - x_1)\big)$$

бўлишини топамиз.

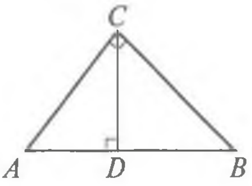
Бу берилган *учбурчакнинг юзини учларининг координаталарига кўра топиш формуласи* дейилади.

24- §. Пифагор теоремаси

1. Юнон олими Пифагор тўғри бурчакли учбурчак томонлари орасидаги мавжуд бўлган муносабатларни аниқлаб, уни қуйидагича исботлайди.

Теорема (Пифагор теоремаси). *Тўғри бурчакли учбурчак гипотенузасининг квадрати катетлар квадратларининг йиғиндисига тенг.*

Исботи. ABC берилган тўғри бурчакли учбурчак бўлиб, унда бурчак $C = 90°$ — тўғри бурчак бўлсин. Тўғри бурчакнинг C учидан CD баландликни ўтказамиз (54- расм).



54- расм

Бурчак косинусининг таърифига кўра тўғри бурчакли учбурчаклар ABC ва ACD нинг ўткир бурчаги A учун:

$$\cos\angle A = \frac{AD}{AC} = \frac{AC}{AB}, \text{ бундан } AB \cdot AD = AC^2 ,$$

шунга ўхшаш

$$\cos\angle B = \frac{BD}{BC} = \frac{BC}{AB}, \text{ бундан } AB \cdot BD = BC^2 .$$

Ҳосил бўлган тенгликларни ҳадма-ҳад қўшиб ва $AD + DB = AB$ эканини ҳисобга олиб, $AC^2 + BC^2 = AB(AD + DB) = AB^2$ тенгликни ҳосил қиламиз. Теорема исботланди.

Пифагор теоремасидан ушбу натижа келиб чиқади:

тўғри бурчакли учбурчакнинг исталган катети гипотенузасидан кичик.

Бундан ўз навбатида қуйидаги натижа келиб чиқади:

ҳар қандай ўткир бурчак учун $\cos\alpha < 1$.

Машқлар

1. Тўғри бурчакли учбурчакнинг a ва b катетлари берилган. Гипотенузани топинг:

1) $a = 3$; $b = 4$; 2) $a = 1$; $b = 1$; 3) $a = 5$; $b = 6$.

(*Жавоб*: 1) 5; 2) $\sqrt{2} \approx 1{,}1$; 3) $\sqrt{61} \approx 7{,}8$).

2. Тўғри бурчакли учбурчакнинг c гипотенузаси ва a катети берилган. Иккинчи катетни топинг:

1) $c = 5$; $a = 3$; 2) $c = 13$; $a = 5$; 3) $c = 6$; $a = 5$.

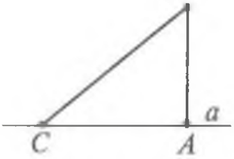
(*Жавоб*: 1) 4; 2) 12; 3) $\sqrt{11} \approx 3{,}3$).

3. Тўгри бурчакли учбурчакнинг икки томони 3 м ва 4 м га тенг. Учинчи томонни топинг (иккита ҳолни кўринг).

(*Жавоб*: 5 м ёки $\sqrt{7} \approx 2{,}6$ м).

25- §. Перпендикуляр ва оғма

BA кесма *a* тўғри чизиққа *B* нуқтадан туширилган перпендикуляр ва *C* нуқта *a* тўғри чизиқнинг *A* дан бошқа ихтиёрий нуқтаси бўлсин. *BC* кесма *B* нуқтадан *a* тўғри чизиққа ўтказилган *оғма* дейилади (55- расм).



55- расм

C нуқта оғманинг *асоси* дейилади. *AC* кесма оғманинг *a* тўғри чизиқдаги *проекцияси* (сояси) дейилади.

Пифагор теоремасидан қуйидаги хулосалар келиб чиқади.

Агар бир нуқтадан тўғри чизиққа перпендикуляр ва оғмалар ўтказилса, исталган оғма перпендикулярдан катта, тенг оғмалар тенг проекцияларга эга, иккита оғмадан қайси бирининг проекцияси катта бўлса, ўша оғма катта бўлади.

Пифагор теоремасига кўра: $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Бундан $BC > AB$ экани кўриниб турибди. AB берилган AC дан қанча катта бўлса, BC шунча катта бўлади.

Машқлар

1. Учбурчакнинг томонларида олинган ихтиёрий икки нуқта орасидаги масофа унинг энг катта томонидан катта эмаслигини исботланг.

2. Тўртбурчак диагоналларининг кесишиши маълум. Улар узунликларининг йиғиндиси тўртбурчакнинг периметридан кичик, аммо ярим периметридан катта. Шуни исботланг.

26- §. Учбурчаклардаги метрик муносабатлар

Геометрик шакллар ичида энг кўп учрайдиган ва геометрик масалалар ечишда кўп қўлланиладиган шакл бу учбурчакдир. Шунинг учун учбурчакка доир ёки учбурчак элементларининг комбинацияси билан ечиладиган масалалар кўп учрайди.

Учбурчак элементларининг комбинацияси орқали бериладиган масалалар асосан қуйидаги кўринишда бўлади:

1. Учбурчакнинг учта томонига кўра бериладиган масалалар.

2. Учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчагига кўра бериладиган масалалар.

3. Учбурчакнинг бир томони ва унга ёпишган икки бурчагига кўра бериладиган масалалар.

4. Учбурчакнинг икки томони ва бу томонлардан бири қаршисидаги бурчакка кўра бериладиган масалалар.

5. Учбурчакнинг бир томони ҳамда унга қарши ётган ва ёпишган бурчагига кўра бериладиган масалалар.

Юқоридагиларга қўшимча яна қуйидагиларни ёзиш мумкин:

1. Учбурчакка ташқи чизилган айлананинг радиуси:

$$R = \frac{abc}{4S}.$$

2. Учбурчакка ички чизилган айлананинг радиуси:

$$r = \frac{2S}{p},$$

бу ерда: $p = \frac{a+b+c}{2}$.

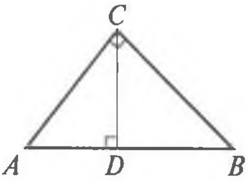
3. Учбурчакнинг баландликлари мос равишда h_a, h_b, h_c ва ички чизилган айлананинг радиуси r бўлса,

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c}$$

муносабат ўринли бўлади.

4. Тўғри бурчакли учбурчакнинг тўғри бурчаги учидан унинг гипотенузасига туширилган перпендикуляр гипотенуза бўлаклари орасида ўрта пропорционал миқдордир. Ҳар бир

катет бутун гипотенуза билан унинг гипотенузадаги проекцияси орасида ўрта пропорционал миқдордир, яъни (56- расм):



56- расм

$$AC^2 = AB \cdot AD \,,$$
$$CD^2 = AD \cdot BD \,,$$
$$BC^2 = AB \cdot BD \,.$$

5. Бу юқоридаги муносабатлардан бевосита тўғри бурчакли учбурчакнинг томонлари бир хил ўлчовли бўлганда катетлар квадратларининг йиғиндиси гипотенузасининг квадратига тенг деган мулоҳазани исботлаш осондир, яъни (56- расм):

$$AC^2 + BC^2 = AB \cdot AD + AB \cdot BD = AB(AD + BD) = AB \cdot AB = AB^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow AC^2 + BC^2 = AB^2.$$

6. Учбурчак бурчагининг биссектрисаси унинг шу бурчак қаршисида ётган томонини қолган томонларига пропорционал бурчакларга бўлади (57- расм), яъни

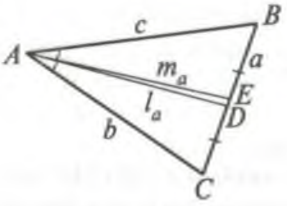
$$BD : DC = AB : AC,$$

бунда $AD = l_a$ − биссектриса.

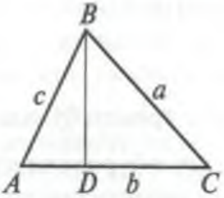
7. Учбурчак медианаси ўзи чиққан бурчак қаршисида ётган томонни тенг иккига бўлади. Медианаларнинг узунликлари ушбу формулалар билан топилади (57- расм):

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}, \quad m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4},$$

$$m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$



57- расм



58- расм

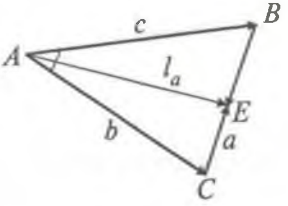
8. Агар берилган ихтиёрий учбурчакнинг томонлари мос равишда a, b, c бўлса, c томоннинг b томондаги проекциясининг узунлиги (58- расм):

$$AD=\frac{c^2+b^2-a^2}{2b}$$

формула билан топилади.

Масалалар кўриб чиқамиз.

1-масала. ABC учбурчакнинг томонлари a, b, c га тенг. Шу учбурчакнинг a томонига ўтказилган l_a биссектрисанинг узунлигини ҳисобланг.



59- расм

Берилган: $\triangle ABC$; $AB=c$; $AC=b$; $BC=a$ (59- расм).

Топиш керак: $AE=l_a=?$

Ечилиши. Учбурчак биссектрисасининг хоссасига асосан $AB:AC=BE:EC$ ни ёза оламиз. Агар учбурчак томонларини векторлар орқали ифодаласак, у ҳолда AE биссектрисанинг

$$\overline{AE}=\frac{\overline{CE}\cdot\overline{AB}+\overline{BE}\cdot\overline{AC}}{\overline{CE}+\overline{BE}}$$

векторли ифодасини ёзиш мумкин. Бу ифоданинг иккала томонини квадратга оширсак,

$$\overline{AE}^2=\frac{\overline{CE}^2\cdot\overline{AB}^2+\overline{BE}^2\cdot\overline{AC}^2+2\overline{CE}\cdot\overline{AB}\cdot\overline{BE}\cdot\overline{AC}}{\overline{CE}^2+\overline{BE}^2+2\overline{CE}\cdot\overline{BE}}$$

векторли ифодани ҳосил қиламиз. 59- расмда $\overline{BC}=\overline{AC}-\overline{AB}$ эканини ҳисобга олиб, бу тенгликнинг иккала томонини квадратга оширсак,

$$\overline{BC}^2=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-2\overline{AC}\cdot\overline{AB}$$

векторли тенгликка эга бўламиз, бундан

$$2\overline{AC}\cdot\overline{AB}=\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2$$

эканини ҳисобга олсак, у ҳолда

$$\overline{AE}^2=\frac{\overline{CE}^2\cdot\overline{AB}^2+\overline{BE}^2\cdot\overline{AC}^2+\overline{CE}\cdot\overline{BE}\cdot(\overline{AC}^2+\overline{AB}^2-\overline{BC}^2)}{\overline{CE}^2+\overline{BE}^2+2\overline{CE}\cdot\overline{BE}}$$

тенгликни ҳосил қиламиз. Ўнг томондаги касрнинг сурат ва махражини $BE \cdot CE$ га бўлсак,

$$\overline{AE}^2 = \frac{\frac{CE}{BE}\overline{AB}^2 + \frac{BE}{CE}\overline{AC}^2 + \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{BC}^2}{\frac{CE}{BE} + \frac{BE}{CE} + 2} =$$

$$= \frac{\frac{b}{c}c^2 + \frac{c}{b}b^2 + b^2 + c^2 - a^2}{\frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 2} = \frac{bc}{(b+c)^2} \cdot 4p(p-a)$$

ҳосил бўлади, бу ерда $p = \frac{a+b+c}{2}$.

Демак,

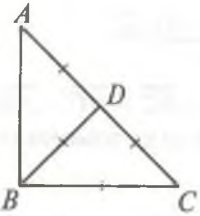
$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

шунга ўхшаш учбурчакнинг b ва c томонларига ўтказилган биссектрисалар узунлиги учун

$$l_b = \frac{2}{a+c}\sqrt{acp(p-b)} \quad \text{ва} \quad l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)}$$

формулаларни ҳосил қилиш мумкин.

2-масала. Агар тенг ёнли учбурчакнинг асосидаги бурчакнинг биридан чиққан тўғри чизиқ уни иккита тенг ёнли учбурчакка ажратса, берилган тенг ёнли учбурчакнинг бурчакларини топинг (60- расм).



60- расм

Ечилиши. ABC учбурчакда $AB=AC$ ва D нуқта AC томонда ётиб, ABC учбурчакни $\triangle ADB$ ва $\triangle DBC$ ларга ажратади, бунда $AD=BD=BC$.

Агар $\angle ABD = x$ деб олсак, $\angle BCD = \angle BDC = 2x$ бўлади. $AB = AC$ бўлганлигидан $\angle CBD = x$ бўлади. Бундан $5x = 180°$ ҳосил бўлиб, $x = 36°$ экани келиб чиқади.

27- §. Косинуслар теоремаси

Тўғри бурчакли учбурчак ўткир бурчагининг *косинуси* деб шу бурчакка ёпишган катетнинг гипотенузасига нисбатига айтилади.

Теорема (косинуслар теоремаси). *Учбурчак исталган томонининг квадрати қолган икки томон квадратлари йиғиндисидан шу икки томон билан улар орасидаги бурчак косинусининг иккиланган кўпайтмасини айириш натижасига тенг.*

Исботи. ABC — берилган учбурчак бўлсин.

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A$$

эканини исботлаймиз.

$\overline{BC} = \overline{AC} - \overline{AB}$ вектор тенгликка эга бўламиз. Бу тенгликни скаляр квадратга кўтариб топамиз:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\overline{AB} \cdot \overline{AC}$$

ёки

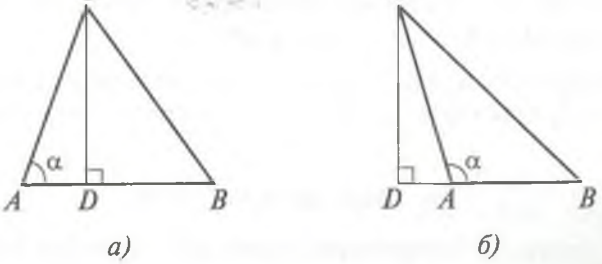
$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cdot \cos\angle A\,.$$

Теорема исботланди.

Шуни эслатиб ўтамизки, $AC \cdot \cos\angle A$ нинг абсолют қиймати AC томоннинг BA томонга туширилган проекцияси AD га (62-*а* расм) ёки AB томоннинг давомига туширилган AD проекциясига (62-*б* расм) тенг.

$AC \cdot \cos\angle A$ нинг ишораси A бурчакка боғлиқ: A бурчак ўткир бўлса «+», A бурчак ўтмас бўлса «–» ишора олинади. Бундан ушбу натижа келиб чиқади: *учбурчак томонининг квадрати қолган иккита томон квадратлари йиғиндиси «+», «–» улардан бирининг иккинчисига проекциясининг иккиланган кўпайтмасига тенг.*

«+» ишорани қаршисидаги бурчак ўтмас бўлганда, «–» ишорани эса қаршисидаги бурчак ўткир бўлганда олиш керак.



а)   б)

62- расм

Машқлар

1. Учбурчакнинг икки томони ва улар орасидаги бурчаги берилган:

1) $a = 12,\ b = 8,\ \gamma = 60°$; 2) $a = 7,\ b = 23,\ \gamma = 130°$;
3) $b = 9,\ c = 17,\ \alpha = 95°$; 4) $b = 14,\ c = 10,\ \alpha = 145°$;
5) $a = 32,\ c = 23,\ \beta = 152°$; 6) $a = 24,\ c = 18,\ \beta = 15°$.

Унинг қолган бурчакларини ва учинчи томонини топинг.

Жавоб:

1) $\alpha \approx 79°,\ \beta \approx 41°,\ c \approx 10{,}6$; 2) $\alpha \approx 11°,\ \beta \approx 39°,\ c \approx 28$;
3) $\beta \approx 22°,\ \gamma \approx 58°,\ a \approx 19{,}9$; 4) $\beta \approx 21°,\ \gamma \approx 15°,\ a \approx 22{,}9$;
5) $\alpha \approx 16°,\ \gamma \approx 17°,\ b \approx 53{,}4$; 6) $\alpha \approx 130°,\ \gamma \approx 17°,\ b \approx 8{,}09$.

2. Учбурчакнинг икки томони ва томонлардан бирининг қаршисидаги бурчак берилган:

1) $a = 12,\ b = 5,\ \gamma = 120°$; 2) $a = 27,\ b = 9,\ \alpha = 138°$;
3) $a = 34,\ b = 12,\ \alpha = 164°$; 4) $a = 2,\ b = 4,\ \alpha = 60°$;
5) $a = 6,\ b = 8,\ \alpha = 30°$.

Унинг қолган томони ва бурчакларини топинг.

Жавоб:

1) $c \approx 8{,}69,\ \beta \approx 21°,\ \gamma \approx 30°$; 2) $c \approx 19{,}6,\ \beta \approx 13°,\ \gamma \approx 29°$;
3) $c \approx 23{,}3,\ \beta \approx 6°,\ \gamma \approx 10°$; 4) ечимлари мавжуд эмас;
5) $c \approx 11{,}4,\ \alpha \approx 42°,\ \gamma \approx 108°$ ёки
$c \approx 2{,}49,\ \beta \approx 138°,\ \gamma \approx 12°$.

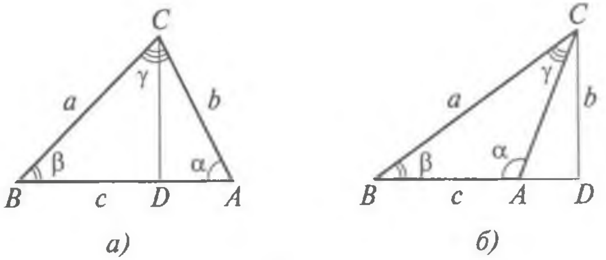
28- §. Синуслар теоремаси

Теорема. *Учбурчак томонлари ўзларининг қаршисидаги бурчакларнинг синусларига пропорционал.*

Исботи. a, b, c — томонлари ва шу томонлар қаршисидаги бурчаклар $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ бўлган учбурчак берилган (63-расм).

$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ эканини исботлаймиз.

C учидан *CD* баландликни туширамиз. *ACD* тўғри бурчакли учбурчакдан α бурчак ўткир бўлган ҳолда топамиз.



63- расм

$$CD = b\sin\alpha \quad (63\text{-}a \text{ расм}).$$

Агар α ўтмас бурчак бўлса, у ҳолда

$$CD = b\sin(180^\circ - \alpha) = b\sin\alpha \quad (63\text{-}б \text{ расм}).$$

Шунга ўхшаш, BCD бурчакдан $CD = a\sin\beta$ ни топамиз.

Шундай қилиб, $a\sin\beta = b\sin\alpha$, бундан, $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{a}{\sin\alpha}$.

Ушбу $\frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$ тенглик ҳам шунга ўхшаш исботланади. Исботлаш ўқувчига ҳавола этилади.

Эслатма. Исботлаш учун учбурчакнинг A учидан унинг баландлигини ўтказиш керак. Теорема исботланди.

II боб. СТЕРЕОМЕТРИЯ АСОСЛАРИ

Стереометрия геометриянинг бир бўлими бўлиб, ҳамма нуқталари бир текисликда ётмаган геометрик жисм (шакл)ларни ўрганади.

Геометриянинг стереометрия қисмини ўрганишда етарли сондаги бир-бирига зиддиятли бўлмаган ва бири иккинчисининг натижаси ҳисобланмаган аксиомалар бўлиши шарт.

Аксиомалар:

1. Текислик қандай бўлмасин, шу текисликка тегишли нуқталар ва унга тегишли бўлмаган нуқталар мавжуд.

2. Агар иккита турли текислик умумий нуқтага эга бўлса, улар шу нуқтадан ўтувчи тўғри чизиқ бўйича кесишади.

3. Агар иккита турли тўғри чизиқ умумий нуқтага эга бўлса, улар орқали битта ва фақат битта текислик ўтказиш мумкин.

Бу бобда стереометрияга тааллуқли бўлган масалаларни қараб чиқамиз. Планиметрия курсида кўриб ўтилган асосий аксиомалар системаси ҳамда стереометриянинг аксиомалари биргаликда қаралади.

