B.S.Abdullayeva, A.V.Sadikova, N.A.Xamedova
N.M.Muxitdinova, M.I.Toshpulatova

BOSHLANG'ICH MATEMATIKA KURSI NAZARIYASI

"Excellent Polygraphy"
Toshkent – 2020

O'ZBEKISTON RESPUBLIKASI
OLIY VA O'RTA MAXSUS TA'LIM VAZIRLIGI

ABDULLAYEVA BARNO SAYFUTDINOVNA
SADIKOVA ALBINA VENEROVNA
XAMEDOVA NILUFAR AZIMOVNA
MUXITDINOVA NODIRA MAMALATIFOVNA
TOSHPULATOVA MA'MURA ISMAILOVNA

BOSHLANG'ICH MATEMATIKA KURSI NAZARIYASI

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligi tomonidan oliy ta'lim muassasalarining «5111700 – Boshlang'ich ta'lim va sport-tarbiyaviy ish» bakalavriat ta'lim yo'nalishi talabalari uchun darslik sifatida tavsiya etilgan

Toshkent – 2020

UO‘K: 51(075.8)
KBK: 22.1ya73
M 31

B.S.Abdullayeva, A.V.Sadikova, N.A.Xamedova, N.M.Muxitdinova, M.I.Toshpulatova. **Boshlang‘ich matematika kursi nazariyasi.** «Excellent Polygraphy» nashriyoti Toshkent, 2020 – 456 bet.

Taqrizchilar: M.E.Jumayev – Nizomiy nomidagi Davlat Pedagogika universiteti “Boshlang‘ich ta’lim metodikasi” kafedrasi professori, pedagogika fanlari nomzodi

A.X.Raxmatullayev – Toshkent irrigatsiya va qishloq xo‘jaligini mexanizatsiyalash muhandislari instituti “Oliy matematika” kafedrasi dotsenti, fizika-matematika fanlari nomzodi

Darslik “5111700 – Boshlang‘ich ta’lim va sport-tarbiyaviy ish” bakalavriat ta’lim yo‘nalishi talabalari uchun mo‘ljallangan bo‘lib, davlat ta’lim standartiga to‘la mos keladi.

Darslik matematikaning umumiy tushunchalar, nomanfiy butun sonlar, son tushunchasini kengaytirish, elementar algebra va geometriya elementlari, miqdorlar va ularni o‘lchash bo‘limlarini o‘z ichiga oladi. Bo‘limlardagi mavzularning nazariy mazmunining ma’nosini ochib berish uchun ko‘p miqdorda turli misol va masalalar keltirilgan hamda o‘z-o‘zini nazorat qilish savollari bilan ta’minlangan.

UO‘K: 51(075.8)
KBK: 22.1ya73

ISBN 978-9943-993-50-1

I BOB. DISKRET MATEMATIKA ASOSLARI

1.1. To'plamlar va ularning elementlari

To'plam tushunchasi. To'plam tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biri bo'lib, u ta'riflanmaydi va u haqida misollar yordamida tasavvur hosil qilinadi. To'plam deganda predmetlar yoki obyektlarni biror xossasiga ko'ra birgalikda qarash tushuniladi.

Masalan, barcha natural sonlar to'plami, bir talabalar uyida yashovchi talabalar to'plami, to'g'ri chiziqdagi nuqtalar to'plami, maktabdagi o'quvchilar to'plami va h.k.

Hayotda to'plamlar alohida nomlanadi: auditoriyadagi talabalar to'plami – guruh, harflar to'plami – alfavit, qushlar to'plami – gala, qo'ylar to'plami – poda va h. k.

1-ta'rif: To'plamni tashkil etuvchi obyektlar – bu to'plamning elementlari deb ataladi.

Masalan, yuqoridagi misollardagi natural sonlar, o'quvchilar, talabalar, nuqtalar mos to'plamlarning elementlari hisoblanadi.

To'plamlar odatda, lotin alfavitining bosh harflari bilan, ularning elementlari esa alfavitning kichik harflari bilan belgilanadi. A to'plam a, b, c, d, e, f elementlaridan tuzilganligi $A=\{a, b, c, d, e, f\}$ ko'rinishda yoziladi.

To'plam bir qancha elementlardan iborat bo'lishi mumkin, quyidagi yozuv: $a\in A$, a elementning A to'plamga tegishliligini bildiradi.

Agar $a\in A$ bo'lsa, u holda «a element A to'plamga tegishli», «a element A to'plamning elementi», «a element A to'plamda mavjud» yoki «a element A to'plamga kiradi» deb o'qiladi. $a\notin A$ yoki $a\notin A$ yozuv esa a elementni A to'plamga tegishli emasligini bildiradi.

Masalan, A – juft natural sonlar to'plami bo'lsin, u holda $2\in A$, $5\notin A$, $628\in A$ va $729\notin A$ bo'ladi.

2-ta'rif. To'plamning elementlari soniga to'plam quvvati deyiladi va $n(A)$ kabi belgilanadi.

Masalan, $A=\{a,b,c,d,e,f,g\}$ to'plamning quvvati $n(A)=7$ga, $B=\{a\}$to'plamning quvvati $n(B) = 1$ ga, $C=\{b,d,f\}$ to'plamning quvvati $n(C)=3$ ga, $D=\{a,g\}$ to'plamning quvvati $n(D)=2$ ga teng.

3-ta'rif. Quvvatlari teng bo'lgan to'plamlar teng quvvatli yoki ekvivalent to'plamlar deyiladi. Masalan, $A=\{a,b,c\}$ va $C=\{b,d,f\}$ to'plamlar teng quvvatli. $n(A) = n(C) = 3$.

To'plamlarning berilish usullari. Agar har bir elementning ma'lum bir to'plamga tegishli yoki tegishli emasligi bir qiymatli aniqlangan bo'lsa, to'plam berildi deyiladi.

Sonli to'plamlar uchun xarakteristik xossani formula bilan berish qulay. Bu holda, odatda, katta qavslar ichiga to'plam elementi belgisi, vertikal chiziq va undan keyin to'plam elementiga tegishli xossa yoziladi. Masalan: «M – 6 sonidan kichik bo'lgan natural sonlar» to'plami bo'lsin. Bu to'plam xarakteristik xossasi orqali $M=\{n \mid n\in N$ va $n < 6\}$ ko'rinishda ifodalanadi. Shunga o'xshash: $C=\{c|c\leq 9,\ c\in N\}$. «C–9 sonidan katta bo'lmagan natural sonlar» to'plamini bildiradi.

$X=\{x|x^2-4=0,\ x\in R\}$ bo'lsa, X–$x^2-4=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami bo'ladi.

$Y=\{y|-2\leq y\leq 6,\ y\in Z\}$ bo'lsa, Y– -2 dan 6 gacha bo'lgan butun sonlar to'plami hisoblanadi. Ba'zi bir sonli to'plamlar uchun maxsus belgilar kiritilgan: N-natural sonlar to'plami, Z–butun sonlar to'plami, N_0–butun nomanfiy sonlar to'plami, Q–ratsional sonlar to'plami, (–) R–haqiqiy sonlar to'plami.

To'plam turlari. To'plamlar ularni tashkil etuvchi elementlari soniga ko'ra 3 turda bo'ladi:

4-ta'rif: Birorta ham elementi bo'lmagan to'plam bo'sh to'plam deyiladi va $\varnothing$ ko'rinishda belgilanadi. Bo'sh to'plamning quvvati 0 ga teng, $n(\varnothing)=0$.

Masalan, $x^2+4=0$ tenglamaning haqiqiy ildizlari to'plami, oydagi daraxtlar to'plami, dengiz tubidagi quruq toshlar to'plami bo'sh to'plamlardir.

5-ta'rif: To'plam chekli sondagi elementlardan tashkil topsa, chekli to'plam deyiladi. Masalan, lotin alifbosi harflari to'plami, kamalak ranglari to'plami, raqamlar to'plami chekli to'plamlardir.

A={a}, B={a,b}, C={a,b,c}to'plamlar chekli bo'lib, ular mos ravishda bitta, ikkita va uchta elementlardan tuzilgan.

6-ta'rif: To'plam elementlari soni cheksiz bo'lsa, bunday to'plam cheksiz to'plam deyiladi.

Masalan, A={1,2,3,...,n,...}, B={2,4,6,...,2n,...}, barcha ratsional sonlar to'plami, tekislikdagi nuqtalar to'plami kabi to'plamlar cheksiz to'plamdir.

Teng to'plamlar. To'plam osti. Universal to'plam.

7-ta'rif: Bir xil elementlardan tashkil topgan to'plamlar teng to'plamlar deyiladi. Masalan, x^2-4=0 tenglamaning yechimlari to'plami va |x|=2 tenglamaning yechimlari to'plami teng to'plamlardir. Teng to'plamlar aynan bir xil elementlardan tuziladi va faqat elementlar tartibi bilangina farqlanishi mumkin.

8-ta'rif: B to'plamning har bir elementi A to'plamga tegishli bo'lsa, B to'plamni A to'plamning to'plam osti, (qismi, qism to'plami) deyiladi, buni quyidagicha belgilanadi: B⊂A yoki A⊃B. Masalan, A={a,b,c,d,e,f,g} to'plam uchun B={a}, C={b,d,f}, D={a,g} to'plamlarning har qaysisi to'plam ostidir. Shuning bilan birga bo'sh to'plam istalgan to'plamning va har bir to'plam o'zining to'plam osti (qism to'plami) bo'ladi.

Quyidagi xossadan ko'pincha to'plamlar tengligini isbotlashda foydalaniladi. Agar A⊂B va B⊂A bir vaqtda o'rinli bo'lsa, A=B bo'ladi. Ya'ni A to'plamning istalgan elementi B to'plamga tegishli ekani va B to'plamning istalgan elementi A to'plamga tegishli ekani isbotlangan bo'lsa, bu to'plamlar tengligi haqida xulosa chiqariladi.

9-ta'rif. B to'plamning barcha elementlari A to'plamda mavjud bo'lib, shu bilan birga A da B ga tegishli bo'lmagan elementlar ham mavjud bo'lsa, B to'plam A to'plamning xos qism to'plami deyiladi va A⊆Bkabi belgilanadi.

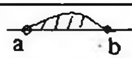
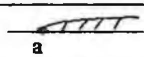
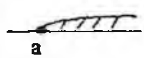
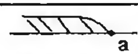
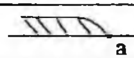
10-ta'rif. A to'plamning o'zi va Ø to'plam shu A to'plamning xosmas qism to'plami deyiladi.

11-ta'rif. Agar A_1, A_2,..., A_n to'plamlar A to'plamning qism to'plami bo'lsa, A to'plam A_1, A_2,..., A_n to'plamlar uchun universal to'plam deyiladi. Universal to'plam, odatda, I yoki U harflari bilan belgilanadi. Universal to‘plamning barcha qism to‘plamlari orasida ikkita xosmas qism to‘plam mavjud bo‘lib, ulardan biri U ning o‘zi, ikkinchisi esa bo‘sh to‘plam, qolganlari esa xos qism to‘plamlar bo‘ladi.

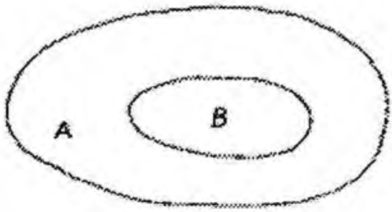
Geometriyadan misol keltirsak, R^3 – uch o‘lchovli fazo bo‘lsa, Π–R^3 fazodagi tekisliklar, L–Π tekislikdagi chiziqlar to‘plami bo‘lsa, quyidagi munosabat o‘rinli bo‘ladi: $L\subset\Pi\subset R^3$ yoki $L\subseteq\Pi\subseteq R^3$. Bu yerda R^3 ning boshqa qism to‘plamlari ham mavjudligini hisobga olish kerak.

N–barcha natural sonlar to‘plami; Z–barcha butun sonlar to‘plami; Q–barcha ratsional sonlar to‘plami; R–barcha haqiqiy sonlar to‘plami bo‘lib, $N\subset Z\subset Q\subset R$ shartlar bajariladi va R qolgan sonli to‘plamlar uchun universal to‘plam vazifasini bajaradi. $N\subseteq Z\subseteq Q\subseteq R$ kabi yozish ham mumkin.

R to‘plamning to‘plam ostilarini koordinatalar o‘qida tasvirlash qulay. Agar $a,b\in R$ va $a<b$ bo‘lsa, quyidagi belgilashlarni kiritish mumkin.

Sonli oraliq	**Belgilanishi**	**Tasvirlanishi**	**Nomlanishi**
$x/x\in R,\ a<x<b$	(a, b)		Interval
$x/x\in R,\ a\le x\le b$	[a, b]		Kesma
$x/x\in R,\ a\le x<b$	[a, b)		Yarim interval yoki yarim kesma
$x/x\in R,\ a<x\le b$	(a, b]		Yarim interval yoki yarim kesma
$x/x\in R,\ x>a$	(a:+∞)		Ochiq nur
$x/x\in R,\ x\ge a$	[a:+∞)		Nur yoki yarim to‘g‘ri chiziq
$x/x\in R,\ x<a$	(-∞: a)		Ochiq nur
$x/x\in R,\ x\le a$	(-∞: a]		Nur

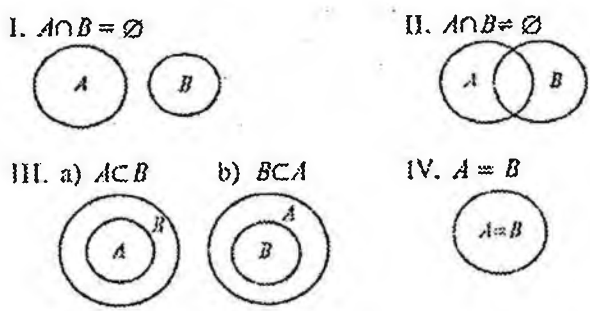
Eyler-Venn diagrammalari. To'plamlar orasidagi munosabatlarni yaqqolroq qilish uchun, Eyler-Venn diagrammalaridan foydalaniladi. Bunda to'plamlar doira, oval yoki biror yopiq soha ko'rinishida, universal to'plam esa to'g'ri to'rtburchak shaklida tasvirlanadi. Masalan: B to'plam A to'plamning xos to'plam osti ekanligi quyidagi ko'rinishda tasvirlanadi.



1.1-rasm

Umumiy qismga ega bo'lgan to'plamlar kesishadi deyiladi va $A \cap B \neq \varnothing$, ya'ni A va B to'plamlar kesishmasi bo'sh emas, deb yoziladi. Masalan, 2 ga karrali natural sonlar va 5 ga karrali natural sonlar to'plamlari umumiy elementga ega, ya'ni kesishadi yoki kesishmasi bo'sh emas. Bu to'plamlar kesishmasi barcha 10 ga karrali natural sonlardan iborat bo'ladi.

Ikki to'plamning o'zaro munosabatida to'rt hol bo'lishi mumkin (1.2-rasm):



1.2-rasm

1) to'plamlar kesishmaydi (1.2-rasm, I);
2) to'plamlar kesishadi (1.2-rasm, II);

3) to‘plamlarning biri ikkinchisining qism to‘plami bo‘ladi (1.2-rasm, III).

4) to‘plamlar ustma-ust tushadi, ya’ni teng (1.2-rasm, IV).

Nazorat uchun savollar

1. To‘plam deganda nimani tushunasiz?
2. Bo‘sh, chekli, cheksiz to‘plamlarga misollar keltiring.
3. To‘plamlar necha xil usulda beriladi?
4. Teng to‘plamlarga ta’rif bering.
5. To‘plam osti tushunchasiga ta’rif bering va misollar keltiring.
6. Qanday to‘plamlar ekvivalent to‘plamlar deyiladi va qanday qilib ikki to‘plam orasida ekvivalentlikni aniqlash mumkin?
7. Universal to‘plam deganda qanday to‘plamni tushunasiz? Misollar keltiring.

Mashqlar:

Misol. $0 \leq x < 7$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi butun sonlar to‘plamini a) bevosita elementlarini ko‘rsatish; b)xarakteristik xossa orqali yozing.

Yechilishi: a) $A=\{0,1,2,3,4,5,6,\}$

b) $A=\{ x \mid x \in Z, o \leq x < 7 \}$

1. Quyidagi to‘plamlarning xarakteristik xossasini belgilar yordamida yozing:

a) barcha musbat butun sonlar to‘plami;

b) barcha manfiy butun sonlar to‘plami.

2. 20; $\sqrt{15}$; 3; $\sqrt{2}$; 0; -20; 45; $\frac{7}{8}$; -2 sonlari berilgan. Ulardan qaysilari:

a) butun sonlar; b) nomanfiy butun sonlar; d) ratsional sonlar;

e) haqiqiy sonlar to‘plamiga tegishli bo‘ladi?

3. Agar A={a; o; e; u; i; o‘}, B={11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99}, C={1; 3; 5; 7; 9} to‘plamlar berilgan bo‘lsa, ular elementlarining xarakteristik xossasini aniqlang.

4. Koordinata to‘g‘ri chizig‘ida quyidagi to‘plamlarni ko‘rsating:

a) 3 dan kichik sonlar; b) 3 dan katta bo‘lmagan sonlar;

d) 3 dan katta bo‘lgan sonlar; e) 3 dan kichik bo‘lmagan sonlar.

5. Quyidagi to‘plamlarni koordinata o‘qida tasvirlang:

a) $X=\{x|x\in R, -3 \leq x \leq 6\}$; d) $X=\{x|x\in R, x\leq -3\}$;

b) $y=[y|y\in R, y< 9\}$; e) $Y=\{y|y\in R, -8\leq x\leq 4\}$.

6. Quyidagi sonli to‘plamlarni elementlarining xarakteristik xossasi yordamida bering:

a) $[2; 6]$; b) $[-\infty; 4]$; d) $[-\infty; -1]$; e) $[-7,2; 5]$

f) $[-3; +\infty]$; g) $[3,1 +\infty]$ h) $[1; 5\frac{1}{4}]$; i) $[-2; 5]$.

7. Quyidagilarni o‘qing va ulardan rostlarini ko‘rsating:

a) $2\in[2; 21]$; b) $-0,7\in[-0,1; 2]$; d) $0\in[-\infty; 0]$; e) $7\in[8; +\infty]$;

f) $21\in Q$; g) $5,3\in Z$; h) $-3\in N$; i) $-0,2\in Z$; j) $\frac{1}{5}\in R$.

8. Agar $A=\{27; 32; 36; 54; 232; 108; 324\}$ bo‘lsa, A to‘plamning quyidagi sonlardan tuzilgan qism to‘plamlarini toping:

a) 4 ga bo‘linadi; b) 9 ga bo‘linadi; d) 5 ga bo‘linmaydi; e) 10 ga bo‘linadi.

9. $B=\{a; b; c; d\}$ to‘plamning barcha qism to‘plamlarini yozing va ular sonini aniqlang.

10. Agar $A=\{x|x\in N, X< 24\}$ bo‘lsa, shu to‘plamning

a) 6 ga karrali;

b) 2 ga karrali;

d) 5 ga karrali bo‘lmagan;

e) 2 ga va 3 ga karrali sonlarda tuzilgan qism to‘plamlarini aniqlang.

1.2. To‘plamlarning kesishmasi, birlashmasi, ikki to‘plamning ayirmasi, universal to‘plamgacha to‘ldiruvchi to‘plam

To‘plamlarning kesishmasi.

1-Ta’rif. a,b,c,d,... elementlar A va B to‘plamlarning har biriga tegishli bo‘lsa, ular bu to‘plamlarning umumiy elementlari deyiladi. Masalan: A={a;b;c;d;f}, B={a;b;d} to‘plamlar uchun a,b,d – umumiy elementlar.

2-Ta’rif. A va B to‘plamlarning barcha umumiy elementlaridangina tuzilgan C to‘plam A va B to‘plamlarning kesishmasi (ko‘paytmasi) deyiladi va quyidagicha belgilanadi $C=A\cap B$, bu yerda $\cap$ belgi to‘plamlarning kesishmasini bildiradi.

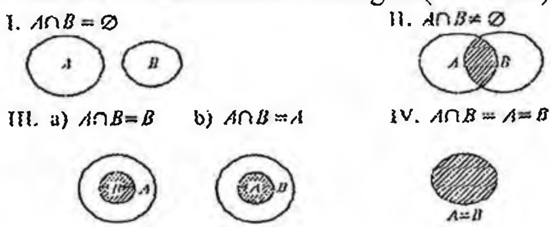
To‘plamlar kesishmasi belgilar yordamida $A\cap B=\{x|x\in A$ va $x\in B\}$ ko‘rinishda yoziladi. Masalan: 1) $A=\{a|4\leq a\leq 14,\ a\in N\}$ va $B=\{b|10<b<19,\ b\in N\}$ bo‘lsa, $A\cap B=\{x|11\leq x\leq 14,\ x\in N\}$ bo‘ladi.

2) X={a;b;c;d;e} va Y={d;e;f;k} bo‘lsa, $X\cap Y$={d;e} bo‘ladi.

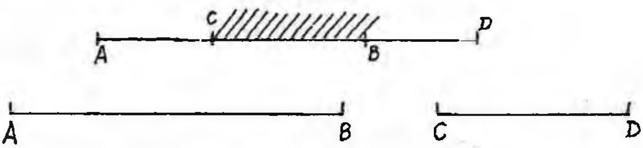
3) A={1,2,3,4,5,6}, B={5,6,7,8} va B={5,6,9,10,11} to‘plamlarning kesishmasi: $A\cap B\cap C$={5,6} ga teng.

Birorta ham umumiy elementga ega bo‘lmagan to‘plamlarning kesishmasi ∅ - bo‘sh to‘plamga teng. Masalan, A={2,3,4} va B={7,8,9} to‘plamlarning kesishmasi bo‘sh to‘plam: $A\cap B=\varnothing$

To‘plamlarning kesishmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning kesishmasiga mos keladi. Quyida har bir hol uchun to‘plamlar kesishmasi shtrixlab ko‘rsatilgan (1.3-rasm):



1.3-rasm



1.4-rasm

1.4-rasmda [CB] kesma [AB] va [CD] kesmalar kesishmasini ifodalaydi. 1.4-rasm 2-qismida [AB] va [CD] kesmalar kesishmaydi, demak kesishma bo‘sh to‘plam.

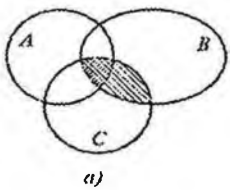
To‘plamlar kesishmasi uchun quyidagi xossalar o‘rinli:

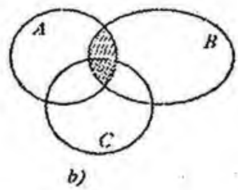
1°. $B \subset A$ bo'lsa, $A \cap B = B$ bo'ladi. Bu xossa to'plamlar kesishmasi ta'rifidan kelib chiqadi.

2°. $A \cap B = B \cap A$ (kommutativlik xossasi).

3°. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C = A \cap B \cap C$ (assotsiativlik xossasi). Assotsiativlik xossasi $A \cap (B \cap C)$ kesishmani qavslarsiz yozishga imkon beradi va istalgan sondagi to'plamlar kesishmasini topishda qulaylik tug'diradi. Bu xossani Eyler-Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlaymiz (1.5-rasm):

1.5-a) rasmda tenglikning chap qismi; 1.5-b) rasmda tenglikning o'ng qismi tasvirlangan, ikki marta shtrixlangan sohalar ikkala rasmda ham bir xil bo'lgani uchun $(A \cap B) \cap C$ va $A \cap (B \cap C)$ to'plamlar teng degan xulosaga kelamiz.





1.5-rasm

4°. $A \cap \emptyset = \emptyset$.

5°. $A \cap A = A$.

Yuqoridagi xossalar to'plamlar soni ikkitadan ortiq bo'lgan hol uchun ham to'g'ri.

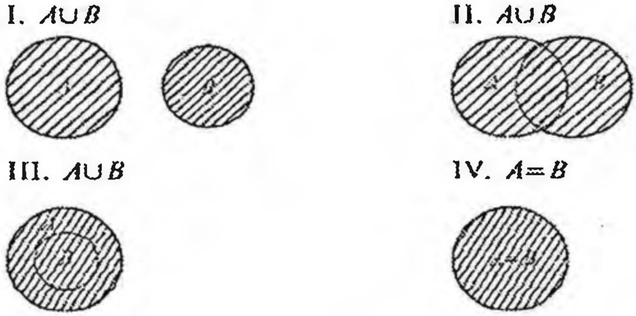
To'plamlar birlashmasi (yig'indisi)

3-Ta'rif. Berilgan A va B to'plamlarning birlashmasi (yig'indisi) deb shu A va B to'plamlarning hech bo'lmaganda biriga tegishli bo'lgan elementlardan tuzilgan C to'plamga aytamiz. Birlashma $C = A \cup B$ ko'rinishda belgilanadi.

To'plamlar birlashmasi belgilar yordamida $A \cup B = \{x | x \in A$ yoki $x \in B\}$ ko'rinishda yoziladi. To'plamlar birlashmasida to'plamlardan har ikkalasining umumiy elementlari bir marta olinadi.

Masalan: $A = \{a; b; c; d;\}$, $B = \{a; b; s; d; e; f\}$ to'plamlarning birlashmasi: $A \cup B = \{a,b,s,d,e,f\}$ga, $A = \{3,4,5,6\}$ va $B = \{6,7,8,9,10\}$ to'plamlar uchun $A \cup B = \{3,4,5,6,7,8,9,10\}$ ga teng.

To‘plamlarning birlashmasi geometrik nuqtai nazardan figuralarning barcha nuqtalaridan tashkil topgan to‘plamni bildiradi. Eyler-Venn diagrammalarida A va B to‘plamlarning birlashmasi quyidagicha tasvirlanadi.



1.6-rasm

To‘plamlar birlashmasining xossalari:

1°. $B\subset A \Rightarrow A\cup B = A$.

2°. $A\cup B=B\cup A$ (kommutativlik xossasi).

3°. $A\cup(B\cup A)=(A\cup B)\cup C=A\cup B\cup C$(assotsiativlik xossasi).

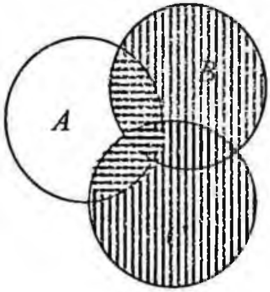
4°. $A\cup\emptyset=A$.

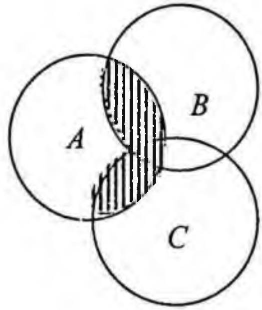
5°. $A\cup A=A$.

6°. $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$ (kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasi).

Isbot: $x\in A\cap(B\cup C)$ bo‘lsin, bundan $x\in A$ va $x\in B\cup C$ ekani kelib chiqadi. Bundan $x\in A$ va $x\in B$ yoki $x\in A$ va $x\in C$, bu esa $x\in(A\cap B)\cup (A\cap C)$ ekanligini bildiradi va shunday ekanligini isbot qiladi: $A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Aksincha, agar $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$, u holda $x\in A\cap B$ yoki $x\in A\cap C$. Bu holda $x\in A$, lekin xuddi shunday $x\in B\cup C$, $x\in A\cap(B\cup C)$ ekanligini bildiradi, $A\cap(B\cup C)\subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$ isbotlaydi. Bundan kelib chiqadiki $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Kesishmaning birlashmaga nisbatan distributivlik xossasining to‘g‘riligini Eyler-Venn diagrammasida ham ko‘rsatish mumkin





1.7-a) rasm 1.7-b) rasm

1.7-a rasmda tenglikning chap qismi B∪C birlashma vertikal va A∩(B∪C) gorizontal shtrixlangan.

1.7-b rasmda A∩B va A∩C kesishma gorizontal shtrixlangan. (A∩(A∩B)∪(A∩C)) esa vertikal shtrixlangan. Rasmlardagi ikki marta shtrixlangan sohalar bir xil bo‘lganligidan A∩(B∪C)=(A∩B)∪(A∩C) tenglikning to‘g‘riligi ko‘rinadi.

7°. A∪(B∩C)=(A∪B)∩(A∪C) (birlashmaning kesishmaga nisbatan distributivlik xossasi).

Bu xossa ham yuqoridagi kabi isbotlanadi.

To‘plamlar ayirmasi.

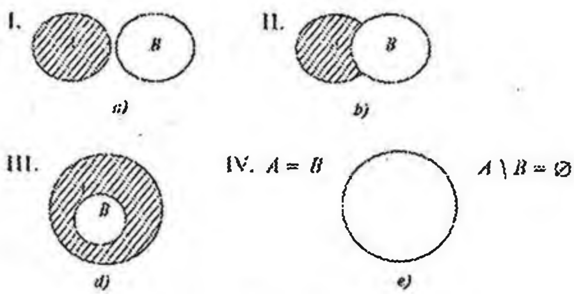
3-Ta’rif. A va B to‘plamlarning ayirmasi deb shunday to‘plamga aytiladiki, u A to‘plamning B ga tegishli bo‘lmagan barcha elementlaridan tuziladi va quyidagicha belgilanadi: C=A\B

Demak, A va B to‘plamlarning ayirmasi A to‘plamning B to‘plamga kirmagan barcha elementlardan tashkil topgan to‘plam ekan, uni bunday yozamiz: $A\backslash B=\{x|x\in A \text{ va } x\overline{\in}B\}$

Misollar:

1. A={1,2,3,4} va B={3,4,5,6,7,8} uchun R≠A\B={1,2}
2. A={1,2,3,4,5} va B={6,7,8} uchun R≠A\B={1,2,3,4,5}
3. A={1,2,3} va B={1,2,3,4,5} uchun R≠A\B= Ø

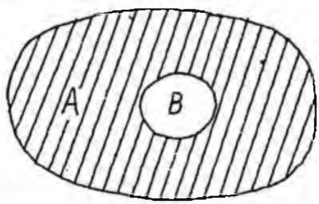
To‘plamlarning ayirmasi Eyler-Venn diagrammalarida quyidagi 1-8 chizmada ko‘rsatilgan shtrixlangan sohani bildiradi.



1.8-rasm

Universal to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam va uning xossalari.

4-Ta'rif. A to'plam va uning B qism to'plami berilgan bo'lsin. A dagi B ga tegishli bo'lmagan barcha elementlardan tuzilgan to'plam B to'plamni A to'plamgacha to'ldiruvchisi deb ataladi va $\overline{B}$ yoki B'_A ko'rinishda belgilanadi. Bunda, B va B'_A ning birlashmasi A to'plamga teng bo'ladi (1.9-rasm).



1.9-rasm

Masalan, $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ va $B=\{2,5,6,9\}$ bo'lsa, $B_A'=\{1,3,4,7,8\}$ bo'ladi.

Agar A to'plam biror boshqa to'plamning qismi deb qaralmasa, u holda A to'plamning to'ldiruvchisi Ø bo'sh to'plam bo'lib, Ø ning to'ldiruvchisi esa A bo'ladi, ya'ni: $A'=\varnothing$ va $\varnothing'=A$.

To'plamlar ayirmasining xossalari:

1°. $A\cap B=\varnothing \Rightarrow A\setminus B=A$

2°. $B\subset A\Rightarrow A\setminus B=B_A'$.

3°. $A=B\Rightarrow A\setminus B=\varnothing$

4°. $A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)=A\setminus B\setminus C$

5°. $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$

6°. $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

7°. $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

6- va 7-xossalar De-Morgan qonunlari deyiladi.

4- va 5-xossalarning o‘rinli ekanligiga Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlash orqali ishonch hosil qilish mumkin.

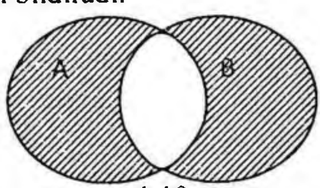
7-xossani quyidagicha isbotlaymiz. $x\in(A\cap B)'$ bo‘lsin. Bundan $x\notin A\cap B$ ekani kelib chiqadi. Kesishma ta’rifiga ko‘ra $x\notin A$ yoki $x\notin B$ degan xulosaga kelamiz, bundan esa $x\in A'$ yoki $x\in B'$ ekani kelib chiqadi. $x\in A'$ yoki $x\in B'$ bo‘lsa, birlashma ta’rifiga ko‘ra $x\in A'\cup B'$ bo‘ladi. Ikkinchi tomondan $x\in A'\cup B'$ bo‘lsin. U holda birlashma ta’rifiga ko‘ra $x\in A'$yoki $x\in B'$ ekani kelib chiqadi, $x\in A'$ ekanidan $x\notin A$ va $x\in B'$ ekanidan $x\notin B$ degan xulosaga kelamiz, $x\notin A$ va $x\notin B$ bo‘lsa, $x\notin A\cap B$ bo‘ladi, bu esa $x\in(A\cap B)'$ ekanligini ko‘rsatadi. Demak, $(A\cap B)'$ va$A'\cup B'$ to‘plamlar bir xil elementlardan tashkil topgan va shuning uchun ham teng ekan.

6-xossa ham xuddi shunday isbotlanadi.

Isbot. $x\in(A\cup B)'$ bo‘lsin. U holda x $A\cup B$ ga kirmaydi, ya’ni x A da ham, B da ham emas, demak: $x\in A'\cap B'$. Bu $(A\cup B)'\subseteq A'\cap B'$ ekanligini isbotlaydi. Boshqa tomondan olganda, agar $x\in A'\cap B'$ bo‘lsa, bunda x A ga tegishli emas va x B ga ham tegishli emas, shunday ekan x $A\cup B$ ga kirmaydi. Lekin bu $x\in(A\cup B)'$ ligini ko‘rsatadi, bu $A'\cap B'\subseteq(A\cup B)'$ ekanligini isbotlaydi. Bundan ko‘rinib turibdiki, $(A\cup B)'=A'\cap B'$ ekan.

5-Ta’rif. A va B to‘plamlarning simmetrik ayirmasi deb shunday to‘plamga aytiladiki, u $A\backslash B$ yoki $B\backslash A$ ayirmalarga tegishli bo‘lgan hamma elementlaridangina tuziladi va quyidagicha belgilanadi: $C=A\Delta B$.

To‘plamlarning simmetrik ayirmasi 1.10-rasmda ko‘rsatilgan shtrixlangan sohani bildiradi.



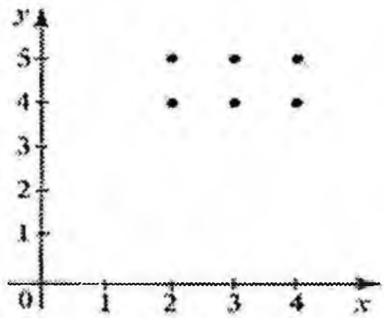
1.10-rasm

1.3. To‘plamlarning dekart ko‘paytmasi.

6-Ta’rif. A va B to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi deb, 1-elementi A to‘plamdan, 2-elementi B to‘plamdan olingan (a;b) ko‘rinishdagi barcha tartiblangan juftliklar to‘plamiga aytiladi. Dekart ko‘paytma $A\times B$ ko‘rinishda belgilanadi: $A\times B=\{(a;b)|a\in A$ va $b\in B\}$. Masalan: $A=\{2; 3; 4; 5\}$, $B=\{a; b; c\}$ bo‘lsa, $A\times B=\{(2; a), (2; b),(2; c),(3; a),(3; b),(3; c),(4; a),(4; b),(4; c),(5; a), (5; b), (5; c)\}$ bo‘ladi.

Agar biz Dekart ko‘paytma elementi (x,y) dagi x ni biror nuqtaning absissasi, y ni esa ordinatasi desak, u holda bu dekart ko‘paytma tekislikdagi nuqtalar to‘plamini ifodalaydi.

Sonli to‘plamlar dekart ko‘paytmasini koordinata tekisligida tasvirlash qulay. Masalan, $A=\{2;3;4\}$, $B=\{4;5\}$ bo‘lsin, u holda

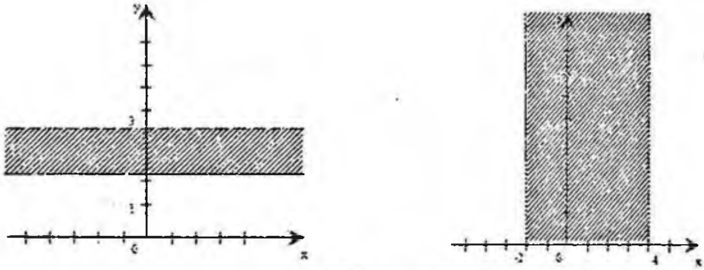


1.11-rasm

$A\times B=\{(2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5); (4; 4), (4; 5)\}$ bo‘ladi (1.11-rasm).

Koordinata tekisligida shunday koordinatali nuqtalarni tasvirlaymizki, bunda A to‘plam Ox o‘qida va B to‘plam Oy o‘qida olinadi.

$A=[2;3)$; $B=R$ $\qquad$ $A=[-2;4]$; $B=R_+$



1.12-rasm

Dekart ko'paytmaning xossalari:

1°. $A\times B\neq B\times A$.

2°. $A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$.

3°. $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$.

Ikkitadan ortiq to'plamlarning dekart ko'paytmasini ham qarash mumkin. Umumiy holda A_1 A_2 ..., A_n to'plamlar berilgan bo'lsin. Ularning dekart ko'paytmasi $A_1\times A_2\times...,\times A_n=\{(a_1$ a_2; ..., $a_n)|$ $a_1\in A_1, a_2\in A_2$, ..., $a_n\in A_n\}$ dan iborat bo'ladi. (a_1; a_2; ..., a_n) tartiblangan n lik deyiladi. (Masalan, uchlik, to'rtlik va h.k.). Bunday tartiblangan n lik n o'rinli kortej deb ham ataladi. Yana n o'rinli kortejlar faqat bitta to'plam elementlaridan tuzilgan bo'lishi ham mumkin, bu holda u to'plamni o'z-o'ziga n marta dekart ko'paytmasi elementidan iborat bo'ladi.

Yuqorida aytilganlardan xulosa qilsak, Dekart koordinata tekisligini haqiqiy sonlar to'plami R ni o'ziga-o'zining dekart ko'paytmasi $R^2=R\times R$, koordinata fazosini $R^3=R\times R\times R$ deb qarash mumkinligi kelib chiqadi. Masalan:

1. $\{1,3\}\times\{a,c\}=\{(1,a),(1,c),(3,a),(3,c)\}$.

2. $N\times N=\{(m,n)\ |m,n\in N\}$

Mashqlar

1. n musbat tub son va $S=\{1,2,\dots,n\}$ bo'lsin. $T\subseteq S\times S$ qism to'plamini $T=\{(a,b)\in S\times S|\ |a-b|=1\}$ orqali aniqlang. $|T|$ ni n ning funksiyasi sifatida hisoblang.

2. n musbat tub son va S yuqoridagi masala kabi bo'lsin. $Z\subseteq S\times S\times S$ qism to'plamini $Z=\{(a,b,c)\in S\times S\times S|$ a, b, c hammasi

farqli} orqali aniqlang. |Z| ni n ning funksiyasi sifatida hisoblang.

3. X va Y to'plamlar va C, D$\subseteq$ Y bo'lsin.
X$\times$ (C$\cup$D)=(X$\times$C)$\cup$(X$\times$D) bo'lishini isbotlang.

4. X va Y to'plamlar, A,B$\subseteq$X va C,D$\subseteq$Y bo'lsin.
(A$\cup$B)$\times$(C$\cup$D)=(A$\times$C)$\cup$(B$\times$D) bo'lishi har doim ham to'g'ri bo'ladimi?

5. T va T' 4.1.2-bo'limidagi 7-mashqda aniqlangan to'plamlar bo'lsin. Quyidagi izohlarning qaysi biri to'g'ri:
$T\in S\times S$, $T\subseteq S\times S$, $T\in 2^S$, $T\subseteq 2^S$
$T'\in S\times S$, $T'\subseteq S\times S$, $T'\in 2^S$, $T'\subseteq 2^S$

Nazorat uchun savollar

1. To'plamlarning kesishmasi, birlashmasiga ta'rif bering.
2. To'plamlarning kesishmasi, birlashmasiga misollar keltiring.
3. Misollarni Eyler-Venn diagrammasida tasvirlang.
4. To'plamlar ayirmasining ta'rifini bering.
5. To'ldiruvchi to'plam ta'rifini bering.
6. To'ldiruvchi to'plam xossalarini ayting va asoslang.
7. To'plamlarning dekart ko'paytmasiga ta'rif bering.
8. To'plamlarning dekart ko'paytmasiga misollar keltiring.
9. Barcha amallarning xossalarini ayting va asoslang.

Mashqlar:

1. M={36;29;15;68;27}, P={4;15;27;47;36;90}, Q={90;4;47} to'plamlar berilgan. M$\cap$P, M$\cap$Q, P$\cap$Q, M$\cap$P$\cap$Q larni toping.

2. A–18 ning barcha natural bo'luvchilari to'plami, B–24 ning barcha natural bo'luvchilari to'plami. A$\cap$B to'plam elementlarini ko'rsating.

3. P–ikki xonali natural sonlar to'plami, S–barcha toq natural sonlar to'plami bo'lsa, K=P$\cap$S to'plamga qaysi sonlar kiradi? a) $21\in K$; b) $32\in K$; d) $7\notin K$; e) $17\notin K$ deyish tog'rimi?

4. "Matematika" va "grammatika" so'zlaridagi harflar to'plamini tuzing. Bu to'plamlar kesishmasini toping.

5. [1; 5] va [3; 7] kesmalarning kesishmasini toping.

6. $A=\{2; 5; 7; 9\}$, $B=\{2; 4; 7\}$ bo'lsin, u holda $A \cup B = ?$

7. $P=\{a, b, c, d, e, f\}$ va $E=\{a, g, z, e, k\}$ to'plamlar birlashmasini toping.

$A=\{n/n \in N,\ n<5\}$ va $B=\{n/n \in N,\ n>7\}$ to'plamlar birlashmasini toping.

a) $4 \in A \cup B$;

b) $-3 \in A \cup B$;

d) $6 \in A \cup B$ deyish to'g'rimi?

8. Agar a) $A=\{x/x=8k,\ k \in Z\}$, $B=\{x/x=8l-4,\ l \in Z\}$;

b) $A=\{x/x=6k-1,\ k \in Z\}$, $B=\{x/x=6l+4,\ l \in Z\}$bo'lsa, $A \cup B$ni toping.

9. $A=\{2;4;6;8;...;40\}$, $B=\{1;3;5;7;...;37\}$, $C=\{\{a;b\},\{c;d\},\{e;f\}, g,h\}$ to'plamlarning har biridagi elementlar sonini aniqlang. $A \cup B$ da nechta element mavjud?

10. $A=\{2; 3; 4; 5; 7; 10\}$, $B=\{3; 5; 7; 9\}$, $C=\{4; 9; 11\}$ bo'lsin. Ushbu to'plamlarda nechtadan element mavjud? $A \setminus B$, $A \setminus C$, $B \setminus C$ larni aniqlang.

1.4. To'plamlarni o'zaro kesishmaydigan to'plam ostilariga (sinflarga) ajratish tushunchasi

To'plamlarni sinflarga ajratish.

1-Ta'rif: A to'plam quyidagi 2 shart bajarilsa, $A_1, A_2, ..., A_n$, ... sinflarga ajratilgan deyiladi.

1) $A_1, A_2, ..., A_n$, ... qism to'plamlar jufti-jufti bilan o'zaro kesishmasa. ya'ni $A_i \cap A_j = \varnothing$ bu yerda $i, j = 1,2,...,n,...$ va $i \neq j$;

2) $A_1, A_2, ..., A_n$ qism to'plamlarning birlashmasi A to'plam bilan mos tushsa.

To'plamlarni sinflarga ajratish masalasi klassifikatsiya deyiladi. Klassifikatsiya – bu to'plam ichida obyektlarning o'xshashligi va ularning boshqa sinflardagi obyektlardan farq qilishi asosida sinflar bo'yicha obyektlarni ajratish amalidir.

Agar yuqoridagi shartlardan hech bo'lmaganda bittasi bajarilmasa, klassifikatsiya noto'g'ri hisoblanadi.

Masalan, uchburchaklarning A to'plamini uchta sinfga ajratish mumkin: o'tkir burchakli, to'g'ri burchakli, o'tmas burchakli uchburchaklar. Haqiqatan ham, ajratilgan to'plam ostilari jufti-jufti bilan kesishmaydi. Boshqacha aytganda, birinchidan, o'tkir burchakli uchburchaklar ichida o'tmas va to'g'ri burchakli uchburchaklar yo'q, to'g'ri burchakli uchburchaklar ichida o'tkir va o'tmas burchakli uchburchaklar yo'q, shuningdek o'tmas burchakli uchburchaklar ichida o'tkir va to'g'ri burchakli uchburchaklar yo'q.

Ikkinchidan, o'tkir, to'g'ri va o'tmas burchakli uchburchaklar birlashmasi uchburchaklar to'plami A to'plam bilan mos tushadi.

To'plamlarni sinflarga ajratishda sinflar soni chekli yoki cheksiz bo'lishi mumkin.

Natural sonlar to'plamini bir necha usul bilan sinflarga ajratish mumkin.

1. Toq va juft sonlar sinfi;
2. Tub va murakkab sonlar sinfi;
3. Bir xonali, ikki xonali, uch xonali,..., xonali sonlar sinfi:

Bunda 1- va 2- holda sinflar soni chekli; 3- holda sinflar soni cheksiz.

Shuning bilan birga berilgan to'plamning har qanday qism to'plamlari sistemasi ham to'plamni sinflarga ajratishni ifodalamasligini qayd qilish kerak.

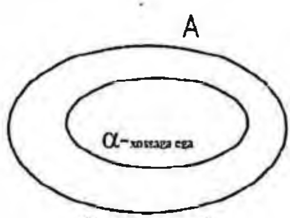
Agar A uchburchaklar to'plamida teng yonli, teng tomonli, turli tomonli uchburchaklar to'plam ostilarini olsak, u holda u A to'plamni sinflarga ajrata olmaydi, chunki birinchi shart bajarilmaydi, teng yonli va teng tomonli uchburchaklar to'plam ostilari kesishadi, ya'ni hamma teng tomonli uchburchaklar teng yonli uchburchaklardir.

To'plamlarni bitta, ikkita va uchta xossaga ko'ra sinflarga ajratish. To'plamlarni qism to'plamlarga ajratish uchun, qism to'plam elementlarining xarakteristik xossalarini ko'rsatish kerak. To'plamlarni bitta, ikkita, uchta xossasiga ko'ra sinflarga ajratishni qaraymiz. Aytaylik, A to'plam va biror α xossa berilgan bo'lsin. A to'plam elementlari α xossaga ega bo'lishi ham, bo‘lmasligi ham mumkin. Bu holda A to‘plam o‘zaro kesishmaydigan ikkita B va C to‘plam ostilarga ajraladi.

B to‘plam A to‘plamning α xossasiga ega bo‘lgan elementlari to‘plami, C to‘plam A to‘plamning α xossasiga ega bo‘lmagan elementlari to‘plami $B \cup C = A$ va $B \cap C \neq \emptyset$.

Agar A to‘plamning hamma elementlari α xossaga ega bo‘lsa, u holda $C=\emptyset$ bo‘ladi, agar A to‘plamning hamma elementlari α xossaga ega bo‘lmasa $B=\emptyset$ bo‘ladi.

Agar B va C to‘plamlar bo‘sh bo‘lmasa, u holda A to‘plamni Eyler-Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlash mumkin.



(1.13-rasm)

Masalan: A – auditoriyadagi talabalar to‘plami, α – sinovlarni topshirganlik xossasi bo‘lsa, B – sinovlarni topshirgan, C esa sinovlarni topshirmagan talabalar to‘plami bo‘ladi.

Endi to‘plamni ikkita xossaga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to‘plam va α, β xossalar berilgan bo‘lsin. A to‘plam elementlari α,β xossalarga ega bo‘lishi va bo‘lmasligi ham mumkin.

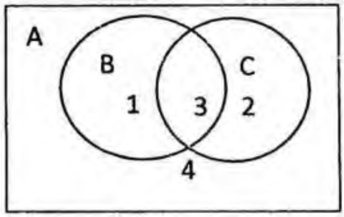
a) α xossaga ega bo‘lgan va β xossaga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 1 sinf;

b) α xossaga ega bo‘lmagan va β xossaga ega bo‘lgan elementlar to‘plami – 2 sinf;

v) α va β xossalarga ega bo‘lgan elementlar to‘plami – 3 sinf;

g) α va β xossalarga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 4 sinf.

Bu sinflardan ayrimlari bo‘sh to‘plam ham bo‘lishi mumkin. Bu 4 ta sinf Eyler-Venn diagrammasi yordamida quyidagicha tasvirlanadi.



(1.14-rasm)

Masalan, D – sinf o‘quvchilari to‘plami, α – «a’lo o‘qish», β – «intizomli bo‘lish» xossalari bo‘lsin. U holda A – sinfdagi a’lochi;

B – sinfdagi intizomli o‘quvchilar to‘plami bo‘ladi. Bunda A\B – sinfdagi a’lochi, lekin intizomsiz o‘quvchilar; B\A – intizomli, lekin a’lochi bo‘lmagan o‘quvchilar; A∩B – ham a’lochi, ham intizomli o‘quvchilar; D\(A∪B) – a’lochi bo‘lmagan va intizomsiz o‘quvchilar to‘plami bo‘ladi.

To‘plamni 3 ta xossaga ko‘ra sinflarga ajratishni qaraymiz.

A to‘plam va α, β, γ xossalar berilgan bo‘lsin. A to‘plam elementlari α, β, γ xossalarga ega bo‘lishi ham bo‘lmasligi ham mumkin. Bu uchta xossa A to‘plamni sakkizta sinfga ajratishi mumkin.

a) α xossaga ega bo‘lgan va β,γ xossalarga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 1 sinf;

b) α va β xossalarga ega bo‘lgan va γ xossaga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 2 sinf;

v) β xossaga ega bo‘lgan va α,γ xossalarga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 3 sinf;

g) β,γ xossalarga ega bo‘lgan va α xossaga ega bo‘lmagan to‘plami – 4 sinf;

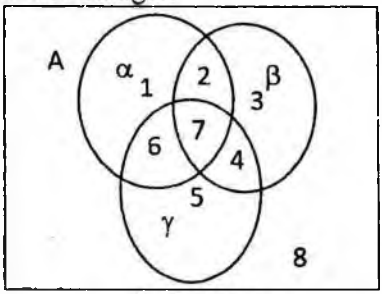
d) γ xossaga ega bo‘lgan va α,β xossalarga ega bo‘lmagan elementlar to‘plami – 5 sinf;

e) α,γ xossalarga ega bo‘lgan va β xossaga ega bo‘lmagan to‘plam – 6 sinf;

j) α,β va γ xossalarga ega bo‘lgan to‘plam – 7 sinf;

z) α,β va γ xossalarga ega bo‘lmagan to‘plam – 8 sinf.

Sinflardan ayrimlari bo'sh to'plam ham bo'lishi mumkin. Bu 8 ta sinf 1.15-rasmda tasvirlangan



1.15-rasm

Nazorat uchun savollar

1. To'plamlarni sinflarga ajratishni ta'riflang.
2. To'plamlarni sinflarga ajratishga misollar keltiring.
3. To'plamlarni bitta, ikkita, uchta xossaga ko'ra sinflarga ajrating.

Mashqlar:

1. P={1;2;3;4;5;6;7;8;9} to'plamni qanday sinflarga ajratilganini tushintiring:

a) A={1,3,5}, B={2,4,6,8,}, C={7,9}

b) A={5}, B={3,4,8,9}, C={1,6);

v) A=(1,3,5}, B={2,4,6,8}, C=(5,7,9);

g) A=(1,3}, B={4,6,8}, C={5,6,9}.

2. A={3,4,5,6,7,8,9}. B – to'plam uning qism to'plami bo'lib, 3 ga karrali sonlar to'plami;

C – to'plam uning qism to'plami bo'lib, 3 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladigan sonlar to'plami; D – to'plamuning qism to'plami bo'lib, 3ga bo'lganda 2 qoldiq qoladigan sonlar to'plami; A to'plamni o'zaro kesishmaydigan B, C va D sniflarga ajratildi deyish mumkinmi?

3. Sinflarga ajratishning barcha xossalari bajarilganmi?

a) Burchaklar to'plamini to'g'ri burchak, o'tkir burchak, o'tmas burchak deb sniflarga ajratish mumkinmi?

b) O'zbek tilidagi tovushlar to'plami – unli va undosh;

c) maktab o'quvchilarini – intizomli, a'lochi o'quvchilarga,

d) koordinata to'g'ri chizig'ida sonlarni ikki to'plamga ajratsak: [-∞; 2] va [2+∞];

4. Haqiqiy sonlar to'plamini ikki sinfga ajratdik, deyish to'g'rimi?

Haqiqiy sonlar to'plamini 3 ta sinfga ajratish mumkinmi? 4 sinfga ajratish mumkinmi?

Javobingizni chizmalarda ko'rsating.

5. Qaysi hollarda sinflarga ajratish to'g'ri bajarilgan:

a) uchburchaklar to'g'ri burchakli, o'tmas burchakli, teng yonli bo'ladi;

b) burchaklar to'g'ri, o'tkir va yoyiq burchak etib sinflarga ajratiladi;

c) butun sonlar to'plami natural sonlar, 0 soni va manfiy sonlar sinfiga;

g) o'zbek tilida zamonlar o'tgan zamon, kelasi zamon, hozirgi zamonga bo'linadi;

6. T – uchburchaklar to'plamidan ikki qism to'plamni ajratib:

X – to'g'ri burchakli uchburchaklar to'plami va Y – teng yonli uchburchaklar to'plami. Berilgan to'plamlar uchun Eyler-Venn diagrammalarini tuzing; T to'plam nechta o'zaro kesishmaydigan sohalarga bo'lindi? Nechta xossaga ko'ra uchburchaklar sinflarga ajratilgan?

7. To'rtburchaklar to'plamini sinflarga ajrating:

a) qandaydir bir xossaga ko'ra;

b) ikki xossasiga ko'ra. Bu xossalarini ko'rsating, har bir xolatga ko'ra Eyler doirachalarini tasvirlang, o'zaro kesishmaydigan sinflar sonini toping.

8. O'zbek alifbosidagi harflar to'plamini sinflarga ajrating.

1.5. Moslik va munosabatlar. Ikki to'plam elementlari orasidagi moslik. Moslik turlari

Moslik so'zi kundalik hayotda ko'p ishlatiladi. «Ob-havoga mos kiyim», «Bolaning yoshiga mos o'yinchoq», «Dasturga mos darslik», «Mahsulotning naviga mos baho» va hokazo. Keltirilgan misollardan ko'rinadiki, moslik ko'pincha ikki turli obyektlar to'plamlari orasida o'rnatiladi. Masalan, «Bolaning yoshiga mos o'yinchoq» deganda, bola rivojlanishining turli davrlari bilan barcha bolalar uchun chiqarilgan o'yinchoqlar to'plami orasidagi moslik ko'zda tutiladi. Yoki talabalar bilan ularning imtihonda olishi mumkin bo'lgan ballari to'plami orasida moslik berilgan bo'lsa, imtihondan so'ng har bir talaba o'z bilim darajasiga mos ballga ega bo'ladi.

Matematikada ikki to'plam orasidagi moslik «binar moslik» deb ataladi. «Binar» so'zi lotincha bis – «ikki marta» so'zidan olingan. Binar moslik elementlari berilgan to'plamlarning bir-biriga mos kelgan elementlari juftligidan iborat bo'ladi. Juftlik o'z navbatida ikki to'plam orasidagi dekart ko'paytma elementi ekanini ham hisobga olsak, moslikka quyidagicha ta'rif berish mumkin.

1-ta'rif. $X\times Y$ dekart ko'paytmaning istalgan G_f qism to'plami X va Y to'plamlar orasidagi binar moslik deyiladi.

Moslik lotin alifbosining f,d,t,s kabi harflari bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi: f: A→B yoki $A \xrightarrow{f} B$.

Bizga ma'lum bo'lgan funksiyalarning hammasi moslik tushunchasiga misol bo'la oladi.

X to'plam moslikning birinchi to'plami deyiladi. X to'plamning moslikda ishtirok etuvchi elementlari to'plami moslikning aniqlanish sohasi deyiladi.

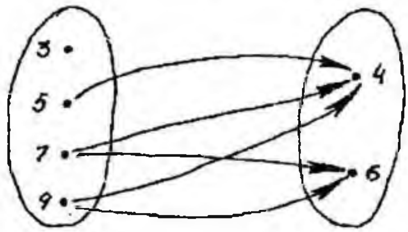
Y to'plam moslikning ikkinchi to'plami deyiladi. Y to'plamning moslikda qatnashgan elementlari to'plami moslikning qiymatlar to'plami deyiladi.

$G_f\subset X\times Y$ to'plam moslikning grafigi deyiladi.G_f grafik biror R moslikdagi barcha (x,y) juftliklar to'plami, bu yerda $x\in X$, $y\in Y$ va xfy.

Ikki to'plam orasidagi moslikni nuqtalar va yo'nalishli kesmalar (strelkalar) yordamida tasvirlovchi rasmlar moslikning grafi deyiladi.

Chekli to'plamlar orasidagi moslik graflar yordamida ko'rgazmali tasvirlanadi.

Misollar: 1. X={3,5,7,9}va Y={4,6}to'plamlar orasidagi «katta» mosligining grafigini yasaymiz. Buning uchun berilgan to'plamlar elementlarini nuqtalar bilan belgilaymiz va X to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalardan Y to'plam elementlarini tasvirlovchi nuqtalarga strelkalar o'tkazamiz.

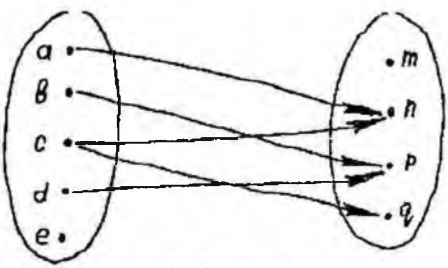


1. 16-rasm

Natijada biz X va Y to'plamlar elementlari orasidagi «katta» mosligiga ega bo'lamiz .

2. X={a,b,c,d,e}, Y={m,n,p,q}

G_f={(a;n), (b;p), (c;n), (c;q), (d;p)} grafini chizaylik:

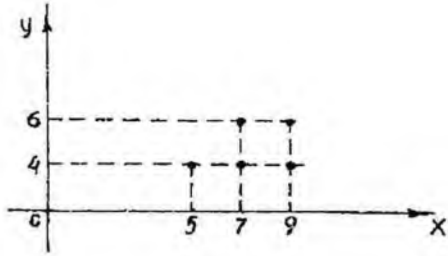


1.17-rasm

Bunda aniqlanish sohasi {a,b,c,d}, qiymatlar to'plami {n.p,q}.

Sonli X va Y to'plamlar elementlari orasidagi moslik koordinata tekisligidagi grafik yordamida tasvirlanadi.

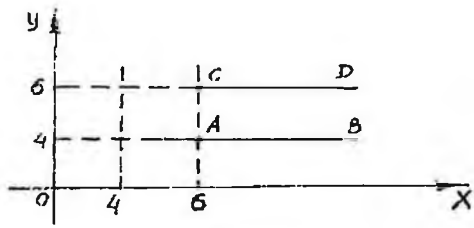
Buning uchun F moslikda bo'lgan barcha sonlar jufti koordinata tekisligida nuqtalar bilan tasvirlanadi. Buning natijasida hosil bo'lgan figura F moslikning grafigi bo'ladi. Yuqoridagi misolning grafigini chizamiz.



1.18-rasm

Moslikni bunday tasvirlash ularni berilgan moslikda cheksiz ko‘p sonlar jufti bo‘lganda ko‘rgazmali tasvirlash imkonini beradi.

Masalan: X=R va Y={4,6} to‘plamlar orasidagi «katta» mosligini qaraylik va grafigini yasaylik: Moslikni [AB) va [CD) nurlar ifodalaydi.



1.19-rasm

Moslik turlari.

2-ta’rif. Agar ikkita X va Y to‘plamlar orasidagi mosliklarning G_f grafigi XxY dekart ko‘paytmasi bilan ustma-ust tushsa, bu moslik to‘la moslik deyiladi.

3-ta’rif. Agar moslik grafigi G_f bo‘sh bo‘lsa ($G_f=\varnothing$) moslik bo‘sh moslik deyiladi.

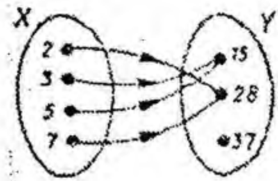
Ixtiyoriy ikkita X va Y to‘plamlar orasida bo‘sh va to‘la mosliklar mavjud bo‘lishi mumkin.

X va Y dekart ko‘paytma to‘plam ostilari ustida turli xil amallarni bajarish mumkin.

Masalan, X va Y to'plamlar orasida berilgan xry va xky mosliklar birlashmasi deb, ularning grafiklari birlashmasidan iborat xsy moslikka aytiladiki, xsy moslik faqat va faqat xry yoki xky mavjud, bo'lsa bo'ladi.

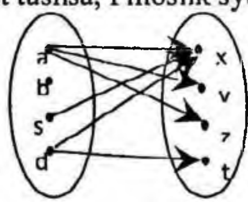
Nihoyat, f: A→A moslik o'rin almashtirish deyiladi, agar u biyeksiya bo'lsa. Bundan ko'rinib turibdiki, agar |A|=n bo'lsa, A da n! biyeksiyalar mavjud.

4-ta'rif: Agar f moslikning aniqlanish sohasi birinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik hamma yerda aniqlangan deyiladi.



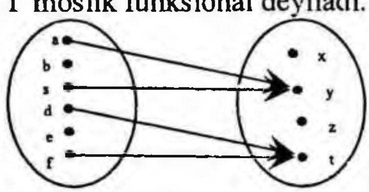
1.20-rasm

5-ta'rif: Agar f-moslikning qiymatlar to'plami ikkinchi to'plam bilan ustma-ust tushsa, f moslik syur'ektiv deyiladi.



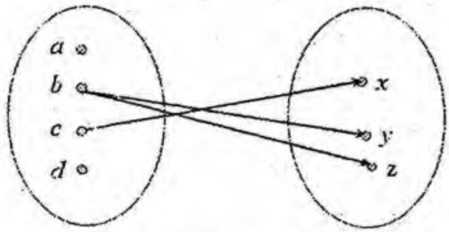
1.21-rasm

6-ta'rif: Agar f moslikda birinchi to'plamning har bir elementiga ikkinchi to'plamning bittadan ortiq bo'lmagan elementi mos kelsa, f moslik funksional deyiladi.



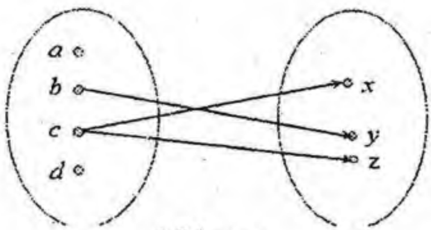
1.22-rasm

7-ta'rif: Agar f moslikda ikkinchi to'plamning har bir elementiga birinchi to'plamning 1 tadan ortiq bo'lmagan elementi mos qo'yilgan bo'lsa, f moslik in'ektiv deyiladi.



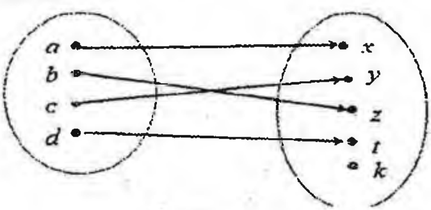
1.23-rasm

8-ta'rif: Syur'ektiv va in'ektiv moslik bir so'z bilan biektiv deyiladi.



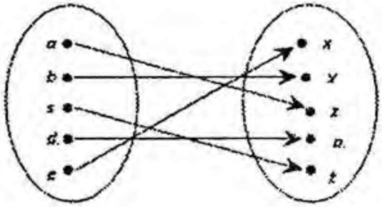
1.24-rasm

9-ta'rif: Hamma yerda aniqlangan funksional moslik akslantirish deyiladi.



1.25-rasm

10-ta'rif: X va Y to'plamlar orasidagi f moslik biektiv akslantirish bo'lsa, X va Y to'plamlar orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilgan deyiladi.



1.26-rasm

Moslik turlariga misollar keltiramiz.

Misol: Aytaylik, X - kiyim iladigan garderobdagi paltolar to‘plami, Y esa shu garderobdagi ilgaklar to‘plami bo‘lsin.

Agar har bir palto ilgakga ilinib turgan bo‘lsa (polda yotmasdan) u holda X to‘plam Y to‘plamga akslantirish bo‘ladi.

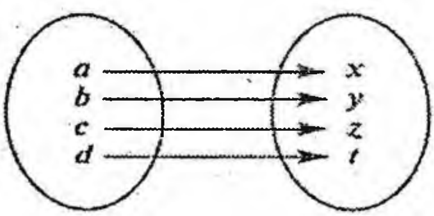
Agar bu akslantirishda har bir ilgakka bittadan ortiq palto ilinmagan bo‘lsa (bo‘sh ilgaklar ham bo‘lishi mumkin), bu akslantirish in’ektiv bo‘ladi.

Agar hamma ilgaklar band bo‘lsa (bunda ayrim ilgaklarda bittadan ortiq paltolar ilingan ham bo‘lishi mumkin), bu akslantirish syur’ektiv bo‘ladi.

Agar har bir ilgakda bittadan palto ilingan bo‘lsa, bu akslantirish biektiv bo‘ladi.

11-ta’rif: X va Y to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatilgan bo‘lsa, bu to‘plamlar teng quvvatli deyiladi va qisqacha $X \sim Y$ ko‘rinishda yoziladi.

Masalan: Agar X{a,b,c,d,e}, Y{x,y,z,t,p} bo‘lsa, u holda $X \sim Y$ bo‘ladi, chunki, X va Y to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin.



1.27-rasm

Masalan: $X=\{a; b; c; d\}$; $Y=\{x; y; z; t\}$; $G_f=\{(a;x), (b;y), (c;z), (d;t)\}$ bo'lsa, f moslik X va Y to'plamlar orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik bo'ladi (1.27-rasm).

Chekli va cheksiz to'plamlar elementlari soni to'plam quvvati deb atalgan edi va n(A), n(B), n(N) kabi belgilangan. O'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yordamida chekli va cheksiz to'plamlar quvvatini taqqoslash mumkin.

12-ta'rif: Barcha natural sonlar to'plami N ga teng quvvatli to'plamlar sanoqli to'plam deyiladi.

Agar istalgan cheksiz to'plamning har bir elementiga biror qoida yordamida bittadan natural sonni mos keltira olsak, bu to'plam elementlari natural sonlar yordamida nomerlab chiqilgan bo'ladi va bunday to'plam sanoqli to'plam hisoblanadi. Natural sonlar to'plamining istalgan cheksiz qism to'plami sanoqlidir.

$$\begin{array}{cccccc} 2 & 4 & 6 & \ldots & 2n & \ldots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 1 & 2 & 3 & \ldots & n & \ldots \end{array}$$

Masalan, barcha juft sonlarni quyidagicha nomerlab chiqamiz:

1.6. To'plamdagi munosabat, uning xossalari

To'plam elementlari orasidagi munosabat. Biz to'plamlarni o'rganganda ularni taqqoslab, ular kesishadi yoki teng, yoki biri ikkinchisining qismi deb to'plamlar orasidagi munosabatlarni qaragan edik. Natural sonlar to'plamini qaraganda sonlar orasidagi turli-tuman bog'lanishlarni ko'ramiz. Masalan, 7 soni 6 sonidan katta, 12 soni 9 sonidan 3ta ko'p, 3 soni 2 sonidan keyin keladi va hokazo.

Xuddi shunga o'xshash, geometriyada figuralarning tengligi va o'xshashligi, to'g'ri chiziqlarning parallelligi va perpendikulyarligi kabi munosabatlar qaraladi.

Bulardan ko'rinadiki, matematikada asosan, ikki obyekt orasidagi munosabat qaraladi, bunga binar munosabatlar deyiladi. Yuqorida ko'rib o'tilgan munosabatlar orasida umumiylik bormi, yo'qmi degan masalani qarasak, u yoki bu munosabatlarni qarashda biz berilgan to'plamlar sonlaridan tashkil topgan tartiblangan juftliklar bilan amallar bajarishni ko'ramiz.

Masalan: X={4;5;6} to‘plamda 1 ta ko‘p munosabatini qarasak, «5 soni 4 sonidan 1 ta ko‘p», «6 soni 5 sonidan 1 ta ko‘p». Shu to‘plamda katta munosabatni qarasak «5>4», «6>4», «6>5». Shunga o‘xshash kichik munosabatini qarasak «4 soni 5 sonidan 1 ta kam», «5 soni 6 sonidan 1 ta kam».

Keltirilgan misoldagi «1 ta ko‘p» munosabat uchun {(5;4), (6;5)} to‘plam, «katta» munosabati uchun {(5;4), (6;4), (6;5)} to‘plam, «kichik» munosabati uchun {(4;5), (5;6)} to‘plamlarga ega bo‘lamiz. Bu to‘plamlar esa elementlari X={4;5;6} to‘plam elementlaridan hosil qilingan sonlar juftliklari to‘plami bilan aniqlanadi. Boshqacha aytganda, bu to‘plamlar X={4;5;6} to‘plam Dekart ko‘paytmasining elementlaridan tashkil topgan qism to‘plamlardir, ya’ni

X×X ={(4;4), (4;5), (4;6), (5;4), (5;5), (5;6), (6;4), (6;5), (6;6)}:

Bundan ko‘rinadiki, ko‘rib o‘tilgan munosabtlar X×X Dekart ko‘paytmaning qism to‘plami bilan aniqlanar ekan.

15-ta’rif. $X \times X$ to‘plamning istalgan G qism to‘plamiga binar munosabat deyiladi. Binar munosabatlar lotin alfavitining bosh harflari P, K, R, S… bilan belgilanadi.

Boshqacha aytganda, X to‘plam elementlari orasidagi **munosabat** deb R = (X×X,G_R) juftlikka aytiladi, bu yerda $G_R \subset X \times X$.

Agar X to‘plamda berilgan R munosabatda a∈X elementga b∈X element mos kelsa, «aelement b element bilan R munosabatda» deyiladi va aRb deb yoziladi, bu yerda (a; b)∈G_R.

Xususiy holda teng to‘plamlar orasidagi moslik X to‘plam elementlari orasidagi binar munosabat deyiladi. X odamlar to‘plami bo‘lsa, unda «do‘st bo‘lmoq», «bitta shaharda yashamoq», «qarindosh bo‘lmoq» kabi munosabatlar bo‘ladi. Sonlar orasida «teng», «katta», «kichik», «karrali», «katta emas», «bo‘luvchisi» va h. k. munosabatlar, geometrik shakllar to‘plamida «tengdoshlik», «parallellik», «perpendikularlik» va boshqa munosabatlar haqida gapirish mumkin.

Matematikada binar munosabatlar $a=b$, $a<b$, $a>b$, $a\neq b$, $a\parallel b$, $a\perp b$ kabi belgilar orqali berilgan.

Z butun sonlar to‘plamida $aRb \Leftrightarrow m|(a-b)$ munosabatni qaraylik. Ma’lumki, a va b butun sonlarini m natural soniga bo‘lishda bir xil r ($0<r\leq m$) qoldiq hosil bo‘lsa, a va b sonlari m modul bo‘yicha taqqoslanadigan (teng qoldiqli) sonlar deyiladi va $a\equiv b$ (mod m) ko‘rinishda belgilanadi. a soni b soniga m modul bo‘yicha taqqoslanishini ifodalovchi $a\equiv b$ (mod m) bog‘lanish taqqoslama deb o‘qiladi.

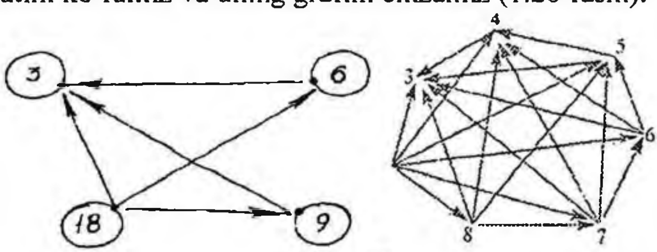
Masalan: $27=5\cdot5+2$, $12=5\cdot2+2$ bo‘lgani uchun $27\equiv12$ (mod 5).

Yoki, agar $m=7$ bo‘lsa, $1\equiv15$ (mod 7) bo‘ladi.

Shu narsa ma’lumki, $a\equiv b$ (mod m) taqqoslama a - b ayirma m ga qoldiqsiz bo‘lingandagina o‘rinli bo‘ladi.

E’tibor beringki, $m=7$ bo‘lsa, 7 modul bo‘yicha taqqoslanadigan butun sonlarninig umumiy ko‘rinishi $1+7k$-r shaklda bo‘ladi, bu yerda $k=0, \pm1, \pm2\ldots$, $0\leq r\leq6$

To‘plamdagi munosabatning grafi va grafigi. Munosabatlarni graflar yordamida ko‘rgazmali tasvirlash mumkin. Masalan: $X=\{3;6;9;18\}$to‘plam elementlari uchun «karrali» munosabatini ko‘ramiz va uning grafini chizamiz (1.28-rasm).



1.28-rasm

18 soni 3 ga karrali, 18 soni 6 ga karrali, 18 soni 9 ga karrali va hokazo. X to‘plamdagi ixtiyoriy son o‘z-o‘ziga karrali bo‘lgani uchun boshi va oxiri ustma-ust tushadigan strelkalar mavjud. Bunday strelkalar halqalar deyiladi.

Munosabat grafi chekli to‘plamlar uchun quyidagicha chiziladi: to‘plam elementlari nuqtalar bilan belgilanadi, mos elementlar strelkalar bilan tutashtiriladi. Masalan, $X=\{3;4;5;6;7;8;9\}$ to‘plam elementlari orasida P:«x>y» munosabat berilgan. U quyidagi juftliklar to‘plami orqali ifoda qilinadi:

G={(4; 3), (5; 3), (5; 4), (6; 3), (6; 4), (6; 5), (7; 3), (7; 4), (7; 5), (7; 6), (8; 3), (8; 4), (8; 5), (8; 6), (8; 7), (9; 3), (9; 4), (9; 5), (9; 6), (9; 7)}.

Uning grafi 1.28-rasmdagi ko'rinishda bo'ladi.

Munosabat xossalari.

16-ta'rif. Agar X to'plamning har bir elementi o'z-o'zi bilan R munosabatda bo'lsa (ya'ni, xRx bajarilsa), u holda R munosabat X to'plamda **refleksiv** deyiladi.

Masalan, «x = y», «a||b», «x⋮y» munosabatlar refleksivdir.

Refleksiv munosabat grafida har bir element atrofida halqa bo'ladi (1.6-banddagi 1-misol).

17-ta'rif. Agar X to 'plamning birorta ham elementi uchun xRx bajarilmasa, u holda R munosabat X to 'plamda **antirefleksiv** deyiladi.

Masalan, «a<b», «a>b», «a⊥b» munosabatlar antirefleksivdir.

Antirefleksiv munosabat grafida birorta ham halqa bo'lmaydi (1.6-banddagi 2-misol).

18-ta'rif. Agar X to'plamda R munosabat berilgan bo'lib, xRy va yRx bir vaqtda bajarilsa, R **simmetrik munosabat** deyiladi.

Masalan, «a||b», «a⊥b», «a=b» munosabatlari simmetrikdir. Simmetrik munosabat grafida har bir strelkaga parallel qaytuvchi strelka bo'ladi.

19-ta'rif. Agar X to'plamda berilgan R munosabatda xRy va yRx shartlardan faqat bittasi o'rinli bo'lsa, R munosabat **asimmetrik** munosabatdeyiladi.

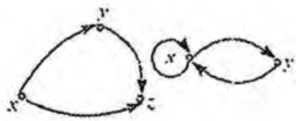
Masalan, «a>b», «a<b» munosabatlari asimmetrikdir.