Фазодаги тўғри чизиқ ва текисликка оид масалаларни кўриб чиқамиз.

1- §. Нуқтадан текисликкача бўлган масофани топиш

Фазода $Ax + By + Cz + D = 0$ уч номаълумли чизиқли тенглама билан берилган T текислик ва бу текисликда ётмаган $P(x_0;\ y_0;\ z_0)$ нуқтани қарайлик. P нуқтадан T текисликка туширилган перпендикулярнинг узунлиги бу нуқтадан шу текисликкача бўлган масофани билдиради. Бу масофа қуйидаги формула билан топилади:

$$p = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Машқлар

1. Икки айқаш тўғри чизиқ берилган. Бу тўғри чизиқлардан ўтувчи ва ўзаро параллел бўлган фақат бир жуфт текислик мавжуд эканлигини исботланг.
2. Бир текисликда ётмаган AB ва CD кесмалар берилган. M ва N мос равишда бу кесмаларнинг ўрталари бўлсин. $\frac{1}{2}(AC + BD) > MN$ эканини исботланг (масалани исботини ўқувчининг ўзи мустақил бажаради).

3- §. Уч перпендикуляр ҳақидаги теорема

Теорема. *Текисликда оғманинг асосидан унинг проекциясига перпендикуляр қилиб ўтказилган тўғри чизиқ оғманинг ўзига ҳам перпендикуляр бўлади.*

Исбот. AB кесма α текисликка туширилган перпендикуляр, AC оғма ва c эса оғманинг C асосидан текисликда ўтказилган тўғри чизиқ бўлсин (67- расм).

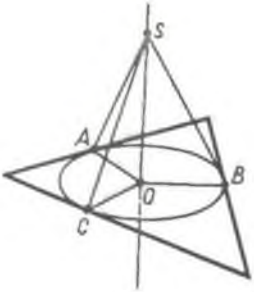
AB тўғри чизиққа параллел CA' тўғри чизиқни ўтказамиз. У α текисликка перпендикуляр. AB ва $A'C$ тўғри чизиқлар орқали β текисликни ўтказамиз. c тўғри чизиқ CA тўғри чизиққа перпендикуляр.

Агар у CB тўғри чизиққа перпендикуляр бўлса, у ҳолда β текисликка перпендикуляр бўлади, демак, AC тўғри чизиққа ҳам перпендикулярдир.

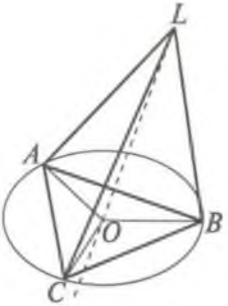
Худди шунга ўхшаш, агар c тўғри чизиқ CA оғмага перпендикуляр бўлса, у CA' тўғри чизиққа ҳам перпендикуляр эканлигидан β текисликка перпендикуляр бўлади. Демак, BC оғманинг проекциясига ҳам перпендикуляр бўлади. Теорема исботланди.

Масала. Учбурчакка ички чизилган айлананинг марказидан учбурчак текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси учбурчак томонларидан тенг узоқликда ётишини исботланг.

67- расм



68- расм



69- расм

Ечилиши. A, B, C учбурчак томонларининг айланага уриниш нуқталари, O айлананинг маркази, S перпендикулярдаги ихтиёрий нуқта бўлсин (68- расм).

OA радиус учбурчакнинг томонига перпендикуляр бўлгани учун уч перпендикуляр ҳақидаги теоремага асосан SA кесма шу томонга туширилган перпендикулярдир, унинг узунлиги эса S нуқтадан учбурчакнинг томонигача бўлган масофадир.

Пифагор теоремасига кўра,

$$SA = \sqrt{AO^2 + OS^2} = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

бунда r — ички чизилган айлананинг радиуси.

Шунга ўхшаш қуйидагиларни топамиз:

$$SB = \sqrt{r^2 + OS^2}; \ SC = \sqrt{r^2 + OS^2},$$

яъни S нуқтадан учбурчак томонларигача бўлган барча масофалар тенг.

Машқлар

1. Учбурчакка ташқи чизилган айлана марказидан учбурчак текислигига перпендикуляр тўғри чизиқ ўтказилган. Бу тўғри чизиқнинг ҳар бир нуқтаси учбурчакнинг учларидан тенг узоқликда ётишини исботланг (69- расм).
2. Учбурчакка радиуси 0,7 м бўлган ички чизилган айлананинг марказидан учбурчак текислигига узунлиги 2,4 м га тенг перпендикуляр чиқарилган. Бу перпендикулярнинг

учидан учбурчакнинг томонларигача бўлган масофани топинг. (*Жавоб:* 2,5 м.)

3. Берилган нуқтадан учбурчак текислигигача бўлган масофа 1,1 м га тенг, учбурчакнинг ҳар бир томонигача бўлган масофа эса 6,1 м га тенг. Бу учбурчакка ички чизилган айлананинг радиусини топинг. (*Жавоб:* 6 м.)

4- §. Кўпёқнинг турлари

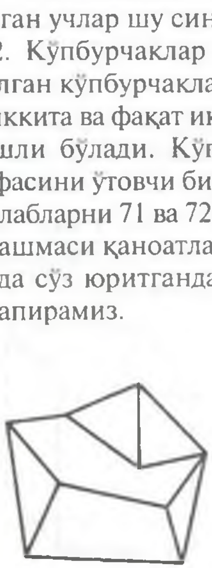
Чекли сондаги текисликлар билан чегараланган жисм *кўпёқ* дейилади. Кўпёқнинг чегараси унинг *сирти* дейилади (70- расм).

Содда кўпёқларга призма ва пирамида киради. Биз призма ва пирамиданинг сирти ҳақидаги тушунчани тўлдириб, содда кўпёқларга мисоллар келтирамиз.

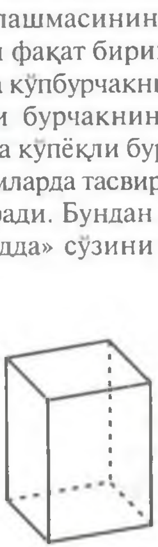
Чекли сондаги кўпбурчакларнинг қуйидаги шартларни қаноатлантирувчи бирлашмаси *содда кўпёқли сирт* дейилади.

1. Бу кўпбурчакларнинг ихтиёрий иккита учи учун уларнинг томонларидан тузилган синиқ чизиқ мавжуд бўлиб, олинган учлар шу синиқ чизиқнинг учлари бўлади.

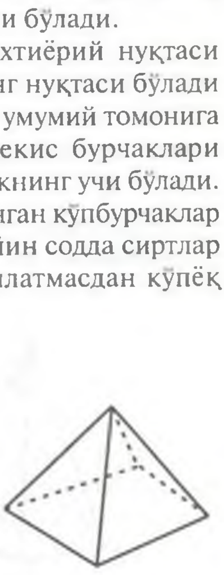
2. Кўпбурчаклар бирлашмасининг ихтиёрий нуқтаси берилган кўпбурчаклардан фақат бирининг нуқтаси бўлади ёки иккита ва фақат иккита кўпбурчакнинг умумий томонига тегишли бўлади. Кўпёқли бурчакнинг текис бурчаклари вазифасини ўтовчи биргина кўпёқли бурчакнинг учи бўлади. Бу талабларни 71 ва 72-расмларда тасвирланган кўпбурчаклар бирлашмаси қаноатлантиради. Бундан кейин содда сиртлар ҳақида сўз юритганда «содда» сўзини ишлатмасдан кўпёқ деб гапирамиз.



70- расм



71- расм



72- расм

Кўпёқли сиртни ташкил қилувчи кўпбурчаклар унинг *ёқлари* дейилади, бу кўпбурчакларнинг томонлари кўпёқли сиртнинг *қирралари*, учлари эса кўпёқли шаклнинг *учлари* дейилади.

Агар кўпёқли сиртнинг ҳар бир қирраси унинг иккита ёғига тегишли бўлса, у ҳолда бу кўпёқли сирт *ёпиқ сирт* дейилади. Призманинг ён сирти (71- расм) ёпиқ бўлмаган кўпёқли сиртга мисолдир, пирамиданинг сирти (72- расм) ёпиқ кўпёқли сиртга мисолдир,

Ёпиқ кўпёқли сирт фазонинг шу сиртга тегишли бўлмаган барча нуқталари тўпламини иккита қисм тўпламга ажратади. Бу қисм тўпламлардан бири учун шу қисм тўпламга тегишли тўғри чизиқлар мавжуд; иккинчиси учун эса бундай тўгри чизиқлар мавжуд эмас. Кўрсатилган қисм тўпламлардан биринчиси кўпёқли сиртнинг *ташқи соҳаси*, иккинчиси *ички соҳаси* дейилади.

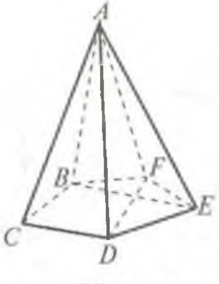
Таъриф. Ёпиқ кўпёқли сирт билан унинг ички соҳасининг бирлашмаси кўпёқ дейилади.

Таъриф. Кўпёқли сирт ва унинг ички соҳаси мос равишда *кўпёқнинг сирти* ва *кўпёқнинг ички соҳаси* дейилади.

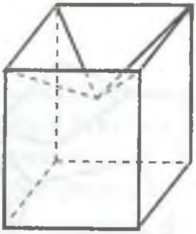
Таъриф. Кўпёқли сиртнинг ёқлари, қирралари, учлари мос равишда кўпёқнинг *ёқлари*, *қирралари* ва *учлари* дейилади.

Таъриф. Кўпёқнинг бир ёғига тегишли бўлмаган икки учини бирлаштирувчи кесма кўпёқнинг диагонали дейилади (73- расм).

73- расмда $ABCDEF$ олтиёқ ва унинг диагонали DF, BE тасвирланган. Кўпёқлар кўпбурчаклар сингари қаварик (73- расм) ва ноқаварик (74- расм) бўлиши мумкин.



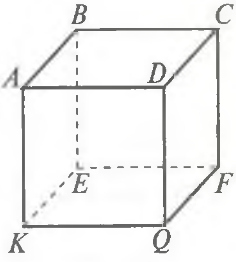
73- расм



74- расм

Биз фақат қаварик кўпёқларни ўрганамиз.

Агар кўпёқнинг ўзи уни чегараловчи текисликларнинг ҳар биридан бир томонда ётса, бундай кўпёқ *қаварик кўпёқ* дейилади. Қаварик кўпёқнинг сирти билан уни чегаралаб турган текисликнинг умумий қисми *ёқ*, кўпёқларнинг томонлари унинг *қирралари*, учлари эса кўпёқнинг *учлари* дейилади. Масалан, куб — қаварик кўпёқдир (75- расм).



75- расм

Унинг сирти 6 та квадратдан ташкил топган: *ABCD*; *BEFC*; *AKQD*; *CDQF*; *KEFQ*; *ABEK*.

Бу квадратлар кубнинг ёқларидир. Квадратларнинг *AB*, *BC*, *BE*, ... томонлари кубнинг қирралари бўлади. Квадратларнинг *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F*, *Q*, *K* учлари кубнинг учлари бўлади. Кубда 6 та ёқ, 12 та қирра ва 8 та бурчак бор.

Машқлар

1. Ёқларининг сони энг кам бўлган кўпёқ чизинг. Унда нечта қирра, нечта уч ва нечта диагонал бўлишини айтинг.

2. Тўғри тўртбурчак, бешбурчак бешёқнинг ёғи бўлиши мумкинми?

3. Кўпёқнинг ёқларидан бири олтибурчак. Шу кўпёқнинг қирралари сони энг камида нечта бўлиши мумкин?

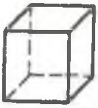
4. 8 та, 9 та қирраси бўлган кўпёқ чизинг.

5- §. Мунтазам кўпёқлар

Таъриф. Агар кўпёқнинг барча ёқлари ўзаро тенг мунтазам кўпбурчаклар ва унинг барча кўпёқли бурчаклари ёқларининг сони бир хил бўлса, бундай кўпёқ *мунтазам кўпёқ* дейилади.

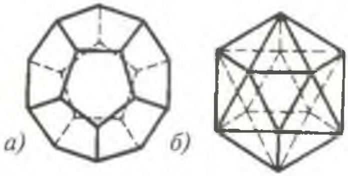
Мунтазам кўпёқлардан куб ва мунтазам тетраэдр сизга маълум (76, 77- расмлар).

76- расм



77- расм

78- расм



79- расм

Мунтазам кўпёқларнинг яна уч тури мавжуд. Булар мунтазам саккизёқ (мунтазам октаэдр, 78- расм), мунтазам йигирмаёқ (додекаэдр, 79-*а* расм), мунтазам ўниккиёқ (икосаэдр, 79-*б* расм).

Мунтазам кўпёқларнинг айтиб ўтилган бешта қаварик туридан бошқа ҳеч қандай тури мавжуд эмас (буни қадимий юнон файласуфи *Платон* кашф қилган деб тахмин қилинади).

Машқлар

1. Кубнинг бир учидан ёқларининг учта диагонали ўтказилган, уларнинг учлари кесмалар билан туташтирилган. Шу усулда ясалган олтита кесма қирралари бўлган пирамиданинг мунтазам тетраэдр эканлигини исботланг.
2. 1) Мунтазам тетраэдрнинг; 2) мунтазам октаэдрнинг икки ёқли бурчагининг катталигини топинг.

   (*Жавоб*: 1) 70°32′; 2) 109°28′).
3. Мунтазам октаэдр қиррасининг узунлиги *а* га тенг. Шу октаэдр сиртининг юзини топинг.

   (*Жавоб*: $2a^2\sqrt{3}$).
4. Мунтазам тетраэдр сиртининг юзи *Q* га тенг. Шу тетраэдр қиррасининг узунлигини топинг.

   (*Жавоб*: $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt[4]{3}}$).

6- §. Айланиш жисмлари

Айланиш жисмларига цилиндр, конус, шар, сфера, доира, айланалар киради. Уларга қисқача таърифлар бериб, масалалар ечиш усулларини таништирамиз.

6.1. Цилиндр

Иккита параллел текислик орасида жойлашган ва текисликлардан биридаги доирани кесиб ўтадиган ҳамма параллел тўғри чизиқлар кесишмаларидан ташкил топган жисм *цилиндр* (яъни доиравий цилиндр) дейилади. Учлари бу доиранинг айланасида ётган кесмалар цилиндрнинг *ясовчилари* дейилади.

Цилиндрнинг сирти цилиндр асосларидан – параллел текисликларда ётган иккита тенг доирадан ва ён сиртидан иборат.

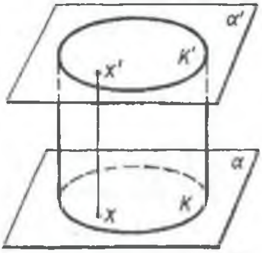
Цилиндрнинг *ясовчилари* асос текисликларига перпендикуляр бўлса, бундай цилиндр *тўғри цилиндр* дейилади (80-расм).

Цилиндр асосининг радиуси цилиндр *радиуси* дейилади.

Цилиндр асослари текисликлари орасидаги масофа цилиндрнинг *баландлиги* дейилади.

Асосларининг марказларидан ўтувчи тўғри чизиқ цилиндрнинг ўқи дейилади. Бу ўқ ясовчиларга параллел бўлади.

Цилиндрнинг ўқи орқали ўтувчи кесим *ўқ кесим* дейилади. Цилиндрнинг ясовчиси орқали ўтадиган ўқ кесимга перпендикуляр текислик цилиндрнинг *уринма текислиги* дейилади.

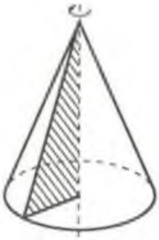


80- расм

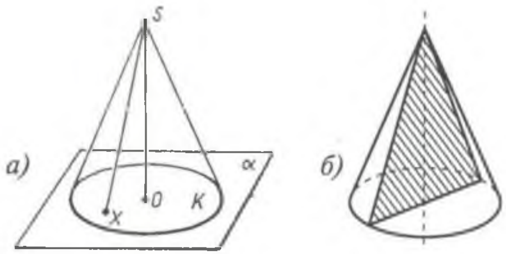
6.2. Конус

Конус (доиравий конус) деб шундай жисмга айтиладики, у берилган нуқтасини бирор доира нуқталари билан туташтирувчи ҳамма кесмалардан ташкил топган бўлиб, бу берилган нуқта *конус учи*, доира эса *конус асоси* дейилади. Конус учини асос айланаси нуқталари билан туташтирувчи кесмалар *конуснинг ясовчилари* дейилади.

Конус сирти асосидан ва ён сиртидан иборат. Конуснинг учи билан асос айланасининг марказини туташтирувчи тўғри чизиқ асос текислигига перпендикуляр бўлса, бундай конус



81- расм



82- расм

тўғри конус дейилади. Тўғри конусни тўғри бурчакли учбурчакни унинг бир катети атрофида айлантиришдан ҳосил бўлган жисм деб қараш мумкин (81- расм).

82-*а* расмда тўғри конус тасвирланган. Унинг учи S, асоси текисликдаги K доира бўлади. Конус S учни асоснинг X нуқталари билан туташтирувчи ҳамма $S \cdot X$ кесмалардан ҳосил қилинган.

Конуснинг учидан унинг асосига туширилган перпендикуляр конуснинг *баландлиги* дейилади.

Тўғри конус баландлигининг асоси асос маркази билан устма-уст тушади.

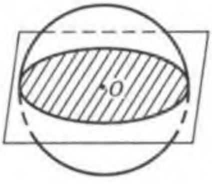
Тўғри конуснинг баландлигидан ўтувчи тўғри чизиқ унинг *ўқи* дейилади.

Конуснинг ўқи орқали ўтувчи текислик билан кесими *ўқ кесим* дейилади (82-*б* расм). Конуснинг ясовчиси орқали ўтувчи ва бу ясовчи орқали ўтказилган ўқ кесимига перпендикуляр текислик конуснинг *уринма текислиги* дейилади.

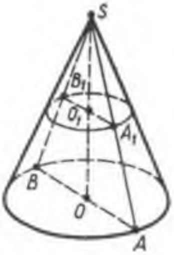
6.3. Шар

Фазонинг берилган нуқтадан берилган масофадан катта бўлмаган узоқликда ётган ҳамма нуқталаридан иборат жисм *шар* дейилади (83- расм).

Берилган нуқта шарнинг *маркази*, берилган масофа эса *шарнинг радиуси* дейилади. Шарнинг чегараси *шар сирти* ёки *сфера* деб аталади. Шарнинг марказидан радиусига тенг масофага қадар узоқлашган ҳамма нуқталар сферанинг нуқталаридир. Шар марказини шар сиртининг нуқтаси билан туташтирувчи исталган кесма ҳам *радиус* дейилади.



83- расм



84- расм

Шар сиртининг икки нуқтасини туташтирувчи ва шарнинг марказидан ўтувчи кесма *диаметр* дейилади. Исталган диаметрнинг учлари (охирлари) шарнинг *диаметрал қарама-қарши нуқталари* дейилади. Бу жисм доирани унинг диаметри атрофида айлантириш натижасида ҳосил қилинади. Шарнинг марказидан ўтадиган текислик *диаметрал текислик* дейилади. Шарнинг диаметрал текислик билан кесилган кесими *катта доира* дейилади. Сферанинг кесими эса *катта айлана* дейилади.

Машқлар

1. Цилиндрнинг ўқ кесими юзи Q га тенг квадрат. Цилиндр асосининг юзини топинг.

   Ечилиши. Квадратнинг томони $\sqrt{Q}$ га тенг. У асосининг диаметрига тенг. Шунинг учун асосининг юзи $\pi\left(\frac{\sqrt{Q}}{2}\right)^2 = \frac{\pi Q}{4}$.

2. Конус ичидан d масофада турган ва асосига параллел бўлган текислик конусни кесиб ўтади. Конус асосининг радиуси R, баландлиги эса H бўлса, кесимнинг юзини топинг.