Asimmetrik munosabat grafida birorta ham halqa va qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

20-ta'rif. Agar X to'plamda R munosabat uchun xRy va yRx shartlar faqat x=y bo'lgan holda bajarilsa, u holda R **antisimmetrik munosabat** deyiladi.

Masalan, «a≥b», «a≤b», «a⋮b», «a soni b sonining bo'luvchisi» kabi munosabatlar antisimmetrik munosabat bo'ladi. Antisimmetrik munosabat grafida halqalar bo'ladi, lekin qaytuvchi strelkalar bo'lmaydi.

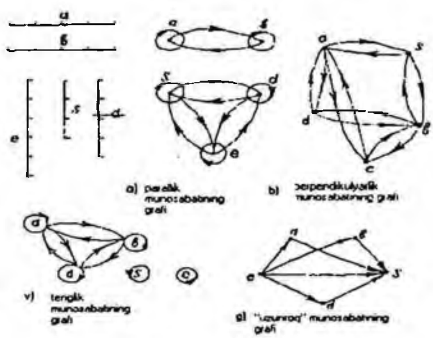
21-ta'rif. Agar X to'plamda berilgan R munosabat uchun xRy va yRz ekanligidan xRz ekanligi kelib chiqsa, u holda R munosabat **tranzitiv** deyiladi (1.29-rasm).



1.29-rasm

Masalan, «a>b», «a=b», «a||b», «a:b» kabi munosabatlar tranzitivdir. Tranzitiv munosabat grafida x dan y ga, y dan z ga boruvchi strelkalar bo'lsa, albatta x dan z ga boruvchi strelka ham bo'lishi kerak.

Munosabatlarning xossalarini ajratib ko'rsatish uchun matematikada yuqorida aytib o'tilgan munosabatlarni kesmalar to'plamida graflar yordamida tasvirlaymiz. a, b, e, s, d kesmalar berilgan bo'lsin (1.30- a, b, v, g rasmlar).



1.30-rasm

1.7. Ekvivalentlik munosabati. Ekkivalentlik munosabatining to'plamlarni sinflarga ajratish bilan aloqasi. Tartib munosabati

Ekvivalentlik munosabati.

22-ta'rif. Har qanday R munosabat refleksiv, simmetrik va tranzitiv bo'lsa, u holda R **ekvivalentlik munosabati** deyiladi.

Masalan, «a||b», «a=b» kabi munosabatlar ekvivalentlik munosabati bo‘ladi.

1-misol. Sinf o‘quvchilari orasida «bir oyda tug‘ilgan» munosabati berilgan bo‘lsin. Bu munosabat refleksiv, chunki har bir A o‘quvchi o‘zi o‘zi bilan bir oyda tugilgan. Munosabat simmetrik, chunki A o‘quvchi B bilan bir oyda tugilgan bo‘lsa, B ham A bilan bir oyda tugilgan bo‘ladi. Munosabat tranzitiv, chunki A o‘quvchi B bilan, B o‘quvchi C bilan bir oyda tugilgan bo‘lsa, A bilan C ning ham tug‘ilgan oyi bir xil bo‘ladi. Demak, bu munosabat ekvivalentlik munosabati bo‘lar ekan. U sinf o‘quvchilarini «bir oyda tugilgan o‘quvchilar» sinflariga ajratadi. Bunday sinflar soni ko‘pi bilan 12 ta bo‘lishi mumkin.

2-misol. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlar to‘plamida parallellik munosabati ekvivalentlik munosabati bo‘lishini ko‘rsatamiz. Tekislikdagi to‘g‘ri chiziqlar kesishmasa yoki ustma-ust tushsa, parallel hisoblanishini eslatib o‘tamiz.

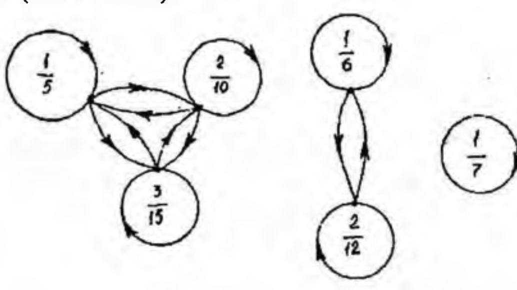
Parallellik munosabati:

a) refleksiv, chunki ixtiyoriy a to‘g‘ri chiziq uchun a||a bo‘ladi;

b) simmetrik, chunki a||b bo‘lsa, b||a bo‘ladi;

c) tranzitiv, chunki a||b va b||c bo‘lsa, a||c bo‘ladi (parallel to‘g‘ri chiziqlar xossasiga ko‘ra).

3-misol. $\left\{\frac{1}{5};\frac{1}{6};\frac{1}{7};\frac{2}{10};\frac{2}{12};\frac{3}{15}\right\}$ kasrlar to‘plamida tenglik munosabati berilgan. (1.31- rasm)



1.31-rasm

Bu munosabat:

1) Refleksiv, chunki ixtiyoriy kasr o‘z-o‘ziga teng;

2) Simmetrik, chunki x kasrning y kasrga tengligidan y kasrning x kasrga tengligi ham kelib chiqadi;

3) Tranzitiv, chunki x kasrning y kasrga va y kasrning z kasrga tengligidan x kasrning z kasrga tengligi kelib chiqadi.

Agar X to‘plamda ekvivalentlik munosabati berilgan bo‘lsa, u holda bu munosabat X to‘plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan qism to‘plamlariga ajratadi. Yuqoridagi misolimizda qism to‘plamlar

$$\left\{\frac{1}{5};\frac{2}{10};\frac{3}{15}\right\},\left\{\frac{1}{6};\frac{2}{12}\right\},\left\{\frac{1}{7}\right\}.$$

Bu qism to‘plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi va qism to‘plamlarining birlashmasi birlamchi misolda berilgan to‘plam bilan ustma-ust tushadi.

4-misol. Z butun sonlar to‘plamida aRb $\Leftrightarrow$ m | (a - b) munosabatni qaraylik. Bu munosabat m=7 bo‘lganda Z to‘plamni ekvivalent 7 ta sinfga ajratadi:

[0] = {..., -14, -7, 0, 7, 14, ...}
[1] = {..., -13, -6, 1, 8, 15, ...}
[2] = {..., -12, -5, 2, 9, 16, ...}
[3] = {..., -11, -4, 3, 10, 14, ...}
[4] = {..., -10, -3, 4, 11, 14, ...}
[5] = {..., -9, -2, 5, 7, 12, ...}
[6] = {..., -8, -1, 6, 7, 13, ...}

(I). R – haqiqiy sonlar to‘plamidagi "<" munosabati bo‘lsin. Bundan kelib chiqadiki, $R=\{(x,y)\in R\times R|x<y\}$.

(II). m natural sonini olamiz va eslatib o‘tamizki, agar a$\in$Z, va m|a bo‘lsa, demak a soni m ga karrali. Z butun sonlar to‘plamidagi R munosabat quyidagicha aniqlangan bo‘lsin:

aRb $\Leftrightarrow$ m | (a – b).

E`tibor beringki, biz bu munosabat bilan 1.4.3.- bo‘limda tanishgan edik.

(III). T_5 - {1, 2, 3, 4, 5} to‘plamning barcha 2-elementli toplam ostilaridan iborat bo‘lsin. R munosabatni T_5da $A_1RA_2 \Leftrightarrow A_1 \cap A_2=\emptyset$ ko‘rinishda belgilaymiz. Bu misolda |R|ni hisoblah mumkinmi (quyidagi 3-mashqqa qarang)?

(IV). Haqiqiy sonlar o‘qi R da R munosabatni $xRy \Leftrightarrow x-y \in Z$ kabi aniqlaymiz. π soniga mos elementni toping.

R-haqiqiy S to‘plamdagi munosabat bo‘lsin. Quyidagi 3 ta xossa bajarilsa, R ni ekvivalentlik munosabati deyiladi:

R refleksiv: sRs ixtiyoriy $s \in S$ uchun;

R simmetrik: $s_1Rs_2 \Leftrightarrow s_2Rs_1$, $s_1, s_2 \in S$;

R tranzitiv: s_1Rs_2 и $s_2Rs_3 \Rightarrow s_1Rs_3$, $s_1, s_2, s_3 \in S$.

Yuqorida keltirilgan 4 ta misoldan (II) va (IV) dagi munosabatlar ekvivalentlik munosabati bo‘ladi. (I) misolda berilgan munosabat refleksiv ham, simmetrik ham emas: ($x<x$ har qanday haqiqiy son uchun yolg‘on, $1<2$, lekin $2 \leq 1$). Shunga qaramay, bu munosabat tranzitivligini oson isbotlash mumkin. Qolgan hollarni misollarda qaraymiz.

S biror to‘plam va R S dagi ekvivalentlik munosabati bo‘lsin. Ixtiyoriy $s \in S$ uchun [s] to‘plamni $[s] = \{s' \in S \mid sRs'\} \subseteq S$ ko‘rinishda aniqlaymiz va bu to‘plamni S dagi $s \in S$ ni o‘z ichiga oluvchi ekvivalentlik sinflari deb ataymiz.

Eslatma: agar s_1Rs_2 bo‘lsa, so‘ng $[s_1]=[s_2]$, chunki s_1 va s_2 ekvivalent, S ning aynan bir xil elementlaridir.

Tartib munosabati. Endi tartib munosabatini qaraymiz.

«Tartib» so‘zi kundalik hayotimizda doimo uchraydi. Masalan, jismoniy tarbiya darslarida talabalarning bo‘y-bo‘yiga qarab joylashishi tartibi, o‘zbek alfavitida harflarning ketma-ket kelish tartibi va hokazo.

23-ta’rif. Agar X to‘plamdagi R munosabat tranzitiv bo‘lsa va simmetrik bo‘lmasa, u holda bu munosabat tartib munosabati deyiladi. X to‘plam esa tartib munosabati bilan tartiblangan deb ataladi.

Masalan, $X=\{3,6,9,18\}$ to‘plamni «kichik» munosabati yordamida tartiblash mumkin. Boshlang‘ich ta’limning birinchi sinfida o‘quvchilar «katta» va «kichik» munosabatlari bilan, keyinchalik esa kesmalar uchun «uzun» va «qisqa» munosabatlari bilan tanishadilar. Bu munosabatlar yordamida sonlar va kesmalar to‘plamida tartib o‘rnatiladi.

Tartib munosabati qat’iy va noqat’iy tartib munosabatiga bo‘linadi va bu bo‘linish munosabatning asimmetrik yoki antisimmetrik bo'lishi bilan bog'liq. «Katta» va «kichik» munosabatlari qat'iy tartib munosabati bo'lsa, «katta emas» va «karrali» munosabatlari noqat'iy tartib munosabati hisoblanadi.

Teorema. R-S to'plamdagi ekvivalentlik munosabati, [s] va [s'] ekvivalentlik sinflari bo'lsin. U holda yoki [s]=[s'], bu yerda sRs', yoki $[s]\cap[s'] = \emptyset$, qachonki $s \neq s'$.

Isbot. Faraz qilaylik, $[s]\cap[s']\neq\emptyset$ bo'lsin, aytish mumkinki, shunday t element topiladiki, $t\in[s]\cap[s']$ bo'ladi. Shuning uchun sRt va s'Rt o'rinli ekanligidan, simmetriklik asosida sRt va tRs' o'rinli ekanligi kelib chiqadi. Tranzitivlikdan foydalanib ko'ramizki, sRs' s va s' ning ekvivalentligini yoki S dagi aynan bitta element ekanini bildiradi. Bundan [s]=[s'] ekanligi kelib chiqadi. Yagona boshqa imkoniyat $[s]\cap[s']=\emptyset$ dan iborat bo'lib, bu holda sRs' ekanligi o'z-o'zidan ma'lum bo'ladi.

Yuqorida amalga oshirilgan isbot natijasida shuni ko'ramizki, S to'plamdagi R munosabatning ekvivalentligi to'plamni kesishmaydigan ekvivalentlik sinflariga ajratar ekan.

Nazorat uchun savollar:

1. Moslik ta'rifi va turlarini ayting.
2. To'plamni to'plamga o'zaro bir qiymatli akslantirish nima?
3. Teng quvvatli to'plamlar.
4. Teng quvvatli to'plamlar qanday aniqlanadi?
5. Munosabat moslikning xususiy holi ekanini, ya'ni $G\subset X\times X$ ekanini izohlang.
6. Munosabat xossalarini graflarda tasvirlang.
7. Refleksiv, simmetrik, antisimmetriklik, tranzitiv munosabatlarni graflar yordamida tushuntiring.
8. Ekvivalentlik va tartib munosabatlarini ta'riflang.
9. Ekvivalentlik va tartib munosabatlarini misollar yordamida tushuntiring

Mashqlar:

1. A={5;12} va B={4;17} to'plamlar berilgan. Bu to'plamlar orasidagi Dekart ko'paytmani tuzing va barcha qism to'plamlarni aniqlang.

2. $M=\{-3;-2;-1;0;1;2;3;4\}$ va N–natural sonlar to'plami berilgan. Bu to'plamlar orasida R moslik: «m sonning kvadrati n soniga teng», bunda $m \in M$, $n \in N$ berilgan. R moslik juftliklari to'plamini aniqlang.

3. $X=\{x \in n, x \leq 7\}$, $Y=\{y | y \in N, 15 \leq y \leq 19\}$ to'plam elementlari orasida C: «x soni y sonining bo'luvchisi, bunda $x \in X$, $y \in Y$, moslik berilgan bo'lsa, uning grafigini yasang.

4. $A=\{1;2;3;4;6\}$, $B=\{5;7\}$ to'plamlar elementlari orasida «kichik» mosligi o'rnatilgan. Bu moslik grafigini yasang.

5. Kundalik hayotdan mosliklarga misollar keltiring.

6. $X=\{x | x \in N, x \leq 9\}$, $Y=\{y | y \in N, y \leq 4\}$ to'plamlar elementlari orasida R: «x soni y soniga karrali» mosligi berilgan (bunda $x \in X$, $y \in Y$). R va R^{1} mosliklar grafigini yasang.

7. O'zaro bir qiymatli moslikka misollar keltiring.

8. A va B to'plamlarning teng quvvatli ekanini ko'rsating:

a) A – uchburchak tomonlari to'plami, B – uchburchak burchaklari to'plami;

б) A –«maktab» so'zidagi harflar to'plami, B–384 574 sonidagi raqamlar to'plami;

в) A–hafta kunlari to'plami, B–a, b, c, d, e, f, k harflari to'plami.

9. $A=\{11;12;13;14;15\}$, $B=\{20;21\}$ to'plamlar elementlari orasida «kichik» mosligi o'rnatilgan. Bu moslik grafigini yasang.

10. $X=\{453;0;524;264;135;122\}$ va $U=\{3;4;5;9;\}$ to'plamlar orasida R "x son y songa karrali" munosabati berilgan. Bunda $x \in X$ va $y \in U$. Munosabat grafigini yasang. Bu grafda 135 dan 9 ga boruvchi strelka bormi?

1.8. Kombinatorika elementlari. Kombinatorika masalalari. Yig'indi va ko'paytma qoidasi

Kombinatorika masalasi. Elementlarning turli kombinatsiyalari va ularning sonini topish bilan bog'liq masalalar kombinatorika masalalari deyiladi. Bunday masalalar matematika fanining tarmog'i – kombinatorikada o'rganiladi. Kombinatorika asosan, XVII–XIX asrlarda mustaqil fan sifatida yuzaga kelgan bo'lib, uning rivojiga B.Paskal, P.Ferma, G.Leybnits, Y.Bernulli, L.Eyler kabi olimlar katta hissa qo'shganlar.

Kombinatorikada, asosan, chekli to'plamlar, ularning qism to'plamlari, chekli to'plam elementlaridan tuzilgan kortejlar va ularning sonini topish masalalari o'rganilgani uchun uni to'plamlar nazariyasining bir qismi sifatida qarash mumkin.

Yig'indi qoidasi. Kombinatorikada to'plamlar birlashmasi elementlari sonini hisoblash masalasi yig'indi qoidasi deb ataladi.

1) Agar $A \cap B = \emptyset$ bo'lsa,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$ (1) bo'ladi.

Ya'ni kesishmaydigan A va B to'plamlar birlashmasi elementlari soni shu to'plamlar elementlari sonlarining yig'indisiga teng.

2) Agar $A \cap B \neq \emptyset$ bo'lsa,

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (2) bo'ladi. Ya'ni umumiy elementga ega ikki to'plam birlashmasi elementlari soni to'plamlarning har biri elementlari sonlari yig'indisidan ularning umumiy elementlari sonining ayrilganiga teng. (2) formula (1) formulaning umumiy holi bo'lib, (1) formulada $n(A \cap B)=0$, ya'ni to'plamlarning umumiy elementi yo'q.

3) Yigindi qoidasi umumiy elementga ega bo'lgan uchta A, B, C to'plam uchun quyidagicha yoziladi: agar $A \cap B \cap C = \emptyset$ bo'lmasa, $n(A \cup B \cup C) = n(A)+n(B)+n(C)-n(A \cap B)-n(A \cap C)-n(B \cap C)+ n(A \cap B \cap C)$ (3) bo'ladi.

(1) formula bilan yechiladigan kombinatorika masalasi umumiy holda quyidagicha ifodalanadi: agar x elementni k usul, y elementni m usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, «x yoki y» elementni k + m usul bilan tanlash mumkin.

Masalan, savatda 8 ta olma va 10 ta nok bor bo'lsa, 1 ta mevani 8 + 10 = 18 usul bilan tanlash mumkin.

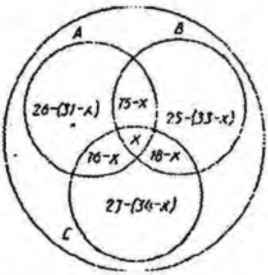
(2) formula bilan yechiladigan masala: 40 talabadan 35 tasi matematika imtihonini, 37 tasi rus tili imtihonini topshira oldi. 2-talaba ikkala fandan «2» oldi. Nechta qarzdor talaba bor?

Yechish. A – matematika fanidan «2» olgan, B - rus tili fanidan «2» olgan talabalar to'plami bo'lsin.

n(A)=40-35=5; n(A∩B) = 2.

n(B)=40-37=3 n(A∪B) = 5+3-2=6.

Javob: 6 ta qarzdor talaba bor. (3) formula – yig'indi qoidasi bilan yechiladigan masalani ko'raylik.



1.32-rasm

1-masala. Sinfda 40 o'quvchi bor. Uning 26 tasi basketbol, 25 tasi – suzish, 27 tasi – gimnastika bilan shug'ullanadi, bir vaqtda suzish va basketbol bilan – 15 ta, basketbol va gimnastika bilan – 16 ta, suzish va gimnastika bilan shug'ullanuvchilar – 18 ta. 1 o'quvchi darsdan ozod. Hamma sport turi bilan nechta o'quvchi shug'ullanadi? Nechta o'quvchi faqat 1 ta sport turi bilan shug'ullanadi?

Yechish. Maslada 3 ta to'plam qaralyapti: A – basketbol bilan shug'ullanuvchilar, B – suzish bilan shug'ullanuvchilar, C – gimnastika bilan shug'ullanuvchilar. Bu uch to'plam kesishadi.

Bu 3 to'plam kesishmasidagi elementlar sonini x bilan belgilasak, quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

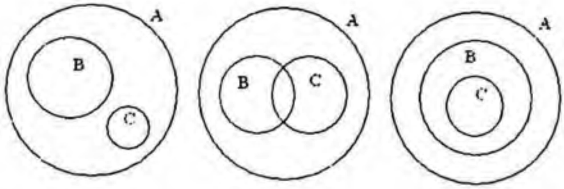
26+25–(33–x)+(18–x)+27–(34-x)+1=40.

Bu yerda x=10. Demak, hamma sport turi bilan 10 ta o'quvchi, faqat 1 ta sport turi bilan 10 ta: basketbol bilan – 5 ta, suzish bilan – 2 ta, gimnastika bilan – 3 ta o'quvchi shug'ullanadi.

2-masala. 50 talabadan 20 tasi nemis tilini, 15 tasi inghliz tilini o'rganadi. Ikkala tilni biluvchi va hech bo'lmaganda 1 ta tilni biluvchi talabalar soni nechta bo'lishi mumkin?

Yechish. Maslada 2 ta to'plam qaralyapti: A – barcha talabalar to'plami, B – nemis tilini o'rganadigan, C – inghliz tilini o'rganadigan talabalar to'plami. Masala sharti bo'yicha n(A) = 50, n(B) =20, n(C) = 15.

A, B va C to'plamlar orasidagi munosabatlarni Eyler-Venn diagrammalarida quyidagicha tasvirlash mumkin. Ikki tilni biluvchi talabalar soni B va C to'plamlar kesishmasi elementlari sonini topish bilan bog'liq. Hech bo'lmaganda 1 ta tilni biluvchi talabalar soni ikki to'plam birlashmasi elementlari sonini topish bilan bog'liq.



1-33-rasm

$n(B \cap C) = 0$ $n(B \cap C) = 15$

$n(B \cup C) = 35$ $n(B \cup C) = 20$

1.33-rasm

x–Ikki tilni biluvchi talabalar soni bo‘lsa, $0 \leq x \leq 15$ $(x \in N_0)$.

y – hech bolmaganda – 1 ta tilni biluvchi talabalar soni bo‘lsa, $20 \leq y \leq 35 (y \in N_0)$.

Ko‘paytma qoidasi. Chekli to‘plamlarning dekart ko‘paytmasi elementlari sonini topishga imkon beradigan qoida ko‘paytma qoidasi deyiladi.

$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ va $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_m\}$ to‘plamlar elementlaridan nechta tartiblangan $(a_i, b_i.)$ juftlik tuzish mumkinligini ko‘raylik. Barcha juftliklarni tartib bilan quyidagicha joylashtiramiz:

$(a_1;b_1),(a_1;b_2),\ldots,(a_1;b_m)$, $(a_2;b_1),(a_2;b_2),\ldots,(a_2;b_m)$,

...

$(a_n;b_1),(a_n;b_2),\ldots, (a_n; b_m)$.

Bu jadvalda n ta qator va m ta ustun bo‘lib, undagi barcha juftliklar soni $n \cdot m$ ga teng. Bu yerda $n = n(A)$ va $m=n(B)$.

Ko‘paytma qoidasi $n(A\times B)=n(A)\cdot n(B)$ ko‘rinishda yoziladi.

Ko‘paytma qoidasiga oid kombinatorika masalasining umumiy ko‘rinishi: «Agar x elementni m usul, y elementni n usul bilan tanlash mumkin bo‘lsa, (x;y) tartiblangan juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».

Ikkitadan ortiq to‘plamlar uchun bu formula quyidagicha yoziladi:

$n(A_1\times A_2\times\ldots\times A_n)=n(A_1)\cdot n(A_2)\cdot\ldots\cdot n(A_n),(n>2)$.

Masalan, A shahardan B shaharga 3 yo‘l bilan, B shahardan C shaharga 2 yo‘l bilan borish mumkin bo‘lsa, A shahardan C shaharga necha xil usul bilan borish mumkin?

Yo'lning 1-qismini 3 xil, 2-qismini 2 xil yo'l bilan o'tish mumkin bo'lsa, umumiy yo'lni $3 \cdot 2 = 6$ usul bilan o'tish mumkin.

Umumlashgan ko'paytma qoidasi: «Agar x elementni m usul bilan, y elementni, x ni tanlab bo'lgandan so'ng, n usul bilan tanlash mumkin bo'lsa, (x;y) juftlikni mn usul bilan tanlash mumkin».

Masala. Nechta turli raqamlar bilan yozilgan ikki xonali sonlar bor?

Yechish. 1-raqamni 9 usul bilan (1, 2, ..., 9), 2-raqamni ham 9 usul bilan (noldan boshlab o'nliklar raqamidan boshqa raqamlar) tanlash mumkin. Hammasi bo'lib $9 \cdot 9 = 81$ ta shunday son bor ekan.

1.9. Takrorlanadigan va takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlar va o'rin almashtirishlar

Takrorlanadigan o'rinlashtirishlar.

Masala. m elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan k uzunlikdagi kortejlar sonini toping.

Yechish. k o'rinli kortej $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{k\ marta}$ dekart ko'paytmaning elementi bo'lib, tartiblangan k-likni (ka-lik deb o'qiladi) bildiradi. Masalani yechish uchun X×X×...×X dekart ko'paytma elementlari sonini topish kerak. Bu son n(X) = m bo'lgani uchun

$n\,(X \times X \times \ldots \times X) = n(X) \cdot n(X) \cdot \ldots \cdot n(X) = m \cdot m \cdot \ldots \cdot m = m^k$ ga teng.

Demak, m elementli X to'plam elementlaridan tuzilgan k o'rinli kortejlar soni m^k ga teng ekan. Kombinatorikada bunday kortejlarni m elementdan k tadan takrorlanadigan o'rinlashtirishlar deyiladi. Ularning soni $\overline{A_m^k}$ bilan belgilanadi. (A – fransuzcha arrangement so'zining bosh harfidan olingan bo'lib, «o'rnashtirish, joylashtirish ma'nosini bildiradi.) $\overline{A_m^k} = m^k$.

Masala. 6 raqamli barcha telefon nomerlari sonini toping.

Yechish. Telefon nomerlari 0 dan 9 gacha bo'lgan 10 ta raqamdan tuzilgani uchun 10 elementdan tuzilgan barcha tartiblangan 6 o'rinli kortejlar sonini topamiz:

Javob: $\overline{A_{10}^{6}} = 10^6 = 1000000$. 6 raqamli telefon nomerlari soni 10^6 ga teng.

Takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar. Agar chekli X to'p-lam elementlari biror usul bilan no-merlab chiqilgan bo'lsa, X to'plam tartiblangan deyiladi.

$X=\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ to'plam berilgan bo'lsin. Bu to'plamni turli usullar bilan tartiblash mumkin.

Masalan, sinf o'quvchilarini yoshiga, bo'yiga, ogirligiga qarab yoki o'quvchilar familiyalari bosh harflarini alifbo bo'yicha tartiblash mumkin.

m elementli X to'plamni necha xil usul bilan tartiblash mumkin degan savolga javob beraylik.

Tartiblash – bu elementlarni nomerlash demakdir. 1-nomerni m ta elementning istalgan biriga berish mumkin. Shuning uchun 1-elementni m usul bilan, 2-elementni 1-element tanlanib bo'lgan-dan so'ng m -1 usul bilan tanlash mumkin va hokazo, oxirgi elementni tanlash uchun faqat bitta usul qoladi, xolos. Tartiblash-larning umumiy soni

$m(m-1)(m-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = m!$ ga teng.

m! – dastlabki m ta natural son ko'paytmasi (m faktorial deb o'qiladi). Masalan, $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$, $m! = P_m$ bilan belgilanadi va takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlar soni deb ataladi.

O'rin almashtirishlarni o'rinlashtirishlarning xususiy xoli deb qarash mumkin m=k bo'lgan holi.

P belgisi fransuz tilidagi "permutation", ya'ni "o'rin almashtirish" so'zining 1- harfidan olingan

Masala. 8 ta ladyani shaxmat doskasida bir-birini urmaydigan qilib necha usul bilan joylashtirish mumkin?

Yechish. Ladyalar soni 8 ta.

$P_8 = 8! = 40320$

O'rin almashtirishlarning ba'zi qiymatlari:

$0! = 1$ ta'rif bo'yicha!

n	n!	n	n!
0	1	6	720
1	1	7	5040
2	2	8	40320
3	6	9	362880
4	24	10	3628800
5	120		

Takrorlanmaydigan o‘rinlashtirishlar. Umumiyroq masalani ko‘rib chiqaylik: m elementli X to‘plamdan nechta tartiblangan k elementli to‘plamlar tuzish mumkin?

Bu masalaning oldingi masaladan farqi shundaki, tanlash **k** - elementda tugatiladi. Ularning umumiy soni

$m(m-1)(m-2)\cdot...\cdot(m-k+1)$

ko‘paytmaga teng. U A_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan o‘rinlashtirishlar soni deb ataladi:

$$A_m^k = m(m-1)\cdot...\cdot(m-k+1) = \frac{m!}{(m-k)!}.$$

Bu yerda $m! = m\cdot(m-1)\cdot...\cdot2\cdot1$.

Masalan, sinfdagi 20 o‘quvchidan tozalik va davomat uchun javob beruvchi 2 o‘quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

$A_{20}^2 = \frac{20!}{18!} = 20\cdot19 = 380$ (usul bilan).

1.10. Takrorlanmaydigan guruhlashlar. Chekli to‘plamlarning to‘plam ostilari soni

Takrorlanmaydigan guruhlashlar. «m elementli X to‘plamning nechta k elementli qism to‘plamlari bor?» – degan masalani hal qilaylik.

Masalan, 4 elementli A = {a; b; c; d) to‘plamning nechta 3 elementli qism to‘plami borligini ko‘raylik. Ular {a;b; c}, {a; b; d}, {a; c; d}, {b; c; d}. Demak, 4 ta shunday qism to‘plam bor ekan. Bunday qism to‘plamlar takrorlanmaydigan guruhlashlar deb ataladi. Bu qism to‘plamlarni tartiblaganda 6 barobar ko‘proq 3 o‘rinli kortejlarga ega bo‘lamiz.

Masalan, {a; b; c} ni tartiblasak: (a; b; c), (a; c; b), (b; a; c), (b; c; a), (c; a; b), (c; b; a) tartiblangan uchliklarga ega bo‘lamiz, tartiblanishlar soni 3! = 6 marta ko‘p. Bu bog‘lanishdan foydalanib, guruhlashlar sonini topish formulasini keltirib chiqarish mumkin.

m elementli to‘plamning k elementli qism to‘plamlari soni C_m^k bilan belgilanadi va m elementdan k tadan takrorlanmaydigan guruhlashlar soni deyiladi. (C – fransuzcha combinaison – «birikma» so'zidan olingan.) Takrorlanmaydigan guruhlashlar soni uchun

$A_m^k = C_m^k \cdot P_m \Rightarrow C_m^k = \frac{A_m^k}{P_m} = \frac{m!}{(m-k)!k!}$ formulaga ega bo'lamiz.

Masala. Sinfdagi 20 o'quvchidan ko'rikda ishtirok etish uchun uch o'quvchini necha xil usul bilan tanlash mumkin?

Yechish. Ko'rik ishtirokchilarining tartibi ahamiyatga ega bo'lmagani uchun 20 elementli to'plamning 3 elementli qism to'plamlari soni nechtaligini topamiz:

$C_{20}^3 = \frac{20!}{3!17!} = \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 19 \cdot 20 = 1140.$ Javob: 3 o'quvchini 1140 usul bilan tanlash mumkin ekan.

N ta elementdan r tadan olingan obyektlar kombinatsiyasi soni shu vaqtda N ta elementan r tadan elementni o'rnini almashtirmasdan hosil qilingan to'plam ostilari soniga teng. Biz buni ushbu ko'rinishda yozamiz $\binom{n}{r}$. Biz bu holatda tanlashlar tartibini qaramaymiz. Misol uchun {1,2,3,4} sonlar to'plamini qaraymiz. Ikki elementli almashtirishlarsiz tanlashlar soni 4!/2!=12 ga teng. Bu aniq {12,13,14, 21,23,24 31,32,34 41,42,43}. 4ta elementdan 2 tadan kombinatsiyasi {12,13,14,..., 23,24,...,34} va uning soni oltiga teng. E'tibor bering $6 = \binom{4}{2} = 4!/2!\,2! \cdot$ N ta elementli A to'plam r o'lchamli n!/r!(n-r)! ta to'plam ostiga ega.

Shunday qilib biz $\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ ga ega bo'lamiz.

C_m^k ko'rinishdagi sonlarning xossalari.

$$1°.\ C_m^k = C_m^{m-k}.$$
$$2°.\ C_m^k = C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^k.$$
$$3°.\ C_m^0 = C_m^m = 1.$$

1-xossani isbot qilish uchun $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ formuladan foydalanamiz:

$$C_m^{m-k} = \frac{m!}{(m-k)!(m-(m-k))!} = \frac{m!}{(m-k)!(m-m+k)!} = \frac{m!}{(m-k)!k!} = C_m^k.$$

Xossaga ko'ra, $C_{20}^3 = C_{20}^{17}$; $C_5^2 = C_5^3$ va h. k.

2-xossaning isboti.

$$C_{m-1}^{k-1} + C_{m-1}^{k} = \frac{(m-1)!}{(k-1)!\left(m-1-(\mathrm{k}-1)\right)!} + \frac{(m-1)!}{k!\,(m-1-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!}{(k-1)!\,(m-k)!} + \frac{(m-1)!}{k!\,(m-k-1)!} = \frac{(m-1)!\,\mathrm{k}}{(k-1)!\,\mathrm{k}(m-1-k)!} +$$

$$+ \frac{(m-1)!\,(m-k)}{k!\,(m-k-1)!\,(m-k)} = \frac{(m-1)!\,k}{k!\,(m-k)} + \frac{(m-1)!\,(m-k)}{k!\,(m-k)} =$$

$$= \frac{k(m-1)! + (\mathrm{m}-\mathrm{k})(m-1)!\,(m-k)}{k!\,(m-k)!} = \frac{(m-1)!\,(k+m-k)}{k!\,(m-k)!} =$$

$$= \frac{(m-1)!\,m}{k!\,(m-k)!} = \frac{m!}{k!\,(m-k)!} = C_m^k$$

2°-va 3°-xossalardan foydalanib, C_m^k ko‘rinishdagi sonlarning qiymatini ketma-ket hisoblash mumkin.

Paskal uchburchagi va Nyuton binomi.

3°-xossaga ko‘ra $C_0^0 = C_1^0 = C_1^1 = C_2^0 = C_2^2 = 1$. Bundan 2° ga ko‘ra C_m^k ko‘rinishdagi sonlarni Paskal uchburchagi ko‘rinishida joylashtirish mumkin. Har bir son o‘zining tepasidagi ikkita son yig‘indisidan iborat.

$$\begin{array}{c}
C_0^0 \\
C_1^0 C_1^1 \\
C_2^0 C_2^1\, C_2^2 \\
C_3^0\ C_3^1\ C_3^2\ C_3^3 \\
C_4^0\ C_4^1\ C_4^2\ C_4^3\ C_4^4
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
1 \\
1\ \ 1 \\
1\ \ 2\ \ 1 \\
1\ \ 3\ \ 3\ \ 1 \\
1\ \ 4\ \ 6\ \ 4\ \ 1 \\
1\ \ 5\ \ 10\ \ 10\ \ 5\ \ 1
\end{array}$$

$$C_2^1 = C_1^0 + C_1^1 = 1 + 1 = 2.$$

Har bir qatordagi sonlar $(a + b)^m$ ko‘phadning yoyilmasidagi binomial koeffitsiyentlarga teng. Ularning yig‘indisi m elementli X to‘plamning barcha qism to‘plamlari sonini beradi.

Chekli to'plam qism to'plamlari soni. 2 elementli to'plamning hammasi bo'lib nechta qism to'plami bor, degan savolga javob beraylik. Ular 1 ta bo'sh, 2 ta 1 elementli va 1 ta 2 elementli, ya'ni X to'plamning o'zidan iborat bo'lgan qism to'plamlardir. Jami: 1+2+1=4. Demak, 2 elementli to'plamning hammasi bo'lib 4 ta qism to'plami bor ekan

Quvvati n ga teng bo'lgan A to'plamning to'plam ostilari soni 0 elementli, 1 elementli, 2 elementli, 3 elementli, ..., n elementli toplam ostilari sonining yig'indisidan iborat bo'ladi.

Masalan A={1,2,3,4,5,6,7,8} to'plam quvvati |A|=8. To'plam ostilari soni 0 elementli, 1 elementli, 2 elementli, 3 elementli, 4 elementli, 5 elementli, 6 elementli, 7 elementli, 8 elementli toplam ostilari sonining yig'indisidan iborat

A to'plamning barcha qism to'plamlarini 0 va 1 lardan iborat ketma-ketlik bilan ifodalash mumkin. Agar element qism to'plamga tegishli bo'lsa, 1 bilan, tegishli bo'lmasa, 0 bilan almashtiramiz. Masalan {3,6,7,8} qism to'plamini (0,0,1,0,0,1,1,1) kabi shifrlash mumkin. Barcha shunday kortejlar soni $2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2=2^8$ ga teng.

Demak, 8 elementli A to'oplamning barcha qism to'plamlari soni 2^8 ga teng ekan.

Umumiy holda chekli m elementli X to'plamning barcha qism to'plamlari sonini topish masalasini qo'yaylik. Uni hal qilish uchun istalgan tarzda X to'plamni tartiblaymiz. So'ng har bir qism to'plamni m o'rinli kortej sifatida shifrlaymiz: qism to'plamga kirgan element o'rniga 1, kirmagan element o'rniga 0 yozamiz. Shunda qism to'plamlar soni 2 ta {0; 1} elementdan tuzilgan barcha m o'rinli kortejlar soniga teng bo'ladi: $\overline{A_2^m}=2^m$. Bundan, 4 elementli to'plam to'plam ostilari soni $2^4 = 16$ ga, 3 elementli to'plamning to'plamostilari soni $2^3 = 8$ ga tengligi kelib chiqadi. Shu bilan birga bu son Paskal uchburchagining 4-qatoridagi sonlar yig'indisiga ham teng, ya'ni $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 1 + 3 + 3 + 1 = 8$.

Umumiy holda: $C_m^0 + C_m^1 + \cdots + C_m^{m-1} + C_m^m = 2^m$.

Nazorat uchun savollar

1. Kombinatorika masalasi ta'rifini bering.
2. Kombinatorika fani rivojiga xissa qo'shgan olimlarni ayting.
3. Yig'indi qoidasining turli xollarini ko'rsating.
4. Ko'paytma qoidasini ayting va misollar keltiring.
5. Takrorlanadigan o'rinlashtirishlarga misol keltiring.
6. Takrorlanmaydigan o'rinlashtirishlarga misol keltiring.
7. Takrorlanmaydigan o'rin almashtirishlarga misol keltiring.
8. m elementli x to'plamning barcha qism to'plamlari nechta?
9. Paskal uchburchagining xususiyatini ayting.

Mashqlar:

1. 32 o'quvchining 12 tasi voleybol seksiyasiga, 15 tasi basketbol seksiyasiga, 8 kishi esa ikkala seksiyaga ham qatnashadi. Sinfdagi necha o'quvchi hech bir seksiyaga qatnashmaydi?

2. Sinfdagi bir necha o'quvchi marka yig'dilar. 15 o'quvchi O'zbekiston markalarini, 11 kishi chet el markalarini, 6 kishi ham O'zbekiston markalarini, ham chet el markalarini yig'di. Sinfda necha o'quvchi marka to'plagan?

3. 30 o'quvchidan 18 nafari matematikaga, 17 nafari esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni nechta bo'lishi mumkin? (Ko'rsatma. Ikkala fanga ham qiziqmaydigan o'quvchilar soni $k \in \{0, 1, 2, 3, ..., 12\}$).

4. 100 odamdan iborat sayyohlar guruhida 10 kishi nemis tilini ham, fransuz tilini ham bilmaydi, 75 nafari nemis tilini, 83 nafari esa fransuz tilini biladi. Ikkala tilni ham biladigan sayyohlar sonini toping.

5. 26 o'quvchining 14 nafari shaxmatga, 16 nafari shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar qancha?

6. 70 o'quvchidan 34 nafari matematikaga, 45 nafari esa fizikaga qiziqadi. Ikkala fanga ham qiziqadigan o'quvchilar soni qancha bo'lishi mumkin?

7. 40 o'quvchining 24 nafari shaxmatga, 26 nafari shashkaga qiziqadi. Ham shashkaga, ham shaxmatga qiziqadigan o'quvchilar qancha?

8. Sinfda 35 o'quvchi o'qiydi. Ulardan 17 nafari matematika to'garagiga, 21 tasi pedagogika to'garagiga boradi. 10 o'quvchi ikkala to'garakga ham boradi. Qancha o'quvchi hech bir to'garakga bormaydi?

9. Sinfda 40 o'quvchi o'qiydi. Ulardan 32 nafari matematika to'garagiga, 14 pedagogika to'garagiga boradi. 6 o'quvchi ikkala to'garakga ham boradi. Qancha o'quvchi hech bir to'garakga bormaydi?

10. 150 nafar talabadan ingliz tilini 32, nemis tilini 23, fransuz tilini 25, ingliz va nemis tilini 13 nafar, ingliz, fransuz tilini 9 nafar, nemis, fransuz tilini 7 nafar talaba o'rganadi. Uch tilni ham o'rganadigan talabalar soni 6 nafar. Qancha talaba faqatgina bir tilni o'rganadi va qancha talaba bitta ham tilni o'rganmadi?

11. A={1,2,3,4,5,6,7,8,9,0} to'plam elementlaridan foydalanib,

a) 7 raqamli barcha pasport nomerlari sonini toping.

b) 4 raqamli barcha transport chiptalarining nomerlari sonini toping.

c) 5 raqamli barcha talabalar talabalik guvoxnomasi nomerlari sonini toping.

d) 3 raqamli yengil avtomashina nomerlari soni toping.

12. Ifoda qiymatini toping: a) $\frac{14!}{12!}$; b) $\frac{19!}{17!}$; c) $\frac{16!}{18!}$; d) $\frac{9!}{5!\,4!}$; e) $\frac{10!}{6!\,4!}$; f) $\frac{16!}{12!\,6!}$; j) $\frac{7!+6!+5!}{8!-7!}$; k) $\frac{17!-16\cdot16!-15\cdot15!}{14!}$.

13. Soddalashtiring: a) $\frac{(k-2)!}{k!}$; b) $\frac{(p+1)!}{(p-2)!}$.

14. 1,2,3,4,5 raqamlardan foydalanib nechta besh xonali son yozish mumkin?

15. 4 bemor shifokor oldiga necha usul bilan kirishi mumkin?

16. 6 o'rinli aylana shaklidagi stolga necha usul bilan odamlarni joylashtirish mumkin?

II BOB. MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

2.1. Matematik tushuncha

Real va abstrakt tushuncha. Atrofimizdagi olam turli obyektlardan iborat. Ular o'ziga xos xossalar va o'zaro munosabatlarga ega. Bu obyektlarni o'rganganimizda ularni o'xshashligi va umumiy xossalariga qarab sinflarga ajratamiz. Bu obyektlar va sinflar ma'lum bir nom bilan nomlanadi. Masalan, «daraxt», «chumchuq», «mushuk», «uy», «avtobus» yoki «o'simlik», «qush», «hayvon», «bino», «mashina» va hokazo. Obyektlar yoki obyektlar sinfining nomlanishi inson ongida ular haqida tushuncha paydo bo'lganini bildiradi. Chunki har bir nom atalishi bilan ongimizda u bilan bog'liq tasavvurlar paydo bo'ladi. Biz bu obyekt yoki obyektlar sinfining eng muhim xossalarini eslaymiz: rangi, shakli, o'lchami, hidi, tuzilishi va h. k.

Demak, tushuncha – bu narsalar va hodisalarni ba'zi bir muhim alomatlariga ko'ra farqlash yoki umumiylashtirish natijasi ekan. Alomatlar esa narsa yoki hodisalarning bir-biriga o'xshashligi yoki farqlanishini bildiruvchi xossalardir.

Muhim xossa deb, faqat shu obyektga tegishli va bu xossasiz obyekt mavjud bo'la olmaydigan xossalarga aytiladi. Obyektning mavjudligiga ta'sir qilmaydigan xossalar muhim bo'lmagan xossalar deb sanaladi.

Agar biror obyektning barcha muhim xossalari to'plangan bo'lsa, bu obyekt haqida tushuncha bor deyiladi.

Fan rivojlanishi natijasida abstrakt tushunchalar yuzaga kela boradi. Bunday tushunchalar insoniyat to'plagan katta tajribani umumlashtirish natijasida yuzaga keladi va moddiy dunyoning tub mohiyatini aks ettiradi, lekin real obyektlarning ko'pgina xossalaridan ko'z yumgan holda, ularni ideallashtirish natijasida hosil bo'ladi.

Masalan, bir jismni geometrik shakl sifatida qarasak, bizni uning shakli, o'lchamlari qiziqtiradi, lekin uning nimadan yasalgani, rangi, og'irligi qandayligi biz uchun ahamiyat kasb etmaydi. Ko'pincha abstrakt, ideal obyekt ega bo'lgan xossalar real obyektga tegishli bo'la olmaydi. Masalan, geometriyada kesmani cheksiz bo'lish mumkin deb hisoblanadi, real hayotda biror jismni cheksiz ko'p bo'lakka bo'lish mumkin emas, chunki u chekli sondagi atomlardan iborat bo'ladi.

Tushunchaning hajmi va mazmuni. Har qanday tushuncha nom, mazmun va hajmga ega bo'ladi.

Obyektning barcha muhim xossalari to'plami tushunchaning mazmunini tashkil qiladi. Masalan, «son» tushunchasi mazmuniga sonlarni taqqoslash, yozuvda ifodalash, son o'qida tasvirlash, sonlar ustida turli arifmetik amallar bajarish kabi xossalar kiradi.

Bir xil muhim xossalarga ega obyektlar to'plami tushuncha hajmini tashkil etadi. Masalan, «son» tushunchasi hajmini natural, nomanfiy, butun, kasr, ratsional, irratsional, haqiqiy, mavhum va komleks sonlar tashkil etadi.

Demak, tushuncha hajmi bitta tushuncha bilan nomlanishi mumkin bo'lgan obyektlar to'plami ham ekan. Tushuncha mazmuni uning hajmini aniqlaydi va aksincha.

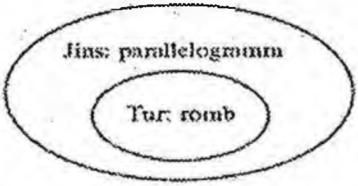
Lekin tushuncha hajmi va mazmuni orasida teskari bogianish mavjud. Tushunchaning hajmi qancha «katta» bo'lsa, mazmuni shuncha «kichik» va aksincha bo'ladi. Masalan, «tog'ri to'rtburchak» tushunchasi mazmuniga «tomonlari teng bo'lgan» xossasi qo'shilsa, uning hajmi kamayadi va faqat kvadratlardan iborat bo'ladi, lekin «burchaklari to'g'ri bo'lishi» xossasi olib tashlansa, hajm kengayib, barcha parallelogrammlardan iborat bo'lib qoladi.

Agar biror tushuncha hajmi ikkinchi tushuncha hajmiga kirsa, ikkinchi tushuncha birinchi tushunchaga nisbatan umumiy, birinchi tushuncha ikkinchisiga nisbatan xususiy deyiladi.

Masalan, «uchburchak» tushunchasi «to'g'ri burchakli uchburchak» tushunchasi uchun umumiy, «to'g'ri burchakli uchburchak» tushunchasi esa «uchburchak» tushunchasining xususiy holidir.

Tushunchani ta'riflash usullari. Tushunchalarni o'rganishda ularni umumiyroq bo'lgan tushuncha orqali tushuntirish yoki, boshqacha aytganda, ta'riflashga harakat qilinadi. Shu umumiyroq tushuncha ham ilgariroq tushuntirilgan yoki ta'riflangan bo'lishi kerak. Lekin har bir uchraydigan tushunchani ilgari ma'lum bo'lgan tushunchani topib ta'rif beraverish murakkab va mumkin bo'lmagan jarayondir. Shuning uchun ba'zi tushunchalar ta'riflanmaydi va boshlang'ich tushuncha deb qabul qilinadi.

Masalan, siz tanishgan «to'plam» tushunchasi butun matematika kursining asosiy tushunchalaridan biridir.



2.1-rasm

Tushunchaga ta'rif berishning bir necha usuli bor. Shulardan biri oshkor ta'rif bo'lib, unda, ta'riflanayotgan tushunchaga nisbatan umumiyroq tushunchani ko'rsatib, shu umumiy tushuncha bilan nomlangan obyektlardan ta'riflanayotgan tushuncha qanday xossalari bilan ajralib turishi ko'rsatiladi.

Masalan, «barcha tomonlari teng parallelogramm – romb deyiladi», ta'rifida parallelogramm umumiy tushuncha bo'lib, romb qolgan parallelogrammlardan tomonlarining tengligi bilan ajralib turadi. Bunday ta'rif odatda jins va tur orqali ta'riflash deyiladi. Ta'riflanayotgan tushuncha hajmi unga nisbatan umumiyroq bo'lgan tushuncha hajmining qism to'plami bo'ladi va Eyler-Venn diagrammalarida tasvirlanadi (2.1-rasm).

Oshkormas ta'rifga aksiomatik ta'riflash kiradi va bunday ta'rifda ta'rif berilayotgan tushuncha obyekti aniq ko'rsatilmaydi.

Tushuncha ta'rifi quyidagi talablarni qanoatlantirishi kerak:

1) ta'riflanayotgan tushunchani bir qiymatli aniqlashga imkon berishi;

2) avval ma'lum bo'lgan tushunchalarga asoslanishi;

3) tushunchaning o'zi yoki shu tushuncha bilan ta'riflangan tushuncha bilan ta'riflashga – «yolg'on doiraga» yo'l qo'ymasligi;

4) ortiqcha xossalarni (qolganlaridan keltirib chiqarish mumkin bo'lgan) ko'rsatmasligi kerak.

Demak, ta'rifda qisqa va ixcham shaklda ta'riflanayotgan tushuncha haqida aniq ma'lumot berilishi kerak ekan.

Aksiomatik ta'riflar bilan siz «Nomanfiy butun sonlar to'plamining aksiomatik qurilishi» bobida tanishasiz.

Matematikada qarama-qarshilik orqali ta'rif berish usuli ham bor: «X to'plamda R munosabat refleksiv bo'lmasa, u antirefleksiv munosabat deyiladi», «A va B to'plamlar umumiy elementga ega bo'lmasa, ular kesishmaydi, deyiladi» va h. k.

Ko'pincha matnda biror obyektni nomlash, biror atama yoki belgini tushuntirish uchun nominal ta'riflardan foydalaniladi. Masalan, «C_n^k – bu n elementdan k tadan takrorlashsiz guruhlashlar soni»; «M – sinfdagi barcha o'quvchilar to'plami», «5 – besh soni yozuvi» va h.k.

Tushunchalar orasidagi munosabat. Tushunchalar va obyektlar xossalari orasidagi munosabatlarni qaraylik. Agar biror a tushuncha hajmiga kiruvchi barcha obyektlar biror α xossaga ega bo'lsa, α xossa shu tushunchaning zaruriy belgisi yoki muhim xossasi bo'ladi. Masalan; kvadrat diagonallarining teng bo'lish xossasi uning zaruriy belgisi yoki muhim xossasi hisoblanadi. Berilgan tushunchaning muhim xossalari ichida uning ajralib turuvchi xarakteristik xossasi ham mavjud.

Bu xossa obyektlarning ma'lum sinfiga xos bo'lib, boshqa obyektlarga xos emas. Masalan, diagonallar uzunliklarini tenglik xossasi parallellogramlar sinfidagi to'g'ri to'rtburchaklar uchun xarakteristik xossa sanaladi.

To'rtburchaklar sinfida bu xossa xarakteristik xossa emas, chunki diagonallari teng bo'lgan to'rtburchaklar to'g'ri to'rtburchaklar emas.

Masalan, diagonallari teng bo'lgan to'rtburchak teng yonli trapetsiya ham bo'lishi mumkin.

Agar berilgan sinf obyektlarining ba'zilari α xossaga ega bo'lib, bu sinfga kirmaydigan obyektlarning hech bittasi bu xossaga ega bo'lmasa, u holda α – xossa tushuncha uchun yetarli belgi hisoblanadi.

Masalan, to'rtburchak parallellogramm bo'lishi uchun uning diagonallarining kesishish nuqtasida teng 2 ga bo'linishi yetarli belgi hisoblanadi.

Tushuncha va xossalar orasida turli xil bog'lanishlar mavjud. Shuningdek xossalarning o'zlarining o'rtasida ham turli xil bog'lanishlar bor. Aytaylik, ikkita α va β xossalar berilgan bo'lsin.

Quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1) ob'ektlar ikkita α va β xossalarga ega bo'lishi, obyektlar faqat α xossaga ega bo'lishi, obyektlar faqat β xossaga ega bo'lishi, obyektlar ikkala α va β xossalarga ega bo'lmasligi mumkin. Bu xossalarga bog'lanmagan xossalar deyiladi.

Masalan, natural sonlarni 3 ga bo'linishi xossasi 5 ga bo'linishi xossasiga bog'lanmagan, 3 ga ham 5 ga ham bo'linadigan natural sonlar bor, 3 ga bo'linadigan, ammo 5 ga bo'linmaydigan, 5 ga bo'linib, 3 ga bo'linmaydigan, 3 ga ham 5 ga ham bo'linmaydigan natural sonlar mavjud.

2) Ixtiyoriy obyekt α xossaga ega bo'lsa, β xossaga ham ega bo'ladi. Bu holda β xossa α xossaning natijasi deyiladi. Masalan, natural sonlarni 3 ga bo'linishi 9 ga bo'linish xossasining natijasi desa bo'ladi. Shuningdek α xossa β xossaning natijasi sifatida ham bo'lishi mumkin.

3) Ixtiyoriy α xossaga ega bo'lgan obyekt β xossaga ham ega, β xossaga ega bo'lgan obyekt α xossaga ham ega, bu holda α va β xossalar teng kuchli deyiladi. Masalan, kvadratning tomonlari teng xossasi, uning diagonnallari o'zaro perpendikulyar va teng degan xossasiga teng kuchli.

4) α xossaga ega bo'lgan bitta obyektt ham β xossaga ega emas, bu holda α va β xossalari birgalikda emas deyiladi.

5) Ixtiyoriy obyekt α va β xossalardan faqat bittasiga ega. Bu holda α va β xossalar qarama-qarshi deyiladi. Masalan, natural sonlarning juftlik va toqlik xossalari qarama-qarshi xossalardir. Haqiqatan ham, istalgan natural son yoki toq yoki juft bo'ladi.

Nazorat uchun savollar

1. Real va abstrakt tushunchalar haqida ma'lumot bering.

2. Tusunchaning hajmi va mazmunini tushuntiring. Ular orasida qanday bog'lanish bor?

3. Tushunchani ta'riflash usullarini ayting. Tushunchani ta'riflashga qanday talablar qo'yiladi?

4. Tushunchalar orasidagi munosabat turlarini ayting.

5. Tushunchaning qanday xossalari muhim va qandaylari muhim bo'lmagan hisoblanadi?

Mashqlar:

1. Kimyo, fizika, geografiya, tarix fanlariga oid tushunchalarni ayting, bu fanlar uchun umumiy bo'lgan tushunchalarni toping.

2. Biror tushunchani tanlab, uning muhim va muhim bo'lmagan xossalarini ayting.

3. «Parallelogramm» tushunchasining muhim va muhim bo'lmagan xossalari qanday?

4. «Aylana» tushunchasining hajmi va mazmunini ayting.

5. Biror tushuncha misolida hajm va mazmun orasidagi teskari bog'lanishni ko'rsating.

6. Biri ikkinchisi uchun umumiy bo'ladigan tushunchalar ketma-ketligini tuzing. Kvadrat, to'g'ri toprtburchak, romb, parallelogramm, to'rtburchak tushunchalari shunday ketma-ketlikka misol bo'la oladimi?

7. O'rta maktab darsliklaridan tur va jins orqali ta'rifga misol bo'ladigan to'rtta ta'rifni topib yozing, undagi umumiy tushunchani va ta'riflanayotgan tushunchani farqlovchi xossani ko'rsating.

8. Boshqa ta'riflash usullariga oid misollar keltiring.

9. Ta'riflashdagi «yolg'on doiraga» misol keltiring.

10. Biror tushuncha bir ta'rifda ta'riflanuvchi, boshqa ta'rifda ta'riflovchi bo'lishi mumkinmi? Misol keltiring.

2.2. Mulohazalar va ular ustida amallar

Mulohazalar haqida umumiy tushuncha.

Ma'lumki, o'zbek tilidagi gaplar to'plami 3 ta sinfga ajratiladi.

D – «Darak gaplar» to'plami.

C – «So'roq gaplar» to'plami.

X – «His-hayajon gaplar» to‘plami.

Haqiqatan ham, $D\cup C\cup X$ – gaplar to‘plami va $D\cap C\cap X=\emptyset$ bo‘ladi. O‘z navbatida «darak gaplar» to‘plamini ham 3 ta to‘plamga ajratish mumkin.

Rost yoki yolg‘onligini bir qiymatli aniqlash mumkin bo‘lgan darak gaplar. Masalan:

Toshkent shahri O‘zbekiston Respublikasining poytaxti – rost;

London shahri Germaniyaning poytaxti – yolg‘on;

2– tub son – rost;

$5 > 6$– yolg‘on;

«3 soni 15 sonining bo‘luvchisi» – rost.

Tarkibida o‘zgaruvchi ishtirok etgan darak gaplar.

Masalan:

X shahar O‘zbekiston Respublikasida joylashgan;

y –6 dan kichik tub son;

x – 5 dan kichik natural son;

z – o‘zbek tilidagi unli tovush.

Rost yoki yolg‘onligini aniqlash mumkin bo‘lmagan darak gaplar.

Masalan:

Men bugun mehmonga bormoqchiman.

Bugun yomgir yog‘sa kerak.

Matematika qiyin fan.

1-ta’rif. Rost yoki yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanadigan darak gaplar **mulohaza** deyiladi.

So‘roq yoki his-hayajon gaplar mulohaza bo‘la olmaydi. Rost yoki yolg‘onligi bir qiymatli aniqlanmaydigan noma’lum qatnashgan gaplar ham mulohazaga kirmaydi.

Mulohazalar bu matematik mantiq fanining boshlang‘ich tushunchasi hisoblanib, u quyidagicha quriladi:

1) ob’ektlar to‘plami beriladi:

2) obyektlarning ba’zi bir xossalari va ular orasidagi munosabatlar bayon qilinadi.

Mulohazalar nazariyasining boshlang‘ich obyektlari sodda mulohazalardan tashkil topadi va ular lotin alifbosining katta harflari A,B,C,...lar bilan belgilanadi.

Sodda va murakkab mulohazalar haqida tushuncha. Mulohazalar sodda va murakkab bo‘ladi.

Murakkab mulohazalarni sodda mulohazalarga ajratish mumkin. Masalan,

a) «5 tub son va u 10 sonining bo‘luvchisi».

b) «2 eng kichik tub son va u juft son».

d) «Agar 375 sonning raqamlari yig‘indisi 3 ga bo‘linsa, u holda shu sonning o‘zi ham 3 ga bo‘linadi».

e) «3^2= 9 yoki 9 soni 3 ga bo‘linadi».

f) «Agar 12340 sonning yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugasa, u faqat va faqat shundagina 5 ga bo‘linadi» – murakkab mulohazalardir.

Bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg‘on bo‘lgan mulohazalar ekvivalent mulohazalar deyiladi. Ekvivalent mulohazalar $A \equiv B$ ko‘rinishda yoziladi.

Matematik mantiq fanini mulohazani bayon qilish shakli emas, faqat rost yoki yolg‘onligi qiziqtiradi. Bundan buyon rost mulohazani «R» yoki «1», yolg‘on mulohazani «Y» yoki «0» bilan belgilaymiz.

Masalan,

A – "4 > 3" – rost mulohaza

B – "7+5=12" – rost mulohaza

C – "5-juft son" – yolg‘on mulohaza

D – "7-toq son" – rost mulohaza.

Bu mulohazalarda n / A, B, D lar rost, C – yolg‘on. Bizga ma’lumki, sodda mulohazalardan bog‘lovchi so‘zlar yordamida murakkab mulohazalar hosil qilinadi. Bular «emas», «va», «yoki», «... kelib chiqadi», «agar bo‘lsa, ... u holda», «zarur va yetarli» kabi bog‘lovchi so‘zlar bo‘lib, bularni har bittasi bitta mantiqiy amalga mos keladi.

Mulohaza inkori.

2-ta’rif. A mulohaza **inkori** deb, A rost bo‘lganda yolg‘on, yolg‘on bo‘lganda rost bo‘luvchi mulohazaga aytiladi.

A mulohaza inkori $\bar{A}$ ko'rinishda belgilanadi va «A emas», «A ekanligi yolg'on» deb o'qiladi. Masalan, A: «$3^2=6$» bo'lsa, $\bar{A}$: «$3^2\neq6$»;

A: «Hozir yoz fasli» bo'lsa, uning inkori $\bar{A}$: «Hozir yoz fasli emas» yoki «Hozir yoz fasli ekanligi yolg'on» kabi ifodalanadi.

Mulohaza inkorining rostlik jadvali quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

A	$\bar{A}$
1	0
0	1

Mulohaza inkorining xossasi: $\bar{\bar{A}} \equiv A$ bo'ladi:

Masalan, A: «17 –tub son»;

$\bar{A}$: «17 – tub son emas»;

$\bar{\bar{A}}$: «17 – tub son emasligi yolg'on» yoki «17 – tub son».

Mulohazalar konyunksiyasi.

3-ta'rif. Ikkita sodda A, B mulohazalardan tuzilgan «A va B» mulohazaga mulohazalar **konyunksiyasi** deyiladi.

Mulohazalar konyunksiyasi uning tarkibiga kirgan mulohazalar rost bo'lganda, rost bo'ladi va «A∧B» yoki «A&B» ko'rinishda yoziladi hamda «A va B» kabi o'qiladi.

A	B	A∧B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

Konyunksiyaning rostlik jadvali yuqoridagi ko'rinishda bo'ladi:

Masalan, a) A: «5 – tub son» – (R); B: «5 >6» – (Y) bo'lsin, u holda A∧B: «5 – tub son va u 6 dan katta» – yolg'on mulohaza bo'ladi.

b) A: «3 < 8» – (R), B: «8 < 11» – (R), A∧B: «3< 8 ∧ 8< 11» yoki «3<8<11», ya'ni tengsizliklar konyunksiyasini qo'sh tengsizlik ko'rinishida yozish mumkin va aksincha; ta'rifga ko'ra «3 < 8 < 11» – rost mulohaza.

Mulohazalar konyunksiyasining xossalari:

1°. $A \wedge B = B \wedge A$ (kommutativlik);

2°. $(A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C) = A \wedge B \wedge C$ (assotsiativlik);

3°. $A \wedge \overline{A} \equiv Y$ ($A \wedge \overline{A}$ – aynan yolg'on mulohaza).

Mulohazalar konyunksiyasi xossalarining to'g'riligini rostlik jadvallari tuzish va mos ustunlardagi murakkab mulohazalar qiymatlarini taqqoslab tekshirish mumkin.

Mulohazalar dizyunksiyasi

4-ta'rif. Ikkita sodda A, B mulohazalardan tuzilgan «A yoki B» mulohazaga mulohazalar dizyunksiyasi deyiladi.

Mulohazalar dizyunksiyasi «AVB» ko'rinishda yoziladi, «A yoki B» deb o'qiladi va uning tarkibiga kirgan mulohazalarning hech bo'lmaganda bittasi rost bo'lganda, rost bo'ladi.

Dizyunksiyaning rostlik jadvali quyidagicha:

A	B	AV B
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Masalan:

a) A: «Varshava shahri Germaniyaning Poytaxti» – Y.

B: «Varshava shahri Polshaning poytaxti» – R.

AVB: «Varshava shahri Germaniyaning yoki Polshaning poytaxti» – R.

b) A: «10 – juft son» – R.

B: «π – irratsional son» – R.

AV B: «10 – juft son yoki π – irratsional son» – R.

d) A: «15 – juft son» – Y.

B: «Kvadrat to'g'ri to'rtburchak emas» – Y.

AVB: «15 – juft son yoki kvadrat to'g'ri toprtburchak emas» – Y.

Mulohazalar dizyunksiyasining xossalari:

1°. AVB = B V C (kommutativlik).

2°. (AVB)V C=AV(BVC)=AVBVC (assotsiativlik).

3°. $A \vee A \equiv R$ ($A \vee A$ – aynan rost mulohaza).

4°. $A \vee (B \wedge C) = (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$ – dizyunksiyaning konyunksiyaga nisbatan distributivligi.

5°$A \wedge (B \vee Q) = (A \wedge B) \vee (A \wedge Q)$ – konyunksiyaning dizyunksiyaga nisbatan distributivligi.

6°. $\left.\begin{array}{l} \overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B} \\ \overline{A \vee B} = \bar{A} \vee \bar{B} \end{array}\right\}$ De-Morgan qonunlari (De-Morgan shotland matematigi (1806–1871)).

Tengliklarning to‘g‘riligi rostlik jadvalini tuzib isbot qilinishi mumkin.

De-Morgan qonunlarini olaylik. a) $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$, ya’ni mulohazalar konyunksiyasi inkori mulohazalar inkorlarining dizyunksiyasi bilan ekvivalent.

Rostlik jadvalini tuzamiz.

A	B	$\bar{A}$	$\bar{B}$	$A \wedge B$	$\overline{A \wedge B}$	$\bar{A} \vee \bar{B}$
1	1	0	0	1	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	0	1	1

Jadvalning oxirgi ikki ustuni A va B mulohazalar qiymatlarining turli kombinatsiyalarida bir xil. Demak, $\overline{A \wedge B} = \bar{A} \vee \bar{B}$ ekanligi to‘g‘ri.

Misol keltiraylik.

A – «Men shaxmat o‘ynayman».

B – «Men tennis o‘ynayman».

$\overline{A \wedge B}$ – «Mening shaxmat va tennis o‘ynashim yolg‘on».

$\bar{A} \vee \bar{B}$ – «Men shaxmat yoki tennis o‘ynamayman».

Mulohazalar implikatsiyasi.

5-ta’rif. Sodda A va B mulohazalardan tuzilgan «Agar A bo‘lsa, B bo‘ladi» ko‘rinishidagi mulohaza A va B mulohazalarning implikatsiyasi deyiladi va «$A \Rightarrow B$» ko‘rinishda belgilanadi.

$A \Rightarrow B$ implikatsiya faqat A rost B yolg‘on bo‘lgandagina yolg‘on bo‘ladi. A – implikatsiyaning sharti, B – xulosasi deyiladi.

A ni B uchun yetarli, B ni A uchun zaruriy shart deb ham ataladi. Implikatsiyaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

A	B	A⇒ B
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Masalan, a) A:«15 soni 3 ga bo'linadi» – R; B: «15 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» – R. A⇒B: «Agar 15 soni 3 ga bo'linsa, u holda 15 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» – R.

b) A: «$5 \cdot 5 = 25$», B:«$5 + 5 = 15$» bo'lsin. A⇒B: «Agar $5 \cdot 5 = 25$ bo'lsa, u holda $5+5=15$ bo'ladi» – Y.

d) A:«25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamaydi» – R. B: «25 soni 10 ga bo'linadi» – Y. A⇒B: «Agar 25 sonining yozuvi 0 raqami bilan tugamasa, u holda 25 soni 10 ga bo'linadi» – Y.

Agar A⇒B implikatsiya berilgan bo'lsa, B⇒A unga teskari, $\bar{A} \Rightarrow \bar{B}$ – qarama-qarshi, $\bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ esa qarama-qarshiga teskari implikatsiyalar deyiladi.

Mulohazalar implikatsiyasining xossalari:

1°. $A \Rightarrow B = \bar{A} \vee B$.

2°. $A \Rightarrow B = \bar{B} \Rightarrow \bar{A}$ (kontrapozitsiya qonuni).

Mulohazalar ekvivalensiyasi.

6-ta'rif. Sodda A va B mulohazalardan tuzilgan «A faqat va faqat B bo'lsa, bo'ladi» ko'rinishidagi mulohaza A va B mulohazalarning ekvivalensiyasi deyiladi va «A⇔B» ko'rinishda belgilanadi. A⇔B ekvivalensiya A va B mulohazalarning qiymatlari bir xil bo'lganda rost bo'ladi. Uning rostlik jadvali:

A	B	A⇔B
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Masalan, «129 soni 3 ga faqat va faqat uning raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsagina bo'linadi».

129⋮3⇔(1+2+9)⋮3. – Rost

1. $\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$ mulohazaning rostlik jadvali quyidagicha bo'ladi:

A	B	C	$A \Rightarrow B$	$\overline{A \Rightarrow B}$	$C \vee A$	$\overline{A \Rightarrow B} \Leftrightarrow (C \vee A)$
1	1	1	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1	0
1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1

7-ta'rif. Tarkibiga kirgan ixtiyoriy elementar mulohazalarning rost yoki yolg'onligidan qat'iy nazar rost bo'ladigan murakkab mulohaza tavtologiya deyiladi. Ularning rostligi rostlik jadvali yordamida isbot qilinadi.

Quyidagi tavtologiyalarning rostligini rostlik jadvali orqali isbotlang.

✓«Modus Ponens»: $(p \wedge (p \Rightarrow q)) \Rightarrow q$;
✓«Modus Tollens»: $(p \Rightarrow q) \wedge \neg q) \Rightarrow \neg p$;
✓$((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$;
✓$((p \vee q) \wedge \neg p) \Rightarrow q$;
✓$((p \vee q) \vee r) \Leftrightarrow (p \vee (q \vee r))$
✓$((p \wedge q) \wedge r) \Leftrightarrow (p \wedge (q \wedge r))$
✓$((p \Rightarrow q) \wedge (r \Rightarrow s) \wedge (p \vee r)) \Rightarrow (q \vee s)$;
✓$p \wedge q \Rightarrow p$
✓$p \Rightarrow p \vee q$
✓$((p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow (q \wedge r))$;

Nazorat uchun savollar:

1. Mulohaza ta'rifini ayting.

2. Darak gaplar, so‘roq gaplar va his-hayajon gaplarning barchasi mulohaza bo‘la oladimi?

3. Murakkab mulohaza sodda mulohazadan nimasi bilan farq qiladi?

4. Mulohazalar ustida bajariladigan qanday mantiqiy amallarni bilasiz?

5. Inkor amalining ta’rifini ayting.

6. Konyunksiya amalining ta’rifini va xossalarini ayting.

7. Mulohazalar dizyunksiyasining ta’rifi va xossalarini ayting.

8. Mulohazalar dizyunksiyasining rostlik jadvalini ko‘rsating.

9. Mulohazalar implikatsiyasining ta’rifi va xossasini ayting.

10. Mulohazalar implikatsiyasining rostlik jadvalini ko‘rsating.

11. Mulohazalar ekvivalensiyasining ta’rifni va xossasini ayting.

12. Mulohazalar ekvivalensiyasining rostlik jadvalini ko‘rsating

Mashqlar:

1. Quyidagi gaplar ichidan mulohazalarni ajrating va ularning rost yoki yolg‘on ekanligini aniqlang:

a) Sirdaryo Orol dengiziga quyiladi.

b) Siz qaysi oliygohda o‘qiysiz ?

c) O‘zbekiston Mustaqilligining 29 yilligi muborak bo‘lsin!

d) Har qanday son musbat.

e) 0 har qanday haqiqiy songa bolinadi.

f) 2, 3, 5 sonlari tub sonlar.

g) Barcha insonlar yoshi 20 da.

h) Galaktikamizda shunday sayyora bor-ki, unda hayot mavjud.

i) 5 soni 25 va 70 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi.

j) $3x^3 - 5y + 9$.

2. Mulohazalarga misollar keltiring. Ularning rost yoki yolg‘onligini aniqlang.

3. Quyidagi jumlalar orasidan mulohazalarni ajrating va ularning rostlik qiymatini toping:

a) 9 – butun son; b) 48 ni 5 ga bollganda 4 qoldiq qoladi; d) so'roq gap mulohaza bo'ladi; e) $x \leq 7$; f) $17 \cdot 2 - 21 = 13$; g) $x^2 + 4 = 13$; h) 24 – tub son.

4. Quyidagi mulohazalar inkorini tuzing va ularning rostlik qiymatini toping:

a) 225 soni 9 ga bo'linadi; b) 21 soni 7 ga bo'linadi;

c) 7, 6 – natural son; g) Praga–Bolgariyaning poytaxti;

d) $7 < 3$; e) $27 : 3 + 2 \cdot 3 - 18$ ifodaning qiymati 0 ga teng.

5. Quyidagi juftliklarining qaysisida mulohazalar bir–birining inkori?

a) $2 \leq 0$, $2 \geq 0$. $8 \neq 9$, $9 > 8$. $7 < 11$, $11 \geq 0$.

b) $6 > 9$, $6 \geq 9$. $2 \leq 0$, $2 > 0$. $5 > 7$, $5 \geq 0$.

c) «ABC – to'g'ri burchakli uchburchak», «ABC – o'tmas burchakli uchburchak».

d) «f funksiya – toq» , «f funksiya – juft».

e) «Barcha tub sonlar toq», «Shunday tub son mavjudki, u juft».

f) «Irratsional sonlar mavjud», «Barcha sonlar ratsional».

6. Quyidagi mulohazaning rostlik qiymatini aniqlang:

Agar 12 soni 6 ga bo'linsa, u holda 12 soni 3 ga bo'linadi.

6. A: «4 < 7», B: «Toshkent O'zbekistonning poytaxti» mulohazalari berilgan bo'lsa, ularning konyunksiyasini tuzing va rostlik qiymatini toping. Shuningdek, $A \wedge B$, $A \vee B$, $A \Rightarrow B$ mulohazalarni so'z orqali ifodalang.

7. A: «26 : 2 + 11 = 28», B: «3 - tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, $A \vee B$, $B \vee A$, $\bar{A} \vee B$, $\bar{A} \vee \bar{B}$, $A \vee \bar{B}$ larni so'z orqali ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.

C: «3 – toq son», B: «7 soni 28 ning bo'luvchisi» mulohazalari berilgan bo'lsa, ularning implikatsiyasini ifodalang va rostlik qiymatini toping.

A: «111201 sonining raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linadi» B:«111201 soni 3 ga bo'linadi» mulohazalari berilgan. Ularning ekvivalensiyasini so'z yordamida ifodalang va rostlik qiymatini toping.

8. A: «9 – tub son», B: «17 – toq son», C: «18 soni 3 ga bo'linadi», D: «24 tub son» sodda mulohazalar berilgan bo'lsa, quyidagi murakkab mulohazalarni so'z yordamida ifodalang va ularning rostlik qiymatini toping.

$A \vee B$; b) $A \wedge B$; d) $A \vee A$; e) $A \Rightarrow B$; f) $C \Leftrightarrow D$;

g) $A \wedge C \Rightarrow D$; h) $A \wedge D \Rightarrow C$; i) $A \vee D$; j) $(A \wedge B \wedge C) \vee D$.

9. A: «7 soni 56 ning bo'luvchisi», B: «4 soni toq son», C: «13 soni tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, a) $A \vee B \vee C$; b) $A \wedge B \wedge C$; d) $(A \vee B) \wedge C)$; e) $(A \wedge B) \vee C$; f) $(\bar{A} \vee \bar{B}) \wedge (\bar{A} \vee \bar{C})$ lar uchun rostlik jadvalini tuzing.

10. A: «7< 12», B = «Romb – toprtburchak», C – «2 – tub son» mulohazalari berilgan bo'lsa, $\bar{A} \vee \bar{B} = \overline{A \wedge B}$, $\overline{A \vee B} = \bar{A} \wedge \bar{B}$, $\bar{A} \vee \bar{C} = \overline{A \wedge C}$, $\bar{A} \wedge \bar{C} = \overline{A \wedge B}$ larni isbotlang.

11. Quyidagi formulalarning aynan rost ekanligini isbotlang:

$(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((B \Rightarrow A) \Rightarrow (A \Leftrightarrow B))$

$(A \Rightarrow C) \Rightarrow ((A \vee B) \Rightarrow (C \vee B))$

$(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Leftrightarrow C))$

12. Quyidagi formulalarning aynan yolg'on ekanligini isbotlang:

$A \wedge (B \wedge (\neg A \vee \neg B))$;

$\neg (\neg (A \vee B) \Rightarrow \neg (A \wedge B))$;

$\neg (A \Rightarrow (B \Rightarrow A))$;

$\neg (A \Rightarrow C) \Rightarrow ((B \Rightarrow C)) \Rightarrow (A \vee B \Rightarrow C))$;

$\neg (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \wedge C) \Rightarrow (A \vee B \wedge A))$.