   Ечилиши. Конуснинг ўқ кесимини ўтказамиз (84- расм). SAB ва SA_1B_1 учбурчакларнинг ўхшашлигидан $\frac{A_1B_1}{AB} = \frac{SO_1}{SO}$ ни ҳосил қиламиз. $AB = 2R$, $A_1B_1 = 2r$ (r — кесимдаги доиранинг радиуси), $OS = H$; $O_1S = d$, булардан

$$\frac{2r}{2R} = \frac{d}{H}, \quad r = \frac{Rd}{H}.$$

Кесим юзи:

$$\pi r^2 = \pi\left(\frac{Rd}{H}\right)^2.$$

3. Шар радиусининг ўртасидан унга перпендикуляр текислик ўтказилган. Ҳосил қилинган кесим юзини катта доира юзига нисбатини топинг.

Ечилиши. Шар радиуси R бўлса, кесимдаги доиранинг радиуси $\sqrt{R^2-\left(\frac{R^2}{2}\right)^2} = R\sqrt{\frac{3}{4}}$ га тенг. Бу доира юзининг катта доира юзига нисбатан $\frac{\pi\left(R\sqrt{\frac{3}{4}}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{3}{4}$ га тенг.

Машқлар

1. Цилиндрга олтибурчакли мунтазам призма ички чизилган. Цилиндр асосининг радиуси баландлигига тенг бўлса, призма ён ёғи диагонали билан цилиндр ўқи орасидаги бурчакни топинг.

2. Учбурчакнинг томонлари 13 см, 14 см, 15 см. Учбурчак текислигидан учбурчакнинг ҳамма томонларига уринадиган шарнинг марказигача бўлган масофани топинг. Шарнинг радиуси 5 см.

(*Жавоб*: 3 см.)

3. Цилиндрнинг баландлиги 2 м, асосининг радиуси 7 м. Бу цилиндрга квадрат оғма қилиб шундай ички чизилганки, квадратнинг учлари цилиндр асосларининг айланаларида ётади. Квадратнинг томонини топинг.

(*Жавоб*: 10 м.)

4. Конус асосининг радиуси R. Ўқ кесим тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Ўқ кесимнинг юзини топинг.

(*Жавоб*: R^2.)

5. Шарнинг радиуси R. Радиуснинг учидан унга 60° ли бурчак остида текислик ўтказилган. Кесимнинг юзини топинг.

(*Жавоб*: $\frac{\pi R^2}{4}$.)

7- §. Кўпёқларнинг ён ва тўла сиртларини ҳисоблаш

Кўпёқнинг барча ёқлари юзларининг йигиндиси кўпёқли сиртнинг юзи дейилади.

Кўпёқли призма, пирамидаларнинг ён ва тўла сиртларини ҳисоблашни ўрганилишидан аввал уларга таъриф берамиз.

7.1. Призма

1-таъриф. Турли текисликларда ётувчи ва параллел кўчириш билан устма-уст тушувчи иккита ясси кўпбурчакдан ҳамда бу кўпбурчакларнинг мос нуқталарини туташтирувчи ҳамма кесмалардан иборат кўпёқ призма дейилади (85- расм).

Призманинг асослари параллел кўчириш натижасида ҳосил бўлган кўпбурчаклар бўлгани учун уларнинг юзлари тенг.

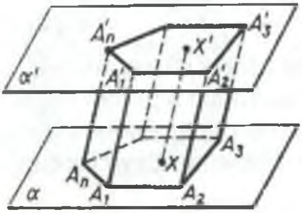
Агар призманинг ён қирраси асосларига перпендикуляр бўлса, бундай призма тўгри призма дейилади, акс ҳолда оғма призма дейилади.

2-таъриф. Тўғри призманинг ён сирти асосининг периметри билан ён қирраси узунлигининг кўпайтмасига тенг: $S_{ён} = P \cdot A_1A_1'$.

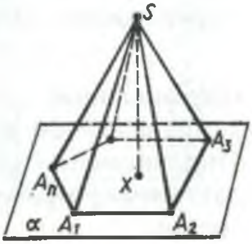
Призманинг тўла сирти ён сирти билан иккита асоси юзининг йиғиндисига тенг: $S_{тўла} = S_{ён} + 2S_{асос}$.

7.2. Пирамида

1-таъриф. Ёқларидан бири ихтиёрий кўпбурчак, қолган ёқлари эса асос текислигида ётмаган умумий учга эга бўлган учбурчаклардан иборат бўлган кўпёққа *пирамида* дейилади (86- расм).



85- расм



86- расм

Пирамиданинг асоси мунтазам кўпбурчак ва баландлиги кўпбурчакнинг маркази билан устма-уст тушса, бундай пирамида *мунтазам пирамида* дейилади.

2-таъриф. Мунтазам пирамиданинг ён сирти асоси периметрининг ярми билан апофемаси кўпайтмасига тенг:

$$S = \frac{1}{2} P \cdot l ,$$

бунда: l - апофема.

Умуман, пирамиданинг ён сирти ён ёқлари юзларининг йиғиндисига тенг.

Пирамиданинг тўла сирти ён сирти билан асос юзининг йиғиндисига тенг:

$$S_{\text{тўла}} = S_{\text{ён}} + 2S_{\text{асос}}.$$

Машқлар

1. Тўғри бурчакли призмада асосининг томонлари 10 см, 17 см ва 21 см, баландлиги эса 18 м. Призманинг ён қирраси ва асосининг кичик баландлиги орқали ўтказилган кесимнинг юзини топинг.

(*Жавоб*: 144 см^2.)

2. Оғма призманинг ён қирраси 15 см га тенг ва у асос текислигига 30° ли бурчак остида оғган. Призманинг баландлигини топинг.

(*Жавоб*: 7,5 см.)

3. Пирамиданинг асоси тенг ёнли учбурчак бўлиб, бу учбурчакнинг асоси 12 см, ён томони эса 10 см. Ён ёқлар асос билан ҳар бири 45° дан бўлган икки ёқли бурчаклар ташкил қилади. Пирамиданинг баландлигини топинг.

(*Жавоб*: 3 см.)

4. Пирамиданинг асоси параллелограмм бўлиб, унинг томонлари 3 см ва 7 см, диагоналларидан бири 6 см. Пирамиданинг баландлиги диагоналларининг кесишиш нуқтасидан ўтиб, 4 см га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.

(*Жавоб*: 5 см, 6 см.)

8- §. Айланиш жисмларининг ён ва тўла сиртларини ҳисоблаш

Сферанинг юзи.

Сферанинг юзини топамиз. F — радиуси R га тенг сфера бўлсин. F_h жисм радиуслари $R+h$ ва $R-h$ бўлган концентрик иккита сфера орасидаги қатламдан иборат (87-*а* расм). Бу жисмнинг ҳажми $R+h$ ва $R-h$ радиусли шарлар ҳажмларининг айирмасига тенг, яъни

$$V_h = \frac{4}{3}\pi\left[(R+h)^3 - (R-h)^3\right],$$

Бундан:

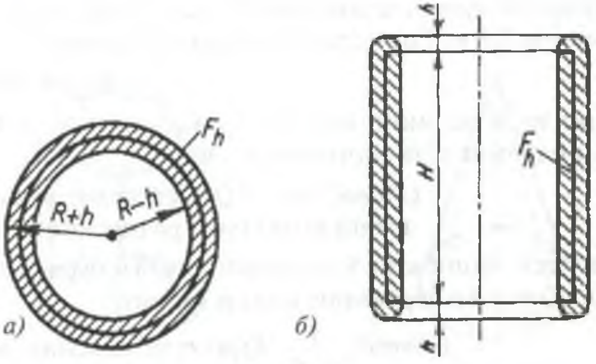
$$\frac{V_h}{2h} = \frac{4\pi}{3\cdot 2h}(6hR^2 + 2h^3) = 4\pi R^2\left(1 + \frac{h^2}{3R^2}\right)$$

$h \to 0$ да $\frac{V_h}{2h}$ нисбат $4\pi R^2$ лимитга интилади. Шундай қилиб, радиуси R га тенг сферанинг юзи $4\pi R^2$ га тенг.

Цилиндрнинг ён сирти.

Радиуси R ва баландлиги H бўлган цилиндр ён сиртининг юзини топамиз.

Сирт юзи таърифига кўра F_h жисм мазкур ҳолда радиуслари $R+h$ ва $R-h$ бўлган цилиндрик сиртлар ва цилиндр ўқига перпендикуляр бўлиб, ундан $H+2h$ масофада жойлашган икки текислик орасига жойлашган (87-*б* расм).



87- расм

Бу қатламнинг бир-биридан H масофада жойлашган иккита асос текислиги орасида олинган қисми бутунлигича F_h жисмга тегишли бўлади. Бундан қуйидагини ҳосил қиламиз:

$$V_h < \left[\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2\right]\cdot(H+2h),$$

$$V_h < \left[\pi(R+h)^2 - \pi(R-h)^2\right]\cdot H$$

ёки

$$4\pi RhH \le V_h < 4\pi Rh(H+2h),$$

бундан

$$2\pi RH \le \frac{V_h}{2h} < 2\pi RH + 4\pi Rh,$$

$h \to 0$ да тенгсизликнинг ўнг қисми $2\pi RH$ га интилади.

Демак, $\lim\limits_{h\to 0}\left(\frac{V_h}{2h}\right) = 2\pi RH$.

Шундай қилиб, цилиндр ён сиртининг юзи

$$S = 2\pi RH$$

формула бўйича аниқланади.

Конус ва сферик сегментнинг ён сирти мос равишда

$$S = \pi Rl \text{ ва } S = 2\pi RH$$

формулалар бўйича ҳисобланади.

Машқлар

1. Ертўладаги ярим цилиндрик гумбазнинг узунлиги 6 м, диаметри 5,8 м. Ертўланинг тўла сиртини топинг.

(*Жавоб*: 116 $м^2$.)

2. Цилиндр асосининг юзи Q, ўқ кесимининг юзи M. Цилиндрнинг тўла сирти нимага тенг?

(*Жавоб*: $\pi M + 2Q$. *Кўрсатма*: асосининг юзига кўра унинг радиусини топинг.)

3. Конус асосининг юзи S, ясовчиси асосга α бурчак остида оғма. Конус ён сиртининг юзини топинг.

(*Жавоб*: $\frac{S}{\cos\alpha}$. *Кўрсатма*: асоснинг юзига кўра унинг радиусини топинг.)

8.1. Цилиндр ён сиртининг юзи

Биз юқорида цилиндр ва конус ён сиртларини аниқладик. Энди бу масалага бошқача ёндашувни кўриб чиқамиз.

Цилиндрга мунтазам n бурчакли призмани ички чизамиз (88- расм). Бу призма ён сиртининг юзи

$$S_n = P_n \cdot H,$$

бунда P_n — призма асосининг периметри, H — унинг баландлиги.

n чексиз ортганда P_n периметр цилиндр асоси айланасининг C узунлигига чексиз яқинлашади. У ҳолда призма ён сиртининг юзи $C \cdot H$ га чексиз яқинлашади.

Шунинг учун $C \cdot H$ катталик цилиндр ён сиртининг юзи учун қабул қилинади.

Цилиндр ён сиртининг юзи

$$S = C \cdot H = 2\pi RH$$

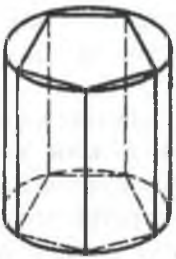
формула билан ҳисобланади, бунда R — цилиндрнинг радиуси, H — баландлиги.

8.2. Конус ён сиртининг юзи

Конусга мунтазам n бурчакли пирамидани ички чизамиз (89- расм). Унинг ён сирти юзи

$$S_n = \frac{1}{2} P_n \cdot l_n$$

га тенг, бунда P_n — пирамида асосининг периметри, l_n — унинг апофемаси.



88- расм

89- расм

n чексиз ортганда P_n периметр конус асосидаги айлананинг C узунлигига яқинлашади. l_n апофема эса ясовчисининг l узунлигига яқинлашади. Пирамиданинг ён сирти мос равишда $C \cdot \frac{l}{2}$ га чексиз яқинлашади. Шу муносабат билан $C \cdot \frac{l}{2}$ катталик конус ён сирти юзи учун қабул қилинади.

Конус ён сиртининг юзи

$$S = \frac{l}{2} \cdot C = \pi Rl$$

формула бўйича ҳисобланади, бунда R – конус асосининг радиуси, l – ясовчининг узунлиги.

9- §. Ҳажм тушунчаси

Текисликда шакллар учун юз тушунчаси киритилгани каби фазода жисмлар учун ҳажм тушунчаси киритилади. Аввал содда жисмлар қаралади. Жисмни чекли сондаги учбурчакли пирамидаларга ажратиш мумкин бўлса, у *содда жисм* дейилади. Содда жисмлар учун ҳажм – бу сон қиймати қуйидаги хоссаларга эга бўлган мусбат катталикдир:

1. Тенг жисмларнинг ҳажмлари тенг.

2. Агар жисм содда жисмлар ҳосил қилувчи қисмларга бўлинса, бу жисмнинг ҳажми унинг қисмлари ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлади.

3. Қирраси узунлик бирлигига тенг бўлган кубнинг ҳажми бирга тенг.

Агар таърифда гап борган кубнинг қирраси 1 см га тенг бўлса, у ҳолда ҳажм куб сантиметрларда бўлади; агар кубнинг қирраси 1 м га тенг бўлса, у ҳолда ҳажм куб метрларда бўлади; агар кубнинг қирраси 1 км га тенг бўлса, у ҳолда ҳажм куб километрларда бўлади.

90- расм

Истаган қавариқ кўпёқ содда жисмга мисол бўлади. Уни чекли сондаги учбурчакли пирамидаларга қуйидагича ажратиш мумкин.

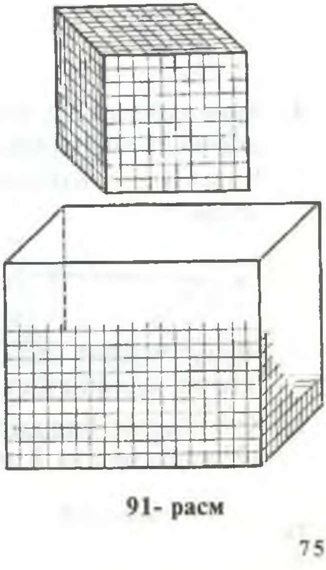
Кўпёқнинг бирор S учини белгилаймиз. Кўпёқнинг S учини ўз ичига олган ҳамма ёқларини учбурчакларга бўламиз. У ҳолда бу учбурчаклар асос, S нуқта эса умумий уч вазифасини ўтайдиган ҳамма учбурчакли пирамидалар кўпёқнинг учбурчакли пирамидаларга бўлинишини беради. 90- расмда ихтиёрий пирамида учун шундай бўлиниш кўрсатилган.

9.1. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми

Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажмини топамиз (91- расм). Ҳажм ўлчов бирлиги бўлган куб ва ҳажми ўлчаниши лозим бўлган тўғри бурчакли параллелепипед тасвирланган. Кубнинг қирраси узунлик бирлиги бўлиб хизмат қилади. Аввал параллелепипеднинг a, b, c қирралари узунликлари чекли ўнли касрлар билан ифодаланган ҳамда вергулдан кейинги хоналар сони n дан ошмаган ҳолни қараб чиқамиз.

Кубнинг битта учидан чиққан қирраларини 10^n та тенг бўлакларга ажратамиз ва бўлиниш нуқталаридан бу қирраларга перпендикуляр текисликлар ўтказамиз. Бунда куб қирралари $\frac{1}{10^n}$ та тенг бўлган, $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ та кичик кубга ажралади.

Кичик кубнинг ҳажмини топамиз. Ҳажмнинг хоссасига кўра катта кубнинг ҳажми кичик кублар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Катта кубнинг ҳажми 1 га тенглиги, кичик кублар сони эса 10^{3n} га тенглиги учун битта кичик кубнинг ҳажми $\frac{1}{10^{3n}}$ га тенг.



91- расм

Энди

$$\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a \cdot 10^n, \quad \frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b \cdot 10^n,$$

$$\frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c \cdot 10^n$$

сонлари бутун сонлар бўлгани учун параллелепипеднинг қирраларини $\frac{1}{10^n}$ га тенг бўлган бутун сондаги қисмларга ажратиш мумкин. a қиррада улар $a \cdot 10^n$ та; b қиррада $b \cdot 10^n$ та; c қиррада $c \cdot 10^n$ та бўлади. Қирраларнинг бўлиниш нуқталаридан қирраларига перпендикуляр текисликлар ўтказамиз.

Бунда биз параллелепипеднинг томони $\frac{1}{10^n}$ бўлган кичик кубларга ажралишини кўрамиз. Уларнинг сони

$$a \cdot 10^n \cdot b \cdot 10^n \cdot c \cdot 10^n = abc \cdot 10^{3n}$$

га тенг.

Параллелепипеднинг ҳажми ундаги кичик кублар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Кичик кубнинг ҳажми $\frac{1}{10^{3n}}$ га, уларнинг сони $abc \cdot 10^{3n}$ га тенглиги учун параллелепипеднинг ҳажми

$$abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n}} = abc$$

га тенг.

Шундай қилиб, тўғри бурчакли параллелепипеднинг ҳажми $V = abc$ формула билан ҳисобланади.

Машқлар

1. Агар кубнинг ҳар бир қирраси 2 см орттирилса, унинг ҳажми 98 см^3 га ортади. Кубнинг қиррасини топинг.

Ечилиши. Кубнинг қиррасини x билан белгилаймиз. У ҳолда

$$(x+2)^3 - x^3 = 98,$$
$$x^2 + 2x - 15 = 0,$$
$$x = 3,\ x = -5.$$

Фақат мусбат илдиз геометрик маънога эга. Шундай қилиб, кубнинг қирраси 3 см га тенг.

2. Кубнинг ҳар бир қирраси 1 м орттирилса, унинг ҳажми 125 марта ортади. Қиррасини топинг.

(*Жавоб*: 25 см).

3. Тўғри бурчакли параллелепипеднинг ўлчовлари 3 см, 4 см, 5 см. Агар унинг ҳар бир қиррасини x см орттирсак, сирти 54 см^2 ортади. Унинг ҳажми қанча ортади?

(*Жавоб*: 2 марта).

4. Тўғри параллелепипед асосининг a, b томонлари 30° ли бурчак ташкил қилади. Ён сирти S га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

Ечилиши. Баландлигини x билан белгилаймиз (92-расм).

У ҳолда

$$S = x \cdot (2a + 2b), \quad x = \frac{S}{2(a+b)}.$$

Параллелепипед асосининг юзи

$$ab \cdot \sin 30^\circ = \frac{ab}{2}$$

га тенг. У ҳолда ҳажми

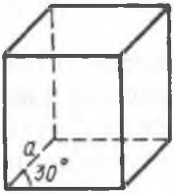
$$V = \frac{abS}{4(a+b)}$$

га тенг.

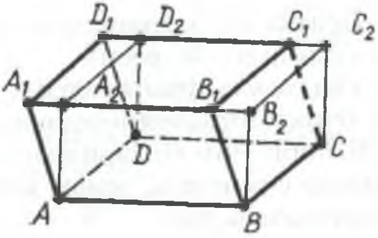
9.2. Оғма параллелепипеднинг ҳажми

Оғма параллелепипеднинг ҳажмини топамиз (93- расм).

BC қирра орқали $ABCD$ асосга перпендикуляр текислик ўтказамиз ва параллелепипедни $BB_1B_2CC_1C_2$ учбурчакли призма билан тўлдирамиз.



92- расм



93- расм

Ҳосил қилинган жисмдан AD қирра орқали $ABCD$ асосга перпендикуляр равишда ўтказилган текислик ёрдамида ҳосил қилинган учбурчакли призмани ажратиб ташлаймиз. Натижада тўғри бурчакли параллелепипед ҳосил бўлади. Бу параллелепипеднинг ҳажми дастлабки параллелепипеднинг ҳажмига тенг.

Исталган параллелепипеднинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигини кўпайтмасига тенг, яъни

$$V = S \cdot h.$$

Машқлар

1. Тўғри параллелепипедда асосининг $2\sqrt{2}$ см ли ва 5 см ли томонлари орасидаги бурчак 45° га тенг. Параллелепипеднинг кичик диагонали 7 см га тенг. Унинг ҳажмини топинг.