2.3. Predikatlar va ular ustida amallar. Kvantorlar

Predikatlar haqida umumiy tushuncha. Mulohazalar algebrasining asosiy masalalaridan biri sodda mulohazalarning rostlik qiymatlariga tayangan holda, ulardan tuzilgan murakkab mulohazalarning rostlik qiymatlarini topishdan iborat ekanligini biz ko'rib chiqdik. Lekin mulohazalar algebrasi fan va amaliyotning murakkab mantiqiy xulosalarini chiqarish uchun yetarli emas. Bunday murakkab mantiqiy xulosalarni chiqarishda mulohazalar algebrasini ham o'z ichiga oluvchi predikatlar algebrasi muhim o'rin tutadi.

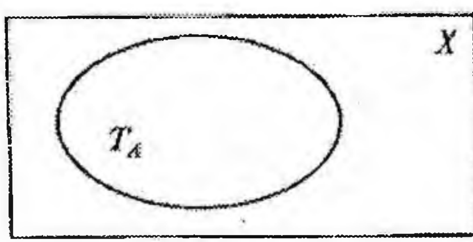
Ma'lumki, matematikada ishlatiladigan shunday muhim darak gaplar borki, ularni mulohaza deb bo'lmaydi. Masalan, agar biror butun son 2 ga bo'linmasa, u holda undan keyin kelgan butun son 2 ga bo'linadi, deb ayta olmaysiz. Chunki, bu darak gapning rostligi bir qiymatli aniqlanmagan. Faraz qilaylik, p – agar p 1 va 7 orasidagi 2 ga bo'linmaydigan butun son bo'lsa, u holda undan keyin kelgan butun son 2 ga bo'linadi, degan darak gap bo'lsin. Bu gapni quyidagicha ifodalsh mumkin. Faraz qilaylik, P(n) – agar n 2 ga bo'linmaydigan butun son bo'lsa, u holda n+1 soni 2 ga bo'linadi, degan darak gap bo'lsin. U holda, quyidagi yozuvga ega bo'lamiz: $p \Leftrightarrow P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4) \wedge P(6) \wedge P(7)$

Yuqoridagi gapni bayon qilish uchun o'zgaruvchi kiritishga, ya'ni "predikat" tushunchasiga ehtiyoj tug'ildi.

1-ta'rif. O'zgaruvchi qatnashgan va o'zgaruvchi o'rniga qiymatlar qo'yilgandagina rost yoki yolg'on muiohazaga aylanadigan darak gap predikat deyiladi.

Predikatlar tarkibiga kirgan o'zgaruvchilar soniga qarab bir o'rinli, ikki o'rinli va hokazo bo'ladi, ularni A(x), B(y), Q(x,y), R(x,y,z), ... ko'rinishda belgilaymiz. Biz ko'proq bir o'rinli predikatlar haqida gapiramiz.

Predikat tarkibiga kirgan o'zgaruvchi qabul qilishi mumkin bo'lgan barcha qiymatlar to'plami predikatning aniqlanish sohasi deyiladi. Aniqlanish sohasi X, Y, Z, ... kabi belgilanadi.



2.2-rasm

O'zgaruvchi o'rniga qo'yilganda predikatni rost mulohazaga aylantiruvchi qiymatlar predikatning rostlik to'plami deyiladi, A(x) predikatning aniqlanish sohasi X to‘plam bo‘lsa, rostlik to‘plami T_A bilan belgilanadi va $x \in X$, $T_A \subset X$ bo‘ladi (2.2-rasm).

Ta’rifga ko‘ra istalgan tenglama yoki tengsizlik predikat bo‘ladi.

Masalan:

A(x): «x shahar – O‘zbekiston Respublikasining poytaxti». Bunda X= {Toshkent, Buxoro, Xiva, Moskva} bo‘lsa, T_A = {Toshkent} bo‘ladi.

B(x) : $5 < x < 11 \wedge x \in N$ bo‘lsa, T_B={6; 7; 8; 9; 10} bo‘ladi.

C(y): «y – 10 sonning bo‘luvchisi» va $y \in N$ bo‘lsa, T_C = {1; 2; 5; 10} bo‘ladi.

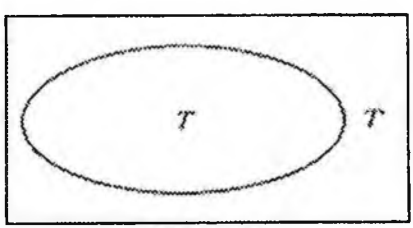
D(z): «$z^2 + 2z - 1 = 0$». $z \in R$ = $T_D = \{1-\sqrt{2},\ 1+\sqrt{2}\}$.

Predikatlar ustida ham mulohazalar ustida bajarilgan inkor, konyunksiya, dizyunksiya, implikatsiya, ekvivalensiya amallarni bajarishimiz mumkin.

Predikatlar inkori. $X \neq \emptyset$ to‘plamda A(x) predikat berilgan bo‘lsin. A(x) rost bo‘lganda yolg‘on, yolg‘on bo‘lganda, rost bo‘ladigan $\overline{A(x)}$ predikat A(x) ning inkori deyiladi. A(x) ning rostlik to‘plami T_A bo‘lsa, $\overline{A(x)}$ ning rostlik to‘plami T'_A bo‘ladi (2.3-rasm).

Masalan: a) A(x): «x son 5 raqami bilan tugaydi» bo‘lsa, $\overline{A(x)}$: «x son 5 raqami bilan tugamaydi» bo‘ladi.

X = {$x \in N$, $x < 20$} to‘plamda A(x): «x tub son» predikati berilgan bo‘lsin. U holda T_A = {2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19} bo‘ladi. $\overline{A(x)}$: «x tub son emas» va $T_{\bar{A}}$ = {1; 4; 6; 8; 9; 10; 12; 14; 15; 18} bo‘ladi.



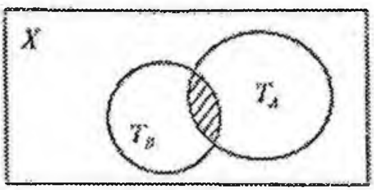
2.3-rasm

$X = \{x \in N, x \leq 15\}$ to‘plamda A(x): «x soni 15 ning bo‘luvchisi» predikat berilgan bo‘lsin. U holda $T_A = \{1; 3; 5; 15\}$ bo‘ladi. A(x): «x son 15 ning bo‘luvchisi emas» va $T_{\bar{A}} = \{2; 4; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14\}$ bo‘ladi.

X – hafta kunlari to‘plami bo‘lsin. Bu to‘plamda A(x): «x – haftaning juft kuni» predikati berilgan bo‘lsa, $\overline{A(x)}$: «x – haftaning toq kuni», T_A = {seshanba, payshanba, shanba} va $T_{\bar{A}}$= {yakshanba, dushanba, chorshanba, juma} bo‘ladi.

Predikatlar konyunksiyasi. Aytaylik, X to‘plamda A(x) va B(x) predikatlar berilgan bo‘lsin.

2-ta’rif. A(x) va B(x) predikatlarning har ikkalasi rost bo‘lganda rost, qolgan hollarda yolg‘on bo‘ladigan predikatga ularning konyunksiyasi deyiladi va $A(x) \wedge B(x)$ ko‘rinishda belgilanadi. Agar A(x) ning rostlik to‘plamini T_A, B(x) ning rostlik to‘plamini T_B, $A(x) \wedge B(x)$ ning rostlik to‘plamini T desak, $T = T_A \cap T_B$ bo‘ladi. Uni Eyler-Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, rasmdagi shtrixlangan soha $T_A \cap T_B$ dan iborat bo‘ladi.



2.4-rasm

Masalan, a) $X = \{x \in N, x \leq 20\}$ da A(x): «x soni tub son», B(x): «x soni toq son» predikatlari berilgan bo‘lib, ularning konyunksiyasining rostlik to‘plamini topish talab qilingan bo‘lsin.

Yechish. $T_A = \{2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$, $T_B = \{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; 17; 19\}$, u holda $T = T_{A \wedge B} = \{3; 5; 7; 11; 13; 17; 19\}$ bo‘ladi.

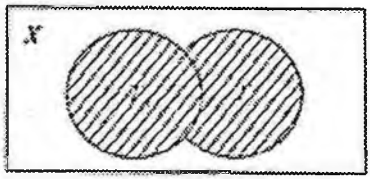
$X = \{\forall x \in N, x < 17\}$ da A(x): $\{x<8\}$ va B(x): «$x \vdots 3$» predikatlar bo‘lsa, ular konyunksiyasining rostlik to‘plamini toping.

Yechish. $T_A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $T_B = \{3,6,9,12,15\}$ va $T = T_A \cap T_B = \{3; 6\}$ bo‘ladi.

Predikatlar dizyunksiyasi. Aytaylik, X to‘plamda A(x) va B(x) predikatlar berilgan bo‘lsin.

3-ta’rif. A(x) va B(x) predikatlarning har ikkalasi yolg‘on bo‘lganda yolg‘on, qolgan barcha hollarda rost bo‘ladigan predikatga A(x) va B(x) predikatlar dizyunksiyasi deyiladi.

Predikatlar dizyunksiyasi «A(x) $\vee$ B(x)» ko‘rinishda belgilanib, «A(x) yoki B(x)» deb o‘qiladi.



2.5-rasm

A(x) predikatning rostlik to‘plami T_A, B(x)ning rostlik to‘plami T_B, A(x)$\vee$B(x)ning rostlik to‘plamini T desak, $T = T_A \cup T_B$ bo‘ladi.

Uni Eyler – Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo‘ladi (2.5-rasm).

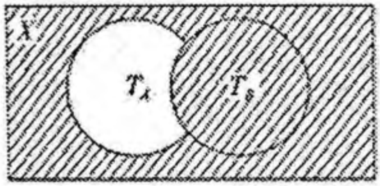
Masalan: a) $X = \{\forall x \in N,\ x \leq 20\}$ da A(x):$\{8 \leq x \leq 15\}$, B(x): «x soni 18 ning bo‘luvchisi» predikatlari berilgan bo‘lsa, A(x)$\vee$B(x) ning rostlik to‘plamini toping.

Yechish.$T_A = \{8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15\}$, $T_B = \{1; 2; 3; 6; 9; 18\}$ bo‘lgani uchun $T = T_{A \vee B} = \{1; 2; 3; 6; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 18\}$ bo‘ladi.

Predikatlar implikatsiyasi. X to‘plamda aniqlangan A(x) va B(x) predikatlar berilgan bo‘lsin.

4-ta’rif. A(x) predikat rost bo‘lib, B(x) predikat yolg‘on bo‘lganda yolg‘on, qolgan hollarda rost bo‘ladigan predikat A(x) va B(x) predikatlarning implikatsiyasi deyiladi.

«A(x)$\Rightarrow$B(x)» ko‘rinishda belgilanadi va u A(x) predikatdan B(x) predikat kelib chiqadi deb o‘qiladi. Bu holda B(x) predikat A(x) predikat uchun «zaruriy shart», A(x) predikat B(x) predikat uchun «yetarli shart» deyiladi.



2.6-rasm

A(x) predikatning rostlik to'plami T_A, B(x) niki T_B va A(x)⇒B(x)ning rostlik to'plami T bo'lsa, $T = T_A' \cup T_B$ bo'ladi. Uni Eyler –Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (2.6-rasm).

Masalan, a) $X = \{\forall x \in N,\ 12 \le x \le 21\}$ to'plamda A(x): «x – tub son», B(x): «x – toq son» predikatlari berilgan bo'lsa, A(x)⇒B(x) ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish. $T_A = \{13; 17; 19\}$, $T_B = \{13; 15; 17; 19; 21\}$, $T_A' = \{12; 14; 15; 16; 18; 20; 21\}$ u holda $T = T_A' \cup T_B = \{12; 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20; 21\}$.

a) $X = \{\forall x \in N,\ x \le 13\}$ da A(x): «12⋮x», B(x):«x – juft son» predikatlari berilgan bo'lsa, A(x)⇒B(x) ning rostlik to'plamini topaylik.

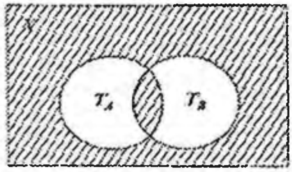
Yechish. $T_A = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$, $T_A' = \{5; 7; 8; 9; 10; 11; 13\}$, $TB = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ bo'lsa, $T = T_A' \cup T_B = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13\}$ bo'ladi.

Predikatlar ekvivalensiyasi. Aytaylik, X to'plamda A(x) va B(x) predikatlar berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. A(x) va B(x) predikatlarning har ikkalasi yo'lg'on bo'lganda hamda har ikkalasi rost bo'lganda rost bo'ladigan, qolgan hollarda yo'lg'on bo'ladigan predikat A(x) va B(x) predikatlar ekvivalensiyasi deyiladi.

Predikatlar ekvivalensiyasi A(x)⇔B(x) ko'rinishda belgilanadi va «A(x) bilan B(x) teng kuchli» deb o'qiladi. Agar ikkita predikat teng kuchli, ya'ni ekvivalent bo'lsa, ularning har biri ikkinchisi uchun zaruriy va yetarli shart hisoblanadi.

A(x)⇔B{x) ning rostlik to'plamini T desak, u A(x) va B(x) predikatlarning har ikkalasi bir vaqtda rost va har ikkalasi bir vaqtda yolg'on bo'ladigan mulohazalarning rostlik qiymatlari to'plamidan iborat bo'ladi.



2.7-rasm

Demak, A(x) va B(x) predikatlarning har ikkalasi rost bo'lgan holdagi rostlik to'plami $T_A \cap T_B$ dan, har ikkalasi yolg'on bo'lgan holdagi rostlik to'plami $T_A' \cap T_B'$ dan iborat bo'ladi. Demak, $T = (T_A \cap T_B) \cup (T_A' \cap T_B')$. Buni Eyler – Venn diagrammalari yordamida tasvirlasak, u rasmdagi shtrixlangan sohadan iborat bo'ladi (2.7-rasm).

Masalan, a) X– $\{\forall x \in N,\ x \leq 16\}$ to'plamda A(x): «x son 3 ga karrali», B(x): «x soni 12 ning bo'luvchisi» predikatlari berilgan bo'lsa, $A(x) \Leftrightarrow B(x)$ ning rostlik to'plamini topaylik.

Yechish. $T_A = \{3; 6; 9; 12; 15\}$, $T_B = \{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$.

$T = (T_A \cap T_B) \cup (T_A' \cap T_B') = (1;2;3;4;6;9;12;1\} \cap \{3;6;12\}) \cup (\{1;2;4;5;7;8;10;11;13;14\} \cap \{5;7;8;9;10;11\}) = \{3;6;12\} \cup \{5;7;8;10;11\} = \{3;5;6;7;8;10;11\}$.

Mulohaza, predikat va ular ustidagi amallar tushunchalari ko'p tasdiqlarning mantiqiy tuzilishini aniqlashga yordam beradi.

2.4. Kvantorlar va ularning turlari

Predikatlarni mulohazalarga aylantirish. Yuqorida ko'rdikki, istalgan tenglama va tengsizlik predikat bo'lar ekan, chunki ularni mulohazaga aylantirish mumkin. Buning uchun o'zgaruvchi o'rniga qiymat qo'yish yetarli.

Predikatni mulohazaga aylantirishning yana bir usuli kvantorlardan foydalanishdir.

Quyidagi misolni qaraylik.

10,11,12,13,14,15,16,17,18,19,20 sonlari haqida quyidagilarni aytish mumkin:

a) berilgan barcha sonlar ikki xonali sonlardir.

b) berilgan sonlardan ba'zilari toq sonlardir.

Bu jumlalarga nisbatan ularning rost yoki yolg'onligi to'g'risida fikr yuritish mumkinligidan ular mulohaza bo'ladi.

Agar biz ulardan «barcha», «ba'zilari» so'zlarini olib tashlasak, jumlalarni rostmi yoki yolg'onmi savoliga javob berib bo'lmaydi. Demak «barcha», «ba'zi» so'zlarni qo'shish bilan mulohaza hosil qilinadi.

6-ta'rif. «Barcha» va «ba'zi» so'zlari kvantorlar deb aytiladi.

«Kvantor» so'zi lotincha bo'lib, «qancha» ma'nosini anglatadi, ya'ni kvantor u yoki bu mulohazada qancha (barcha yoki ba'zi) obyekt haqida gap borayotganini bildiradi.

Kvantorlarning turlari Umumiylik va mavjudlik kvantorlari bir-biridan farq qilinadi.

Umumiylik kvantori «$\forall$» belgisi bilan belgilanadi va «har bir», «hamma», «barcha», «istalgan» so'zlari bilan ifodalanadi. $\forall$ inglizcha «All» so'zining bosh harfidan olingan va «hamma» ma'nosini bildiradi.

Mavjudlik kvantori «$\exists$» belgisi bilan belgilanadi, inglizcha «Exist» – «mavjud» so'zining bosh harfidan olingan va «bor», «mavjud», «topiladi» so'zlarini bildiradi.

Masalan, A(x): «x son tub son» predikatini olaylik, uni kvantorlar yordamida mulohazaga aylantiramiz, bu yerda $x \in N$. «Barcha x sonlar tub son» – yolg'on mulohaza, «Bazi», x soni tub son bo'ladigan qiymatlar topiladi» – rost mulohaza.

P(x): «x son 5 ga karrali», $x \in N$ bo'lsin. «Barcha x sonlar 5 ga karrali» – yolg'on mulohaza, «5 ga karrali x natural son mavjud» – rost mulohaza.

Kvantorlar qatnashgan mulohaza $(x \in X)P(x)$ yoki $(\exists x \in X)P(x)$ ko'rinishda yoziladi va «X to'plamning hamma elementlari uchun P(x) bajariladi» yoki «X to'plamda P(x) bajariladigan elementlar topiladi», deb o'qiladi.

Masalan, P(x): «x soni 3 ga karrali». $x \in N$ bo'lsin «Ixtiyoriy x soni 3 ga karrali» - yolg'on mulohaza «3 ga karrali x sonlar mavjud» - rost mulohaza

Biz to'plamni uning elementlari qanoatlantiradigan xossalari orqali ko'rsata olamiz. Keling biz P (x) ni x qanoatlantira oladigan yoki olmaydigan xususiyat uchun shartli belgi deb olaylik. Biz P ni predikat deb ataymiz. Qachonki P (x) rost bo'lsa, biz "x o'zgaruvchi P xususiyatiga ega deymiz. *Masalan, P (x)* "x o'zgaruvchi 2 ga bo'linadigan natural son" ma`nosini beradi deb faraz qilaylik. Agar biz N = {0, 1, 2, ...} natural sonlar to'plamiini olsak, 2 ga bo'linadigan natural sonlar to'plami A: A = $\{x \in N | p(x)\}$. (3.4)

Aytgancha, biz natural sonlarni nima ekanligini bilamiz, deb faraz qilgan holda izoh, namuna sifatida ishlatamiz. Biz ularga to'plam nuqtai nazaridan keyinroq to'xtalib o'tamiz.

Biz mantiq belgilari asosida quyidagicha yozamiz $(\forall x \in N)(x \in A \Leftrightarrow p(x))$, (3.5)

Demak "N dagi hamma x uchun, agar va faqat agar x soni 2 ga bo'linsa, x A to'plamga tegishli bo'ladi". Biz "emas" ma`nosini beruvchi inkor ($\neg$) tushunchasini ishlatgan holda umumiylik kvantori o'rniga mavjudlik kvantorini ishlata olamiz, demak bizda $(\forall x)P(x) = \neg(\exists x)(\neg P(x))$. (3.6)

Ya'ni "hamma x uchun P (x) rost" ekanligi "P(x) bajarilmaydigan x mavjud emas" deb tushuntiriladi. Bizda shunga o'xshash $(\exists x)P(x) \equiv \neg(\forall x)(\neg P(x))$.

Umuman olganda, umumiylik kvantori qatnashgan mulohazaning rostligini isbotlash uchun o'zgaruvchining barcha qiymatlarida predikat rost mulohazaga aylanishini isbotlash kerak bo'ladi. Aksincha, uning yolg'onligini ko'rsatish uchun esa, 1 ta mulohaza yolg'on bo'ladigan holni ko'rsatish kifoya.

Mavjudlik kvantori qatnashgan mulohazaning rostligini isbotlash uchun 1 ta misol keltirish, uning yolg'onligini ko'rsatish uchun o'zgaruvchining barcha qiymatlarida predikat yolg'on mulohazaga aylanishini isbotlash kerak bo'ladi.

Kvantorlar qatnashgan mulohaza inkorini yasash.

($\forall x \in X$)P(x) yoki $(\exists x \in X)P(x)$ ko'rinishdagi mulohaza inkorini yasashda quyidagicha yo'l tutiladi:

Mulohazaga "emas" yoki "ekani yolg'on" so'zlari qo'shiladi.

Ikkinchi usuli:

1. "Mavjudlik" kvantori "Umumiylik" kvantoriga yoki aksincha almashtiriladi.

2. Predikat uning inkori bilan almashtiriladi.

$\neg(\forall x \in X)P(x) = (\exists x \in X)\neg P(x)$

$\neg(\exists x \in X)P(x) = (\forall \in X)\neg P(x)$

Masalan:

I. $(\forall x \in X)P(x)$ – Barcha tub sonlar toq sonlardir.

$\neg(\forall x \in X)P(x)$ –Barcha tub sonlar toq sonlar ekanligi yolg'on.

$(\exists x \in X)\neg P(x)$ – Tub sonlar ichida toq bo'lmaganlari ham topiladi.

II. $(\exists x \in X)P(x)$ – 3 ga karrali sonlarning ba'zilari 9 ga karrali.

$\neg(\exists x \in X)P(x)$ – 3 ga karrali sonlarning ba'zilari 9 ga karrali ekanligi yolg'on.

$(\forall \in X)\neg P(x)$ –3 ga karrali sonlarning barchasi 9 ga karrali.

I holda berilgan mulohaza yolg'on va uning inkori rost bo'lsa, II holda aksincha.

Nazorat uchun savollar

1. Predikatlar bilan mulohaza orasida qanday farq bor?
2. Predikatlar inkorining ta'rifini ayting va uning rostlik to'plamini ko'rsating.
3. Predikatlar konyunksiyasi ta'rifini ayting, uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
4. Predikatlar dizyunksiyasi ta'rifini ayting, uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
5. Predikatlar im'likatsiyasi ta'rifini ayting, uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
6. Predikatlar ekvivalensiyasi ta'rifini ayting, uning xossalari va rostlik to'plamini ko'rsating.
7. Kvantorning ta'rifini ayting.
8. Kvantorning qanday turlarini bilasiz.
9. Predikatlarni qanday usullarda mulohazalarga aylantirish mumkin?
10. Kvantor qatnashgan mulohazalar inkori qanday yasaladi? Misollar keltiring.

Mashqlar:

1-misol. N natural sonlar to'plamida P (x) predikat berilgan bo'lsin: «x – tub son». Kvantorlardan foydalanib ushbu predikatdan quyidagi mulohazalarni hosil qilish mumkin: $\forall x \in N$ – «Hamma natural sonlar tub sonlar bo'ladi»; $\exists x \in N$ – «Shunday natural son mavjudki, u tub son bo'ladi». Ravshanki, birinchi mulohaza yolg'on va ikkinchi mulohaza chindir.

2-misol. To'g'ri chiziqlar to'plamida aniqlangan P(x,y): «$x \perp y$» predikatni ko'raylik. Agar P(x,y) predikatga nisbatan kvantorli amallarni tadbiq etsak, u holda quyidagi sakkizta mulohazaga ega bo'lamiz:

1. $(\forall x \forall y)P(x,y)$ – «Har qanday x to'g'ri chiziq har qanday y to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
2. $(\forall x \exists y)P(x,y)$ – «Har qanday x to'g'ri chiziq uchun shunday y to'g'ri chiziq mavjudki, x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
3. $(\exists x \forall y)P(x,y)$ – «Shunday x to'g'ri chiziq mavjudki, u har qanday y to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
4. $(\exists x \exists y)P(x,y)$ – «Shunday x to'g'ri chiziq va shunday y to'g'ri chiziq mavjudki, x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
5. $(\forall y \forall x)P(x,y)$ – «Har qanday y to'g'ri chiziq har qanday x to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
6. $(\forall y \exists x)P(x,y)$ – «Har qanday y to'g'ri chiziq uchun shunday x to'g'ri chiziq mavjudki, x to'g'ri chizig'i y to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
7. $(\exists y \forall x)P(x,y)$ – «Shunday y to'g'ri chiziq mavjudki, u har qanday x to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».
8. $(\exists y \exists x)P(x,y)$ – «Shunday y to'g'ri chiziq va shunday x to'g'ri chiziq mavjudki, x to'g'ri chiziq y to'g'ri chiziqqa perpendikulyar».

Mashqlar:

1. $A=\{4;5;6;8;9;10\}$ to'plamda C(x): «$2x-1<15$» predikat berilgan bo'lsa:

a) C(4), C(5), C(6), C(8), C(9), C(10) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib, (∀x∈A) C(x) predikat rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

2. X=*{x|x∈N,* x≤*6}* to'plamda B(x): «x^2-3<18» predikat berilgan bo'lsa:

a) 5(1), *B(*2), 5(3), *B(*4), *B(*5), *B(*6) fikrlarning rostlik qiymatini toping;

b) olingan javoblarga asoslanib, B(x) predikat (∀x∈A)da rost bo'ladi deb tasdiqlash mumkinmi? Javobingizni asoslang.

3. A=*{*x|x∈N, x≤7*}* to'plamda «x^2-13 < 0» predikat berilgan. Uning rostlik to'plamini toping.

4. X={x|x∈N, x≤21} to'plamda B(x): «x – tub son» predikat berilgan. Uning inkorining rostlik to'plamini toping.

5. Y ={y|y∈N, x ≤18} to'plamda A(x): «X–tub son», B(x): «x–toq son» predikatlar berilgan bo'lsa, $\overline{A(x)}$, $\overline{B(x)}$, A(x)∨B(x) A(x)∧B(x)larning rostlik to'plamini toping.

6. X=$\left\{-2;-1;0;\frac{1}{2};1;\frac{5}{3};2\right\}$to'plamda C(x): «x – natural son», D(x): «x – kasr son» predikatlar berilgan bo'lsa

7. a) C(1)∧D(1); b) C(-2)∨D(-2); d) C(0)∧D$\left(\frac{5}{3}\right)$; e) C(2)∧D(0) larni so'z orqali ifodalang va rostlik qiymatini toping.

8. X= $\left\{\mathbf{-2;-1;0;\frac{1}{2};1;\frac{5}{3};2}\right\}$ to'plamda C(x): «x – butun son». D(x): «x – kasr son» degan predikatlar berilgan bo'lsa,

a)$\frac{1}{2} \notin T_{C\vee D}$; b) $2 \in T_{C\vee D}$; d) $\mathbf{2} \notin T_{C\wedge D}$; e)$\frac{1}{2} \in T_{C\wedge D}$ larning rostligini aniqlang.

9. Butun sonlar to'plamida D(x):«x⋮3»vaC(x): «x sonini 3 ga bo'lganda 1 qoldiq qoladi» predikatlari berilgan. x=4, x=6, x=7, x=9, x=10 bo'lgandagi predikatlar qiymatini toping va ularni taqqoslang. C(x) va D(x) predikatlar biri ikkinchisining inkori bo'ladimi? Javobingizni asoslang.

Kvantorlar

1. Quyida keltirilgan qaysi mulohazada umumilik kvantori yoki mavjudlik kvantori qatnashgan?

5 ga karrali sonlar topiladi;

Har bir natural son butun son bo'ladi;

Shunday x natural son topiladiki, $x<3$;

Ba'zi bir natural sonlar - bir xonali.

2. Shunday 5 ta sonni topingki, ular:

a) barchasi 7 ga karrali; b) ba'zi birlari 5 ga karrali; v) ba'zi birlari 5 ga karrali emas; g) ularning birortasi ham 3 ga karrali emas.

3. R (x), Q (x) va R (x) quyidagi bir o'rinli predikatlarni bildiradi: «x uchburchak teng tomonli», «x uchburchak teng yonli» va «x uchburchak to'g'ri burchakli».

Mulohazaga aylantiring va rostlik qiymatini toping:

a)$(\forall x)\ R(x)$; b)$(\exists x)R(x)$; c)$(\exists x)\ R(x)\wedge R(x)$; d)$(\exists x)\ R(x)\wedge Q(x)$.

4. Quyidagi tasdiqning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligini isbotlang:

a) ixtiyoriy ikkita natural sonning ayirmasi yana natural son bo'ladi;

b) ixtiyoriy uchta ketma-ket sonlarning yig'indisi 3 ga karrali;

c) bir xil raqamlardan tashkil topgan har qanday ikki xonali son 11ga karrali;

d) ixtiyoriy bir xonali son $2x^2-25x+12>0$ tengsizlikning yechimi bo'ladi;

e) ba'zi bir parallelogramlarning diagonallari teng emas;

f) bu sonlar orasidan 12, 15, 16, 27, 212 hech bo'lmaganda bittasi, 7 ga karrali;

j) $7x-5$; $7x$; $12:4x$; $7x+5$ ifodalarning har biri $x=3$ qiymatga ega;

k) Ixtiyoriy haqiqiy son $2(x-3)=2x-6$ tenglamaning yechimlari hisoblanadi .

5. Quiydagi mulohazalarning rostlik qiymatini toping:

a) $(\exists x\in R)\ x^2+1=5$;

b) $(\forall x\in R)\ x^2+1=5$;

v) $(\exists x\in R)\ x^2+5=1$;

g) $(\forall x\in R)\ x^2+5=1$.

2.5. Teoremaning tuzilishi va turlari. Matematik isbotlash usullari

Teoremaning tuzilishi haqida umumiy tushuncha. O‘rta maktab kursidan ma’lumki, matematikani o‘rganishda teoremalar deb ataluvchi mulohaza bilan ishlashga to‘g‘ri keladi. Tushunchalarning asosiy bo‘lmagan va ta’riflarga kiritilmagan xossalari, odatda isbotlanadi. Tushunchalarning isbot qilinadigan xossalari teoremalar deyiladi.

Ular qanday ko‘rinishda ifodalanishidan qat’iy nazar, isbotlashni talab qiladigan fikrlardir. Shunday qilib, teorema - bu A xossadan B xossaning kelib chiqishi haqidagi fikr. Bu fikrning rostligi isbotlash yo‘li bilan aniqlanadi.

Isbotni amalga oshirish uchun predikat va kvantorlarga asoslangan teoremalarning tuzilishini bilish lozim. Quyidagi teoremani qaraylik: “Agar nuqta kesmaning o‘rta perpendikulyarida yotsa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi.”

Bunda “nuqta kesmaning o‘rta perpenikulyarida yotadi” gapi teoremaning sharti, “nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotadi” gapi teoremaning xulosasi hisoblanadi.

Teoremaning sharti va xulosasi tekislikdagi barcha nuqtalarning R to‘plamida aniqlangan predikatdan iborat. Bu predikatlarni mos ravishda A(x) va B(x) deb belgilaymiz. U holda teorema $A(x)\Rightarrow B(x)$ implikatsiya ko‘rinishda belgilanib, umumiylik kvantorini qo‘llab quyidagi ko‘rinishda yoziladi: $(\forall x\in P)(A(x)\Rightarrow B(x))$.

Bundan ko‘rinadiki, teorema tuzilishi uch qismdan iborat bo‘ladi.

Teorema sharti: A(x) predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning R to‘plamida berilgan;

Teoremaning xulosasi: B(x) predikat tekislikdagi barcha nuqtalarning R to‘plamida berilgan;

Tushuntirish qismida teoremada so‘z yuritilayotgan obyektlar to‘plami tasvirlanadi. Bu qism simvolik tarzda $\forall x\in P$ ko‘rinishda yoziladi.

Tushuntirish qismini teorema mazmunidan ham bilib olish mumkin. Ixtiyoriy teoremani so'zlar yordamida ifodalaganda "Agar ...bo'lsa, u holda ...bo'ladi" so'zlari ishlatiladi, formula quyidagi

$$(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x)) \quad (1)$$

ko'rinishda ifodalandi. Bu yerda X A(x) va B(x) predikatlar berilgan to'plam. Agar teorema (1) ko'rinishda berilgan bo'lsa, uning sharti va xulosasi implikatsiya tashkil etadi. Shu sababli teorema xulosasi B(x) predikat teoremaning A(x) sharti uchun zaruriy sharti, A(x) shart esa teoremaning B(x) xulosasi uchun yetarli shart deyiladi. Quyidagi teoremani qaraylik:

"Agar to'rtburchak romb bo'lsa, u holda uning diagonallari perpendikular bo'ladi".

Bu teoremaga (1) formulani tadbiq etamiz. X - tekislikdagi barcha to'rtburchaklar to'plami, x tekislikdagi ixtiyoriy to'rtburchak, A(x): "x to'rtburchak – romb", B(x): "x to'rtburchak diagonallari o'zaro perpendikular".

Zaruriy shart: "To'rtburchak romb bo'lishi uchun uning diagonallari perpendikular bo'lishi zarur."

Yetarli shart: "To'rtburchak diagonallari perpendikulyar bo'lishi uchun uning romb bo'lishi yetarli."

(1) teoremaga ko'ra bir nechta yangi teoremalarni hosil qilish mumkin. (1) teoremaning sharti va xulosasi o'rni almashsa, berilgan teoremaga teskari teorema hosil bo'ladi.

$$(\forall x \in X)(B(x) \Rightarrow A(x)) \quad (2)$$

Masalan,

Teorema: "Agar natural son raqamlari yig'indisi 3 ga bo'linsa, shu sonning o'zi ham 3 ga bo'linadi."

Teskari teorema: "Agar natural son 3 ga bo'linsa, uning raqamlarini yig'indisi ham 3 ga bo'linadi."

Teskari teorema ham to'g'ri bo'lgani uchun ikkita teoremani bittaga birlashtirish mumkin. "Natural son 3 ga bo'linishi uchun uning raqamlarini yig'indisi 3 ga bo'linishi zarur va yetarli. "Bu holda teoremani $(\forall x \in X)(A(x) \Leftrightarrow B(x))$ ko'rinishda ifodalash mumkin.

Teskari teorema hamma vaqt ham to'g'ri bo'lmaydi.

Agar $(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x))$ teoremaning sharti va xulosasi ularning inkorlari bilan almashtirilsa, berilgan teoremaga qarama-qarshi teorema hosil bo'ladi.

$(\forall x \in X)(\overline{Ax} \Rightarrow \overline{B(x)})$ (3)

(1)-teoremaga qarama-qarshi teorema: "Agar nuqta kesmaning o'rta perpendikularida yotmasa, u holda nuqta kesmaning uchlaridan teng uzoqlikda yotmaydi" va bu teorema rostdir.

$(\forall x \in X)(\overline{B(x)} \Rightarrow \overline{Ax})$ (4)

ko'rinishidagi teorema teskari teoremaga qarama-qarshi teorema deyiladi.

(2) teskari teoremaga qarama-qarshi teorema: "Agar natural son 3 ga bo'linmasa, uning raqamlari yig'indisi ham 3 ga bo'linmaydi" . Bu teorema rostdir.

$$A(x) \Rightarrow B(x) \Leftrightarrow \overline{B(x)} \Rightarrow \overline{A(x)}$$

Endi teoremalarni isbotlash usullarini ko'rsatamiz.

Matematik isbotlar. Deduktiv mulohazalar.

$(\forall x)(A(x) \Rightarrow B(x))$ teoremani isbotlash – bu har doim A xossa bajarilganda, B xossa ham bajarilishini mantiqiy yo'l bilan ko'rsatishdir.

Matematikada isbotlash ko'rgazmali va tajribalarga biror-bir yo'naltirishsiz mantiq qoidalari bo'yicha o'tkaziladi.

Isbotlash asosida mulohaza-logik (mantiqiy) operatsiya yotadi. Bu operatsiya natijasida ma'nosiga ko'ra o'zaro bog'langan yoki bir necha jumlalardan yangi (berilgan bilimlarga nisbatan) bilimlarni o'z ichiga olgan jumla hosil bo'ladi. Masalan, boshlang'ich sinf o'quvchisining 6 va 7 sonlari orasidagi «kichik» munosabatini aniqlashdagi mulohazasini ko'raylik. O'quvchi bunday deydi: «$6 < 7$ chunki, 6 sanoqda 7 dan oldin keladi».

Hosil qilingan bu mulohazada xulosa qanday faktlarga asoslanganini aniqlaylik. Asoslar ikkita: agar a soni sanoqda b sonidan oldin aytilsa, u holda $a<b$ bo'ladi (ixtiyoriy a va b natural sonlar uchun).

6 sanoqda 7 dan oldin keladi.

Birinchi jumla umumiy xarakterga ega, chunki unda jumla ixtiyoriy a va b natural sonlar uchun o'rinli bo'lishini tasdiqlovchi umumiylik kvantori mavjud, shuning uchun umumiy asos deyiladi.

Ikkinchi jumla konkret 6 va 7 sonlariga tegishli, xususiy hollarni ifodalaydi, shunga ko'ra u xususiy asos deyiladi.

Ikki asosdan esa yangi mulohaza ($6 < 7$) keltirib chiqariladi, u xulosa deyiladi.

Umuman har qanday mulohazada ham asos, ham xulosa bor. Asos va xulosa orasida ma'lum bog'lanish mavjud, bu bog'lanish yordamida ular mulohazani tashkil etadi.

Asos bilan xulosa orasidagi kelib chiqishlik munosabati o'rinli bo'ladigan mulohaza deduktiv mulohaza deyiladi.

Boshqacha aytganda, agar mulohaza yordamida rost asosdan yolg'on xulosa chiqarish mumkin bo'lmasa, u holda bu mulohaza deduktiv bo'ladi. Aks holda deduktivmas hisoblanadi.

Mulohaza deduktiv bo'ladigan shartlarni aniqlaymiz. Buning uchun misollarga murojaat qilamiz.

1-misol. Ushbu mulohaza berilgan, unda: umumiy asos: «agar natural son 6 ga karrali bo'lsa u 3 ga karrali bo'ladi»; xulosa: «18 soni 3 ga karrali».

Bu mulohazada asos ham, xulosa ham rost. Uni deduktiv deb taxmin qilish mumkin.

2-misol. Ushbu mulohaza berilgan, unda:

- umumiy asos: «Agar natural son 6 ga karrali bo'lsa, u holda u 3 ga karrali bo'ladi»;
– xususiy asos: «39 soni 3 ga karrali»;
– xulosa: «39 soni 6 ga karrali»;
– berilgan mulohazada asoslar rost, xulosa esa yolg'on-39 soni 6 ga bo'linmaydi. Demak, bu mulohaza deduktiv emas, bundan kelib chiqadiki, asoslarning rostligi mulohazaning deduktivligini ta'minlovchi yagona shart emas ekan.

Endi keltirilgan mulohazalarni solishtiramiz. Buning uchun ularni simvolik shaklda tasvirlaymiz. Agar A orqali «x natural son 6 ga karrali» jumlani, B orqali esa «natural son 3 ga karrali» jumlani belgilasak, u holda ikkala mulohaza uchun umumiy asos

$A \Rightarrow B$ ko'rinishga ega bo'ladi. 1-misolda ikkinchi asos xususiy asos, u A jumlada x o'rniga 18 ni qo'yish bilan hosil qilinadi. Uni A(18) bilan belgilaymiz. U holda birinchi mulohazada xulosani B(18) bilan belgilash mumkin. Ikkinchi misol uchun: ikkinchi asos B(39) ko'rinishga, xulosa esa A(39) ko'rinishga ega bo'ladi.

Kiritilgan belgilashlarga ko'ra berilgan mulohazalarni bunday ko'rinishda tasvirlash mumkin:

	1-misol.	2- misol.
1-asos:	$A \Rightarrow B$	$A \Rightarrow B$
2-asos:	A(18)	B(39)
xulosa:	B(18)	A(39)

Birinchi misolda mulohaza ($A \Rightarrow B$) va ($A \Rightarrow B$) va ($A(18) \Rightarrow B(18)$) sxema bo'yicha, ikkinchi misolda esa, ($A \Rightarrow B$) va ($B(39) \Rightarrow A(39)$ sxema bo'yicha o'tkaziladi. Ko'rib turibmizki, mulohazalar sxemalari turlicha. Birinchi holda foydalanilgan sxema rost xulosaga, ikkinchi mulohaza sxemasi esa yolg'on xulosaga olib keladi. Mulohazalarni solishtirish ham asoslarning rostligi har doim ham xulosaning rost bo'lishiga kafolat bera olmasligini tasdiqlaydi.

Endi deduktiv mulohazalarning eng sodda sxemalarini ko'rib chiqamiz.

Har bir deduktiv mulohazaning asosida xulosa chiqarishning ma'lum qoidasi yotadi. Biz shunday qoidalardan faqat uchtasini qaraymiz, ularni isbotsiz qabul qilamiz.

Xulosa qoidasi. $((A \Rightarrow B \text{ va } A(\alpha)) \Rightarrow B(\alpha)$, bu yerda $A \Rightarrow B$ - umumiy asos, $A(\alpha)$ - xususiy asos, $B(\alpha)$ - xulosa.

Inkor qoidasi: $(A \Rightarrow B \text{ va } \overline{B(a)}) \Rightarrow \overline{A(a)}$.

Sillogizm qoidasi: $(A \Rightarrow B \text{ va } B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$.

Bu qoidalarni qo'llanishi mulohazaning deduktiv bo'lishiga kafolat beradi, ya'ni rost asoslardan rost xulosalar chiqarishga imkon beradi.

Mulohazalarning to'g'riligini tekshirish uchun berilgan qoidalardan qanday foydalanishni ko'rsatamiz.

Quyidagi mulohazalar deduktiv bo'ladimi yoki yo'qmi yuqoridagi sxemalarga asosan tekshiramiz.

1-misol. Agar natural son raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linsa, shu sonning o'zi ham 9 ga bo'linadi; son 9 ga bo'linmaydi, demak, son raqamlarining yig'indisi ham 9 ga bo'linmaydi:

2-misol. Agar natural son 8 ga karrali bo'lsa, u holda u 4 ga karrali bo'ladi, agar natural son 4 ga karrali bo'lsa, u holda u 2 ga karrali bo'ladi, demak son 8 ga karrali bo'lsa, u holda u 2 ga karrali bo'ladi.

3-misol. Agar sonning yozuvi nol bilan tugasa, u holda u 5 ga bo'linadi; son nol bilan tugamasa, demak u 5 ga bo'linmaydi.

Yechish: 1) Keltirilgan mulohazaning sxemasini aniqlaymiz.

Dastlab umumiy asosni «Agar natural son raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linsa, shu sonning o'zi ham 9 ga bo'linadi» shartli jumla ko'rinishida ifodalaymiz. A harfi bilan «Son raqamlari yig'indisi 9 ga bo'linadi» jumlani, B harfi bilan «Sonning o'zi ham 9 ga bo'linadi» jumlani belgilaymiz. U holda umumiy asos $A \Rightarrow B$ ko'rinishida xususiy asos $\overline{B}$, xulosa $\overline{A}$ ko'rinishga ega bo'ladi, ya'ni ($A \Rightarrow B$ va $\overline{B}) \Rightarrow \overline{A}$ ko'rinishdagi sxemaga ega bo'lamiz. Bu qoida xulosaning rostligiga kafolat beruvchi inkor qoidasidir. Demak, mazkur mulohaza deduktivdir.

2) Agar «Natural son 8 ga karrali» jumlani A orqali, «Natural son 4 ga karrali» jumlani B orqali va «Natural son 2 ga karrali» jumlani C orqali belgilasak, u holda mazkur mulohazaning sxemasi ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

($A \Rightarrow B$ va $B \Rightarrow C) \Rightarrow A \Rightarrow C$.

Bunday sxema sillogizm qoidasidir, u asos rost bo'lganda xulosaning ham rost bo'lishiga kafolat beradi.

3) A harfi bilan «Sonning yozuvi nol bilan tugaydi» jumlani, B harfi bilan «Son 5 ga bo'linadi» jumlani belgilaymiz. U holda berilgan mulohazaning sxemasi ($A \Rightarrow B$va $\overline{A}) \Rightarrow \overline{B}$ ko'rinishga ega bo'ladi. U yolg'on xulosaga olib keladi: masalan, 15 soni nol bilan tugamaydi, ammo u 5 ga bo'linadi. Mulohazaning bu sxemasi xulosaning rost bo'lishiga kafolat bera olmaydi, u rost xulosaga ham, yolg'on xulosaga ham olib kelishi mumkin.

Ba'zi hollarda rost xulosaga, ba'zi hollarda yolg'on xulosaga olib keluvchi sxema bo'yicha mulohaza deduktivmas mulohaza hisoblanadi. Demak, berilgan mulohaza deduktivmas mulohaza ekan.

Deduktivmas mulohazalarning ushbu ikkita sxemasini yodda saqlash masadga muvofiq:

1) (A⇒B va B)⇒A. 2) (A⇒B va $\overline{A}$)⇒ $\overline{B}$.

Bu sxemalar, asoslar rost bo'lganda xulosalarning ham rost bo'lishiga kafolat bera olmaydi.

Teoremalarni isbotlashda to'liqsiz induksiya usulidan ham foydalaniladi.

To'liqsiz induksiya. Biz 10 soni 5 ga bo'linadi, 20 soni 5 ga bo'linadi, 100 soni 5 ga bo'linadi, 1000 soni 5 ga bo'linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 0 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo'linadi deb, shuningdek 15 soni 5 ga bo'linadi, 25 soni 5 ga bo'linadi, 35 soni 5 ga bo'linadi degan mulohaza yordamida yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo'linadi deb xulosa chiqaramiz. Bu mulohazalarni umumlashtirib yozuvi 0 va 5 raqamlari bilan tugaydigan ixtiyoriy son 5 ga bo'linadi deb xulosa chiqaramiz.

Xuddi shuningdek, n^2+n+41 ifodada n o'rniga 1,2,3,4 va hokazo sonlar qo'yilsa, tub son hosil bo'ladi. Masalan n=1 da ifodaning qiymati tub son 43 ga teng, n=2da ifodaning qiymati tub son 47 ga teng, n=3 da ifodaning qiymati tub son 53 ga teng ekanligini ko'rish mumkin. n ning n=3,4, ... qiymatlarida ham natija tub son bo'ladi.

Bu natijalarga suyangan holda n ning ixtiyoriy natural qiymatlarida n^2+n+41 ifodaning qiymati tub son bo'ladi deb xulosa chiqarish mumkinmi?

To'liqsiz induksiya bu shunday mulohazalarki, bunda obyektlar to'plamining ba'zi obyektlari ma'lum xossalarga ega bo'lganligidan bu to'plamning barcha obyektlari ham shu xossalarga ega deb xulosa chiqarishga asoslanadi.

To'liqsiz induksiya natijasida olingan xulosalar rost ham, yolg'on ham bo'lishi mumkin. Masalan, yozuvi 5 raqami bilan tugaydigan sonning 5 ga bo'linishi haqidagi xulosa rost. n ning ixtiyoriy natural qiymatida n^2+n+41 ifodaning qiymati tub son bo‘ladi, degan xulosa esa yolg‘on. Haqiqatan ham, agar n=41 bo‘lsa, biz $41^2+41+41=41^2+2\cdot 41=41(41+2)=41\cdot 43$ ga ega bo‘lamiz, bu esa n^2+n+41 ifodaning qiymati murakkab son ekanligini ko‘rsatadi.

Induktiv mulohazalar har doim to‘g‘ri xulosalarga olib kelavermasa ham, matematika va boshqa fanlarni o‘rganishda ularning o‘rni juda katta. Induktiv mulohazalar yuritish davomida konkret xususiy hollarda umumiylikni ko‘ra bilish, o‘z taxminlarini ayta olish malakalari shakllanadi.

Boshlang‘ich sinflarda to‘liqsiz induktiv xulosadan tashqari analogiya bo‘yicha (taqqoslab) xulosa chiqarishdan keng foydalaniladi, bunda bilimlarni o‘rganilgan obyektlarga nisbatan kam o‘rganilgan obyektlarga ko‘chirish amalga oshiriladi. Ko‘chirish uchun bu obyektlarning o‘xshashlik va farq qilish alomatlari haqidagi bilimlar asos bo‘lib xizmat qiladi.

Analogiya bizni taxmin va farazlarga olib keladi, matematik induksiyani rivojlantirish imkonini beradi.

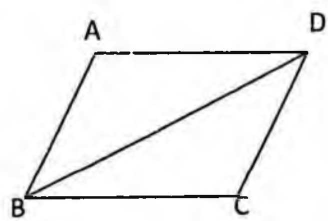
Shuning bilan birga analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar rost bo‘lishi ham, yolg‘on bo‘lishi ham mumkin. Analogiya natijasida hosil qilingan xulosalar deduktiv metod bilan isbot qilinishi lozim.

Fikrlarning rostligini isbotlash usullari.

Ikki va undan ortiq qadamdan tashkil topgan mulohazaning isbotiga doir misollar ko‘rib chiqamiz.

Misol. Har bir diagonal parallelogrammi ikkita teng uchburchakka ajratishini isbotlang.

Isboti: 1) ixtiyoriy parallelogramning qarama-qarshi tomonlari teng; ABCD – parallelogram (2.8-rasm), demak AB=CD BC=AD. Mulohaza xulosa qoidasi asosida olib borildi, demak, olingan xulosa rost.



2.8-rasm

Agar bir uchburchakning uchta tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga teng bo'lsa, u holda bunday uchburchaklar teng bo'ladi: AB=CD, BC=AD, AC tomon umumiy. Demak, ABC va ACD uchburchaklar teng.

Bu holda ham mulohaza xulosa qonuni asosida olib borildi, demak xulosa rost. Teorema isbotlandi.

Teoremaning isboti hamma asoslarni ko'rsatish bilan to'la mantiqiy shaklda olib borilgan mulohazalarning ikki qadamdan tashkil topganini eslatib o'tamiz. Biroq bunday isbotlash uzundan-uzoq, shuning uchun odatda ularni mulohazalar sxemasidagi alohida asoslarni tushirib qoldirish bilan ixchamlangan shaklda olib boriladi.

Masalan, biz o'tkazgan isbotning ixchamlangan shakli bunday bo'lishi mumkin: ABC va ACD uchburchaklarda AB va CD, AD va BC tomonlar teng, chunki ular ABCD parallelogramning qarama-qarshi tomonlari, AC tomon ular uchun umumiy, demak, ABC va ACD uchburchaklar teng.

Nazorat uchun savollar

1. Teoremaning tuzilishi haqida umumiy tushuncha deganda nima tushunasiz?
2. Teoremaning qanday turlari bor?
3. Matematik isbotlarlarga misol keltiring.
4. To'liqsiz induksiyaga misol keltiring.
5. To'la matematik induksiya deganda nima tushunasiz?

Mashqlar:

1. Quyidagi tasdiqlarni $(x\in P)(A(x)\Rightarrow B(x))$ ko'rinishda ifodalang.

a) Har qanday musbat ratsional son biror kesmaning uzunligini ifodalaydi.

b) Istalgan uchburchakning balandligi qarama-qarshi tomoniga yoki uning davomiga perpendikulyar bo'ladi.

c) Parallelogramm diagonallari uzunliklari kvadratlari yig'indisi uning to'rtta tomon uzunliklari kvadratlari yig'indisiga teng.

2. Quyidagi nuqtalar o'rniga zarur, yetarli, zarur va yetarli so'zlaridan tegishlisini qo'ying:

A) biror son 6 ga bo'linishi uchun uning 3 ga bo'linishi ...

B) ketma-ketlikning limitga ega bo'lishi uchun uning chegaralangan bo'lishi...

G) biror son 5 ga bo'linishi uchun uning 0 bilan tugashi ...

D) berilgan uchburchakning to'g'ri burchakli uchburchak bo'lishi uchun $a^2=b^2+c^2$ bo'lishi ...

3. $(\forall x \in X)(A(x) \Rightarrow B(x))$ shaklda ifodalang:

a) Parallelogramm diagonallari kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linadi.

b) Romb diagonallari o'zaro perpendikulyar.

c) Vertikal burchaklar o'zaro teng bo'ladi.

d) Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi 180^0 ga teng.

e) To'g'ri to'rtburchakning diagonallari o'zaro teng.

f) Parallelogramning qarama-qarshi burchaklari teng.

9. Quyidagi teoremalarda shartlarni va hulosalarni ajrating:

a) Agar uchburchaklar o'xshash bo'lsa, u holda ularning balandliklari teng bo'ladi;

b) Agar ko'pburchak muntazam bo'lsa, u hoida unga ichki aylna chizish mumkin;

c) Agar ikki to'g'ri chiziq bitta to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lsa, bu to'g'ri chiziqlar o'zaro parallel bo'ladi;

d) Agar uchburchak teng tomonli bo'lsa, u holda bu uchburchakning balandliklari bissektrisalari bilan ustma-ust tushadi.

10. Quyidagi jumlalarni "yetarli", "zarur" so'zlaridan foydalanib qaytadan tuzing:

a) Agar har bir qo'shiluvchi berilgan songa bo'linsa, u holda yig'indi ham berilgan songa bo'linadi;

b) Kasrning surati mahrajidan kichik bo'lsa, bu kasr to'g'ri kasr bo'ladi.

III BOB. ALGEBRAIK SISTEMALAR

3.1. Binar algebraik operatsiyalar

Algebraik operatsiya tushunchasi. Maktab matematika kursida sonlar ustida qo'shish, ayirish, ko'paytirish, bo'lish kabi amallar o'rganiladi. Bu amallar bir qator xossalarga ega. Masalan, musbat butun sonlar to'plamida sonlarni qo'shish va ko'paytirish amali bajariladi, chunki bu amallarni bajarishdan chiqqan natija son musbat butun son bo'ladi. Shuningdek, qo'shish va ko'paytirishda sonlarni o'rni almashishi bilan natija o'zgarmaydi.

$8+3=11, \quad 3+8=11, \quad 8+3=3+8$

$6\times7=42, \quad 7\times6=42, \quad 6\times7=7\times6$

Musbat butun sonlar to'plamida ayirish va bo'lish amallari hamma vaqt bajarilmaydi, chunki sonlarni ayirish natijasida ba'zida manfiy, bo'lish natijasida kasr son hosil bo'ladi. Shuningdek, ushbu to'plamda sonlarni ayirish va bo'lishda sonlarni o'rnini almashtirish mumkin emas.

$9-6=3; \quad 6-9=-3; \quad 3\neq-3$

$8:2=4; \quad 2:8=0{,}25; \quad 4\neq0{,}25;$

Demak, musbat butun sonlar to'plamida sonlarni qo'shish va ko'paytirish o'rin almashtirish xossasiga bo'ysinadi, ayirish va bo'lish esa ushbu xossaga bo'ysinmaydi.

Amallar va ularning xossalarini faqat sonlar to'plami uchungina emas, balki boshqa matematik obyektlar uchun ham qarash mumkin. Masalan, to'plamlar, mulohazalar, almashtirishlar. To'plamlar ustida to'plamlarning birlashmasi, kesishmasi amallari bajariladi va bu amallar o'rin almashtirish xossasiga bo'ysinadi.

$A\cup B=B\cup A; \; A\cap B=B\cap A$

Sonlar, to'plamlar, mulohazalar va shu kabi matematik obyektlar ustida amallar bajarish jarayonida birorta to'plamning ixtiyoriy ikkita elementiga shu to'plamning uchinchi bir elementi mos qo'yiladi. Sonlar va matematik obyektlar ustida bajariladigan amallar algebraik operatsiya deb yuritiladi.

1-ta'rif. Berilgan X to'plamning ixtiyoriy elementlaridan tuzilgan tartiblangan (x,y) juftlikka. shu to'plamning uchinchi bir z elementini mos qo'yuvchi akslantirish (x,y)→z mavjud bo'lsa, X to'plamda algebraik operatsiya berilgan deyiladi.

X to'plamida X×X dekart ko'paytma berilgan bo'lsa, (x,y) juftlik X×X dekart ko'paytmadan, z esa X to'plamidan olingan bo'lib, dekart ko'paytma X×X→X akslanadi.

Demak, X to'plamda berilgan X×X→X akslantirish algebraik operatsiya bo'lib, x∈X element operatsiyaning birinchi, y∈X element operatsiyaning ikkinchi komponenti, z esa uning natijasi deyiladi.

Biz yuqorida X×X ko'rinishdagi dekart ko'paytmani X to'plamga akslantirishni ko'rdik, ya'ni X×Xdan olingan (x,y) elementlar juftligiga bitta z elementni mos qo'ydik. Bunday akslantirishga binar («bis» lotincha – «ikki» ma'nosini bildiradi) algebraik operatsiya deyiladi. Matematikada ko'p hollarda $X \times X \times X \to X$; $\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n} \to X$ ko'rinishdagi dekart ko'paytmani X to'plamiga akslantirish bilan berilgan algebraik operatsiyalar ham mavjud.

X→X unar (lotincha «unus»-bir)

X×X→X binar

X×X×X→X ternar

....

$\underbrace{X \times X \times \ldots \times X}_{n} \to X$ n-ar operatsiya deb yuritiladi.

Algebraik operatsiyalarga misollar:

1-misol. Natural sonlar to'plamida qo'shish amali algebraik operatsiyadir, chunki ixtiyoriy ikkita natural sonning yig'indisi hamma vaqt natural son bo'ladi, ya'ni x∈N, y∈N uchun x+y=z, z∈N hamma vaqt topiladi.

2-misol. Natural sonlar to'plamida ayirish amali algebraik operatsiya bo'la olmaydi, chunki ixtiyoriy ikkita natural sonning ayirmasi hamma vaqt natural sonlar toplamida topilmaydi.

3-misol. Juft sonlar to'plamida qo'shish amali algebraik operatsiyadir, chunki ikki juft sonning yig'indisi yana juft son bo'ladi.

Toq sonlar to'plamida qo'shish amali algebraik operatsiya bo'la olmaydi, chunki natija juft son bo'ladi.

$13+13=26;\ 15+17=32.\ (2n+1)+(2n+1)=4n+2=2(2n+1)$ - juft son.

4-misol. Butun sonlar to'plami Z da qo'shish, ayirish, ko'paytirish amali algebraik operatsiyadir. Bo'lish amali esa algebraik operatsiy bo'la olmaydi, chunki ba'zi bir hollarda bo'lish natijasida kasr son chiqadi.

Binar algebraik operatsiya ta'rifi:

Bo'sh bo'lmagan S to'plamdagi binar algebraik operatsiya * deb: $S \times S \to S$ akslantirishga aytiladi va $s * s'$ yoki $*(s, s')$ ko'rinishda belgilanadi. Ko'p sonli misollar keltirish mumkin:

- Z, Q, R, C to'plamlarda "+" va "×"operatsiyalari;
- I – irratsional sonlar to'plamida "+" va "×"operatsiyalari binar algebraik operatsiya bo'la olmaydi;
- R da ayirish va bo'lish amallari binar algebraik operatsiya bo'ladi;
- A to'plam va uning barcha qism to'plamlari berilgan bo'lsin. Qism to'plamlarning kesishmasi "∩", birlashmasi "∪", ayirmasi "/" va simmetrik ayirmasi "Δ" amallari binar algebraik operatsiya bo'ladi:
- S to'plamdagi barcha o'rin almashtirishlar ham binar algebraik operatsiya bo'ladi;

To'plamning algebraik operatsiyaga nisbatan yopiqligi haqida.

Bo'sh bo'lmagan S to'plamda binar algebraik operatsiya * aniqlangan va $\varnothing \neq T \subseteq S$ bo'lsin. T * algebraik operatsiyaga nisbatan yopiq deyiladi, agar $\forall t, t' \in T$ uchun $t * t' \in T$ bo'lsa.

Bu yerda qism to'plamning yopiqligi haqida so'z yuritilayotganiga e'tibor qaraqting.

Misollar:

- R haqiqiy sonlar to'plami, uning qismlari Z va Q qo'shish va ko'paytirish amallariga nisbatan yopiq bo'ladi.

• Manfiy haqiqiy sonlar to‘plami ko‘paytirish amaliga nisbatan yopiq emas.

• $Z[\sqrt{5}] = \{a + b\sqrt{5}\,|a, b \in Z\}$ to‘plam berilgan bo‘lsin. Uning qo‘shish va ko‘paytirish amallariga nisbatan yopiq bo‘lishini oson ko‘rsatish mumkin. Masalan ko‘paytirish uchun: a,b,c,d∈Z, bo‘lsa, $(a + b\sqrt{5}) \cdot (c + d\sqrt{5}) = (ac + 5bd) + (ad + bc)\sqrt{5}$ bo‘ladi.

Natural sonlar to‘plamida ayirish amali a,b∈N, a>b hollarda bajariladi a-b>0; a-b ayirma musbat butun son bo‘ladi. Yuqoridagi shartlarga mos qo‘yilgan sonlar to‘plami natural sonlar to‘plamining qism to‘plami bo‘ladi, ya’ni a>b shartga bo‘ysinuvchi a va b sonlar jufti akslantirilgan sonlardan iborat to‘plam natural sonlar to‘plamiga tegishli bo‘ladi. Natural sonlar to‘plamida bo‘lish amaliga nisbatan ham ushbu mulohazalarni yuritish mumkin.

Shunga ko‘ra natural sonlar to‘plamida ayirish va bo‘lish amali algebraik operatsiya bo‘la olmaydi. Bunga o‘xshagan hollar uchun algebraik operatsiya tushunchasiga kengroq nuqtai nazardan yondashish mumkin.

«Qisman algebraik operatsiya» tushunchasini kiritamiz.

2-ta’rif. Agar X×X dekart ko‘paytmaning A qism to‘plamining X to‘plamga akslantirishi berilgan bo‘lsa, bu akslantirishga X to‘plamda qisman algebraik operatsiya deyiladi.

$A \subset X \times X$, $A \to X$, ya’ni $(x,y) \to z$, $(x,y) \in A$, $z \in X$.

$z \in X$ elementga mos keluvchi (x,y) juftlar to‘plami A qisman algebraik operatsiyaning aniqlanish sohasi deyiladi.

Demak, natural sonlar to‘plamida ayirish va bo‘lish, butun sonlar to‘plamida darajaga ko‘tarish qisman algebraik operatsiya hisoblanadi. Qisman algebraik operatsiya bo‘sh ham bo‘lishi mumkin, ya’ni (x,y) juftlikka bitta ham z element mos kelmasligi mumkin.

3.2. Algebraik operatsiyalarning xossalari

Algebraik operatsiyalar kommutativlik, assotsiativlik, distributivlik, qisqaruvchanlik, teskarilanuvchanlik, neytral va yutuvchi elementlarning mavjudligi va simmetrik elementning mavjudlik xossalariga ega.

Algebraik amallar xossalari ayniy shakl almashtirishlar bilan bevosita bog'liqdir. Ayniy almashtirishlarni bitta algebraik operatsiyaga nisbatan qarab chiqaylik va bu algebraik operatsiyani (*) ko'rinishida belgilaylik.

a)Assotsiativlik xossasi.

A to'plamda * algebraik operatsiya berilgan bo'lsin.

3-ta'rif. A to'plamidan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun a*(b*c)=(a*b)*c tenglik bajarilsa, * algebraik operatsiya A to'plamda assotsiativlik xossasiga ega deyiladi.

Misollar ketiramiz.

1) Natural sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari assotsiativlik xossasiga ega.

$4+(8+7)=(4+8)+7$

$6\cdot(5\cdot3)=(6\cdot5)\cdot3$

2) Qo'shish va ko'payritish amallari ixtiyoriy sonlar to'plamida assotsiativlik xossasiga ega.

3) To'plamlarning kesishmasi va birlashmasi assotsiativlik xossasiga bo'ysinadi.

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

4) Butun sonlar to'plamida ayirish amali assotsiativlik xossasiga ega bo'lmaydi.

$7-(8-5)\neq(7-8)-5$

5) Musbat butun sonlar to'plamida bo'lish amali assotsiativ emas.

$12:(6:3)\neq(12:6):2$

$c\neq1 \quad a:(b:c)\neq(a:b):c$

Agar berilgan A to'plamda * algebraik operatsiya uchun assotsiativlik xossasi o'rinli bo'lsa, $x_1,x_2,x_3,\ldots,x_n\in A$ elementlardan va * algebraik operatsiya vositasida qavslar qo'yish orqali tuzilgan turli ifodalar bir xil son qiymatiga ega bo'ladi. Shuning uchun bir qancha sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallarini bajarish jarayonida qavslar ishlatilmaydi:

$(3+9)+(4+7)=3+9+4+7=12+4+7=16+7=23$

b) Kommutativlik xossasi.

Biz yuqorida assotsiativlik xossasi o‘rinli bo‘lgan * algebraik operatsiya vositasida hosil qilingan ifodalarda qavs ishlatmaslik mumkin ekanligini ko‘rdik.

Ammo bunday ifodalarda komponentlarning o‘rnini almashtirish umuman olganda mumkin emas, shuning uchun a*b ifoda bilan b*a ifodalarni ayni bir xil ifodalar deb bo‘lmaydi.

Ifodalarni ayniy shakl almashtirish oson bo‘lishi uchun * algebraik operatsiya assotsiativlik va kommutativlik xossalariga ega bo‘lishi lozim.

4-ta’rif. Berilgan A to‘plamning ixtiyoriy ikkita a va b elementlari uchun a*b=b*a tenglik bajarilsa, * algebraik operatsiya kommutativ deyiladi.

Kommutativlik xossasiga ega bo‘lgan * algebraik operatsiya vositasida hosil bo‘lgan a*b ifoda bilan b*a ifoda bir xil natijaga ega bo‘ladi, bu yerda $a,b \in A$. Natural sonlar to‘plamida qo‘shish amali uchun kommutativlik xossasi o‘rinli.

$(\forall\, a,b \in N) \qquad a+b=b+a$

Endi yuqoridagi misolni qulayroq usulda yechish mumkin: $(3+9)+(4+7)=3+7+9+4=10+9+4=19+4=23$

Natural sonlar to‘plamida ko‘paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o‘rinli.

$(\forall\, a,b \in N) \qquad a \cdot b=b \cdot a$

Haqiqiy sonlar to‘plami R da ham qo‘shish va ko‘paytirish amallari kommutativdir.

Butun sonlar to‘plami Z da ayirish amali kommutativlik xossasiga bo‘ysunmaydi.

$(\forall\, a,b \in Z) \qquad a \neq b; \qquad a-b \neq b-a$

Musbat ratsional sonlar to‘plami Q_+ da bo‘lish amali uchun kommutativlik xossasi o‘rinli emas.

$(\forall\, a,b \in Q_+) \qquad a \neq b; \qquad a:b \neq b:a$

3 o‘lchovli fazodagi vektorlarning vektor ko‘paytmasi natijasi assotsiativ ham, kommutativ ham emas. (Ko‘paytma natijasi “antikommutativ”, ya’ni u va v vektorlari uchun $u \times v = -v \times u$.

c) **Distributivlik xossasi.**

Yuqorida bitta algebraik operatsiyaga nisbatan assotsiativlik va kommutativlik xossalari ko'rildi, ushbu xossalar o'rinli bo'lgan algebraik operatsiyani o'zida saqlovchi ifodalarda shakl almashtirishlar amalga oshirildi. Endi esa, ikkita algebraik operatsiya bilan bog'langan ifodalarni ko'ramiz.

Faraz qilaylik, bizga X to'plam va unda *, ^{o} -algebraik operatsiyalar berilgan bo'lsin.

5-ta'rif. X to'plamidan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun

$a^{o}(b*c)=(a^{o}b)*(a^{o}c)$

tenglik o'rinli bo'lsa, ^{o} algebraik operatsiya * operatsiyaga nisbatan chap tomondan distributiv deyiladi.

6-ta'rif. X to'plamdan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun $(b*c)^{o}a=(b^{o}a)*(c^{o}a)$ munosabat o'rinli bo'lsa, ^{o} algebraik operatsiya * operatsiyaga nisbatan o'ng tomondan distributiv deyiladi.

7-ta'rif. X to'plamdan olingan ixtiyoriy a,b,c elementlar uchun $\left.\begin{array}{l} a\circ(b*c)=(a\circ b)*(a\circ c) \\ (b*c)\circ a=(b\circ a)*(c\circ a)\end{array}\right\}$ tengliklar o'rinli bo'lsa, ^{o} algebraik operatsiya * operatsiyaga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysinadi deyiladi.

Misollar.

1) Natural sonlar to'plamida ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv, chunki

$$\forall a,b,c\in N \qquad \begin{cases} a(b+c)=ab+ac \\ (b+c)a=ba+ca \end{cases}.$$

2) Butun sonlar to'plamida ko'paytirish amali ayirish amaliga nisbatan distributivdir, chunki

$$\forall a,b,c\in Z \qquad \begin{cases} a(b-c)=ab-ac \\ (b-c)a=ba-ca \end{cases}$$

3) Qo'shish amali ko'paytirish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga ega emas.

$a + bc \neq (a + b) \cdot (a + c)$

$3 + 4 \cdot 7 \neq (3 + 4) \cdot (3 + 7)$

4) To'plamlar kesishmasi to'plamlar birlashmasiga nisbatan distributivlik xossasiga ega bo'ladi.

$$\begin{cases} A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \\ (B \cup C) \cap A = (B \cap A) \cup (C \cap A) \end{cases}$$

5) To'plamlar birlashmasi to'plamlar kesishmasiga nisbatan distributivlik xossasiga ega bo'ladi.

$$\begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ (B \cap C) \cup A = (B \cup A) \cap (C \cup A) \end{cases}$$

6) Ratsional sonlar to'plamida bo'lish amali qo'shish amaliga nisbatan faqat o'ng tomondan distributiv, chunki

$\forall$ a,b,c$\in$Q (a+b):c=a:c+b:c.

Natija. Ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv bo'lganidan (a+b)(c+d)=a(c+d)+b(c+d) o'rinli bo'ladi. Yana bir marta ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivlik xossasidan foydalanish bilan (a+b) (c+d) = ac + ad + bc + bd kelib chiqadi.

Agar berilgan *, ° ikkita algebraik operatsiyalardan birinchisi * assotsiativlik xossasiga va ° operatsiyasi * operatsiyaga nisbatan distributivlik xossasiga ega bo'lsa, bu algebraik operatsiyalarga nisbatan quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

(a*b)°(c*d)=(a°c)*(a°d)*(b°c)*(b°d)

d) Qisqaruvchanlik xossasi.

Ma'lumki,

a) Natural sonlar to'plami N da berilgan ixtiyoriy a,x,y elementlar uchun

$a + x = a + y \Rightarrow x = y$

$ax = ay \Rightarrow x = y$ bajariladi.

b) Butun sonlar to'plami Z da a=0 bo'lgan holda 0+x=0+y munosabatdan x=y kelib chiqadi. Ko'paytirishga nisbatan esa 0x=0y munosabat x va y ning qat'iy son qiymatlarini aniqlash imkoniyatini bermaydi.

8-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan A to'plamining ixtiyoriy x,y va a elementlari uchun, shu to'plamda aniqlangan * algebraik operatsiyaga nisbatan $\begin{cases} a * x = a * y \\ x * a = y * a \end{cases}$ munosabatlar o'rinli ekanligidan x=y kelib chiqsa, A to'plamida * algebraik operatsiya qisqaruvchanlik xossasiga ega deyiladi.

Agar a*x=a*y dan x=y tenglik o'rinli bo'lsa, A to'plam elementlari uchun * amalga nisbatan chapdan qisqaruvchanlik xossasi o'rinli bo'ladi.

Agar x*a=y*a dan x=y tenglik o'rinli bo'lsa, A to'plam elementlari uchun * amalga nisbatan o'ngdan qisqaruvchanlik xossasi o'rinli bo'ladi.

Bir vaqtning o'zida chapdan va o'ngdan qisqaruvchanlik xossasi o'rinli bo'lsagina A to'plamda qisqaruvchanlik xossasi o'rinli deyiladi.

Natural sonlarni qo'shish va ko'paytirish amallari yuqorida ko'rdikki, qisqaruvchanlik xossasiga ega.

To'plamlarning kesishmasi esa, bunday xossaga ega emas:

A∩B = A∩C ekanligidan har doim ham B=C ekanligi kelib chiqmaydi.

e) Teskarilanuvchanlik xossasi. Ma'lumki, ko'paytirish amaliga bo'lish, qo'shish amaliga ayirish amallari teskari amallardir.

$a+x=b \Rightarrow x=b-a$

$a \cdot x=b \Rightarrow x=b:a$ kelib chiqadi.

Qo'shish va ko'paytirish amallari natural sonlar to'plamida algebraik operatsiya bo'lsa, ayirish va bo'lish amallari qisman algebraik operatsiyadir, chunki ayirish faqat a>b bo'lgan hollarda, bo'lish esa a soni b soniga qoldiqsiz bo'lingan hollardagina bajariladi.

Endi esa qisqaruvchan va kommutativ bo'lgan har qanday * algebraik operatsiyaga teskari bo'lgan T qisman algebraik operatsiyani aniqlaymiz hamda ularning umumiy xossalarini keltirib chiqaramiz. Ana shu umumiy xossalardan esa amallarning, xususiy holda ayirish va bo'lish amalining xossalari kelib chiqadi.

Faraz qilaylik, A to'plami va unda qichqaruvchan va kommutativ bo'lgan * algebraik operatsiya berilgan bo'lsin. A to‘plamga tegishli va $b*x=a$ shartni qanoatlantiruvchi ixtiyoriy (a,b) juftliklar to‘plamini Y bilan belgilaylik. Har bir (a,b) juftlikda x bir qiymatli aniqlangandir.

Faraz qilaylik, x bir qiymatli aniqlanmagan, ya’ni $b*x=a$; $b*y=a$ bo‘lsin, u holda * algebraik operatsiyaning qisqaruvchanlik xossasidan $x=y$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, Y dan olingan har bir (a,b) juftga A to‘plamdan bitta x ni mos qo‘yish orqali * algebraik operatsiyaga teskari bo‘lgan T qisman algebraik operatsiyasi A to‘plamda aniqlandi.

9-ta’rif. Agar $x\in A$, $(a;b)\in Y$, $Y\subset A$ uchun $x=aTb$ operatsiya faqat va faqat $b*x=a$ o‘rinli bo‘lganda bajarilsa, T operatsiyaga * operatsiyasiga teskari bo‘lgan algebraik operatsiya deyiladi.

3.3. Neytral, yutuvchi va simmetrik elementlar

Binar operatsiyalarining ba’zi elementlari.

Neytral element. Butun sonlar to‘plami Z da berilgan ixtiyoriy songa 0 sonini qo‘shish, ixtiyoriy sonni 1 soniga ko‘paytirish bilan natija o‘zgarmasligi bizga ma’lum.

10-ta’rif. A to‘plamda berilgan * algebraik operatsiyaga nisbatan $a,e\in A$ elementlar uchun $a*e=e*a=a$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, shu to‘plamning e elementi neytral element deyiladi.

Teorema. Berilgan A to‘plamda faqat bitta neytral element mavjud bo‘ladi.

Isbot. Aytaylik, A to‘plamda e dan tashqari e_1 ham neytral element bo‘lsin, u holda $a\in A$ uchun $e_1*a=a*e_1=a$ bajarilishi kerak. $e_1*e=e*e_1=e$, shu bilan birga $e*e_1=e_1*e=e_1$. Bu tengliklar bajarilishidan $e=e_1$ ekani kelib chiqadi.

Har qanday to‘plam ham neytral elementga ega bo‘lavermaydi. Natural sonlar to‘plamida qo‘shishga nisbatan neytral element mavjud emas, chunki $a+e=a$ tenglikni o‘rinli qiladigan e soni N da mavjud emas.

Nomanfiy butun sonlar to‘plamida $a+0=a$; $a\cdot 1=a$ tengliklar o‘rinli bo‘lgani uchun, qo‘shish amaliga nisbatan 0 soni, ko‘paytirish amaliga nisbatan 1 soni neytral element hisoblanadi.

Agar A to'plamda * amaliga nisbatan neytral e element mavjud bo'lsa, * algebraik operatsiya bilan berilgan har qanday ifodada neytral e elementni * algebraik operatsiya bilan birgalikda tashlab yuborish mumkin bo'ladi: $21+0+16+0+3=21+16+3$

Yutuvchi element.