(*Жавоб*: 60 см^3.)

2. Тўғри параллелепипеднинг асоси юзи 1 м^2 бўлган ромбдан иборат. Диагонал кесимларининг юзлари 3 м^2 ва 6 м^2. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

(*Жавоб*: 3 м^3.)

3. Оғма параллелепипеднинг асоси квадрат бўлиб, томони 1 м га тенг. Ён қирраларидан бири 2 м га тенг ва асоснинг ўзига ёпишган ҳар бир томони билан 60° ли бурчак ташкил қилади. Параллелепипеднинг ҳажмини топинг.

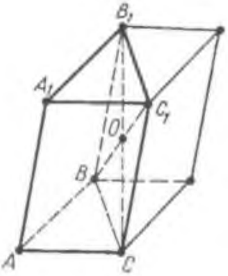
(*Жавоб*: $\sqrt{2}$ м^3.)

9.3. Призманинг ҳажми

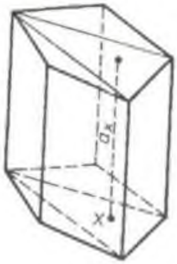
Призманинг ҳажмини топамиз. Аввал учбурчакли призмани қараймиз (94- расм).

Уни расмда кўрсатилгандек, параллелепипедга тўлдирамиз. O нуқта параллелепипеднинг *симметрия маркази* дейилади. Шунинг учун тўлдирилган призма берилган O нуқтага нисбатан симметрик, демак, унинг ҳажми берилган призманинг ҳажмига тенг.

Ясалган параллелепипеднинг ҳажми берилган призма ҳажмининг иккиланганига тенг.



94- расм



95- расм

Параллелепипед ҳажми асоснинг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг, асосининг юзи $\triangle\ ABC$ юзининг иккиланганига тенг, баландлиги эса дастлабки призма баландлигига тенг. Демак, *дастлабки призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг:*

$$V = S \cdot H.$$

Энди ихтиёрий призмани қараймиз (95- расм). Унинг асосини учбурчакларга ажратамиз. Учбурчак шу учбурчаклардан бири бўлсин. Учбурчакнинг ихтиёрий X нуқтасидан ён қирраларига параллел тўғри чизиқ ўтказамиз. a_x – шу тўғри чизиқнинг призмага тегишли кесмаси бўлсин. X нуқта учбурчакни айланиб чиққанда a_x кесма учбурчакли призмани тўлдиради. Ҳар бир учбурчак учун шундай призма ясаб, берилган призмани учбурчакли призмаларга ажратамиз. Бу призмаларнинг баландликлари тенг. Дастлабки призманинг ҳажми уни ташкил қилувчи учбурчакли призмалар ҳажмлари йиғиндисига тенг. Исботланганига кўра учбурчакли призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг. Бундан берилган призманинг ҳажми топилади:

$$V = S_1 H + S_2 H + S_3 H + \dots\ + S_n H = (S_1 + S_2 + S_3 + \dots\ + S_n) H.$$

Учбурчаклар юзларининг йиғиндиси берилган призма асосининг S юзига тенг. Шунинг учун

$$V = S \cdot H.$$

Исталган призманинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.

Машқлар

1. Олтибурчакли мунтазам призмада энг катта диагонал кесимининг юзи 4 м^2 га, иккита қарама-қарши ён қирралари орасидаги масофа 2 м га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

   (*Жавоб*: 6 м^3.)

2. Учбурчакли оғма призманинг ён қирралари 15 м га, улар орасидаги масофа эса 26 м, 25 м, 17 м га тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

   (*Жавоб*: 3060 м^3.)

3. Учбурчакли призма асосининг томонлари 4 см, 5 см, 7 см га, ён қирраси эса асосининг катта баландлигига тенг. Призманинг ҳажмини топинг.

   (*Жавоб*: 48 см^3.)

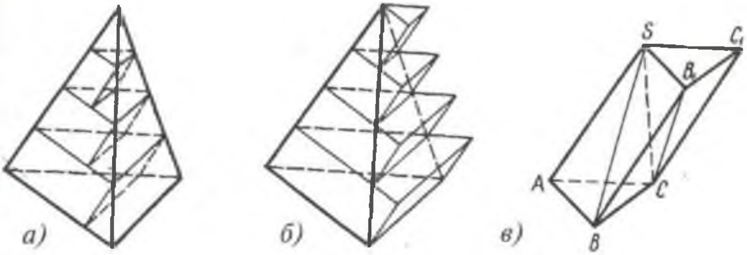
9.4. Пирамиданинг ҳажми

Учбурчакли пирамиданинг ҳажмини топиш учун уни тенг пирамидалар билан параллелепипедга тўлдиришга ва шу параллелепипеднинг ҳажмини билишимиздан фойдаланиб, пирамиданинг ҳажмини топишга ҳаракат қиламиз.

Пирамиданинг баландлигини n та тенг бўлакка ажратамиз ва бўлиниш нуқталари орқали пирамида асосига параллел текисликлар ўтказамиз (96-*а* расм).

Бунда пирамида қатламларга ажралади. Ҳар бир бундай қатлам учун иккита призма ясаймиз: қатламда ётган (96-*а* расм) ва қатламни ўз ичига олган (96-*б* расм) призма ясаймиз. Биринчи пирамиданинг k- қатламидаги (учидан бошлаб ҳисоблаганда) призма ва иккинчи пирамиданинг $(k - 1)$-қатламидаги призма асосларининг юзлари тенг, чунки бу асослар пирамидаларнинг асосларига ўхшаш ва ўхшашлик коэффициенти бир хил ($\frac{k}{n}$). Бу призмаларнинг баландликлари ҳам тенг бўлгани учун ($\frac{H}{n}$), уларнинг ҳажмлари ҳам тенгдир.

Фараз қилайлик, V_1 ва V_2 пирамидаларнинг ҳажмлари бўлсин, V_1' ва V_2' эса улар учун ясалган призмалар ҳажмлари-



96- расм

нинг йиғиндиси бўлсин. Биринчи пирамиданинг k- қатламидаги призманинг ҳажми иккинчи пирамиданинг $(k-1)$- қатламидаги призманинг ҳажмига тенг бўлгани учун биринчи пирамидадаги ҳамма призмалар ҳажмларининг йиғиндиси иккинчи пирамиданинг охирги қатламидан бошқа ҳамма қатламларидаги призмалар ҳажмларининг йиғиндисига тенг. Охирги қатламдаги призманинг ҳажми $S \cdot \frac{H}{n}$ га тенг, бунда S − пирамида асосининг юзи, H − баландлиги. Бу ердан $V_1' = V_2' - S\frac{H}{n}$ экани келиб чиқади. Бундан ташқари $V_1 > V_1'$, $V_2 > V_2'$ бўлгани учун $V_1 > V_2 - \frac{SH}{n}$ бўлади. Бу тенгсизлик n истаганча катта бўлганда ҳам бажарилади. Бу эса фақат $V_1 \ge V_2$ бўлгандагина мумкин. Пирамидаларнинг ўринларини алмаштириб, қарама-қарши тенгсизликни ҳосил қиламиз: $V_2 \ge V_1$, $V_1 = V_2$ экани келиб чиқади. Даъво исботланди.

Энди пирамиданинг ҳажми учун формулани топамиз. Берилган $SABC$ пирамидани 96-*в* расмда кўрсатилгандек, ўшандай асосли ва ўшандай баландликдаги учбурчакли призмага тўлдирамиз. Бу призма учта пирамидадан иборат: берилган $SABC$ пирамидадан ва яна иккита учбурчакли SCC_1B_1 ва $SCBB_1$ пирамидалардан иборат. Иккинчи ва учинчи пирамидаларнинг асослари тенг − $\triangle\ CC_1B_1$ ва $\triangle\ B_1BC$ ва S учдан туширилган умумий баландлик. Исботланганга кўра уларнинг ҳажмлари тенг. Биринчи ва учинчи пирамидаларнинг ҳам асослари тенг − $\triangle\ SAB$ ва $\triangle\ B_1BS$ ҳамда C учдан туширилган баландликлари бир хил. Демак, уларнинг ҳам ҳажмлари тенг. Шундай қилиб, учала пирамиданинг ҳаммаси бир хил ҳажмга эга. Бу ҳажмларнинг йиғиндиси призманинг ҳажмига тенг бўлгани учун пирамидаларнинг ҳажми $\frac{SH}{3}$ га тенг.

Исталган учбурчакли пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг:

$$V = \frac{1}{3}SH\ .$$

Исталган пирамиданинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг:

$$V = \frac{1}{3}H(S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3}SH\ .$$

Машқлар

1. Пирамиданинг асоси - томонлари 9 м ва 12 м бўлган тўғри тўртбурчак, ҳамма ён қирралари 21,5 м га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

(*Жавоб*: 360 м^3).

2. Пирамиданинг асоси томонлари 6 см, 6 см ва 8 см бўлган тенг ёнли учбурчак. Ҳамма ён қирралари 9 см га тенг. Пирамиданинг ҳажмини топинг.

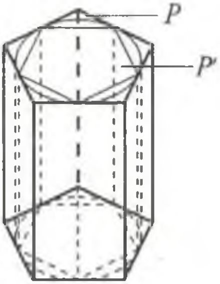
(*Жавоб*: 48 см^3. Кўрсатма: Пирамида баландлигининг асоси пирамида асосига ташқи чизилган айлананинг маркази билан устма-уст тушади).

9.5. Цилиндрнинг ҳажми

Агар жисм содда бўлса, яъни чекли сондаги учбурчакли пирамидаларга бўлинса, унинг ҳажми шу пирамидалар ҳажмларининг йиғиндисига тенг бўлади. Истаган жисм учун ҳажм қуйидаги тарзда таърифланади:

агар берилган жисмни ўз ичига олувчи ва берилган жисмнинг ичига жойлашган ҳажми V дан жуда кам фарқ қилувчи содда жисмлар мавжуд бўлса, берилган жисм V ҳажмга эга бўлади.

Бу таърифни асоснинг радиуси R ва баландлиги H га тенг цилиндрнинг ҳажмини топишга қўллаймиз. Доира юзининг формуласини чиқаришда шундай иккита кўпбурчак ясалган эдики (бири доирани ўз ичига олган, иккинчиси доира ичига жойлашган), уларнинг юзлари *n*- чексиз ортганда доира юзига чексиз яқинлашади. Цилиндрнинг асосларидаги доиралар учун шундай кўпбурчаклар ясаймиз. P – доирани ўз ичига олган кўпбурчак, P' – доира ичига жойлашган кўпбурчак бўлсин (97- расм).



97- расм

Асослари P ва P', баландлиги цилиндрнинг H баландлигига тенг иккита тўғри призма ясаймиз. Биринчи призма цилиндрни ўз ичига олади, иккинчи призма эса цилиндр ичида жойланади. n чексиз ортганда призма асосларининг юзлари цилиндр асосларининг юзлари S га чексиз яқинлашгани учун уларнинг ҳажмлари $S \cdot H$ яқинлашади. Таърифга кўра цилиндрнинг ҳажми:

$$V = SH = \pi R^2 H$$

Цилиндрнинг ҳажми асосининг юзи билан баландлигининг кўпайтмасига тенг.

Машқлар

1. Цилиндрга учбурчакли мунтазам призма ички чизилган, призмага эса цилиндр ички чизилган. Цилиндрлар ҳажмларининг нисбатини топинг.

(*Жавоб*: 4 : 1.)

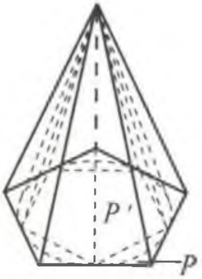
2. Ҳар бир қирраси *a* га тенг бўлган олтибурчакли мунтазам призмага ички чизилган цилиндрнинг ҳажмини топинг.

(*Жавоб*: $\frac{3}{4}\pi a^3$.)

9.6. Конуснинг ҳажми

Конуснинг асоси текислигида иккита кўпбурчак ясаймиз (98- расм).

Конуснинг асосини ўз ичига олган P кўпбурчак ва конус асосида жойлашган P' кўпбурчак. Асослари P ва P' ҳамда



98- расм

учи конуснинг учида бўлган иккита пирамида ясаймиз. Биринчи пирамида конусни ўз ичига олади, иккинчи пирамида эса конус ичида ётади.

Шундай P ва P' кўпбурчаклар борки, уларнинг томонлари сони n ни чексиз орттирилганда кўпбурчакларнинг юзлари конус асосидаги доиранинг юзига чексиз яқинлашишини биламиз. Бундай кўпбурчакларда ясалган пирамидаларнинг ҳажмлари $\frac{1}{3}SH$ га чексиз яқинлашади, бунда S – конуснинг юзи, H – баландлиги.

Таърифга кўра, бу ердан конуснинг ҳажми

$$V = \frac{1}{3}SH = \frac{1}{3}\pi R^2 H \,.$$

Конуснинг ҳажми асосининг юзи билан баландлиги кўпайтмасининг учдан бирига тенг.

Машқлар

1. Конуснинг ўқ кесими юзи 9 $м^2$ га тенг бўлган тенг ёнли тўғри бурчакли учбурчакдан иборат. Конуснинг ҳажмини топинг.

(*Жавоб*: 9π $м^3$. Кўрсатма. Конуснинг баландлиги унинг асоси радиусига тенг.)

2. Конус ясовчисининг узунлиги l, асос айланасининг узунлиги c. Конуснинг ҳажмини топинг.

(*Жавоб*: $\frac{c^2}{24\pi^2}\sqrt{4\pi^2 l^2 - c^2}$.)

3. Конуснинг l ясовчиси асос текислиги билан α бурчак ташкил этади. Конуснинг ҳажмини топинг.

(*Жавоб*: $\frac{1}{3}\pi l^3 \sin\alpha\cos^2\alpha$.)

9.7. Шарнинг ҳажми

Шар марказини координаталар боши учун қабул қилиб, Декарт координаталарини киритамиз (99- расм).

xy текислик R радиусли шарни $x^2 + y^2 = R^2$ тенглама билан бериладиган айлана бўйича кесади.

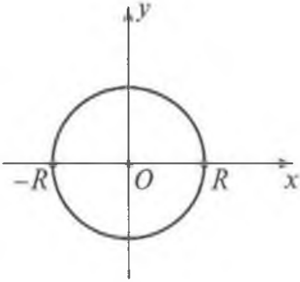
x ўқидан юқорида жойлашган ярим айлана

$$y = f(x) = \sqrt{R^2 - X^2}, \quad -R \le x \le R$$

тенглама билан ифодаланади. Шунинг учун шар ҳажми:

$$V = \pi \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)dx =$$

$$= \pi\left(R^2 x - \frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-R}^{R} = \frac{4}{3}\pi R^3 .$$



99- расм

Машқлар

1. Шарнинг диаметрига перпендикуляр текислик диаметрни 3 см ва 9 см ли бўлакларга ажратади. Шарнинг ҳажми қандай қисмларга ажралади?

(*Жавоб*: 45π см^3; 243 π см^3.)

2. Иккита тенг шар шундай жойлашадики, улардан бирининг маркази иккинчисининг сиртида ётади. Шарларнинг умумий қисми ҳажмининг бутун шарнинг ҳажмига нисбатини топинг.

(*Жавоб*: 5 : 16.)

III боб. АЛМАШТИРИШЛАР

Алмаштиришлар ва уларнинг турлари.

Текисликда геометрик алмаштиришларга нуқта атрофида буриш, нуқтага нисбатан симметрия, тўғри чизиққа нисбатан симметрия, параллел кўчириш, ўхшашлик ёки гомотетия каби алмаштиришларни санаб ўтиш етарлидир.

1- §. Ҳаракат

F шаклни F' шаклга алмаштиришда нуқталар орасидаги масофалар сақланса, яъни у F шаклнинг истаган иккита X ва Y нуқтасини F' шаклнинг X' ва Y' нуқталарига ўтказса ҳамда $XY = X'Y'$ тенглик бажарилса, бу алмаштириш *ҳаракат* дейилади.

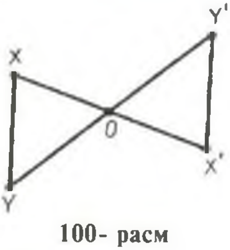
Эслатма. Геометрияда ҳаракат тушунчаси силжитиш ҳақидаги оддий тасаввур билан боғлиқ. Агар силжитиш ҳақида гапирилганда узлуксиз жараённи кўз олдимизга келтирсак, геометрияда шаклнинг бошланғич ва охирги вазиятлари биз учун аҳамиятга эга бўлади.

1-теорема. *Нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш ҳаракатдир.*

Исботи. X ва Y нуқталар F шаклнинг ихтиёрий нуқталари бўлсин (100- расм).

Нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш бу нуқталарни X' ва Y' нуқталарга ўтказади. XOY ва $X'OY'$ учбурчакларни қараймиз. Улар учбурчаклар тенглигининг биринчи аломатига кўра тенг. Уларнинг O учидаги бурчаклари вертикал бурчаклар бўлгани сабабли бир-бирига тенг. O нуқтага нисбатан симметриянинг таърифига биноан $OX = OX'$, $OY = OY'$.

Бу учбурчакларнинг тенглигидан уларнинг учинчи томонлари ҳам тенг: $XY = X'Y'$, бу эса O нуқтага нисбатан симметриянинг ҳаракат эканини билдиради. Теорема исботланди.



100- расм

2-теорема. *Тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш ҳаракатдир.*

Исботи. Берилган тўғри чизиқни Декарт координаталар системасининг y ўқи учун қабул қиламиз (101- расм).

F шаклнинг ихтиёрий A $(x; y)$ нуқтаси F' шаклнинг $A'(x'; y')$ нуқтасига ўтсин. Тўғри чизиққа нисбатан симметриянинг таърифидан A ва A' нуқталарнинг ординаталари тенг, абсциссалари эса ишоралари билан фарқ қилиши мумкин, яъни $x' = -x$ экани келиб чиқади.

Иккита A $(x_1; y_1)$ ва B $(x_2; y_2)$ нуқтани оламиз. Улар A' $(-x_1; y_1)$ ва B' $(-x_2; y_2)$ нуқталарга ўтади. Қуйидагиларга эгамиз:

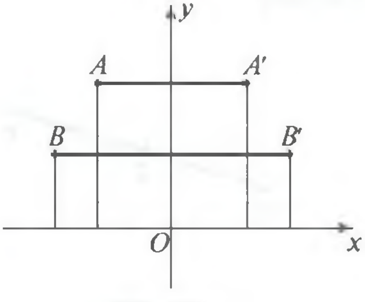
$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (-x_2 + x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

Бундан AB ва $A'B'$ кесмалар тенг экани келиб чиқади. Бу эса тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришнинг ҳаракат эканини билдиради. Теорема исботланди.

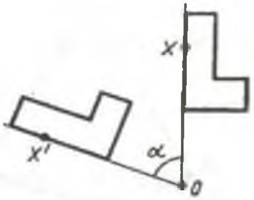
Таъриф. Берилган нуқта атрофида буриш деб, шундай ҳаракатга айтиладики, унда бу нуқтадан чиқувчи ҳар бир нур бир хил йўналишда (соат мили йўналиши бўйича ёки унга тескари йўналишда) бир хил бурчакка бурилади (102- расм).

Бу эса, агар O нуқта атрофида буришда X нуқта X' нуқтага ўтса, у ҳолда OX ва OX' нурлар, X нуқта қандай бўлишига боғлиқмас ҳолда, бир хил бурчак ҳосил қилишини билдиради. Бу бурчак *буриш бурчаги* дейилади.

Текисликни буришда шаклларни алмаштириш ҳам *буриш* деб аталади.



101- расм



102- расм

Машқлар

1. O нуқта атрофида соат мили йўналиши бўйича 60° ли бурчакка буришда A нуқта ўтадиган A_1 нуқтани ясаймиз.

   Ечилиши. OA нурни ўтказамиз ва OP нурни $\angle AOP = 60°$ бўладиган қилиб ясаймиз (103- расм). OP нурга OA кесмага тенг OA_1 кесмани қўямиз. A_1 нуқта изланаётган нуқта бўлади.
2. O нуқта атрофида соат мили йўналиши бўйича 60° ли бурчакка буришда AB кесма ўтадиган шаклни ясанг.
3. Ҳаракат натижасида параллелограмм параллелограммга ўтишини исботланг.
4. Квадрат ҳаракат натижасида қандай шаклга ўтади?

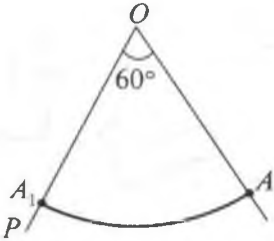
(*Жавоб*: квадратга ўтади.
Жавобингизни тушунтиринг.)

2- §. Нуқтага, ўққа ва тўғри чизиққа нисбатан симметрия

2.1. Нуқтага нисбатан симметрия

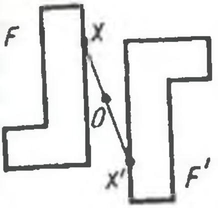
Айтайлик, O нуқта Oxy текисликнинг ихтиёрий нуқтаси бўлсин (104- расм).

OX кесманинг давомида O нуқтадан нарига OX кесмага тенг OX' кесмани қўямиз. *X' нуқта O нуқтага нисбатан X нуқтага симметрик нуқта* дейилади. O нуқтага симметрик нуқта шу O нуқтанинг ўзидан иборат. Равшанки, X' нуқтага симметрик нуқта X нуқтанинг ўзидир.

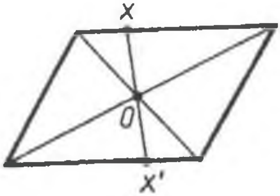


103- расм

104- расм



105- расм



106- расм

Таъриф. F шаклни F' шаклга алмаштиришда F нинг ҳар бир X нуқтаси O нуқтага нисбатан симметрик X' нуқтага ўтса, бу алмаштириш *O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш* дейилади.

Бунда F ва F' шакллар O нуқтага нисбатан *симметрик шакллар* дейилади (105- расм).

Агар O нуқтага нисбатан симметрик алмаштириш F шаклни ўз-ўзига ўтказса, у *марказий симметрик алмаштириш* дейилади.

O нуқта симметрия *маркази* дейилади.

Масалан, параллелограмм марказий симметрик шаклдир (106- расм). Унинг симметрия маркази диагоналларнинг кесишиш нуқтасидан иборатдир.

2.2. Ўққа нисбатан симметрия

Таъриф. Агар фазони алмаштиришда ҳар бир нуқта берилган l тўғри чизиққа нисбатан ўзига симметрик нуқтага акслантирилса, бундай алмаштириш *ўққа нисбатан симметрия* дейилади.

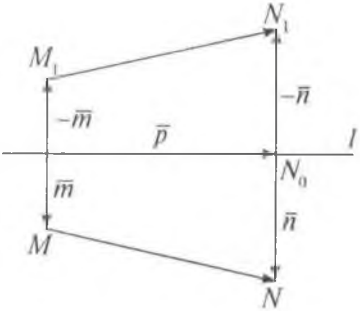
Берилган тўғри чизиқ *симметрия ўқи* дейилади.

Агар l ўққа нисбатан симметрияда M_1 нуқта M нуқтанинг образи бўлса, бу $S_1(M) = M_1$ деб ёзилади.

$S_1(F) = F_1$ ёзуви l ўқли симметрияда F шаклнинг F' шаклга аксланишини билдиради.

Теорема. *Ўққа нисбатан симметрия силжишдир.*

Исботи. $S_1(M) = M_1$, $S_1(N) = N_1$. $|MN| = |M_1N_1|$ эканини исбот қиламиз.



107- расм

$\overline{m}$, $\overline{n}$, $\overline{p}$ векторларни 107- расмда кўрсатилганидек қилиб киритамиз. Ўққа нисбатан симметриянинг таърифига асосан:

$$\overline{m} \cdot \overline{p} = \overline{n} \cdot \overline{p} = 0 .$$

Кўпбурчак қоидасига кўра:

$$\overline{MN} = -\overline{m} + \overline{p} + \overline{n} ,$$

$$\overline{M_1N_1} = \overline{m} + \overline{p} - \overline{n} .$$

У ҳолда

$$\left|\overline{MN}\right|^2 = m^2 + p^2 + n^2 - 2mn,$$

$$\left|\overline{M_1N_1}\right|^2 = m^2 + p^2 + n^2 - 2mn .$$

Демак, $\left|\overline{MN}\right|^2 = \left|\overline{M_1N_1}\right|^2$, яъни $|MN| = |M_1N_1|$.

Машқлар

1. Ўққа нисбатан симметрияда қандай нуқталар ўзига аксланади?

(*Жавоб*: фақат ўққа тегишли нуқталар.)

2. Ўққа нисбатан симметрияда қандай тўғри чизиқлар ўзига аксланади?

(*Жавоб*: ўқни тўғри бурчак остида кесиб ўтувчи тўғри чизиқлар ҳамда симметрия ўқининг ўзи.)

3. Симметрия ўқи l ва берилган α текисликнинг α_1 образи бир-бирига нисбатан ушбу ҳолларда қандай жойлашади:

1) $l \subset \alpha$; 2) $l \perp \alpha$; 3) l ўқ α га оғма бўлса?

4. Иккита турли A ва B нуқталар берилган. A ни B га акслантирувчи симметрия ўқлари кўрсатилган. Бундай ўқларнинг бирлашмаси қандай шакл бўлади?

5. Текис шакл симметрия марказига эга бўлса, у симметрия ўқига ҳам эга бўлишини исбот қилинг.

2.3. Тўғри чизиққа нисбатан симметрия

Айтайлик, q тайинланган тўғри чизиқ бўлсин (108- расм). Ихтиёрий X нуқтани оламиз ва унда q тўғри чизиққа AX перпендикуляр туширамиз. Бу перпендикулярнинг давомига A нуқтадан AX кесмага тенг AX' кесмани қўямиз.

X' нуқта q тўғри чизиққа нисбатан X нуқтага симметрик нуқта дейилади. Агар X нуқта q тўғри чизиқда ётса, унга симметрик нуқта унинг ўзидан иборат. Равшанки, X' нуқтага симметрик нуқта X нуқтадан иборатдир.

F шаклни алмаштиришда F нинг ҳар бир X нуқтаси берилган q тўғри чизиққа нисбатан симметрик бўлган X' нуқтага ўтса, бундай алмаштириш *q тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштириш* дейилади.

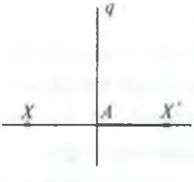
Бунда F ва F' шакллар *q тўғри чизиққа нисбатан симметрик шакллар* дейилади (109- расм).

Агар q тўғри чизиққа нисбатан симметрик алмаштиришда F шакл ўз-ўзига ўтса, бу шакл *q тўғри чизиққа нисбатан симметрик шакл* дейилади, q тўғри чизиқ *шаклнинг симметрия ўқи* дейилади.

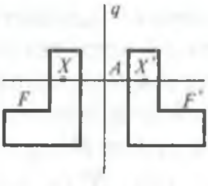
Масалан, тўғри тўртбурчак диагоналларининг кесишиш нуқтасидан унинг томонларига параллел равишда ўтувчи тўғри чизиқлар тўғри тўртбурчакнинг симметрия ўқлари бўлади.

3- §. Параллел кўчириш ва унинг хоссалари

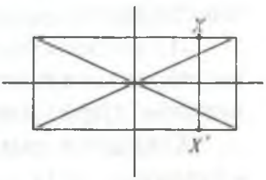
Параллел кўчириш нуқталар бир хил йўналишда бир хил масофада силжийдиган алмаштириш сифатида кўрсатмали аниқланади (111- расм).



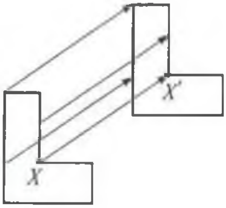
108- расм



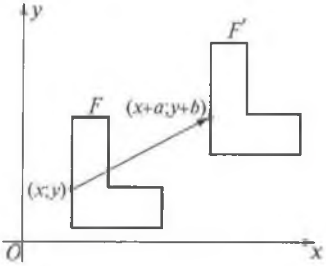
109- расм



110- расм



111- расм



112- расм

Бундай таъриф математик жиҳатдан қатъий эмас, чунки унда «бир хил йўналишда» жумласи ишлатилмоқда, бу жумланинг ўзи аниқ таърифланишга муҳтож.

Шу сабабли биз параллел кўчиришга, ўша кўрсатмали аниқлашга (таърифга) жавоб берадиган, аммо энг жиддий таърифни берамиз.

Текисликда Декарт координаталари x, y ни киритамиз. F шакл алмаштиришда унинг ихтиёрий $(x; y)$ нуқтаси $(x + a; x + b)$ нуқтага ўтса, бундай алмаштириш *параллел кўчириш* дейилади, бунда a ва b — ўзгармас сонлар (112- расм).

Параллел кўчириш ушбу формулалар билан берилади:

$$x' = x + a; \quad y' = y + b.$$

Бу формулалар параллел кўчиришда $(x; y)$ нуқта ўтадиган нуқтанинг x'; y' координаталарини ифодалайди.

Теорема. *Параллел кўчириш ҳаракатдир.*

Исбот. Ҳақиқатан ҳам, ихтиёрий иккита $A\,(x_1; y_1)$ ва $B\,(x_2; y_2)$ нуқта параллел кўчиришда $A\,(x_1 + a; y_1 + b)$, $B\,(x_2 + a; y_2 + b)$ нуқталарга ўтади. Шу сабабли

$$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2,$$
$$A'B'^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2.$$

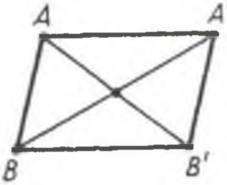
Бундан, $AB = A'B'$. Шундай қилиб, алмаштиришда масофалар сақланади, демак, у ҳаракатдир.

«Параллел кўчириш» деб аталиши шу билан асосланадики, параллел кўчиришда нуқталар параллел (ёки устма-уст тушувчи) тўғри чизиқлар бўйлаб бир хил масофага силжийди.

Ҳақиқатан ҳам, $A\,(x_1; y_1)$ ва $B\,(x_2; y_2)$ нуқталар параллел кўчиришда $A'\,(x_1 + a; y_1 + b)$, $B'\,(x_2 + a; y_2 + b)$ нуқталарга ўтсин (113- расм).

$A'B$ кесманинг ўртаси ушбу координаталарга эга:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + a}{2}; \quad y = \frac{y_1 + y_2 + b}{2}.$$



113- расм

$A'B$ кесманинг ўртаси ҳам шу координаталарга эга. Бундай $AA'B'B$ тўртбурчакнинг диагоналлари кесишади ва кесишиш нуқтасида тенг иккига бўлинади. Бу тўртбурчак параллелограммдир. Параллелограммда эса қарама-қарши ётган AA' ва BB' томонлар тенг ва параллел.

Шуни биламизки, $AA'B'B$ параллелограммнинг бошқа икки томони AB ва $A'B'$ ҳам параллелдир. Параллел кўчиришда тўғри чизиқлар параллел тўғри чизиқларга ёки ўз-ўзига ўтади.

Машқлар

1. A, B, C нуқталар берилган. A нуқтани B нуқтага ўтказувчи параллел кўчиришда C нуқта ўтадиган C' нуқтани ясанг.
2. Параллел кўчириш $x' = x + 1$; $y' = y - 1$ формулалар билан берилади. Шу параллел кўчиришда (0; 0), (1; 0), (0; 2) нуқталар қандай нуқталарга ўтади?

   (*Жавоб*: (1; –1), (2; –1), (1; 1).)
3. Параллел кўчиришда:

   1) (1; 2) нуқта (3; 4) нуқтага; 2) (2; –3) нуқта (–1; 5) нуқтага; 3) (–1; –3) нуқта (0; –2) нуқтага ўтиши маълум бўлса, параллел кўчиришнинг $x' = x + a$; $y' = y + b$ формуласидаги a ва b нинг қийматини топинг.

   (*Жавоб*: 1) $a = b = 2$; 2) $a = -3$, $b = 8$; 3) $a = b = 1$.)
4. Параллел кўчиришда (1; 1) нуқта (–1; 0) нуқтага ўтади. Координаталар боши қандай нуқтага ўтади?
5. 1) (1; 2) нуқта (3; 4) нуқтага, (0; 1) нуқта эса (–1; 0) нуқтага ўтадиган; 2) (2; –1) нуқта (1; 0) нуқтага, (–1; 3) нуқта эса (0; 4) нуқтага ўтадиган параллел кўчириш мавжудми?

   (*Жавоб*: 1) мавжуд эмас; 2) мавжуд.)

4- §. Ўхшашлик алмаштиришлар

Агар шаклни шаклга алмаштиришда нуқталар орасидаги масофалар бир хил сон марта ўзгарса (ортса ёки камайса), бундай алмаштириш *ўхшашлик алмаштириш* дейилади. Бу агар F шаклнинг ихтиёрий A ва B нуқталари бундай алмаштиришга F_1 шаклнинг A_1 ва B_1 нуқталарига ўтса, у ҳолда $A_1B_1 = AB$ бўлади, демакдир.

k сон ўхшашлик коэффициенти дейилади.

$k = 1$ да ўхшашлик алмаштириш ҳаракатдан иборат бўлади.

Гомотетия ўхшашлик алмаштиришдир.

F — берилган шакл ва O — тайинланган нуқта бўлсин. F шаклнинг ихтиёрий X нуқтаси орқали OX нурни ўтказамиз ва бу нурга $k \cdot OX$ га тенг OX' кесмани қўямиз ($k > 0$). F шаклнинг ҳар бир X нуқтаси X' нуқтага кўрсатилган усул билан ўтадиган алмаштириш O марказга нисбатан *гомотетия* дейилади. k сон гомотетия коэффициенти дейилади (114-*а* расм).

Хоссалари

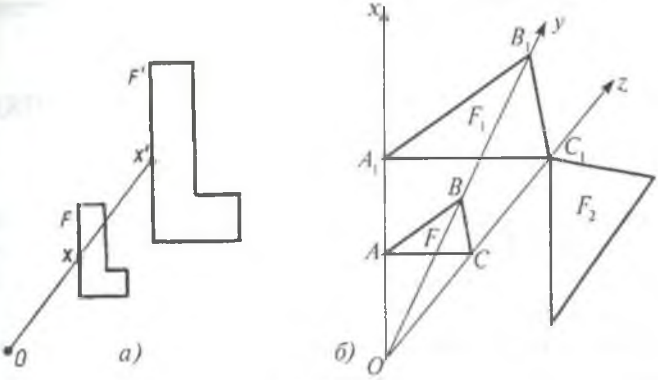
1°. Ўхшашлик алмаштиришда бир тўғри чизиқда ётувчи учта A, B, C нуқта бир тўғри чизиқда ётувчи учта A_1, B_1, C_1 нуқталарга ўтади. Бунда, агар B нуқта A ва C нуқталар орасида ётса, у ҳолда B_1 нуқта A_1 ва C_1 нуқталар орасида ётади.

2°. Ўхшашлик алмаштириш тўғри чизиқларни тўғри чизиқларга, нурларни нурларга, кесмаларни кесмаларга ўтказади.

3°. Ўхшашлик алмаштириш ярим тўғри чизиқлар орасидаги бурчакларни сақлайди.

4°. Ҳар қандай ўхшашлик алмаштириш ҳам гомотетия бўлавермайди (114-б расм).

Масалан, F_1 шаклни F шаклдан гомотетия натижасида ҳосил қилинган. F_2 шакл эса F_1 шаклдан Oz ўққа нисбатан симметрия натижасида ҳосил қилинган. F_1 шаклни F_2 шаклга алмаштириш ўхшашлик алмаштиришдир, чунки бу алмаштиришда мос нуқталар орасидаги масофалар нисбати сақланди, бироқ бу алмаштириш гомотетия бўлмайди.



114- расм

Машқлар

1. Агар гомотетия коэффициенти: 1) 2; 2) 3 га тенг бўлса, маркази координаталар бошида бўлган гомотетияда *A* (1; 2); *B* (2; 2); *C* (–1; 1); *D* (5; –1) нуқталар ўтадиган нуқталарни ясанг.
2. Гомотетияда *X* нуқта *X′* нуқтага, *Y* нуқта эса *Y′* нуқтага ўтади. Агар *X*, *X′*, *Y*, *Y′* нуқталар бир тўғри чизиқда ётмаса, гомотетия марказини топинг.
3. Гомотетияда *X* нуқта *X′* нуқтага ўтади. Агар гомотетия коэффициенти: 1) 2; 2) 3; 3) 4 га тенг бўлса, гомотетия марказини ясанг.
4. Бирор нуқтага нисбатан симметрияда *X* нуқта *X′* нуқтага ўтади. Шу симметрияда *Y* нуқта ўтадиган нуқтани ясанг.
5. Тўғри чизиққа нисбатан симметрияда Y нуқта ўтадиган нуқтани ясанг.

IV боб. ФАЗОВИЙ ШАКЛЛАРНИ ТЕКИСЛИКДА ТАСВИРЛАШ

Фазовий шаклларни текисликда тасвирлашда одатда параллел проекциялашдан фойдаланилади. Шаклни тасвирлашнинг бу усули қуйидагича: чизма текислиги α ни кесиб ўтувчи ихтиёрий h тўғри чизиқни оламиз ва шаклнинг ихтиёрий A нуқтасидан h га параллел қилиб тўғри чизиқ ўтказамиз. Бу тўғри чизиқнинг чизма текислиги билан кесишган A_1 нуқтаси A нуқтанинг тасвири бўлади (115- расм).

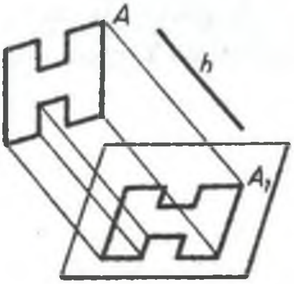
Шаклнинг ҳар бир нуқтасининг тасвирини шу тарзда ясаб, шу шаклнинг текисликдаги тасвирини ҳосил қиламиз.

Хоссалари

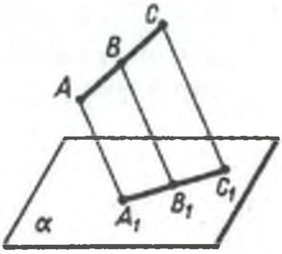
1°. Шаклнинг тўғри чизиқли кесмалари чизма текислигида яна кесмалар билан тасвирланади (116- расм).

Ҳақиқатан ҳам, AC кесма нуқталарини проекцияловчи ҳамма тўғри чизиқлар чизма текислиги α ни A_1C_1 тўғри чизиқ бўйича кесувчи битта текисликда ётади. AC кесманинг ихтиёрий B нуқтаси A_1C_1 кесманинг B_1 нуқтаси билан тасвирланади.

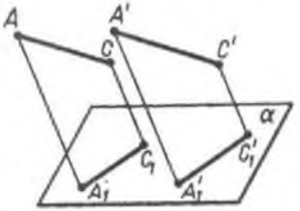
2°. Шаклнинг параллел кесмалари чизма текислигида параллел кесмалар билан тасвирланади (117- расм).



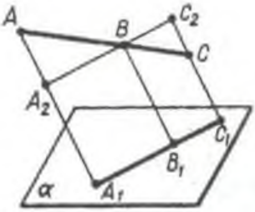
115- расм



116- расм



117- расм



118- расм

Ҳақиқатан ҳам, AC ва $A'C'$ – шаклнинг параллел кесмалари бўлсин. A_1C_1 ва $A_1'C_1'$ тўғри чизиқлар параллел, чунки улар параллел текисликларнинг α текислик билан кесишишидан ҳосил қилинади. Бу текисликларнинг биринчиси AC ва AA_1 тўгри чизиқлар орқали ўтади.

3°. Битта тўғри чизиқ ёки параллел тўғри чизиқлар кесмаларининг нисбати параллел проекциялашда сақланади (118-расм).