11-ta'rif. Agar A to'plamda $\omega \in A$ topilsaki, $\forall x \in A$ uchun $a*\omega=\omega*a$ tenglik bajarilsa, berilgan * algebraik operatsiyaga nisbatan ω element yutuvchi element deyiladi.

Butun sonlar to'plami Z da har qanday sonni 0 ga ko'paytirish natijasida 0 soni hosil bo'ladi: $a \cdot 0=0$.

Demak, ko'paytirish amaliga nisbatan 0 element yutuvchi element hisoblanar ekan. Shuningdek ω element * algebraik amalga nisbatan yutuvchi element bo'lsa, ω element bilan shu amal birgalikda berilgan har qanday ifodani ω element bilan almashtirish mumkin bo'ladi.

Simmetrik element.

Ratsional sonlar to'plamida quyidagi tengliklar o'rinli:

$$a-b=a+(-b)$$

$$a:b=a\cdot\frac{1}{b};b\neq 0$$

Birinchi tenglikda ayirish amali qo'shish amali bilan, b soni esa, unga qarama-qarshi (-b) soniga, ikkinchi tenglikda bo'lish amali ko'paytirish amali bilan, b soni esa unga teskari bo'lgan $\frac{1}{b}$ soni bilan almashtiriladi.

Qarama-qarshi, teskari sonlar simmetrik elementning xususiy hollaridir.

Aytaylik, A to'plam va * algebraik operatsiya berilgan bo'lsin, e element A to'plamining neytral elementi bo'lsin.

12-ta'rif. Agar $\forall a \in A$ uchun $a*\bar{a}=\bar{a}*a=e$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\bar{a}$ element a element uchun simmetrik element deyiladi.

Teorema. A da berilgan * algebraik operatsiya assotsiativ bo'lsa, * operatsiyasiga nisbatan A ning har bir elementiga faqat bitta simmetrik element mos keladi.

Isbot. Aytaylik, A to'plamda a elementga ikkita $\bar{a}_1$ va $\bar{a}_2$ elementlar simmetrik bo'lsin.

U holda ta'rifga asosan $\begin{matrix} a * \bar{a}_1 = \bar{a}_1 * a = e \\ a * \bar{a}_2 = \bar{a}_2 * a = e \end{matrix} \Rightarrow a * \bar{a}_1 = a * \bar{a}_2$

* operatsiyasi assotsiativ bo'lganidan

$$(\bar{a}_1 * a) * \bar{a}_2 = \bar{a}_1 * (a * \bar{a}_2) \Rightarrow e * \bar{a}_2 = \bar{a}_1 * e \Rightarrow \bar{a}_2 = \bar{a}_1.$$

Bundan ko'rinadiki, * operatsiyasiga nisbatan A to'plamning har bir elementi faqat bitta simmetrik elementga ega bo'ladi.

Shunday to'plamlar mavjudki, ularning har bir elementiga bitta ham simmetrik element mos kelmaydi.

Masalan, nomanfiy butun sonlar to'plamida qo'shish amaliga nisbatan $a \in A_0$ ga simmetrik element $(-a)$ mavjud emas, $-a \notin A_0$.

Ko'paytirish amaliga nisbatan simmetrik element teskari element, qo'shish amaliga nisbatan esa simmetrik element qarama-qarshi element deyiladi.

Ma'lumki, ratsional sonlar to'plamida a ga teskari $\frac{1}{a}$ $(a \neq 0)$; $\frac{1}{a}$ ga teskari $\frac{1}{\frac{1}{a}} = a$; a ga qarama-qarshi $(-a)$; $(-a)$ga qarama-qarshi $-(-a)=a$, ya'ni $\bar{\bar{a}} = a$ o'rinli bo'ladigan elementlar mavjud.

Teorema. Agar to'plamda berilgan * algebraik operatsiya assotsiativ hamda to'plamning ixtiyoriy b va c elementlari $\bar{b}$ va $\bar{c}$ simmetrik elementga ega bo'lsa, $(\overline{b * c}) = \bar{b} * \bar{c}$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Teoremaning isboti talabalarga havola qilinadi.

Nazorat uchun savollar

1. Algebraik operatsiyaga ta'rif bering.
2. Qisman algebraik operatsiyani tushuntiring.
3. Algebraik operatsiyaning assotsiativlik xossasini ayting.
4. Algebraik operatsiyaning kommutativlik xossasini ayting.
5. Algebraik operatsiyaning distributivlik xossasini ayting.
6. Natural sonlar to'plamida qaysi amallar kommutativlik va assotsiativlik xossalariga ega?
7. Amallarning qaysi biri uchun butun sonlar to'plami Z da assotsiativlik xossasi o'rinli bo'ladi?

8. Butun sonlar to'plami Z da ayirish amali qisqaruvchanlik xossasiga egami?

9. Berilgan amalga nisbatan teskari amal deb qanday amalga aytiladi?

10. Ratsional sonlar to'plami Q da ko'paytirish amaliga teskari amal mavjudmi?

11. Qachon amal teskarilanuvchanlik xossasiga ega bo'ladi deyiladi?

12. Natural sonlar to'plami N da neytral element mavjudmi?

Mashqlar:

1. Ko'rsatilgan qaysi amallar (qo'shish, ayirish, ko'paytirish va bo'lish) ga nisbatan quyidagi to'plamlar yopiq:

a) natural sonlar; b) toq sonlar; c)butun sonlar; d) musbat ratsional sonlar; e) $\{0\}$; f) $\{0;1\}$; j) $\{3n+1 | n \in Z\}$?

2. $\{*;X\}$ juftliklarning qaysilari uchun "* operatsiyasi X to'plamda algebraik operatsiya bo'ladi" mulohaza rost:

a) * – qo'shish, $X = Z_{-}$; b) * – bo'lish, $X = R_{+}$;

c) * – bo'lish, $X = R_{-}$; d) * – ko'paytirish, $X = \{3k | k \in Z\}$;

e) *– EKUB, $X = \{2n | n \leq N\}$; f) * – EKUK, $X = \{2k+1 | k \in N\}$?

3. Butun sonlar to'plami Z da assotsiativ yoki kommutativ bo'lgan operatsiyalarni ko'rsating:

a) qo'shish; d) ko'paytirish; c) ayirish; d) $a*b=3a-2b$.

4. Natural sonlar to'plami N da assotsiativ yoki kommutativ bo'lgan operatsiyalarni ko'rsating:

a) qo'shish; d) ko'paytirish; c) ayirish; d) bo'lish; e) EKUB(a,b); f) EKUK (a,b); k) $a*b=3a+2b$; l) $a*b=a^b$.

5. To'plamlar ayirmasi uchun kommutativlik xossasi o'rinlimi? Simmetrik ayirma uchunchi?

6. Mulohazalar ustida bajariladigan qaysi amallar kommutativlik xossasiga ega: a) konyunksiya; a) dizyunksiya; a) implikatsiya; a) ekvivalensiya?

7. $\{ \circ;* \}$ juftliklarning qaysilari uchun " $\circ$ algebraik operatsiya * operatsiyaga nisbatan distributiv" mulohaza rost:

a) $\circ$– bo'lish, * – qo'shish musbat sonlar to'plamida;

b) °– qo'shish, * – ko'paytirish, haqiqiy sonlar to'plami Rda;
c) °–to'plamlar birlashmasi, * – to'plamlar kesishmasi;
d) °–to'plamlar kesishmasi, * – to'plamlar birlashmasi;
e) °– qo'shish, * – ayirish butun sonlar to'plamida;
f) °– ko'paytirish, * – ayirish butun sonlar to'plamida;
g) °– darajaga ko'tarish, * – qo'shish.

8. To'plamlar birlashmasiga teskari operatsiya mavjudmi? To'plamlar kesishmasigachi?

9. EKUB(a,b) ga teskari operatsiya mavjudmi?

10. Q va Q_+ to'plamda ko'paytirish amaliga teskari operatsiya mavjudmi?

11. Natural sonlarni qo'shishning neytral elementi bormi?

12. $a*b=a+b+ab$ operatsiyasining ratsional sonlar to'plamida neytral elementi bormi?

13. Qanday to'plam to'plamlar kesishmasining yutuvchi elementi bo'ladi?

14. 60 sonining bo'luvchilari orasida EKUK (a,b) operatsiyasining yutuvchi elementi bormi?

15. $a*b=a+b+ab$ operatsiyasining ratsional sonlar to'plamida yutuvchi elementi bormi?

16. Butun sonlar to'plami Z da qo'shish operatsiyasiga nisbatan 8 ga simmetrik son bormi?

17. $a*b=a+b+ab$ operatsiyasiga nisbatan a ga simmetrik son bormi?

18. Ratsional sonlar to'plamida ko'paytirish amaliga nisbatan 10 ga simmetrik son bormi? -3 gachi? 0 sonigachi?

3.4. Algebraik sistemalar. Yarim gruppa, gruppa, halqa va maydon tushunchalari va ularga misollar

Algebra tushunchasi. Bo'sh bo'lmagan A to'plamda algebraik operatsiya berilgan bo'lsa, u algebra deyiladi.

Agar natural sonlar to'plami N da qo'shish amali berilgan bo'lsa, bu to'plamda berilgan algebra ‹N,+› ko'rinishda belgilanadi. Demak, algebra berilishi uchun bo'sh bo'lmagan to'plam va unda algebraik operatsiya berilishi lozim ekan.

Agar X to'plam berilib, unda $*,\circ$ algebraik operatsiyalar berilgan bo'lsa, ular vositasida berilgan algebra $\langle X,*,\circ\rangle$ ko'rinishda bo'ladi. $\langle X,T,\circ\rangle$ algebra $\langle X,T,*\rangle$ algebradan $\circ$ va $*$ algebraik operatsiyalari bilan farq qiladi.

Gruppa, halqa, maydon ana shunday algebralar qatoriga kiradi. Quyida gruppa, halqa va maydon kabi algebralarning xossa va xususiyatlarini ko'rib chiqamiz.

Yarim gruppa va gruppa haqida tushuncha. Aytaylik bizga, $A\neq\emptyset$ to'plam va binar $*$ algebraik operatsiya berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan A to'plamda $*$ algebraik operatsiya assotsiativ bo'lsa, $\langle A, *\rangle$ algebra yarim gruppa deyiladi.

2-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan A to'plamda quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa, $\langle A, *\rangle$ algebra gruppa deyiladi:

a) A to'plamning ixtiyoriy a,b,c elementlari uchun $a*(b*c) = =(a*b)*c$ munosabat o'rinli bo'lsa, ya'ni binar $*$ algebraik operatsiya assotsiativ bo'lsa;

b) A to'plamning ixtiyoriy a elementi uchun shunday $e\in A$ element mavjud bo'lib, u $a*e=e*a=a$ shartni qanoatlantirsa, ya'ni A to'plamda neytral element mavjud bo'lsa;

c) A to'plamning ixtiyoriy a elementi uchun shunday $\tilde{a}$ element mavjud bo'lib, u quyidagi $a*\tilde{a}=\tilde{a}*a=e$ shartni qanoatlantirsa, ya'ni A to'plamning har bir elementiga simmetrik element mavjud bo'lsa.

Ta'rifdan ko'rinadiki, $\langle A,*,e,\tilde{a}\rangle$ algebra gruppa bo'lishi uchun $*$ algebraik operatsiya bo'lib, u assotsiativ bo'lishi hamda A to'plamda e neytral, $\tilde{a}$ simmetrik elementlar mavjud bo'lishi kerak ekan.

Kommutativ Abel gruppasi.

3-ta'rif. Agar A to'plamda berilgan $*$ algebraik operatsiya kommutativ bo'lsa, ya'ni ixtiyoriy $a,b\in A$ uchun $a*b=b*a$ o'rinli bo'lsa, $\langle A,*,e,\tilde{a}\rangle$ gruppa $*$ binar algebraik operatsiyaga nisbatan kommutativ gruppa deyiladi. Kommutativ gruppa ba'zi hollarda Abel gruppasi deb ham ataladi.

1-misol. Binar «*» algebraik operatsiyani «+» qo'shish amali bilan almashtiraylik. A to'plamda + amali gruppa hosil qiladi:

a) $\forall\ a,b,c,\in A$ uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$ bajariladi, ya'ni qo'shish amali assotsiativ;

b) $\forall\ a\in A$ uchun shunday $e=0$ neytral element mavjud, $a+0=0+a=a$;

d) A to'plamning ixtiyoriy a elementi uchun $a+(-a)=0$ shartni qanoatlantiruvchi simmetrik $(-a)$ element mavjud.

Ma'lumki, qo'shish amali kommutativdir, shuning uchun $\langle A,+,0,-a\rangle$ algebra kommutativ, ya'ni Abel gruppasidir.

2-misol. Haqiqiy sonlar to'plami R ko'paytirish amaliga nisbatan kommutativ gruppa tashkil qiladi.

Haqiqatan ham, $\forall a,b,c\in R$ uchun

a) $(a\cdot b)\cdot c=a(b\cdot c)$ assotsiativiik xossasi o'rinli;

b) $\forall a\in R$ uchun $0\in R$ mavjudki, $a\cdot 1=a$;

d) $\forall a\in R$ uchun $-a\in R$ topiladiki, $a\cdot \frac{1}{a}=1$.

Qo'shish amali haqiqiy sonlar to'plamida kommutativ, assotsiativ bo'lganidan va R da neytral va simmetrik element mavjudligidan $\langle R,+,0,-a\rangle$ kommutativ gruppa bo'lishi kelib chiqadi.

Agar «*» algebraik operatsiya sifatida «+» ko'paytirish amali olinib, $\langle A,+\rangle$ algebra qo'shish amaliga nisbatan gruppa bo'lsa, bunday gruppalar additiv gruppalar deyiladi.

Agar «*» algebraik operatsiya sifatida «·» qo'shish amali olinib, $\langle A,\cdot\rangle$ algebra ko'paytirish amaliga nisbatan gruppa bo'lsa, bunday gruppalar multiplikativ gruppalar deyiladi.

Halqa va uning ta'rifi.

Bo'sh bo'lmagan A to'plamda ikkita binar algebraik operatsiya berilgan bo'lsin. Aniqlik uchun binar algebraik operatsiyalar uchun «qo'shish» va «ko'paytirish» amallarini qabul qilaylik.

4-ta'rif. Bo'sh bo'lmagan A to'plamda qo'shish va ko'paytirish binar algebraik operatsiyalari berilgan bo'lib, ular quyidagi xossalarga bo'ysunsalar, A to'plam va $+,\cdot$ amallari bilan berilgan $\langle A,+,\cdot\rangle$ algebra yarim halqa deyiladi:

a) $\forall a,b,c\in A$lar uchun $(a+b)+c=a+(b+c)$, ya'ni assotsiativlik xossasi;

b) $\forall a,b,c \in A$ uchun $a+b=b+a$, ya'ni kommutativlik xossasi;

c) $\forall$ $a,b,c \in A$ uchun $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ ko'paytirish amali assotsiativlik xossasiga bo'ysinsa;

d) $\forall$ $a,b,c \in A$ uchun $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$ yoki $c \cdot (a+b) = c \cdot a + c \cdot b$ ko'paytirish amali qoshish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga ega bo'lsa.

Agar $\langle A,+,\cdot \rangle$ yarim halqa bo'lib, ko'paytirish amali kommutativ bo'lsa, bunday yarim halqa yarim kommutativ halqa deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\langle A,+,\cdot \rangle$ algebra qo'shish amaliga nisbatan Abel gruppa, ko'paytirish amaliga nisbatan yarimgruppa va ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributivlik xossasiga bo'ysunsa, $\langle A,+,\cdot \rangle$ algebraga halqa deyiladi.

Demak, $\langle A,*,^{\circ} \rangle$ halqa bo'lishi uchun, A to'plamda * algebraik operatsiya assotsiativ va kommutativ bo'lishi, * algebraik operatsiyaga nisbatan neytral va simmetrik elementlari mavjud bo'lishi, $\circ$ algebraik operatsiya assotsiativ bo'lishi hamda $\circ$ algebraik operatsiya * algebraik operatsiyaga nisbatan distributiv bo'lishi kerak.

Agar $\forall a \in A$ uchun $a+0=a$ va $0+a=a$ munosabat o'rinli bo'lsa, $0 \in A$ element A to'plamning nol elementi, agar $\forall a \in A$ uchun $e \in A$ mavjud bo'lib, $a \cdot e = e \cdot a = a$ munosabat bajarilsa, e elementga A to'plamning birlik elementi deyiladi.

Misol. $N=\{1,2,3,\ldots,n,\ldots\}$ natural sonlar to'plamida qo'shish va ko'paytirish amallari vositasida tashkil qilingan $\langle N,+,\cdot \rangle$ algebra yarim halqadir. Haqiqatan ham,

1) $4,6,7 \in N$ $\quad 4+(6+7)=(4+6)+7$

2) $4+7=7+4$

3) $5 \cdot (6 \cdot 7) = (5 \cdot 6) \cdot 7$

4) $6 \cdot (7+4) = 6 \cdot 7 + 6 \cdot 4$

$6 \cdot 7 + 6 \cdot 4 = 42 + 24 = 66, \quad 6 \cdot (7+4) = 6 \cdot 11 = 66.$

Demak, $\langle N,+,\cdot \rangle$ algebra yarim halqadir.

Agar A to'plamda berilgan ko'paytirish amali uchun kommutativlik xossasi o'rinli bo'lsa, $\langle A,+,\cdot \rangle$ kommutativ halqa, agar ko'paytirish amali uchun assotsiativlik xossasi o'rinli bo'lsa, ‹A,+,·› assotsiativ halqa, agar ko‘paytirish amaliga nisbatan a·e=e·a=a shartni bajaruvchi neytral element mavjud bo‘lsa, ‹A,+,·› birlik elementli halqa (chunki a·1=1·a=a,e=1) deb yuritiladi.

Agar ‹A,*,°› halqani tashkil qilayotgan A to‘plam elementlari sonlardan iborat bo‘lsa, ‹A,*,°› halqa sonli halqa deb yuritiladi.

Endi ko‘rib chiqilgan halqa va uning xossalaridan foydalanib maydon tushunchasini kiritamiz.

Maydon. Faraz qilaylik, kommutativ va birlik elementli assotsiativ halqa berilgan bo‘lsin.

6-ta’rif. Agar ‹A,+,·› algebra kommutativ, assotsiativ va birlik elementli halqa bo‘lib, a∈A, a≠0 uchun a elementga $a\cdot a^{-1}=e$ shartni qanoatlantiruvchi a^{-1} teskari element mavjud bo‘lsa, ‹A,+,·› algebraga maydon deyiladi.

Maydon ta’rifidan ko‘rinadiki:

a) har qanday maydonda uning nolga teng bo‘lmagan istalgan elementiga teskari element mavjud va yagonadir;

b) ∀a∈A, a≠0 uchun $a\cdot a^{-1}=a\cdot\frac{1}{a}=1$;

d) har qanday maydonda birlik element mavjud va yagonadir;

e) ∀ a,b∈A uchun a·x=b tenglikni qanoatlantiruvchi x∈A yagonadir, bu $a\cdot a^{-1}=e$ shartni qanoatlantiruvchi a^{-1} ning yagonaligidan kelib chiqadi:

$$a\cdot x=b\Rightarrow x=b\cdot a^{-1}\quad b\cdot(a\cdot b^{-1})=(b\cdot b^{-1})\cdot a=a;$$

f) maydon nolning bo‘luvchilariga ega emas.

Agar ‹A,+,·› maydonda A to‘plam elementlari sonlardan iborat bo‘lsa ‹A,+,·› maydon sonli maydon deyiladi.

Ratsional sonlar to‘plami Q da qo‘shish va ko‘paytirish amallari vositasida hosil qilingan ‹Q,+,·› algebra maydon tashkil etadi.

Butun sonlar to‘plamida qo‘shish va ko‘paytirish amallari vositasida hosil qilingan ‹Z,+,·› algebra maydon hosil qilmaydi.

Gomomorfizmlar va izomorfizmlar. Qo‘shimcha guruh $(Z_6,+)$ va multiplikativ guruh $(Z_7^*,\cdot)$ orasida qanday farq bor? Avvalo, ularning ikkalasi ham siklik: $(Z_6,+)$da 1generator (aslida, [1]), va $(Z_7^*,\cdot)$da 3generator ([3]) bor. Yagona farq kosmetik bo‘lgani holda, bu ikkala guruhni algebraik bir xil deb atash o'rinli bo'lmaydimi? Haqiqatdan ham, istalgan 6-tartibli siklik guruh $\{e,x,x^2,x^3,x^4,x^5,x^6\}$ ko'rinishga ega bo'lmaydimi?

Bu yerda bir muncha aniqroq namuna keltiramiz. $(R,+)$ va $(R^+,\cdot)$ cheklanmagan guruhlarni ko'rib chiqaylik. Bir qaraganda bular har xil tuyuladi. Agar $f(x)=e^x$ (o'ziga xos funksiya) orqali berilgan $f:R\rightarrow R^+$ akslantirishni ko'rib chiqsak, unda f faqatgina biyeksiya emas (ln qarama-qarshi elementli), balki bu akslantirish ikkita binar operatsiyasini bir biriga moslashtiradi:

$f(x+y) = e^{x+y} = e^x\cdot e^y = f(x)\cdot f(y)$.

E'tibor beringki, $g(x)=\ln x$ qarama-qarshi akslantirish ham xuddi shunday vazifani bajaradi, faqat qarama-qarshi tartibda:

$g(x\cdot y)=\ln(x\cdot y)=\ln x+\ln y=g(x)+g(y)$.

Yuqoridagi shuni bildiradiki, biz f akslantirish va uning qarama-qarshisi g orqali $(R^+,\cdot)$ guruh strukturasi $(R^+,\cdot)$ guruh strukturasi orqali ifodalanadi, ya'ni bu ikki guruh "izomorf"dir. Biz bu tushunchani quyida shakllantiramiz.

Gomomorfizm ta'rifi: $(G,*)$ va $(H,*)$ guruhlar hamda $f: G\rightarrow H$ akslantirish bo'lsin. Agar hamma $g,g'\in G$ uchun $f(g*g')=f(g)\,f(g')$ bo'lsa, unda biz f ni **gomomorfizm** deb ataymiz. Boshqacha qilib aytganda, $g,g'\in G$ elementlarining natijasini topishda avval G dagi $g*g'$ natijasini hisoblab, so'ng f ga murojaat qilish yoki birinchi g va g' ga f ni qo'yib, so'ng H dagi $f(g)\,f(g')$ natijasini hisoblashning farqi yo'q.

Albatta, biz endi bilamizki, $(R,+)$ dan $(R^+,\cdot)$ga bo'lgan o'ziga xos akslantirish gomomorfizmdir.

Isomorfizm ta'rifi: Agar $f:G\rightarrow H$ $(G,*)$ va $(H,\cdot)$ guruhlarining gomomorfizmi bo'lib, agar f biyektiv bo'lsa biz uni **izomorfizm** deb aytamiz.

Etibor beringki, bu holatda $f^{-1}:H\rightarrow G$ teskari akslantirish ham gomomorfizm bo'ladi. Isbot quyidagicha: agar $h, h'\in H$ bo'lsa, unda quyidagini ko'rib chiqing:

$f(f^{1}(h)*f^{1}(h'))=f(f^{1}(h))*f\,f^{-1}(h'))$=(f gomomorfizm bo'lganligi uchun)$=h\cdot h'$=(f va f^{1} o'zaro teskari funksiyalar bo'lgani uchun)= $f(f^{1}(h\cdot h'))$

Shunga qaramay, f birga bir ekan, biz yuqoridagidan xulosa qilamizki, $f^{-1}(h)*f^{-1}(h')=f^{-1}(h\cdot h'))f^{1}$ gomomorfizmdir.

Nazorat uchun savollar

1. Berilgan to'plama yarim gruppa hosil qilishi uchun undagi algebraik operatsiya qanday xossalarga bo'ysunadi?
2. Berilgan to'plam gruppa hosil qilishi uchun qanday talablar qo'yiladi?
3. Kommutativ gruppaga qanday talablar qo'yiladi?
4. Abel gruppa deb qanday gruppaga aytamiz?
5. Halqa tashkil qilish uchun qanday shartlar bajarilishi kerak?
6. Yarim kommutativ halqaga ta'rif bering.
7. Assotsiativ halqaga misollar keltiring.
8. Maydonga ta'rif bering. Misollar keltiring.

Mashqlar:

1. Z to'plamda shunday $*$, 0° algebraik operatsiyalarni topingki, unda $*$ amali kommutativ, assotsiativ bo'lgani holda 0° ga nisbatan distributiv bo'lmasin.

2. R to'plamga shunday algebrayik operatsiya aniqlangki, o'ngdan ham, chapdan ham qisqartirish qonuni o'rinli bo'lsin.

3. Quyidagi to'plamlarning qaysi biri halqa bo'ladi:

a) 5 ga karrali butun sonlar to'plami;

b) toq butun sonlar to'plami;

c) haqiqiy sonlar to'plami;

d) $a + b\sqrt{2}$ ko'rinishdagi sonlar to'plami;

Bu to'plamlarning qaysi biri maydon bo'ladi?

4. U universal to'plamning to'plam ostilari birlashma va kesishmaga nisbatan halqa tashkil etadimi?

5. X ={0,1,2,3,4,5} to'plamda a va b sonlarning yigindisi a+b ni 6 ga bolishdagi qoldiqqa teng, ko'paytmasi ab ni 6 ga bo'lishdagi qoldiqqa teng deb aniqlangan. X to'plam halqa tashkil etadimi?

6. X ={0,1,2,3,4} to'plamda a va b sonlarning yigindisi a+b ni 5 ga bolishdagi qoldiqqa teng, ko'paytmasi ab ni 5 ga bo'lishdagi qoldiqqa teng deb aniqlangan. X to'plam maydon tashkil etadimi? 2 soniga teskari va simmtrik elementlarni ko'rsating.

IV BOB. ELEMENTAR GRAFLAR NAZARIYASI

4.1. Graflar nazariyasi elementlari: graflar turlari, uchlar, qirralar, yoylar, daraxtlar

1736- yilda L.Eyler tomonidan o‘z davrning qiziqarli amaliy masalalardan biri hisoblangan Kyonigsberg[1] ko‘priklari haqidagi masalaning qo‘yilishi va yechilishi **graflar nazariyasining** paydo bo‘lishiga asos bo‘ldi.

Kyonigsberg shahridagi Pregel daryosi ustida qurilgan yettita ko‘prikning joylashuvi 1- shakldagi qadimiy xaritada tasvirlangan va qurilishi tartibida 1, 2, 3, 4, 5, 6 va 7 raqamlar bilan belgilangan. Pregel daryosi Kyonigsberg shahrini o‘sha davrda to‘rtta A, B, C va **D** qismlarga bo‘lgan. Shaharning ixtiyoriy qismida joylashgan uydan chiqib yettita ko‘prikdan faqat bir martadan o‘tib, yana o‘sha uyga qaytib kelish mumkinmi?

4.1-rasm

Kyonigsberg ko‘priklari haqidagi bu masalani hal qilish jarayonida graflarda maxsus marshrut (hozirgi vaqtda graflar nazariyasida bu marshrut Eyler sikli nomi bilan yuritiladi) mavjudligi shartlari ham topildi. L.Eylerning bu natijalar e’lon

---

[1] Kyonigsberg (Konigsberg) – bu shahar 1255-yilda asoslangan bo‘lib, Sharqiy Prussiyadagi Pregel daryosi qirg‘oqlarida joylashgan. 1946-yildan boshlab Kaliningrad deb nomlangan va hozir Rossiya Federatsiyasi tarkibiga kiradi.

qilingan tarixiy ilmiy ishi yuz yildan ko‘p vaqt mobaynida graflar nazariyasi bo‘yicha yagona ilmiy ish bo‘lib keldi. IX asming o‘rtalarida graflar nazariyasi bilan bog‘liq tadqiqotlar G.Kirxgof va A.Kelli ishlarida paydo bo‘ldi.

“Graf” iborasi D.Kyoning tomonidan 1936-yilda graflar nazariyasiga bag‘ishlangan dastlabki darslikda uchraydi. Graflar nazariyasi bo‘yicha tadqiqotlar natijalari inson faoliyatining turli sohalarida qo‘llaniladi. Ulardan ba’zilari quyidagilardir: boshqotirmalarni hal qilish; qiziqarli o‘yinlar; yo‘llar, elektr zanjirlari, integral sxemalari va boshqarish sistemalarini loyihalashtirish; avtomatlar, blok sxemalar va komp’yuter uchun programmalarni tadqiq qilish va hokazo.

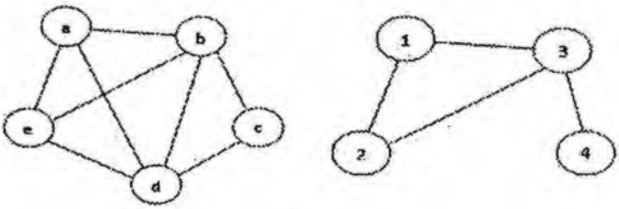
Graf – bu abstrakt tushuncha bo‘lib, obyektlar va ular orasidagi bog‘liqliklarni tasvirlashda yoki ifodalashda ishlatiladigan chizmadir.

Obyektlarni ko‘p hollarda nuqtalar bilan belgilab olinadi va ularga nomer beriladi. Bu grafning uchlari deb ham ataladi. Grafning uchlarini soniar to‘plami sifatida qaraymiz va uni V harfi bilan belgilaymiz. Grafning uchlarini 1 dan n gacha nomerlash mumkin (yoki 0 dan n - 1 gacha)

Graf uchlari orasidagi bog‘liqliklarni sonlar jufti bilan belgilaymiz (u_i, v_i) va bu grafning u_i hamda v_i nomerli uchlari o‘zaro bog‘liqligini bildiradi. Bunday juftliklarni grafning qirralari deyiladi va ular E harfi bilan belgilanadi. E to‘plam elementlari juftlik sonlardan iborat.

Demak, ixtiyoriy grafni uning uchlarini bildiruvchi to‘plam V va qirralarini bildiruvchi to‘plam E bilan berish mumkin. Grafni G harfi belgilasak, uni quyidagicha ifodalash mumkin: G(V, E). Bundan tashqari graflarni oddiygina qilib rasm ko‘rinishda tasvirlash mumkin. Bunda uchlari uchun nuqtalar qo‘yib, keraklilarini chiziqlar bilan tutashtiramiz. Qizig‘i shundaki, bu yoqda nuqtalarning o‘rni ahamiyatga ega emas, faqat bog‘liqliklar ko‘rinsa bo‘ldi. Graflarni bu usulda tasvirlash ularga oid misollarni yechganda, yoki tahlil qilganda juda qo‘l keladi.

Graflarga misol:



4.2-rasm

Graflarga juda ko'plab misollar keltirish mumkin:

1) Ixtiyoriy elektr tarmog'i - graf. Bunda tarmoq elementlari va ular orasidagi bog'lanishlar bor.

2) Shaharlar va ularni tutashtiruvchi yo'llar;

3) Kishilar va ular orasidagi bog'liqliklar. Ota-bola-nabira... va h.k.

Graf qirralari yo'nalishiga qarab ikki xil bo'lishi mumkin:

1)Bir tomonlama yo'nalgan qirra;

2) Ikki tomonlama yo'nalgan qirra;

Bir tomonlama yo'nalgan qirra $<u_i, v_i>$ deb belgilanadi va bunda bog'liqlik faqat u_i - uchdan v_i - uchga yo'nalgan bo'ladi, aksi noto'g'ri. Bunday graflarga yo'naltirilgan graflar ham deyiladi.

Ikki tomonlama yo'naltirilgan qirralar oddiy (u_i, v_i) kabi belgilanadi va bunda bog'liqlik ikki tomonlama bo'ladi. Ya'ni v_i dan u_i ga ham bo'ladi. Bunday graflarga yo'naltirilmagan graflar ham deyiladi.

Qirralarning og'irliklariga qarab ular quyidagicha bo'ladi:

1) Og'irligi bor qirralar;

2) Og'irligi yo'q qirralar (og'irligi 1 ga teng);

Og'irligi bor qirralarda (u_i, v_i) dan tashqari uning og'irligi -c_i ham beriladi. Bu, masalan, yo'lni graf qirrasi deb oladigan bo'lsak, uning o'tkazuvchanlik darajasi yoki og'irlik limiti bo'lishi mumkin.

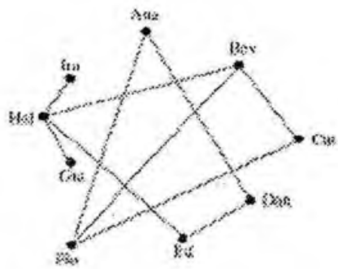
Ta'rif. Graf deb, shunday G(X,E) ikki to'plam juftligiga aytiladiki, bunda X – bo'sh bo'lmagan uchlar to'plami $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ bo'lib, E ning elementlari esa X ning ikki elementli to‘plam ostilaridir, ya’ni $E=\{(x_1,x_2)\}$. Ushbu ikki elementli to‘plam ostilar graf qirralari deb ataladi.

Murakkab bo‘lmagan graflarni grafik sxemalar orqali ifodalash maqsadga muvofiqdir, u yerda uchlari nuqtalardan, qirralari esa ularni birlashtiruvchi chiziqlardan iborat-dir.

Ushbu sxemalarda chiziqlar uzunligi, eni va shakli hech qanday ahamiyatga ega emas.

Graflarga misollar:

Name	Past Partners
Ana	Dan, Flo
Bev	Cai, Flo, Hal
Cai	Bev, Flo
Dan	Ana, Ed
Ed	Dan, Hal
Flo	Cai, Bev, Ana
Gia	Hal
Hal	Gia, Ed, Bev, Ira
Ira	Hal

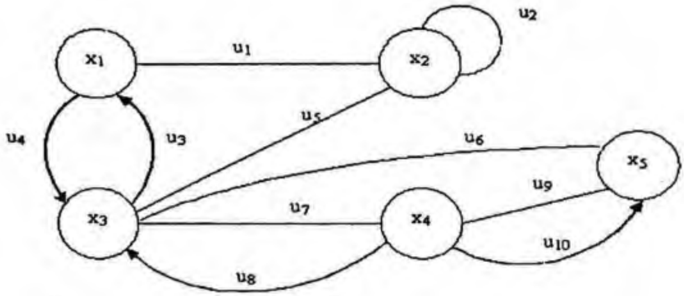


4.3-rasm

Shunday qilib, graf erkin konstruksiyalardir. Bunda ikki uchlari orasidagi bog‘lanishning bo‘lishi muhimdir, ba’zan ushbu bog‘lanishning xarakteri muhimdir.

Agar x_1 va $x_2$lar qandaydir qirraga (x_i, x_j) ga tegishli bo‘lsa, u holda ushbu qirra x_i va x_j “insindent” deyiladi, x_i va x_j lar esa qo‘shni nuqtalar deyiladi. Agar qirra bir nuqtaga “insindent” bo‘lsa, u sirtmoq deyiladi.

Hech qanday qirraga “insindent” bo‘lmagan uch ajratilgan uch deyiladi. Agar grafda shunday uchlar bo‘lsaki, ular ikki va undan ko‘p uchlar bilan birlashtirilgan bo‘lsa, bunday graf multigraf deyiladi. Ushbu uchga tegishli bo‘lgan qirralar soni uchning darajasini belgilaydi. 4.4-rasmda ko‘rsatilgan x_2 uch 6 darajaga ega, chunki unga α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, α_6, α_7, qirralar “insindent”dir, x_1 uchning darajasi 3, x_4 ning darajasi esa 1.



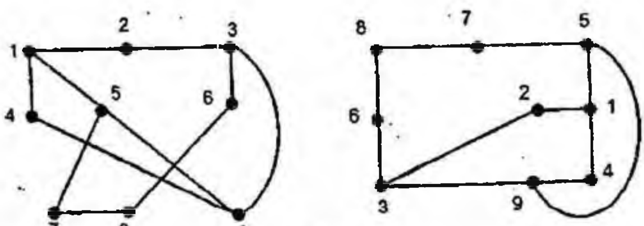
4.4-rasm

Agar graf sirtmoqsiz yoki qirralari karrali bo'lmasa, bunda graf oddiy graf deyiladi. Graf kvadrat jadval shaklida bo'lishi mumkin.

4.2. Graflarning yo'llari va sxemalari

Graflar uchun uchlar soni va qirralar soni muhimdir hamda uchlar va qirralar "insindent" ekanligi ham.

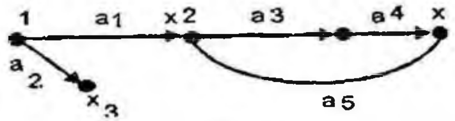
Demak, 4.5-rasmda G_1 va G_2 izomorf graflar jufti ko'rsatilgandir.



4.5-rasm

Ko'pincha masalalarda uchlar orasidagi munosabat muhim rol o'ynaydi. Bunga misol tariqasida tartib munosabat bo'lishi mumkin. Masalan, x_i x_j dan kata, bu holda x_j x_i dan katta bo'lishi mumkin emas. Demak, uchlar orasidagi munosabat ma'lum tartibga egadir. Bunday graflarni mo'ljalga ega graflar yoki orientirli graflar deymiz.

Ta'rif. Orientirli D graf deb, D=(X,A) juftlikka aytamiz. Bu yerda X uchlarning ixtiyoriy to'plami va A – uchlarning tartiblangan juftligini to'plamidir, uchlarning tartiblangan juftligini "yoylar" deymiz. $A \in X \times X$ $(x_i \ \ x_j)$ juftlikda birinchi x yoy uchi, ikkinchi uch x_j yoyning oxiridir. 4.6-rasmda yoylar strelka bilan bezatilgandir.