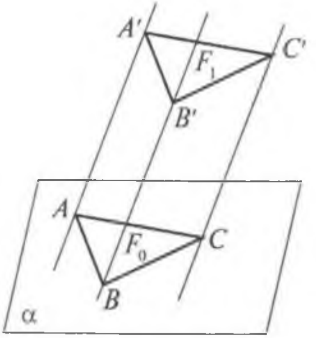
Масалан: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$.

B нуқта орқали A_1C_1 га параллел тўғри чизиқни ўтказамиз. BAA_2 ва BCC_2 – учбурчаклар ўхшаш. Уларнинг томонлари пропорционал бўлади: $\frac{AB}{BC} = \frac{A_2B}{BC_2} = \frac{AA_2}{CC_2}$. Учбурчакларнинг ўхшашлигидан ҳамда $A_1B_1 = A_2B$ ва $B_1C_1 = BC_2$ тенгликлардан $\frac{AB}{BC} = \frac{A_1B_1}{B_1C_1}$ эканлиги келиб чиқади.

1- §. Параллел проекциялаш ва унинг хоссалари

Параллел проекциялашни марказий проекциялашнинг хусусий ҳоли деб қараш мумкин. Бунда проекциялаш маркази S бирор $M'N'$ тўғри чизиқ йўналиши бўйича ҳаракатланиб, проекциялар текислигида чексиз узоқлашган деб фараз қиламиз (119- расм).

Бу ерда *$M'N'$ проекциялаш йўналиши* дейилади. Фазода олинган F' шаклни α текисликка проекциялаш учун F' шаклнинг ҳар бир нуқтаси орқали $M'N'$ йўналишга параллел қи-



119- расм

либ проекцияловчи тўғри чизиқлар ўтказамиз. Бу тўғри чизиқларнинг α текислик билан кесишган F_0 нуқталар тўплами F' шаклнинг α текисликдаги *параллел проекцияси* деб аталади.

Параллел проекциянинг кўриниши ва ўлчамларининг ўзгариши фақат проекциялар текислигининг йўналишига нисбатан қандай жойлашига боғлиқ. Проекцияловчи тўғри чизиқларнинг проекциялар текислигига нисбатан қандай йўналишда бўлишига қараб параллел проекциялаш *қийшиқ бурчакли* ва *тўғри бурчакли* бўлади.

Агар проекциялаш йўналиши проекциялар текислиги билан тўғри бурчак ташкил қилса, бундай параллел проекциялаш *тўғри бурчакли* ёки *ортогонал проекциялаш* дейилади.

Агар проекциялаш йўналиши проекциялар текислиги билан ўткир бурчак ташкил қилса, бундай параллел проекциялаш *қийшиқ проекциялаш* дейилади. Шаклнинг параллел проекциялашдаги тасвири асосан қуйидагича ҳосил қилинади.

1. Берилган фазовий шаклнинг барча нуқталари берилган йўналишда α текисликка проекцияланади.

2. Проекция текислигида ҳосил қилинган шакл ўхшаш алмаштирилади.

Хоссалари

1°. Тўғри чизиқ проекцияси тўғри чизиқдир.

2°. Параллел тўғри чизиқларнинг проекциялари ўзаро параллелдир.

3°. Икки параллел кесма проекциялари узунликларининг нисбати проекцияланувчи кесмалар узунликларининг нисбатига тенг.

Машқлар

1. Учбурчакнинг параллел проекцияси берилган. Бу учбурчак медианаларининг проекцияларини қандай ясаш керак?

   Ечилиши: Параллел проекциялашда тўғри чизиқ кесмаларининг нисбати сақланади. Шунинг учун учбурчак томонининг ўртаси бу томон проекциясининг ўртасига проекцияланади. Демак, учбурчак медианаларининг проекциялари унинг проекциясининг медианалари бўлади.

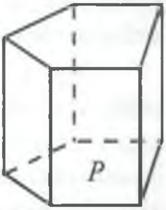
2. Учбурчакнинг параллел проекцияси берилган. Учбурчак ўрта чизиғининг проекцияси нима билан тасвирланади?
3. Параллелограммни параллел проекциялашда параллелограмм ҳосил қилиш мумкинми?

   (*Жавоб*: Йўқ. Жавобингизни тушунтиринг.)

4. Параллел проекциялашда параллелограммнинг проекцияси квадрат бўлиши мумкинми?

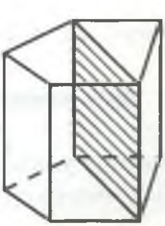
   (*Жавоб*: Мумкин.)

2- §. Призманинг текисликдаги тасвирини ясаш



120- расм

Параллел проекциялаш қоидаларига мувофиқ призманинг тасвири қуйидаги тарзда ясалади. Аввал асосларидан бири *P* ясалади (120- расм). У бирор ясси кўпбурчак бўлади. Кейин бу кўпбурчакнинг учларидан параллел кесмалар кўринишида призманинг ён қирралари ўтказилади. Бу кесмаларнинг учлари туташтирилади ва призманинг иккинчи асоси ҳосил бўлади.



121- расм

Кўринмайдиган қирралар штрих чизиқ билан кўрсатилади. Призманинг ён қирраларига параллел текисликлар билан кесимлари параллелограммлар бўлади.

Хусусан, диагонал кесимлар ҳам параллелограмм бўлади. Бу битта ёққа тегишли бўлмаган иккита ён қирра орқали ўтади (121- расм).

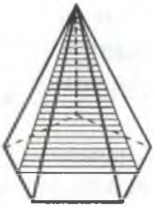
3- §. Пирамиданинг текисликдаги тасвирини ясаш

Параллел проекциялаш қоидаларига мувофиқ пирамиданинг тасвири қуйидаги тарзда ясалади. Аввал асоси ясалади. Бу бирор ясси кўпбурчак бўлади (122- расм). Кейин пирамиданинг учи белгиланади, у ён қирралар ёрдамида асос учлари билан туташтирилади. Расмда бешбурчакли пирамиданинг тасвири кўрсатилган. Пирамиданинг учи орқали ўтувчи текисликлар билан кесимлари учбурчакдан иборат.

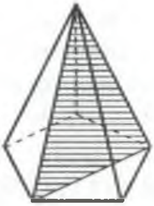
Хусусан, диагонал кесимлари учбурчак бўлади. Бундай кесимлар пирамиданинг иккита қўшни бўлмаган ён қирралари орқали ўтувчи текисликлар билан ҳосил қилинади (123- расм). Пирамиданинг асос текислигидан берилган *q* изли текислик билан кесими худди призманинг кесими каби ясалади. Пирамиданинг текислик билан кесимини ясаш учун унинг ён ёқларини кесувчи текислик билан кесишмасини ясаш етарли.

Агар *q* изга параллел бўлмаган ёқда кесимга тегишли бўлган бирор *A* нуқта маълум бўлса, у ҳолда улар кесишувчи текисликдаги *q* изнинг шу ёқ текислиги билан кесишмаси *D* нуқта ясалади. *D* нуқта тўғри чизиқдаги *A* нуқта билан туташтирилади. У ҳолда бу тўғри чизиқнинг ёққа тегишли бўлган кесмаси бу ёқнинг кесувчи текислик билан кесишмасидан иборат бўлади.

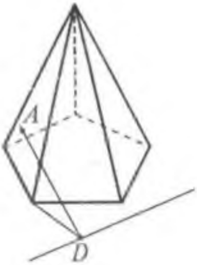
Агар *A* нуқта *q* изга параллел ўтса, у ҳолда кесувчи текислик бу ёқни *q* тўғри чизиққа параллел кесма бўйича кесиб ўтади. Қўшни ён ёққа ўтиб, унинг кесувчи текислик билан кесишмаси ясалади. Натижада пирамиданинг талаб этилаётган кесими ҳосил бўлади (125- расм).



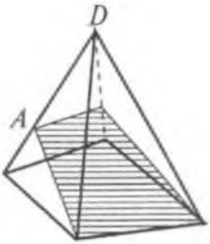
122- расм



123- расм



124- расм



125- расм

Расмда тўртбурчакли пирамиданинг асос томонидан ва унинг ён қирраларидан бирида ётган *A* нуқтадан ўтувчи текислик билан кесими ясалган.

Машқлар

1. Пирамиданинг асоси томонлари 6 см ва 8 см га тенг бўлган тўғри тўртбурчак. Пирамиданинг ҳар бир қирраси 13 см га тенг. Пирамиданинг баландлигини ҳисобланг.

(*Жавоб*: 12 см.)

2. Пирамиданинг асоси мунтазам учбурчакдан иборат; ён ёқларидан бири асосга перпендикуляр, қолган иккитаси асосга α бурчак остида оғишган. Ён қирралар асос текислигига қандай оғишган?

(*Жавоб*: $\mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{1}{2}\mathrm{tg}\alpha$, $\mathrm{tg}\alpha_2 = \mathrm{tg}\alpha_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{tg}\alpha$.)

3. Пирамиданинг асоси параллелограмм бўлиб, унинг томонлари 3 см ва 7 см, диагоналларидан бири 6 см, пирамиданинг баландлиги диагоналларининг кесишган нуқтасидан ўтиб, 4 см га тенг. Пирамиданинг ён қиррасини топинг.

(*Жавоб*: 5 см, 6 см.)

4- §. Кўпбурчак ортогонал проекциясининг юзи

Таъриф. Шаклнинг берилган текисликдаги ортогонал проекцияси деб шаклнинг бу текисликка перпендикуляр йўналишдаги *параллел проекциясига* айтилади.

Аввал β текисликда ётувчи тўғри чизиқ ва кесмаларнинг α текисликка ортогонал проекциясини кўриб чиқамиз.

$\beta \cap \alpha = a$, $(\beta,\hat{}\alpha) = \varphi$, $0° < \varphi < 90°$ (126- расм).

β текисликда a тўғри чизиққа параллел l_1 тўғри чизиқ ўтказамиз. Параллел проекциялаш тўғри чизиқларнинг параллеллигини сақлайди. Шунинг учун a ва l_1 тўғри чизиқлар a ва l параллел тўғри чизиқларга аксланади, бундан $l_1 \| l$ экани келиб чиқади.

l_1 тўғри чизиқнинг A_1B_1 кесмаси ва унинг AB образи A_1B_1AB параллелограммнинг қарама-қарши томонлари бўлади. Чунки проекцияловчи тўғри чизиқлар параллел. Демак, $|AB| = |A_1B_1|$ (126- расмга қаранг).

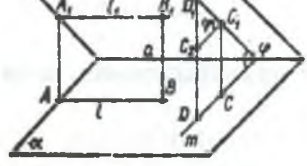
β текисликда a тўғри чизиққа перпендикуляр m_1 тўғри чизиқни кўриб чиқамиз. m_1 тўғри чизиқнинг m проекцияси ҳам a га перпендикуляр (уч перпендикуляр ҳақидаги теорема). Шунинг учун $(m_1,\hat{}m) = \varphi$.

Бундан a га перпендикуляр бўлган C_1D_1 кесма ва унинг образи CD учун $|CD| = |C_1D_1| = \cos\varphi$ тенглик бажарилиши келиб чиқади.

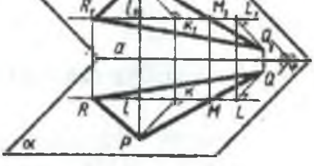
Теорема. *Кўпбурчакнинг текисликдаги ортогонал проекциясининг юзи проекцияланувчи кўпбурчак юзини кўпбурчак текислиги билан унинг проекцияси орасидаги бурчак косинусига кўпайтирилганига тенг.*

Исботи. β текисликда ётувчи $P_1Q_1R_1$ учбурчак билан унинг α текисликдаги ортогонал проекцияси $\triangle PQR$ ни кўриб чиқамиз (127- расм).

$\beta \cap \alpha = a$, $(\beta,\hat{}\alpha) = \varphi$, $0° < \varphi < 90°$ бўлсин. Агар P_1, Q_1, R_1 нуқталардан a га параллел тўғри чизиқлар ўтказилса, улардан бири учбурчакнинг қарама-қарши ётган томони билан уму-



126- расм



127- расм

мий нуқтага эга бўлади. Бундай тўғри чизиқни R_1 нуқтадан ўтувчи l_1 тўғри чизиқ деб ҳисоблаймиз:

$$l_1 \cap [P_1 Q_1] = M_1.$$

$|P_1 K_1|$ ва $|Q_1 L_1|$ кесмада P_1 ва Q_1 нуқталардан тўғри чизиққача масофалар бўлсин.

M_1, K_1, L_1 нуқталарнинг M, K, L проекцияларини ясаб, PQR учбурчакнинг юзини $P_1 Q_1 R_1$ учбурчак юзи билан ифодалаймиз.

$$S_{\Delta PQR} = \frac{1}{2}|RM||PK| + \frac{1}{2}|RM||QL|.$$

Юқоридаги хулосаларга мувофиқ

$$|RM| = |R_1 M_1|;\ \ |PK| = |P_1 K_1|\cos\varphi;\ \ |QL| = |Q_1 L_1|\cos\varphi;$$

у ҳолда

$$S_{\Delta PQR} = \left(\frac{1}{2}|R_1 M_1||P_1 K_1| + \frac{1}{2}|R_1 M_1||Q_1 L_1|\right)\cos\varphi = S_{\Delta P_1 Q_1 R_1}\cos\varphi.$$

Демак, $S_{\Delta PQR} = S_{\Delta P_1 Q_1 R_1}\cos\varphi$.

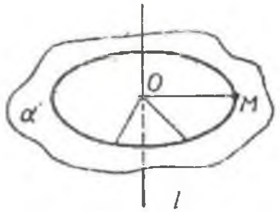
Агар текисликлар $\beta||\alpha$ бўлса, у ҳолда учбурчак ва унинг проекцияси конгруэнт бўлади.

Машқлар

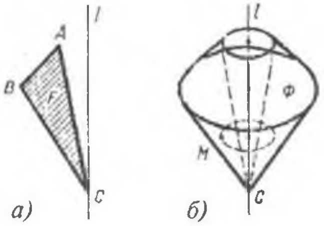
1. Оғма текислик билан 45° ли бурчак ташкил этади. Оғма асосида текисликка оғманинг проекциясига 45° ли бурчак остида тўғри чизиқ ўтказилган. Шу тўғри чизиқ билан огма орасидаги φ бурчакни топинг.
2. Тўғри параллелепипед асосининг томонлари 4 дм ва 5 дм, улар орасидаги бурчак 30°. Агар параллелепипеднинг текислик билан кесими унинг барча қирраларини кесиб ўтиши ва асос текислиги билан 45° ли бурчак ташкил қилиши маълум бўлса, кесимнинг юзини топинг.

5- §. Айланиш жисмларини текисликда тасвирлаш

1. l тўғри чизиқ ва l тўғри чизиққа тегишли бўлмаган ихтиёрий M нуқта берилган бўлсин. M нуқтадан l тўғри чизиққа перпендикуляр α текислик ўтсин (128- расм).



128- расм



129- расм

Шу текисликда $O = \alpha \cap l$ марказли ва $|OM|$ радиусли айланани кўриб чиқамиз. Бу айлана M нуқтанинг l ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган деб айтишни келишиб оламиз.

Текисликда l тўғри чизиқдан ўтувчи F шаклни, масалан, ABC учбурчакни оламиз (129-*а* расм).

F шаклга унинг l га тегишли барча нуқталарининг ва l га тегишли бўлмаган барча нуқталарининг айланишидан ҳосил қилинган айланаларнинг бирлашмасини мос қўямиз (129-*б* расм).

Φ шакл F шаклнинг l ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган дейилади.

Агар Φ шакл бирор шаклнинг бирор ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлса, у ҳолда *Ф айланиш шакли* дейилади.

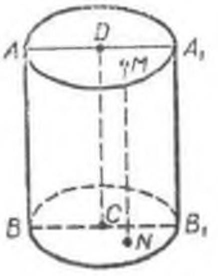
Таъриф. Тўғри тўртбурчакни унинг бир томонини ўз ичига олган ўқ атрофида айланишидан ҳосил бўлган шакл *цилиндр* дейилади.

Бу айланишда тўғри тўртбурчакнинг айланиш ўқида ётмаган томонлари цилиндрнинг *сирти* деб аталувчи шакл ҳосил қилади.

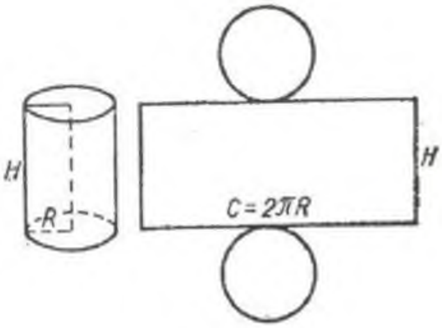
VIII синфи геометрия курсидан қуйидаги атамалар сизга маълум: цилиндрнинг асоси, ён сирти, баландлиги, ясовчиси (130- расм).

Цилиндр ён сиртининг ва тўла сиртининг юзи учун унга мос ёйилмасининг юзи қабул қилинишини ҳам эслатиб ўтамиз (131- расм). Демак, ушбу формулаларга келамиз:

$$S_{ен} = 2\pi RH, \quad S_{т.с.} = 2\pi RH + 2\pi R^2.$$



130- расм



131- расм

Машқлар

1. Цилиндрнинг: 1) ўқидан ўтувчи; 2) асосига параллел; 3) ўқига параллел; 4) барча ясовчиларини кесувчи текислик билан кесими қандай шакл бўлади?

(*Жавоб:* 3) тўғри тўртбурчак ёки кесма; 4) текисликнинг эллипс билан чегараланган қисми.)

2. Цилиндр ўқ кесимининг юзи 8 м^2, асосининг юзи 12 м^2, ўқига параллел ва ундан 1 м узоқликдаги кесимнинг юзини топинг.

(*Жавоб:* $\approx 6{,}87$ м^2.)

3. Цилиндр шаклидаги буғ қозоннинг диаметри 1 м, қозоннинг узунлиги 3,8 м, буғнинг босими 10 атм. Буғнинг қозон сиртига босим кучини топинг.

(*Жавоб:* $\approx 1{,}4 \cdot 10^7$ Н.)

V боб. ФАЗОДА ВЕКТОРЛАР

Фазода текисликдаги сингари *вектор* деб, *йўналтирилган кесмага* айтилади. Фазода векторлар учун асосий тушунчалар: *векторнинг абсолют катталиги (модули), векторнинг йўналиши, векторларнинг тенглиги* текисликдаги сингари таърифланади.

Боши $A_1(x_1; y_1; z_1)$ нуқтада ва охири $A_2(x_2; y_2; z_2)$ нуқтада бўлган векторнинг *координаталари* деб $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$ сонларга айтилади. Худди текисликдаги сингари тенг векторларнинг мос кооординаталари тенглиги ва, аксинча, координаталари тенг векторларнинг тенглиги исботланади.

Бу эса векторни унинг координаталари билан ифодалашга асос бўлади: $\overline{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ ёки, соддароқ ёзилса, $(a_1;\ a_2;\ a_3)$.

Масала. Тўртта нуқта берилган: $A(2; -7; 3)$, $B(1; 0; 3)$, $C(-3; -4; 5)$, $D(-2; 3; -1)$. $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$, $\overline{AC}$ ва $\overline{BD}$ векторлар орасидан тенг векторларни кўрсатинг.

Ечилиши. Кўрсатилган $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, ... векторларнинг координаталарини топиш ва мос координаталарни таққослаш керак. Тенг векторларнинг мос координаталари тенг. Масалан: $\overline{AB}$ векторнинг координаталари: $1-2=-1$, $0-7=-7$, $3-(-3)= = 6$; $\overline{DC}$ векторнинг координаталари ҳам худди шундай: $-3-(-2)=-1$, $-4-3=-7$, $5-(-1)=6$. Шундай қилиб, $\overline{AB}$ ва $\overline{DC}$ в екторлар тенг. Тенг векторларнинг яна бир жуфти $\overline{BC}$ ва $\overline{AD}$ дан иборат.

Машқлар

1. Учта нуқта берилган: $A(1; 0; 1)$, $B(-1; 1; 2)$, $C(0; 2; -1)$. Агар $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар тенг бўлса, $D(x; y; z)$ нуқтани топинг.

(*Жавоб:* $D(-2; 3; 0)$.)

2. Агар 1- масалада $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторларнинг йиғиндиси нолга тенг бўлса, D нуқтани топинг.

(*Жавоб:* D (2; 1; –2).)

3. (2; n; 3) ва (3; 2; m) векторлар берилган. m ва n нинг қандай қийматларида бу векторлар коллинеар бўлади?

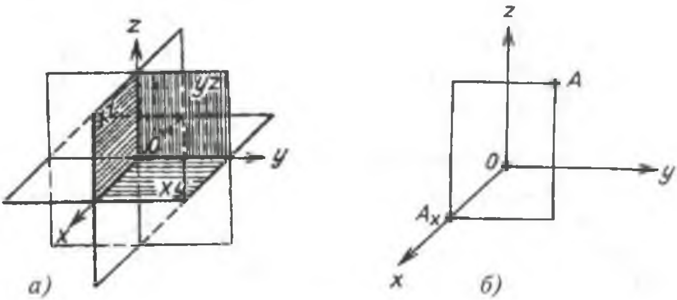
(*Жавоб:* $n = \frac{4}{3}$; $m = \frac{3}{2}$.)

1- §. Фазода Декарт координаталар системаси

Битта O нуқтада кесишувчи ўзаро перпендикуляр учта x, y, z тўғри чизиқни оламиз. Бу тўғри чизиқларнинг ҳар бир жуфти орқали текислик ўтказамиз. x ва y тўғри чизиқлар орқали ўтувчи текислик *xy текислик* дейилади. Бошқа икки текислик мос равишда *xz* ва *yz текисликлар* дейилади. x, y, z тўғри чизиқлар *координата ўқлари* дейилади, уларнинг кесишган O нуқтаси – координаталар боши, *xy*, *yz* ва *xz* текисликлар эса *координата текисликлари* дейилади. O нуқта координата ўқларининг ҳар бирини иккита ярим тўғри чизиққа – ярим ўқларга ажратади. Улардан бирини *мусбат*, иккинчисини *манфий* деб айтишга шартлашиб оламиз (132- *а* расм).

Энди ихтиёрий A нуқтани оламиз ва ундан yz текисликка параллел текислик ўтказамиз (132- расм).

Бу текислик x ўқни бирор A_x нуқтада кесиб ўтади. A нуқтанинг *x координатаси* деб модули OA_x кесманинг узунлигига тенг сонга айтамиз. Бу сон, агар A_x нуқта x нинг



а) б)

132- расм

мусбат ярим ўқига ётса — мусбат ва манфий ярим ўқида ётса — манфий.

Агар A_x нуқта O нуқта билан устма-уст тушса, $x = 0$ деб оламиз. A нуқтанинг y, z координаталари шу каби аниқланади. Нуқтанинг координаталарини нуқтанинг ҳарфий белгиланиши ёнига қавс ичида ёзамиз: A (x; y; z). Баъзан оддийгина қилиб унинг координаталари билан белгилаймиз: (x; y; z).

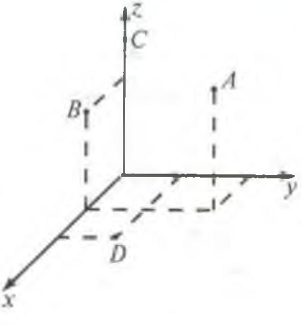
Масала. A (3; 1; 3), B (0; 1; 2), C (0; 0; 3), D (1; 2; 0) нуқталар берилган. Бу нуқталардан қайсилари: 1) xy текисликда; 2) z ўқда; 3) yz текисликда ётади?

Ечилиши. xy текисликдаги нуқталарда z координата нолга тенг. Шунинг учун фақат D нуқта xy текисликда ётади. yz текисликдаги нуқталарда x координата нолга тенг. Демак, B ва C нуқталар yz текисликда ётар экан. z ўқдаги нуқталарнинг иккита координатаси (x ва y) нолга тенг. Шунинг учун C нуқта z ўқда ётади (133- расм).

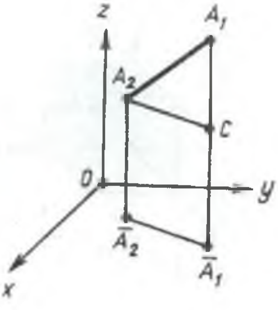
2- §. Икки нуқта орасидаги масофа

Фазода Декарт координаталар системаси ва A_1 (x_1; y_1; z_1), A_2 (x_2; y_2; z_2) нуқталар берилган бўлсин. Бу нуқталар орасидаги масофани топиш масаласи билан шуғулланамиз.

$\overline{A_1}$ ва $\overline{A_2}$ нуқталар мос равишда A_1 ва A_2 нинг Oxy текисликдаги проекциялари бўлсин (134- расм).



133- расм



134- расм

Текисликда иккита нуқта орасидаги масофа формуласига кўра $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ кесманинг узунлиги

$$\overline{A_1}\,\overline{A_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

бўлади. A нуқтадан $\overline{A_1}\,\overline{A_2}$ кесмага параллел чизиқ ўтказиб, унинг $A_1\overline{A_1}$ чизиқ билан кесишган нуқтасини C орқали белгилайлик.

У ҳолда $\overline{A_1}C$ кесманинг узунлиги $|z_2 - z_1|$ га тенг бўлади. Равшанки, $\triangle\ A_2A_1C$ тўғри бурчакли учбурчак. Пифагор теоремасидан фойдаланиб, $A_2A_1 = \sqrt{A_2C^2 + A_1C^2}$ ни топамиз. Энди $A_2C = \overline{A_2}\,\overline{A_1}$ эканини эътиборга олсак, у ҳолда

$$A_2A_1 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

бўлади.

Демак, $A_1A_2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$.

Бу тенгликка *фазода икки нуқта орасидаги масофани топиш формуласи* дейилади.

Машқлар

1. xy текисликда $A\ (0;\ 1;\ -1)$, $B\ (-1;\ 0;\ 1)$, $C\ (0;\ -1;\ 0)$ нуқталардан тенг узоқлашган $D\ (x;\ y;\ 0)$ нуқтани топинг.

Ечилиши. Қуйидагиларга эгамиз:

$$AD^2 = (x - 0)^2 + (y - 1)^2 + (0 + 1)^2;$$

$$BD^2 = (x + 1)^2 + (y - 0)^2 + (0 - 1)^2;$$

$$CD^2 = (x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (0 - 0)^2.$$

Олдинги иккита масофани учинчисига тенглаб, x, y ни аниқлаш учун иккита тенглама ҳосил қиламиз:

$$-4y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 1 = 0.$$

Бундан $y = \frac{1}{4}$, $x = -\frac{1}{4}$. Изланаётган нуқта $D\ (-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0)$.

2. (0; 0; 1), (0; 1; 0), (1; 0; 0) нуқталарнинг ҳар бирида бир хил масофада ётувчи ва yz текисликдан 2 бирлик масофадаги нуқталарни топинг.

(*Жавоб*: (2; 2; 2) ва (–2; –2; –2).)

3. x ўқида A (1; 2; 3), B (–2; 1; 3) нуқталардан тенг узоқликдаги C (x; 0; 0) нуқтани топинг.

(*Жавоб*: C (0; 0; 0).)

4. A (1; 2; 3) нуқтадан ва координаталар бошидан тенг узоқлашган фазо нуқталарининг геометрик ўрни тенгламасини тузинг. (*Жавоб*: $x + 2y + 3z = 7$.)

3- §. Векторнинг координаталари

$\bar{a} = \overline{AB}$ векторнинг боши A (x_1; y_1; z_1), охири эса B (x_2; y_2; z_2) нуқта бўлсин (135- расм).

$a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$ сонларни $\bar{a}$ векторнинг координаталари деб атаймиз. Векторнинг координаталарини унинг ҳарфий белгиси ёнига ёзилади. $\bar{a}$ (a_1; a_2; a_3). Ноль векторнинг координаталари нолга тенг.

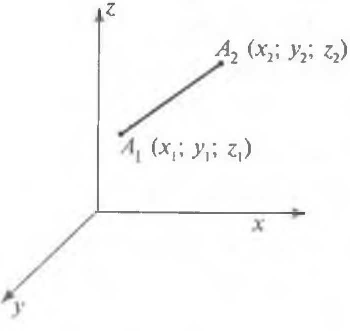
Координаталари a_1, a_2, a_3 дан иборат векторнинг модули

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

га тенг.

Теорема. *Тенг векторлар мос равишда тенг координаталарга эга, ва аксинча, агар векторларнинг мос координаталари тенг бўлса, векторлар тенг бўлади.*

Исботи. Ҳақиқатан, A_1 (x_1; y_1; z_1) ва A_2 (x_2; y_2; z_2) нуқталар $\bar{a}$ векторнинг боши ва охири бўлсин, $\bar{a}$ векторга тенг $\bar{a}'$ вектор $\bar{a}$ векторни параллел кўчириш билан ҳосил қилингани учун $\bar{a}'$ векторнинг боши ва охири мос равишда A_1' ($x_1 + c$; $y_1 + d$; $z_1 + k$), A_2' ($x_2 + c$; $y_2 + d$; $z_2 + k$) нуқталардан иборат бўлади. Бундан иккала $\bar{a}$ ва $\bar{a}'$ векторнинг бир хил $x_2 - x_1$; $y_2 - y_1$; $z_2 - z_1$ координаталарга эга эканлиги кўриниб турибди.



135- расм

Машқлар

1. Учта нуқта берилган: $A\ (1;\ 1;\ 1)$, $B\ (-1;\ 0;\ 1)$, $C\ (0;\ 1;\ 1)$. Шундай $D\ (x;\ y;\ z)$ нуқтани топингки, $\overline{AB}$ ва $\overline{CD}$ векторлар тенг бўлсин.

   Ечилиши. $\overline{AB}$ векторнинг координаталари $(-2; -1; 0)$, $\overline{CD}$ векторнинг координаталари $(x-0;\ y-1;\ z-1)$ бўлади. $\overline{AB}=\overline{CD}$ дан: $x-0=-2$; $y-1=-1$; $z-1=0$. Бундан D нуқтанинг координаталарини топамиз: $x=-2$; $y=0$; $z=1$.

   (*Жавоб*: $D\ (-2;\ 0;\ 1.)$

2. Агар 1) $\bar{a}\ (1;\ -4)$, $\bar{b}\ (-4;\ 8)$; 2) $\bar{a}\ (2;\ 5)$, $\bar{b}\ (4;\ 3)$ бўлса, $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар йиғиндисига тенг бўлган $\bar{c}$ векторни ва унинг абсолют қийматини (модулини) топинг.

   (*Жавоб*: 1) $\bar{c}\ (-3;\ 4)$, $|\bar{c}|=5$; 2) $\bar{c}\ (6;\ 8)$, $|\bar{c}|=10$.)

3. Агар 1) $\bar{a}\ (1;\ -4)$, $\bar{b}\ (-4;\ 8)$; 2) $\bar{a}\ (-2;\ 7)$, $\bar{b}\ (4;\ -1)$ бўлса, $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ векторни ва унинг абсолют қийматини (модулини) топинг.

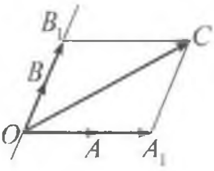
   (*Жавоб*: 1) $\bar{c}\ (5;\ -12)$, $|\bar{c}|=13$; 2) $\bar{c}\ (-6;\ 8)$, $|\bar{c}|=10$.)

4- §. Коллинеар ва компланар векторлар

Таъриф. Нолмас $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар йўналишдош ёки қарама-қарши йўналган бўлса, улар *коллинеар векторлар* деб аталади.

Нолмас $\bar{a}$ ва $\bar{b}$ векторлар ўзаро $\bar{a}=\lambda\bar{b}$ $(\lambda\neq 0)$ тенглик билан боғланган бўлса, бу уларнинг ўзаро коллинеар бўлишининг зарурий ва етарлилик шарти ҳисобланади.

Таъриф. Нолмас $\bar{a}$, $\bar{b}$ ва $\bar{c}$ векторлар бирор O нуқтада қўйилган вақтда $\bar{a}=\overline{OA}$, $\bar{b}=\overline{OB}$ ва $\bar{c}=\overline{OC}$ векторлар бир текисликда ётса, у ҳолда улар ўзаро *компланар векторлар* дейилади.



136- расм

Теорема. *Агар $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторлар коллинеар бўлмаса, улар билан компланар бўлган ҳар қандай $\overline{c}$ вектор учун шундай λ ва μ (λ, μ∈ R) сонлар топиладики, уни ягона тарзда $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$ каби ёзиш мумкин.*

Исботи. Бу ерда уч ҳол бўлиши мумкин. $\overline{c}$ вектор ё $\overline{a}$ вектор билан, ё $\overline{b}$ вектор билан коллинеар бўлади, ёки иккаласи билан ҳам коллинеар бўлмайди. Биринчи икки ҳолда коллинеарликнинг юқорида айтиб ўтилган шартига кўра ёки $\overline{c} = \lambda\overline{a} + 0 \cdot \overline{b}$, ёки $\overline{c} = 0 \cdot \overline{a} + \mu\overline{b}$ каби ёзилиб, теорема тасдиғи тўғри бўлади.

Энди учинчи ҳолда бу учала векторнинг бошини O нуқтага қўяйлик ва $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$ бўлсин. Агар C нуқтадан $\overline{b}$ векторга параллел тўғри чизиқ ўтказсак, у OA тўғри чизиқни A_1 нуқтада, $\overline{a}$ векторга параллел тўғри чизиқ ўтказсак, у OB тўғри чизиқни B_1 нуқтада кесиб ўтади (136-расм).

Натижада $\overline{OA}$ вектор $\overline{OA_1}$ вектор билан, $\overline{OB}$ вектор $\overline{OB_1}$ вектор билан коллинеар бўлгани учун: $\overline{OA_1} = \lambda\overline{a}$; $\overline{OB_1} = \mu\overline{b}$. Расмдан кўриниб турибдики, $\overline{OC} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1}$ тенгликдан $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$ келиб чиқади.

Агар $\overline{c}$ вектор $\lambda \neq \lambda_1$, $\mu \neq \mu_1$ шарт билан яна $\overline{c} = \lambda_1\overline{a} + \mu_1\overline{b}$ каби ёйилганда эди, $\overline{c} - \overline{c_1} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b} - \lambda_1\overline{a} + \mu_1\overline{b} = (\lambda - \lambda_1)\overline{a} +$ $+ (\mu - \mu_1)\overline{b}$ тенглик ҳосил қилиш мумкин бўлар эди. Бундан $\overline{a} = \frac{\mu-\mu_1}{\lambda-\lambda_1}\overline{b}$ келиб чиқади. $\overline{a}$ вектор $\overline{b}$ векторга коллинеар деган хулоса юзага келади. Бу теорема шартига зид. Демак, $\overline{c} = \lambda\overline{a} + \mu\overline{b}$ каби ёйилма мавжуд ва ягона экан.

Машқлар

Нолмас $\overline{OA}$ вектор берилган. O нуқтадан ушбу векторларни қўйинг:

1) $\frac{1}{2}\overline{OA}$; 2) $-2\overline{OA}$; 3) $-\frac{2}{3}\overline{OA}$; 4) $\sqrt{2}\overline{OA}$; 5) $-\sqrt{3}\overline{OA}$.

5- §. Векторларнинг скаляр кўпайтмаси ва унинг хоссалари

$\overline{a} = (x;\ y;\ z)$ ва $\overline{b} = (x';\ y';\ z')$ векторлар берилган бўлсин. Ушбу $xx' + yy' + zz'$ сон $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг *скаляр кўпайтмаси* дейилади ва $\overline{a}\overline{b}$ ёки $(\overline{a},\overline{b})$ каби белгиланади. Демак, $\overline{a}\overline{b} = xx' + yy' + zz'$.

Мисол. Ушбу $\overline{a}$ (0; 1; 2) ва $\overline{b}$ (3; 0; 5) векторларнинг скаляр кўпайтмасини топинг.

Ечилиши. $\overline{a}\overline{b} = xx' + yy' + zz'$ формулага биноан $\overline{a}\overline{b} = 0 \cdot 3 + 1 \cdot 0 + 2 \cdot 5 = 10$ бўлади. $\overline{a}\overline{b} = 10$.

Хоссалари

1°. $\overline{a}\overline{b} = \overline{b}\overline{a}$.

2°. $\overline{a}(\overline{a}\overline{b}) = (\overline{a}\overline{a})\overline{b}$.

3°. $\overline{a}(\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a}\overline{b} + \overline{a}\overline{c}$.

Бу хоссаларнинг исботи таърифдан келиб чиқади.

4°. $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}$.

Исботи. $\overline{b}$ векторни учта вектор йиғиндиси кўринишида ифодалаймиз.

$\overline{b} = (x';\ y';\ z') = (x';\ 0;\ 0) + (0;\ y';\ 0) + (0;\ 0;\ z') = \overline{b}_1 + \overline{b}_2 + \overline{b}_3$.

У ҳолда

$$\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_1 + \text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_2 + \text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_3,$$

$$|\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b} = |\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_1 + |\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_2 + |\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_3$$

бўлиб,

$$\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_1 = x'\cos\alpha,\ \text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_2 = y'\cos\beta,\ \text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}_3 = z'\cos\gamma$$

тенгликларга эга бўламиз. Бу ерда $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ лар $\overline{a}$ векторнинг йўналтирувчи косинусларидир.

Энди

$$x = |\overline{a}|\cos\alpha,\ y = |\overline{a}|\cos\beta,\ z = |\overline{a}|\cos\gamma$$

тенгликларни эътиборга олиб топамиз:

$$|\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b} = xx' + yy' + zz' = \overline{a}\overline{b}\,.$$

5°. $\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos a,\hat{\ }\ b$.

Исботи. 4- хоссадан фойдаланамиз:

$\overline{b} = |\overline{a}|\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b}$ формулага кўра $\text{Пр}_{\overline{a}}\overline{b} = \cos\alpha$ бўлиб, бундан эса

$$\overline{a}\overline{b} = |\overline{a}||\overline{b}|\cos a,\hat{\ }\ b$$

эканлиги келиб чиқади.

6°. $\overline{a}\overline{a} = |\overline{a}|^2$.

7°. $\overline{a}$ векторнинг $\overline{b}$ векторга перпендикуляр бўлиши учун $\overline{a}\overline{b} = 0$ тенгликнинг бажарилиши зарур ва етарли.

6- §. Векторни учта нокомпланар вектор бўйича ёйиш

Учта нокомпланар $\overline{a}$, $\overline{b}$ ва $\overline{c}$ векторнинг йиғиндисини топиш керак бўлсин.

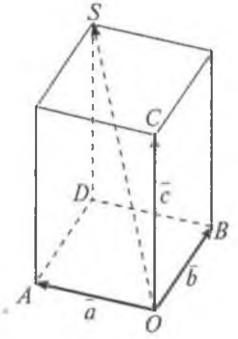
Бунинг учун параллелепипед қоидасидан фойдаланамиз (137- расм). Ихтиёрий O нуқтадан $\overline{OA} = \overline{a}$, $\overline{OB} = \overline{b}$, $\overline{OC} = \overline{c}$ векторларни қўямиз. Параллелепипедни шундай ясаймизки, OA, OB, OC кесмалар унинг қирралари бўлсин. $\overline{OS}$ вектор (бунда $[OS]$ параллелепипеднинг диагонали) − изланган йиғинди бўлади.

Ҳақиқатан, $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AD} + \overline{DS} = \overline{OS}$.

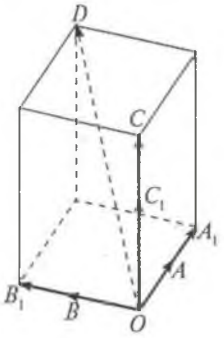
Нокомпланар $\overline{a}$, $\overline{b}$ ва $\overline{c}$ векторлар берилган бўлсин. Ихтиёрий $\overline{d}$ векторни

$$\overline{d} = x\overline{a} + y\overline{b} + z\overline{c} \qquad (1)$$

шаклида ифодалаш мумкинми эканини аниқлаймиз.



137- расм



138- расм

O нуқтадан $\overline{OA} = \bar{a}$, $\overline{OB} = \bar{b}$, $\overline{OC} = \bar{c}$, $\overline{OD} = \bar{d}$ векторларни қўямиз (138- расм). AOB, BOC, COA турли текисликлардир. D нуқта бу текисликларнинг биттасига ҳам тегишли бўлмаган ҳолни кўриб чиқамиз.

D нуқтадан AOB, BOC, COA текисликларга мос равишда параллел текисликлар ўтказамиз. Ҳосил қилинган параллелепипедда OD кесма диагонал бўлади.

Параллелепипеднинг O учидан чиққан қирралари учларини A_1, B_1, C_1 билан белгилаймиз.

Параллелепипед қоидасига кўра $\overline{OD} = \overline{OA_1} + \overline{OB_1} + \overline{OC_1}$. Аммо $\overline{OA_1}$ ва $\overline{OA}$ векторлар коллинеар, шунинг учун $\overline{OA_1} = x \cdot \overline{OA}$. Шунга ўхшаш, $\overline{OB_1} = y \cdot \overline{OB}$, $\overline{OC_1} = z \cdot \overline{OC}$. Демак, $\overline{OD} = x\overline{OA} + y\overline{OB} + z\overline{OC}$ ёки $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$.

Агар D нуқта AOB текисликка тегишли бўлса, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$, $\overline{OD}$ векторлар компланар, демак, $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b}$. Бу ҳолда (1) тенгликда $z = 0$ деб фараз қиламиз.

D нуқта BOC ёки COA текисликларга тегишли бўлган ҳоллар шунга ўхшаш қараб чиқилади (ўқувчининг ўзига ҳавола этилади).

Нокомпланар $\bar{a}$, $\bar{b}$ ва $\bar{c}$ векторлар берилган бўлса, $\bar{d}$ векторни $x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$ йиғинди шаклида тасвирлаш *$\bar{d}$ векторни $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ векторлар бўйича ёйиш* дейилади. Ҳосил қилинган ёйилмани ягона эканлигини, яъни $\bar{d} = x\bar{a} + y\bar{b} + z\bar{c}$

ва $\overline{d} = x_1\overline{a} + y_1\overline{b} + z_1\overline{c}$ тенгликлардан $x = x_1$; $y = y_1$; $z = z_1$ деган хулоса келиб чиқишини исбот қилиш мумкин. Демак, қуйидаги теорема ўринли.

Теорема. *Фазонинг ҳар бир вектори учун берилган учта нокомпланар вектор бўйича ягона ёйилма мавжуддир.*

Машқлар

1. $OABC$ тетраэдр ABC ёғининг медианалари M нуқта кесишади. $\overline{OA}$ векторни $\overline{OB}$, $\overline{OC}$, $\overline{OM}$ векторлар бўйича ёйинг.

   (*Жавоб:* $\overline{OA} = -\overline{OB} - \overline{OC} + 3\overline{OM}$.)

2. $ABCD$ параллелограмм текислигидан ташқарида O нуқта олинган. $\overline{a} = \overline{OA}$, $\overline{b} = \overline{OB}$, $\overline{c} = \overline{OC}$ векторлар бўйича ушбу векторларни ёйинг: 1) $\overline{OM}$, бунда $M = (AC \cap BD)$; 2) $\overline{OD}$; 3) $\overline{OK}$, бунда K нуқта AD кесманинг ўртаси.

   (*Жавоб:* 1) $0{,}5\overline{a} + 0\overline{b} + 0{,}5\overline{c}$;

   2) $\overline{a} + (-1)\overline{b} + \overline{c}$; 3) $\overline{a} - 0{,}5\overline{b} + 0{,}5\overline{c}$.)

3. $ABCD$ тетраэдрда ABC ёғининг AA_1 медианасини P нуқта $|AP| : |PA_1| = 3 : 7$ нисбатда бўлади. $\overline{DP}$ векторни $\overline{DA}$, $\overline{DB}$, $\overline{DC}$ векторлар бўйича ёйинг.

   (*Жавоб:* $\overline{DP} = \frac{7}{10}\overline{DA} + \frac{3}{20}\overline{DB} + \frac{3}{20}\overline{DC}$. Кўрсатма. Масала шартидан келиб чиқадиган $\overline{AP} = \frac{3}{7}\overline{PA_1}$ тенгликнинг иккала қисмига векторларни айириш формуласини татбиқ қилинг.)

7- §. Векторлар алгебраси элементлари

Векторлар алгебраси элементлари вектор устида арифметик амалларни (қўшиш, айириш, кўпайтириш, бўлиш) ва уларнинг хоссаларини ўз ичига олади, бунинг учун векторлар *фазоси тушунчасини* ўрганиб, кейин унинг хоссаларини келтирамиз.

Агар $\overline{a}$ векторнинг боши координаталар боши билан устма-уст тушган бўлса, унинг охири фазода бирор M нуқтани аниқлайди. Ва аксинча, фазодаги ҳар қандай M нуқтага $\overline{OM}$ вектор мос келади.

Демак, бундай векторлар тўплами билан уч ўлчовли фазодаги $M\ (x;\ y;\ z)$ нуқталар орасида ўзаро бир қийматли мослик ўринли бўлиб, бу уч ўлчовли R^3 фазо *векторлар фазоси* ҳам дейилади. $\overline{a}$ вектор ўзининг координаталари $(x;\ y;\ z)$ билан аниқланади ва $\overline{a}\ (x;\ y;\ z)$ каби ёзилади.

Векторлар фазосида $a\ (x;\ y;\ z)$, $b\ (x';\ y';\ z')$ векторлар ва α скаляр сон берилган бўлсин.

Қуйидаги $\overline{c}\ (x + x';\ y + y';\ z + z')$ вектор $\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг йиғиндиси дейилади ва $\overline{a} + \overline{b}$ каби белгиланади. Демак, $\left\{\overline{a} + \overline{b}\right\}\ (x + x';\ y + y';\ z + z')$.

$\overline{a}$ ва $\overline{b}$ векторларнинг *айирмаси* деб, $(x - x';\ y - y';\ z - z')$ векторга айтилади ва $\overline{a} - \overline{b}$ каби белгиланади. Демак, $\overline{a} - \overline{b} = (x - x';\ y - y';\ z - z')$.

$\overline{a}$ векторнинг α сонга кўпайтмаси ушбу $(\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z)$ вектор билан белгиланади, яъни $\alpha\overline{a} = (\alpha x;\ \alpha y;\ \alpha z)$.

Векторлар устидаги арифметик амаллар учун (векторлар алгебраси элементларида) қуйидаги хоссалар ўринли:

1°. $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ (коммутативлик хоссаси).

2°. $\overline{a} + (\overline{b} + \overline{c}) = (\overline{a} + \overline{b}) + \overline{c}$ (ассоциативлик хоссаси).

3°. $\overline{a} + 0 = \overline{a}$.

4°. Ҳар қандай $\overline{a}$ вектор учун шундай $\overline{b}$ вектор мавжудки, $\overline{a} + \overline{b} = 0$ бўлади. $\overline{b}$ вектор $\overline{a}$ векторга *тескари вектор* дейилади.

5°. $\alpha(\overline{a} + \overline{b}) = \alpha\overline{a} + \alpha\overline{b}$. $(\alpha + \beta)\overline{a} = \alpha\overline{a} + \beta\overline{a}$ (дистрибутивлик хоссаси).

6°. $\alpha(\beta\overline{a}) = \alpha\beta\overline{a}$.

АСОСИЙ ФОРМУЛАЛАР

Ихтиёрий учбурчак (a, b, c — томонлари, α, β, γ — томонлар қаршисидаги бурчаклар, p — ярим периметр, R — ташқи чизилган айлана радиуси, r — ички чизилган айлана радиуси, S — юз, h_a — a томонига туширилган баландлик):

$$S = \frac{1}{2}a \cdot h_a; \quad S = \frac{1}{2}b \cdot c \cdot \sin\alpha; \quad p = \frac{a+b+c}{2};$$

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad r = \frac{S}{p}; \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Тўғри бурчакли учбурчак (a, b — катетлари; c — гипотенуза; a_c, b_c — катетларнинг гипотенузадаги проекциялари):

$$S = \frac{1}{2}ab; \quad S = \frac{1}{2}ch_c; \quad r = \frac{a+b-c}{2}; \quad R = \frac{c}{2};$$

$$a^2 + b^2 = c^2 \text{ (Пифагор теоремаси)};$$

$$\frac{a_c}{h_c} = \frac{h_c}{b_c}; \quad \frac{a_c}{a} = \frac{a}{c}; \quad \frac{b_c}{b} = \frac{b}{c}.$$

$$a = c\sin\alpha = c\cos\beta = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = b\,\mathrm{ctg}\,\beta.$$

Тенг томонли учбурчак:

$$\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ; \quad S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}; \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}; \quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}.$$

Ихтиёрий тўртбурчак (d_1 ва d_2 — диагоналлари; φ — улар орасидаги бурчак; S — юз):

$$S = \frac{1}{2}d_2 d_1 \sin\varphi.$$

Параллелограмм (a ва b — томонлари; φ — улар орасидаги бурчак; h_a — a томонига туширилган баландлик):

$$S = ah_a = ab\sin\varphi = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi.$$

Квадрат (d — диагональ):

$$S = a^2 = \frac{d^2}{2}.$$

Ромб:

$$S = ah_a = a^2 \sin\varphi = \frac{1}{2} d_1 d_2 .$$

Тўғри тўртбурчак:

$$S = ab = \frac{1}{2} d_1 d_2 \cdot \sin\varphi .$$

Трапеция (a ва b — асослари; h — асослари орасидаги масофа; l — ўрта чизиғи):

$$l = \frac{a+b}{2}; \quad S = \frac{a+b}{2} \cdot h = l \cdot h .$$

Ички чизилган кўпбурчак (p — ярим периметр; r — ташқи чизилган айлана радиуси):

$$S = pr .$$

Мунтазам кўпбурчак (a_n — n бурчакли мунтазам кўпбурчакнинг томони; R — ташқи чизилган айлана радиуси; r — ички чизилган айлана):

$$a_3 = R\sqrt{3}; \quad a_4 = R\sqrt{2}; \quad a_6 = R;$$

$$S = \frac{n a_n r}{2} .$$

Айлана (r — радиус; C — айлана узунлиги; S — доира юзи):

$$C = 2\pi r; \quad S = \pi r^2 .$$

Сектор (l — ёй узунлиги; $n°$ — марказий бурчакнинг градус ўлчови; α — марказий бурчакнинг радиан ўлчови):

$$l = \frac{\pi r n°}{180°} = r\alpha; \quad S = \frac{\pi r^2 n°}{360°} = \frac{1}{2} r^2 \alpha .$$

Ихтиёрий призма (l — ён қирраси; p — асосининг периметри; S — асосининг юзи; H — баландлик; $p_{\text{кес}}$ — перпендикуляр кесимнинг периметри; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи; V — ҳажм):

$$S_{\text{ён}} = p_{\text{кес}} \cdot l; \quad V = S \cdot H .$$

Тўғри призма:

$$S_{\text{ён}} = p \cdot l\,.$$

Тўғри бурчакли параллелепипед (a, b ва c — унинг ўлчамлари; d — диагонали):

$$S_{\text{ён}} = p \cdot H; \quad V = abc; \quad d^2 = a^2 + b^2 + c^2.$$

Куб (a — қирраси):

$$V = a^3; \quad d = a\sqrt{3}.$$

Ихтиёрий пирамида (S — асосининг юзи; H — баландлик; V — ҳажм):

$$V = \frac{1}{3} SH\,.$$

Мунтазам пирамида (p — асосининг периметри; l — апофемаси; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи):

$$S_{\text{ён}} = \frac{1}{2} pl; \quad V = \frac{1}{3} SH\,.$$

Ихтиёрий кесик пирамида (S_1 ва S_2 — асосларининг юзи; h — баландлик; V — ҳажм):

$$V = \frac{1}{3} h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})\,.$$

Мунтазам кесик пирамида (p_1 ва p_2 — асосларининг периметри; l — апофемаси; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи):

$$S_{\text{ён}} = \frac{1}{2}(p_1 + p_2)l\,.$$

Цилиндр (R — асосининг радиуси; H — баландлик; $S_{\text{ен}}$ — ён сиртининг юзи; V — ҳажм):

$$S_{\text{ён}} = 2\pi RH; \quad V = \pi R^2 H\,.$$

Конус (R — асосининг радиуси; H — баландлик; l — ясовчи; $S_{\text{ён}}$ — ён сиртининг юзи; V — ҳажм):

$$S_{\text{ён}} = \pi Rl; \quad V = \frac{1}{3}\pi R^2 H\,.$$

Шар, сфера (R — шар радиуси; S — сферик сиртнинг юзи; V — ҳажм):

$$S = 4\pi R^2; \quad V = \tfrac{4}{3}\pi R^3 .$$

Шар сегменти (R — шар радиуси; h — сегментнинг баландлиги; S — сегментнинг сферик қисми юзи; V — ҳажм):

$$S = 2\pi Rh; \quad V = \pi R^2\left(R - \tfrac{1}{3}h\right).$$

Шар сектори (R — шар радиуси; h — сегментнинг баландлиги; V — ҳажм):

$$V = \tfrac{2}{3}\pi R^2 h .$$

Бурчакларнинг радиан ва градус ўлчовлари орасидаги боғланиш.

$$1 \text{ радиан} = \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57^\circ 17' 45'' .$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \approx 0{,}01745 \text{ рад} .$$

$\alpha^\circ : 180^\circ = \alpha : \pi$, бундан $a = \frac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$.

Тўғри бурчакли учбурчакнинг элементлари орасидаги боғланишлар

$$\alpha + \beta = 90^\circ; \quad a = c\sin\alpha; \quad a = c\cos\beta = b\operatorname{tg}\alpha;$$

$$b = c\cos\alpha; \quad b = c\sin\beta = a\operatorname{tg}\beta; \quad c^2 = a^2 + b^2 .$$

Тўғри бурчакли учбурчакларни ечиш формулалари

Берилган: c, α. Бу ҳолда

$$\beta = 90^\circ - \alpha; \quad a = c\sin\alpha; \quad \beta = c\cos\alpha.$$

Берилган: a, α. Бу ҳолда

$$\beta = 90^\circ - \alpha; \quad b = a\operatorname{ctg}\alpha; \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Берилган: a, b. Бу ҳолда

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}; \quad \beta = 90^\circ - \alpha, \quad c = \frac{a}{\sin\alpha}.$$

Берилган: a, c. Бу ҳолда

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}; \quad \beta = 90^\circ - \alpha, \quad b = \sqrt{c^2 - a^2}.$$

Ихтиёрий учбурчакнинг элементларини ҳисоблаш формулалари (a, b, c — учбурчакнинг томонлари, α, β, γ — учбурчакнинг бурчаклари, p — ярим периметр, R — ташқи чизилган айлана радиуси, r — ички чизилган айлана радиуси, S — юзи, h — баландлик):

1. Проекциялар теоремаси:

$$a = b\cos\gamma + c\cos\beta,$$

$$b = c\cos\alpha + a\cos\gamma,$$

$$c = a\cos\beta + b\cos\alpha.$$

2. Синуслар теоремаси:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R.$$

3. Косинуслар теоремаси:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma.$$

Учбурчакнинг юзи:

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma; \quad S = \frac{a^2\sin\beta\sin\gamma}{2\sin\alpha};$$

$$S = \frac{h^2\sin\beta}{2\sin\alpha\sin\gamma}; \quad S = p^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}.$$

Ички ва ташқи чизилган доираларнинг радиуслари:

$$R = \frac{a}{2\sin\alpha} = \frac{abc}{4S} = \frac{P}{4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}};$$

$$r = \frac{S}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}\ ;$$

$$r = (p - a)\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{a\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}\ .$$

Векторлар ва координаталар

Нолмас векторларнинг коллинеарлик аломати:

$$\bar{b} = k\bar{a}, \quad k \neq 0\ .$$

Учта векторнинг компланарлик аломати:

$$\bar{c} = x\bar{a} + y\bar{b}\ .$$

Векторларнинг йиғиндиси ва айирмаси:

$$\bar{a} \pm \bar{b} = (x_1 \pm x_2;\ y_1 \pm y_2;\ z_1 \pm z_2)\ .$$

Векторнинг сонга кўпайтмаси:

$$k\bar{a} = (kx;\ ky;\ kz)\ .$$

Векторларнинг скаляр кўпайтмаси:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2\ .$$

Вектор узунлиги:

$$|\bar{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

A ва B нуқталар орасидаги масофа:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\ .$$

Текислик тенгламаси:

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0\ .$$

ФОЙДАЛАНИЛГАН АДАБИЁТ

1. А.У.Умирбеков, Ш.Ш.Шаабзалов. Математикани такрорланг. «Ўқитувчи», Т., 1989 й.
2. Т.Тўлаганов, А.Норматов. Математикадан практикум. «Ўқитувчи», Т., 1989 й.
3. А.В.Погорелов. Геометрия, 7-11. «Ўқитувчи», Т., 1991 й.
4. В.М.Клопский, З.А.Скопец, М.И.Ягодовский. Геометрия, 9-10. «Ўқитувчи», Т., 1985 й.
5. Н.Дадажонов, Р.Юнусметов, Т.Абдуллаев. Геометрия. 2-қисм. «Ўқитувчи», Т., 1988 й.
6. Т.Жўраев, А.Саъдуллаев ва б. Олий математика асослари. «Ўзбекистон», Т., 1995 й.
7. Н.Ғайбуллаев, А.Ортиқбоев. Геометрия, 7. «Ўқитувчи», Т., 2000 й.
8. Н.Ғайбуллаев, А.Ортиқбоев. Геометрия, 8. «Ўқитувчи», Т., 2000 й.
9. Н.Ғайбуллаев, А.Ортиқбоев. Геометрия, 9. «Ўқитувчи», Т., 2001 й.
10. И.С.Петраков. Математика тўгараклари. 5-11 синфлар. «Ўқитувчи», Т., 2000 й.

МУНДАРИЖА

II боб. Стереометрия асослари 54

С 23

Сайфуллаева Ҳ.М.

Геометрия: Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари учун ўқув қўлланма. - Т.: Ўқитувчи, 2002. - 128 б.

Сарл. олдида: Ўзбекистон Республикаси Олий ва Ўрта махсус касб-ҳунар таълими маркази; Ўрта махсус касб-ҳунар таълимини ривожлантириш институти.

22.15я722

Ҳабиба Муродуллаевна Сайфуллаева

ГЕОМЕТРИЯ

Академик лицей ва касб-ҳунар коллежлари
учун ўқув қўлланма

Тошкент «Ўқитувчи» 2002

Таҳририят мудири	*М.Пулатов*
Ташқи муҳаррир	*М.Турсунова*
Муҳаррир	*Ў.Ҳусанов*
Бадиий муҳаррир	*М.Кудряшова*
Муқова рассоми	*М.Калинин*
Тех. муҳаррир	*Т.Грешникова*
Кичик муҳаррир	*Ҳ.Мусахўжаева*
Компьютерда саҳифаловчи	*Ш.Раҳимқориев*
Мусаҳҳиҳлар	*М.Иброҳимова, З.Содиқова*

ИБ № 8022

Оригинал-макетдан босишга рухсат этилди 1.03.2002. Бичими $84x108^{1}/_{32}$. Кегли 10 шпонли. Таймс гарн. Офсет босма усулида босилди. Шартли б.т. 6,72. Шартли кр. отт. 6,97. Нашр. т. 4,89. 40000 нусхада босилди. Буюртма № 2010.

Оригинал-макет «Ўқитувчи» нашриётининг физика-математика адабиёти таҳририятида тайёрланди.

«Ўқитувчи» нашриёти. Тошкент, 129. Навоий кўчаси, 30.

Шартнома № 09—08—2002.

Ўзбекистон Республикаси Давлат матбуот қўмитасининг 1-босмахонасида босилди. 700002. Тошкент. Сағбон кўчаси, 1-берк кўча, 2-уй. 200

“O‘QITUVCHI”