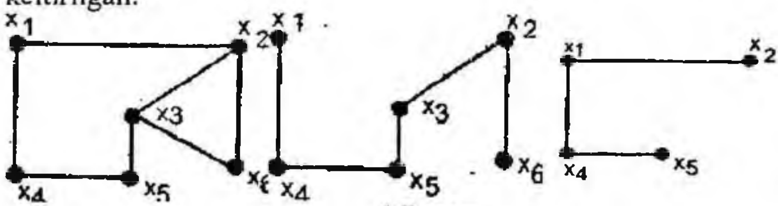


4.6-rasm

Ta'rif. Graf $G_0(x_0, E_0)$ $G(x, E)$ ning qisman grafi deb ataladi, agarda u berilgan grafning barcha uchlariga ega bo'lib, ammo barcha qirralariga ega bo'lmasa, balki qisman qirralariga ega bo'lsa, ya'ni $x_0 = x,\ E_0 \ \in E$

Ta'rif. $G(x, E)$ ning graf ostisi deb shunday $G_0(x_0, E_0)$ grafga aytiladiki, bunda ular qism bo'ladi,

4.7-rasmda grafga, qisman grafga va grafostiga misol keltirilgan.



4.7-rasm

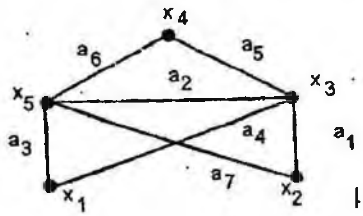
Graf marshruti (yo'li). Bizga orientirlanmagan graf berilgan bo'lsin, m uzunlikdagi marshrut deb grafning qirralarini shunday ketma ketligiga aytiladiki, yonma-yon bo'lgan qirralarining uchlari uchma-uch tushishlari kerak. Graflarning marshrutiga misol sifatida quyidagi ketma-ketlik bo'lishi mumkin.

$(\alpha_1\alpha_6\,\alpha_5\alpha_1\alpha_3)$ va $(\alpha_2\alpha_1\alpha_4\alpha_6)$. Birinchi marshrut $x_1x_2x_3x_2x_1x_3$ lar orqali o'tadi. Ikkinchi marshrut $x_2x_1x_2x_3x_2$ lar orqali o'tadi va yopiq marshrutni tashkil qiladi.

Grafning ikki uchi bog'langan deyiladi, agar shu uchlarni birlashtiruvchi yo'l bo'lsa. Agar grafning har qanday uchini birlashtiruvchi marshrut mavjud bo'lsa, bunday graf bog'langan graf deyiladi. 4.4-rasmdagi graf bog'langan bo'lmaydi. Chunki rasmda marshrut yo'q.

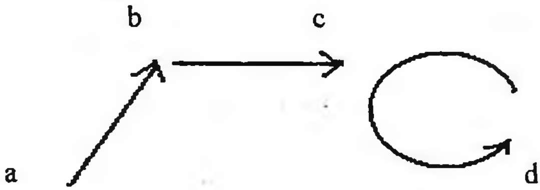
Barcha qirralari turli bo'lgan (yo'l) marshrut zanjir deb ataladi. Agar zanjir turli uchlardan o'tsa, u oddiy zanjir deb ataladi. Yopiq zanjir "sikl" deb ataladi, turli uchlardan o'tuvchi "sikl", oddiy "sikl"dir.

Grafning barcha qirralarini o'zida mujassam qilgan sikl Eyler sikli deyiladi, Eyler sikliga ega graf Eyler grafi deyiladi.



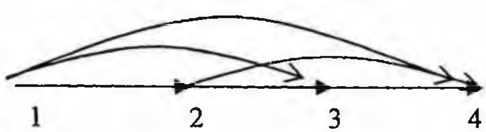
I.8-rasm

1-misol. R={(a,b),(b,c),(d,d)} munosabat quyidagi ko'rinishda ifoda qilinadi



4.9-rasm

2-misol. R – binar munosabat $A = \{1,2,3,4\}$ to'plamdagi «<» munosabat bo'lsin. U holda «<» munosabatni graf yordamida quyidagi ko'rinishda ifoda qilish mumkin:



4.10-rasm

Mashqlar:

1-misol. O'zbekiston Respublikasi hududidagi aeroportlar to'plamini V bilan, bu shaharlar orasida belgilangan vaqt mobaynida amalga oshirilayotgan samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari kortejini U bilan belgilaymiz. U holda (V,U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu yerda grafning uchlariga aeroportlar, yoylariga esa samolyotlarning uchib qo'nish hodisalari mos keladi. Tabiiyki, (V,U) grafda karrali yoylar bo'lishi mumkin, agar, qandaydir sababga ko'ra, samolyot uchgan aeroportga qaytib qo'nsa, u holda bu hodisaga qaralayotgan grafdagi sirtmoq mos keladi.

2-misol. Qadimgi boshqotirma masalalar qatoriga kiruvchi quyidagi masalani qaraymiz. Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmli idishlar vositasida teng ikki qismga boling[2].

8, 5 va 3 birlik hajmli idishlardagi suyuqlik hajmini mos ravishda a, b va c bilan belgilab, muayyan bir vaqt uchun idishlardagi suyqlikning hajmlari asosida qaralayotgan sistemaning holatini ifodalovchi $<a,b,c>$ uchliklami tuzamiz. Masalaning shartiga ko'ra a, b va c o'zgaruvchilar butun qiymatlar qabul qilgan holda $0 \le a \le 8$, $0 \le b \le 5$, $0 \le c \le 3$ va $a + b + c = 8$ shartlarni qanoatlantirishlari kerak. Bu shartlami qanoatlantiruvchi barcha holatlar (uchliklar) quyidagilardir:

$$<8,0,0>, <7,1,0>, <7,0,1>, <6,2,0>, <6,1,1>, <6,0,2>,$$
$$<5,3,0>, <5,2,1>, <5,1,2>, <5,0,3>, <4,4,0>, <4,3,1>,$$
$$<4,2,2>, <4,1,3>, <3,5,0>, <3,4,1>, <3,3,2>, <3,2,3>,$$
$$<2,5,1>, <2,4,2>, <2,3,3>, <1,5,2>, <1,4,3>, <0,5,3>.$$

Holatlar to'plamini V bilan belgilaymiz. Suyuqlikni (yoki uning bir qismini) idishlaming biridan boshqa birortasiga quyish natijasida sistema bir holatdan boshqa holatga o'tishi mumkin. Ta'kidlash kerakki, yuqoridagi holatlaming ixtiyoriysidan boshqa

---

[2] Biror idishdagi hajmi 8 birlik suyuqlikni faqat o'sha idish hamda 5 va 3 birlik hajmga ega idishlar vositasida teng ikki qismga bo'lish haqida. Bu masalani fransuz shoiri va yozuvchisi Bashe de Mezeriakning (1587-1638) matematikaga bag'ishlangan ishlarida topish mumkin.

birortasiga bevosita yoki bilvosita o‘tish imkoniyati mavjud bo‘lmasligi ham mumkin. Sistemaning bir holatdan boshqa holatga bevosita o‘tishlari to‘plamini U bilan belgilaymiz. Natijada hosil bo‘lgan (V, U) juftlikni graf deb qarash mumkin. Bu grafning uchlari sistema holatlariga, yoylari (qirralari) esa, bevosita o‘tishlarga mos keladi. Berilgan masalani hal qilish uchun (V, U) grafning yoylaridan tashkil topgan shunday ketma-ketlik tuzish kerakki, bu ketma-ketlikning birinchi hadi $< 8,0,0 >$, oxirgi hadi esa $< 4,4,0 >$ bo‘lsin. Bunday ketma-ketliklardan biri quyida keltirilgan:

$$< 8,0,0 >, < 5,0,3 >, < 5,3,0 >, < 2,3,3 >, < 2,5,1 >,$$
$$< 7,0,1 >, < 7,1,0 >, < 4,1,3 >, < 4,4,0 >.$$

Mustaqil ishlash uchun savollar

1. Qanday masalaning qo‘yilishi va yechilishi graflar nazariyasining paydo bo‘lishiga asos boldi?

2. “Graf” iborasi birinchi bo‘lib kim tomonidan va qachon kiritilgan?

3. Bu masalani fransuz matematigi va fizigi S.Puasson (1781-1840) ishlarida topish mumkin.

4. Grafning abstrakt matematik tushuncha sifatidagi ta’rifini bilasizmi?

5. Grafning abstrakt ta’rifidagi juftlikni tashkil etuvchilar bir-biridan nima bilan farq qiladi?

6. Grafning uchi deganda nimani tushunasiz?

7. Grafning qirrasi nima?

8. Grafning elementlari deganda nimani tushunasiz?

4. Grafdagi yoy bilan qirra bir-biridan nima bilan farq qiladi?

5. Qanday holda uchlar tutashtirilgan deyiladi?

6. Qo‘shni uchlarning qo‘shni bo‘lmagan uchlardan qanday farqi bor?

Muammoli masala va topshiriqlar

1. Graf tushunchasini qo‘llash mumkin bo‘lgan amaliy misol keltiring va qaralayotgan grafni tahlil qiling.

2. To‘la graf bilan bog‘liq biror misol keltiring.

3. Ko‘rishishlar haqidagi lemmaning qo‘llanilishiga doir amaliy misol keltiring.

4. Kubik graf bilan bog‘liq amaliy misollar keltiring.

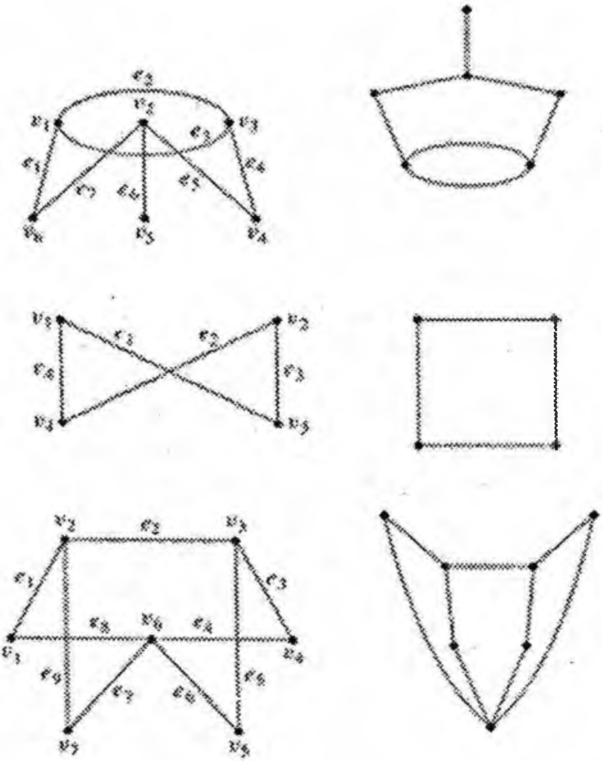
5. Qadimgi boshqotimia masala: biror idishdagi hajmi 12 birlik suyuqlikni faqat o‘sha idish hamda 8 va 5 birlik hajmli idishlar yordamida teng ikki qismga ajrating. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

6. Qadimgi boshqotirma masala: yo‘lovchi daryodan bo‘ri, qo‘y va bir bog‘ pichanni olib o‘tishi kerak, lekin u qayiqda o‘zi bilan faqat bitta narsani olib o‘tish imkoniyatiga ega. Agar sohilda bo‘ri va qo‘y birga qolsa bo‘ri qo‘yni, qo‘y va pichan birga qolganda esa, qo‘y pichanni yeb qo‘yadi. Yo‘lovchi narsalarni daryoning bir sohilidan ikkinchi sohiliga olib o‘tishni ularning butunligini saqlagan holda amalga oshirishi kerak. Bu boshqotirma masalani hal qilish maqsadida graf tuzib uning elementlarini tahlil qiling. Tuzilgan graf yordamida masalani hal qiling.

7. Barcha belgilangan (m,n) - graflar sonini aniqlang.

8. Shaxmat o‘yinida shaxmat donalarining taxtada joylashuvi va o‘yin navbati birgalikda vaziyatni tashkil etadi. Barcha vaziyatlar to‘plamini graf uchlari to‘plami deb qarasak, vaziyatlarning biridan boshqasiga mumkin bo‘lgan o‘tishlar (yurishlar) grafning qirralari yoki yoylariga mos keladi deb hisoblash mumkin. Shaxmat o‘yinining qoidalariga rioya qilgan holda yuqorida bayon qilingan grafning shaxmat o‘yinidagi dastlabki vaziyatni ham o‘z ichiga oluvchi qandaydir oltita vaziyatlariga mos uchlari va bu uchlarni bog‘lovchi qirra va yoylarini aniqlang.

9. Quyidagi graflarning qaysi biri bog‘langan?



4.11-rasm

V BOB. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMI

5.1. Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Nomanfiy butun sonlar to'plamini tuzishdagi har xil yondoshuvlar

Natural son va nol tushunchasining vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot. Natural son tushunchasi matematikaning asosiy tushunchalaridan biridir. U butun matematika fani singari kishilar amaliy faoliyatlaridagi ehtiyojlar natijasida vujudga kelgan. Turli-tuman chekli to'plamlarni bir-biri bilan taqqoslash zaruriyati natural sonlarning vujudga kelishiga sabab bo'lgan.

O'zining rivojlanish davrida natural sonlar tushunchasi bir nechta bosqichni o'tdi. Juda qadim zamonlarda chekli to'plamlarni taqqoslash uchun berilgan to'plamlar orasida yoki to'plamlardan biri bilan ikkinchi to'plamning qism to'plami orasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatishgan, ya'ni bu bosqichda kishilar buyumlar to'plamining sanog'ini ularni sanamasdan idrok qilganlar.

Vaqt o'tishi bilan odamlar faqat sonlarni atashni emas, balki ularni belgilashni, shuningdek, ular ustida amallar bajarishni o'rganib oldilar. Qadimgi Hindistonda sonlarni yozishning o'nlik sistemasi va nol soni tushunchasi yaratildi. Asta-sekin natural sonlarning cheksizligi haqidagi tasavvurlar hosil bo'la boshladi.

Natural son tushunchasi shakllangandan so'ng sonlar mustaqil obyekttlar bo'lib qoldi va ularni matematik obyekttlar sifatida o'rganish imkoniyati vujudga keldi. Sonni va sonlar ustidagi amallarni o'rgana boshlagan fan «Arifmetika» nomini oldi.

Arifmetika sonlar va sonlar ustidagi amallar haqidagi fandir.

Arifmetika qadimgi Sharq mamlakatlari: Vavilon, Xitoy, Hindiston, Misrda vujudga keldi. Bu mamlakatlarda to'plangan matematik bilimlar qadimgi Gretsiyada rivojlantirildi va davom ettirildi. Arifmetikaning rivojlanishiga Hind, Arab dunyosi mamlakatlari va O'rta Osiyo matematiklari, XVIII asrdan boshlab esa, yevropalik olimlar katta hissa qo'shdilar.

«Natural son» terminini birinchi bo‘lib rimlik olim A.A.Boetsiy qo‘lladi.

Nomanfiy butun sonlar to‘plamini tuzishdagi har xil yondoshuvlar. Nomanfiy butun sonlar to‘plamini tuzishda uch xil yondashuv bor:

1) to‘plamlar nazariyasi asosida;
2) aksiomatik metod asosida.
3) miqdor tushunchasi asosida (miqdor sonlar nazariyasi).

Nomanfiy butun sonlar to‘plamini to‘plamlar nazariyasi asosida qurishda chekli to‘plam elementlari soni va o‘zaro bir qiymatli moslik tushunchalaridan foydalaniladi.

Nomanfiy butun sonlar to‘plamini aksiomatik metod asosida qurishda Peano aksiomalaridan foydalaniladi.

Nomanfiy butun sonlar to‘plamini miqdor tushunchasi asosida qurishda nomanfiy butun songa miqdor o‘lchovi sifatida qaraladi.

Nomanfiy butun sonlar to‘plamini to‘plamlar nazariyasi asosida qurish. Natural son va nol tushunchasi. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida “teng”, ”kichik” va “katta” munosabatlari. Nomanfiy butun sonlar to‘plamini to‘plamlar nazariyasi asosida qurishni qaraymiz:

XIX asrda G.Kantor tomonidan to‘plamlar nazariyasi yaratilgandan so‘ng, bu nazariya asosida natural sonlar nazariyasi yaratildi. Bu nazariya asosida chekli to‘plam va o‘zaro bir qiymatli moslik tushunchalari yotadi.

1-ta’rif. Agar A va B to‘plamlar orasida o‘zaro bir qiymatli moslik o‘rnatish mumkin bo‘lsa, bu to‘plamlar teng quvvatli deyiladi.

«Teng quvvatlilik» munosabati ekvivalentlik munosabati bo‘lib, barcha chekli to‘plamlarni ekvivalentlik sinflariga ajratadi. Har bir sinfda turli elementli to‘plamlar yig‘ilgan bo‘lib, ularning umumiy xossasi teng quvvatli ekanligidir.

2-ta’rif. Natural son deb, bo‘sh bo‘lmagan chekli bir-biriga ekvivalent to‘plamlar sinfining umumiy xossasiga aytiladi.

Har bir ekvivalentlik sinfining umumiy xossasini uning biror bir to‘plami to‘la ifodalaydi. Har bir sinf xossasini ifodalovchi natural son alohida belgi bilan belgilanadi. Masalan: a=n(A); b=n(B).

3-ta'rif. Bo'sh to'plamlar sinfining umumiy xossasini 0 soni ifodalaydi, 0=n(Ø).

4-ta'rif. 0 soni va barcha natural sonlar birgalikda nomanfiy butun sonlar to'plamini tashkil qiladi. Bu to'plam N_0 ko'rinishida belgilanadi. $N_0=\{0\}\cup N$. N – barcha natural sonlar to'plami.

Sonlarni taqqoslash qanday nazariya asosida yuz berishini aniqlaymiz. Ikkita nomanfiy butun a va b son berilgan bo'lsin. Ular chekli A va B to'plamlar elementlari sonini ifodalaydi.

5-ta'rif. Agar a va b sonlar teng quvvatli to'plamlar bilan aniqlansa, u holda ular teng bo'ladi.

$a=b \Leftrightarrow A\sim B$, bu yerda n(A)=a; n(B)=b.

Agar A va B to'plamlar teng quvvatli bo'lmasa, u holda ular bilan aniqlanadigan sonlar turlicha bo'ladi. Agar A to'plam B to'plamning xos qism to'plamiga teng quvvatli va n(A)=a; n(B)=b bo'lsa, a son b sondan kichik deyiladi va a<b kabi yoziladi. Xuddi shu vaziyatda a>b kabi yoziladi.

$a<b \Leftrightarrow A\sim B_1$, bu yerda $B_1\subset B$ va $B_1\neq B$; $B_1\neq Ø$.

Nazorat uchun savollar

1. Arifmetika fani hadida ma'lumot bering.
2. «Natural son» terminini birinchi bo'lib kim qo'llagan?
3. Nomanfiy butun sonlar to'plamini tuzishda necha xil yondashuv bor?
4. Nomanfiy butun songa ta'rif bering. 0 sonini ta'riflang.
5. Nomanfiy butun sonlar qanday taqqoslanadi?

5.2. Yig'indining ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Qo'shish qonunlari

6-ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning yig'indisi deb n(A)=a, n(B)=b bo'lib, kesishmaydigan A va B to'plamlar birlashmasidagi elementlar soniga aytiladi.

$a+b=n(A\cup B)$, bu yerda n(A)=a, n(B)=b va $A\cap B = Ø$.

Berilgan ta'rifdan foydalanib, 5+2=7 bo'lishini tushuntiramiz.

5 – bu biror A to'plamning elementlari soni, 2 – biror B to'plamning elementlari soni, bunda ularning kesishmasi bo'sh to'plam bo'lishi kerak.

Masalan $A=\{x,y,z,t,p\}$, $B=\{a,b\}$ to'plamlarni olamiz. Ularni birlashtiramiz. $A\cup B=\{x,y,z,t,p,a,b\}$ sanash yo'li bilan $n(A\cup B)=7$ ekanligini aniqlaymiz. Demak, $5+2=7$.

Umuman, $a+b$ yig'indi $n(A)=a$, $n(B)=b$ shartni qanoatlantiruvchi kesishmaydigan A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas. Bu umumiy da'voni biz isbotsiz qabul qilamiz.

Bundan tashqari butun nomanfiy sonlar yig'indisi har doim mavjud va yagonadir. Boshqacha aytganda, biz qanday ikkita nomanfiy a va b sonlar olmaylik, ularning yig'indisi bo'lgan butun nomanfiy c sonni har doim topish mumkin. U berilgan a va b sonlari uchun yagona bo'ladi.

Yig'indining mavjudligi va yagonaligi ikki to'plam birlashmasining mavjudligi va yagonaligidan kelib chiqadi.

Yig'indi ta'rifidan foydalanib "kichik" munosabatiga boshqacha ta'rif berish mumkin.

7-ta'rif. $\forall a,b\in N$ uchun $a=b+c$, bo'ladigan c son topilsa, $b<a$ (yoki $a>b$) bo'ladi.

$(\forall a,b\in N)(\exists c\in N)(b<a\Leftrightarrow a=b+c)$

Qo'shish amalining xossalari:

1^0. Qo'shish amali kommutativdir:

$(\forall a,b\in Z_0)(a+b=b+a)$,

ya'ni ixtiyoriy nomanfiy butun a va b sonlar uchun $a+b=b+a$ tenglik o'rinlidir.

Isbot. $A=n(A)$, $b=n(A)$ va $A\cap B=\varnothing$ bo'lsin,

$a+b=n(A\cup B)=n(B\cup A)=b+a$

(to'plamlar birlashmasining kommutativligiga asosan).

2^0. Qo'shish amali assotsiativdir:

$(\forall a,b,c\in Z_0)\ (a+(b+c))=((a+b)+c)$

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$,$c=n(C)$ va $A\cap B=\varnothing$, $B\cap C=\varnothing$, $A\cap C=\varnothing$ bo'lsin. $a+(b+c)=n(A\cup(B\cup C)$; to'plamlar birlashmasining assotsiativligiga ko'ra $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

Demak, $a+(b+c)=(a+b)+c$

3°. Nolni yutish xossasi:

$(\forall a \in Z_0)$ $a+0=a$

Isbot. $a=n(A)$, $0=n(\emptyset)$, $a+0=n(A \cup \emptyset)=n(A)=a$. ($A \cup \emptyset = A$ va $A \cap \emptyset = \emptyset$ bo'lgani uchun)

4^{0}. Qo'shishning qisqaruvchanligi: $(\forall a,b,c, \in Z_0)$ $a=b \Leftrightarrow a+c=b+c$.

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$, $A \cap B=\emptyset$, $B \cap C=\emptyset$, $A \cap C=\emptyset$ $a=b \Rightarrow n(A)=n(B)$ $\Rightarrow$ $A \cup C=B \cup C$ $\Rightarrow$ $n(A \cup C) = n(B \cup C)$, bundan $a+c=b+c$.

5^{0}. Qo'shishning monotonligi $(\forall a,c,b \in Z_0)$ $a<b \Rightarrow a+c<b+c$

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ bo'lsin. $a<b \Rightarrow A \sim B_1 \subset B$ bu yerda $B_1 \neq B$, $B_1 \neq \emptyset$ u holda $A \cup C \sim B_1 \cup C \subset B \cup C \Rightarrow a+c<b+c$.

5.3. Ayirmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarining to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosi

Endi ayirmaning ta'rifi va uning mavjudligi va yagonaligini ko'rib o'tamiz.

8-ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B \subset A$ shartlar bajarilganda, B to'plamni A to'plamgacha to'ldiruvchi to'plam elementlari soniga aytiladi.

$a-b=n(B_A')$ bu yerda $a=n(A)$, $b=n(B)$, $B \subset A$, B_A' – B ni A ga to'ldiruvchi to'plam.

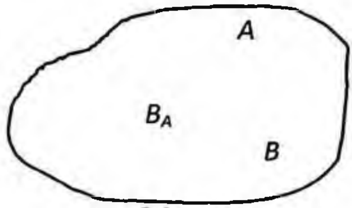
Misol. Berilgan ta'rifdan foydalanib, 7-4=3 bo'lishini tushuntiramiz. 7 – biror A to'plamning elementlari soni, 4 – A to'plamning qism to'plami bo'lgan B to'plamning elementlari soni.

Masalan, $A=\{x,y,z,t,p,r,s\}$, $B=\{x,y,z,t\}$ to'plamlarni olaylik. B to'plamning A to'plamgacha to'ldiruvchisini topamiz:

1. $B_A'=\{p,r,s\}$, $n(B_A')=3$

Demak, 7-4=3.

a-b ayirma $n(A)=a$, $n(B)=b$ va $B \subset A$ shartlarini qanoatlantiruvchi A va B to'plamlarning tanlanishiga bog'liq emas.



5.1 -rasm

a=n(A), b=n(B) va $B \subset A$ bo'ladigan butun nomanfiy a va b sonlar berilgan bo'lsin va bu sonlarning ayirmasi B to'plamni A to'plamgacha to'ldiruvchisidagi elementlar soni bo'lsin, ya'ni a-b=n(B_A'). Eyler doiralarida A, B, B_A' to'plamlar 5.1-rasmda ko'rsatilganidek tasvirlanadi. $A=B \cup B_A$ ekani ma'lum, bundan n(A)=n, $(B \cup B_A')=A$, $B \cap B_A'=\emptyset$ bo'lgani uchun biz $a=n(A)=n(B \cup B_A')=n(B)+n(B_A')=b+(a-b)$ ga ega bo'lamiz.

Bu esa ayirmaga boshqacha ta'rif berish imkonini beradi.

9-ta'rif. Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi deb, shunday butun nomanfiy c songa aytiladiki, uning b son bilan yig'indisi a songa teng bo'ladi. $a-b=c \Leftrightarrow a=b+c$.

Shunday qilib, a-b=c yozuvda a - kamayuvchi, b - ayriluvchi, c - ayirma deb ataladi.

Ayirish amali qo'shishga teskari amaldir. Ayirmaning ikkinchi ta'rifidan kelib chiqib, quyidagi teoremalarni isbotlaymiz:

1-teorema. Butun nomanfiy a va b sonlarning ayirmasi faqat $b \le a$ bo'lgandagina mavjud bo'ladi.

Isbot. Agar a=b bo'lsa, u holda a-b=0 bo'ladi, demak, a-b ayirma mavjud bo'ladi.

Agar b<a bo'lsa, u holda «kichik» munosabati ta'rifiga ko'ra shunday natural son mavjud bo'ladiki, bunda a=b+c bo'ladi. U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra c=a-b, ya'ni a-b ayirma mavjud bo'ladi. Agar a-b ayirma mavjud bo'lsa, u holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra shunday butun nomanfiy c son topiladiki, a=b+c, bo'ladi. Agar c=0 bo'lsa, u holda a=b bo'ladi; agar c>0 bo'lsa, u holda «kichik» munosabatining ta'rifiga ko'ra b<a bo'ladi. Demak, $b \le a$.

2-teorema. Agar butun nomanfiy a va b sonlarining ayirmasi mavjud bo'lsa, u holda u yagonadir.

Isbot. a-b ayirmaning ikkita qiymati mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik: $a-b=c_1$ va $a-b=c_2$. U holda ayirmaning ta'rifiga ko'ra $a=b+c_1$ va $a=b+c_2$ ga ega bo'lamiz. Bundan $b+c_1=b+c_2$ va qo'shishning qisqaruvchanligiga asosan $c_1=c_2$ ekani kelib chiqadi. Demak, ayirma yagona ekan.

Yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalarini to'plamlar nazariyasi bo'yicha ma'nosini qaraymiz.

Yig'indidan sonni ayirish uchun yig'indidagi qo'shiluvchilardan biridan shu sonni ayirish va hosil bo'lgan natijaga ikkinchi qo'shiluvchini qo'shish yetarli.

Bu qoidani simvollardan foydalanib yozamiz:

Agar, a,b,c - butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda:

a) $a\geq c$ bo'lganda (a+b)-c=(a-c)+b bo'ladi;

b) $b\geq c$ bo'lganda (a+b)-c =a+(b-c) bo'ladi;

c) $a\geq c$ va $b\geq c$ bo'lganda yuqoridagi formulaning ixtiyoriy bittasidan foydalanish mumkin.

Yig'indidan sonni ayirish qoidasining to'g'riligini ko'rsatamiz. Faraz qilaylik, $a\geq c$ bo'lsin, u holda a-c ayirma mavjud bo'ladi. Uni r orqali belgilaymiz: a-c=r. Bundan a=r+c chiqadi, r+c yig'indini (a+b)-c ifodadagi a ning o'rniga qo'yamiz va unda shakl almashtiramiz: (a+b)-c=(r+c+b)-c=r+b+c-c=r+b.

Biroq r harfi orqali a-c ayirma belgilangan edi, bundan isbotlanishi talab etilgan (a+b)-c= (a-c)+b ifodaga ega bo'lamiz.

Endi sondan yig'indini ayirish qoidasini qaraymiz:

Sondan sonlar yig'indisini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarning birini, keyin ikkinchisini ketma-ket ayirish yetarli, ya'ni agar a, c, b – butun nomanfiy sonlar bo'lsa, u holda $a\geq b+c$ bo'lganda a-(b+c)=(a-b)-c ga ega bo'lamiz.

Bu qoidaning asoslanishi ham yig'indidan sonni ayirish qoidasi uchun bajarilgani kabi bajariladi.

Keltirilgan qoidalar boshlang'ich maktabda muayyan misollarda qaraladi, asoslash uchun ko'rgazmali tasvirlar namoyish etiladi. Bu qoidalar hisoblashlarni ixcham bajarish imkonini beradi.

Masalan, sondan yig'indini ayirish qoidasi sonni bo'laklab ayirish usuliga asos bo'ladi: 15-7=15-(5+2)=(15-5)-2=10-2=8.

Nazorat uchun savollar

1. Nomanfiy butun sonlar yig'indisi ta'rifini ayting, uning mavjudligi va yagonaligini asoslang.
2. Qo'shishning qonunlarini ayting va asoslang.
3. Nomanfiy butun sonlar ayirmasi ta'rifi qanday? Ayirma qaysi holda mavjud bo'ladi? Uning yagonaligini asoslang.
4. Ayirmaga yig'indi orqali ta'rif bering.
5. Ayirma qoidalarini to'plamlar nazariyasi asosida tushuntiring.

5.4. Ko'paytmaning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi. Ko'paytirish qonunlari. Ko'paytmaning yig'indi orqali ta'rifi

a=n(A) va b=n(B) bo'lgan a va b nomanfiy butun sonlar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. a va b nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi deb, $A\times B$ dekart ko'paytma elementlari sonini ifodalovchi c nomanfiy butun songa aytiladi.

Bu yerda $A\times B=\{(a,b) \mid a\in A,\ b\in B\}$ ekanini eslatib o'tamiz.

Demak, ta'rifga ko'ra: $a\cdot b=n(A\times B)=c$, bu yerda $a,b,c\in N_0$. $a\cdot b=c$ yozuvda a – 1-ko'paytuvchi, b – 2-ko'paytuvchi, c – ko'paytma deyiladi, $c\in N_0$ sonni topish amali esa ko'paytirish deyiladi.

Masalan, ta'rifga ko'ra $5\cdot 2$ ko'paytmani topaylik. Buning uchun n(A)=5 va n(B)=2 bo'lgan A={a,b,c,d,e}, B={1,2} to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzamiz:

$$A\times B=\{(a,1), (a,2), (b,1), (b,2), (c,1), (c,2), (d,1), (d,2), (e,1), (e,2)\}.$$

Dekart ko'paytma elementlari soni 10ga teng bo'lgani uchun $5\cdot 2=10$.

1-teorema. Ikki nomanfiy butun son ko'paytmasi mavjud va yagonadir.

Ko'paytmaning mavjudligi berilgan sondagi elementlardan tashkil topgan to'plamlarning dekart ko'paytmasini tuzish har doim mumkinligi va dekart ko'paytma elementlari soni to'plamlarning qanday elementlardan tashkil topganiga bog'liq emasligi bilan isbotlanadi.

Ikkita nomanfiy butun son ko'paytmasining yagonaligini isbotlash talabalarga topshiriladi.

1^0. Ko'paytirish kommutativdir:

$(\forall a,b \in N_0)$ $ab=ba$.

Isbot. $a=n(A)$ va $b=n(B)$, $A \cap B=\varnothing$ bo'lsin. Dekart ko'paytma ta'rifiga ko'ra $A\times B \neq B\times A$ shunga qaramay, $n(A\times B)=n(B\times A)$ deb olamiz (bunda istalgan $(a,b)\in A\times B$ juftlikka $(b,a)\in B\times A$ juftlik mos keltirildi) $ab=n(A\times B)=n(B\times A)=ba \Rightarrow ab=ba$.

20 . Ko'paytirish assotsiativdir.

$(\forall a,b,c \in N_0)$ $(ab)c= a(bc)$.

Isbot: $a=n(A)$ $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A,B,C lar jufti-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin, ya'ni

$A\cap B=\varnothing$ $A\cap C=\varnothing$ $B\cap C=\varnothing$.

$(ab)c=n((A\times B)\times C)$ va $a(bc)=n(A\times(B\times C))$.

Yuqoridagi dekart ko'paytmalar doirasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatish yo'li bilan $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$ ekanini ko'rsatish mumkin (kombinatorika bo'limidagi ko'paytma qoidasini eslang).

Demak $(ab)c=n((A\times B)\times C)=n(A\times(B\times C))=a(bc)$.

3^0. Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi

$(\forall a,b,c \in N_0)$ $(a+b)c=ac+bc$.

Isbot. $a=n(A)$, $b=n(B)$, $c=n(C)$ va A,B,C lar juft-jufti bilan kesishmaydigan to'plamlar bo'lsin. To'plamlar nazariyasidan ma'lumki,

$(A\cup B)\times C=(A\times C)\cup(B\times C)$ va $A\cap B=\varnothing\Rightarrow(A\times C)\cap(B\times C)=\varnothing$ chunki, $A\times C$ va $B\times C$ dekart ko'paytmalar elementlari 1-komponentlari bilan farq qiladi. Shularga asosan:

$(a+b)\cdot c=n((A\cup B)\times C)=n((A\times C)\cup(B\times C)=n(A\times C)+n(B\times C)=ac+b$ c.

Demak, $(a+b)c=ac+bc$.

4^0. Yutuvchi elementning mavjudligi: $(\forall a\in N_0)\ a\cdot 0=0$

Isboti: $a=n(A)0=n(\varnothing)$ bo'lsin. $A\times\varnothing=\varnothing$ ekanligidan $a\cdot 0=n(A\times\varnothing)=n(\varnothing)=0$

5^0. Ko'paytirishning monotonligi.

$(\forall a,b,c\in N_0,\ c\neq 0)\qquad a>b\Rightarrow ac>bc;$

$(\forall a,b,c\in N_0)\qquad a\geq b\Rightarrow ac\geq bc;$

$(\forall a,b,c\in N_0),\ c\neq 0)\qquad a<b\Rightarrow ac<bc.$

Isbot. Birinchisini isbotlab ko'rsatamiz:

$a>b\Rightarrow B\sim A_1\subset A$ bu yerda $n(A)=a$, $n(B)=b$ $A_1\neq\varnothing$, $A_1\neq A$.

U holda $B\times C\sim(A_1\times C)\subset(A\times C)$.

Demak, $n(B\times C)=n(A_1\times C)<n(A\times C)\Rightarrow bc<ac$.

6^0 . Ko'paytmaning qisqaruvchanligi:

$(\forall a,b,c,\in Z_0,\ c\neq 0)\ ac=bc\Rightarrow a=b$

Isbot: Teskarisini faraz qilaylik: $a\neq b$ bo'lsin. U holda yoki $a<b$, yoki $a>b$ bo'lishi kerak. $a<b$ bo'lsa, $ac<bc$ bo'lishi kerak, bu esa shartga zid. Demak, $a=b$ ekan.

Ko'paytmaning yig'indi orqali ta'rifi.

2-ta'rif. $a,b\in Z_0$ bo'lsin. a sonning b soniga ko'paytmasi deb, har biri a ga teng bo'lgan b ta qo'shiluvchining yig'indisiga aytiladi.

$$ab=\underbrace{a+a+\ldots+a}_{b\ marta}$$

Bundan $a\cdot 1=a$ va $a\cdot 0=0$ ekanligi kelib chiqadi.

Bu ta'rif $a=n(A)$, $b=n(B)$, $A\cap B=\varnothing$ bo'lgan $A\times B$ dekart ko'paytma elementlarini sanash ma'lum bir qonuniyatga asoslanishiga bog'liq.

Misol. $A=\{a,b,c\}$, $B=\{x,y,z,t\}$

$A\times B$ dekart ko'paytmani quyidagi jadval ko'rinishida yozamiz:

Dekart ko'paytma elementlarini ustunlar bo'yicha sanasak, $3\times 4=3+3+3+3=12$ ga ega bo'lamiz.

(a,x)	(a,y)	(a,z)	(a,t)
(b,x)	(b,y)	(b,z)	(b,t)
(c,x)	(c,y)	(c,z)	(c,t)

5.5. Nomanfiy butun sonni natural songa bo'lishning ta'rifi, uning mavjudligi va yagonaligi

Nomanfiy butun sonlar to'plamida bo'lish amalini ta'riflash uchun to'plamni sinflarga ajratish tushunchasidan foydalanamiz. a=n(A) bo'lgan A to'plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli qism to'plamlarga ajratish mumkin bo'lsin. Butun nomanfiy a sonning natural b songa bo'linmasi quyidagicha ta'riflanadi:

1-ta'rif. Agar b son A to'plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli qism to'plamlarga ajratishdagi har bir qism to'plam elementlari soni bo'lsa, a va b sonlarning bo'linmasi deb qism to'plamlar soniga aytiladi.

Agar b son A to'plamni juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli qism to'plamlarga ajratishdagi qism to'plamlar soni bo'lsa, a va b sonlarning bo'linmasi deb har bir qism to'plamdagi elementlar soniga aytiladi.

Nomanfiy butun a va b sonlar bo'linmasini topish amali bo'lish, a – bo'linuvchi, b – bo'luvchi, a:b - bo'linma deyiladi. Yuqoridagi ta'riflarni misollar yordamida tushuntiramiz.

Misol. 12 ta gilosni har biriga 3 tadan nechta bolaga tarqatishdi? Masala savoliga javob bo'lish amali orqali topiladi 12:3=4(bola). Masalani tahlil qilaylik: 12 ta elementga ega to'plam 3 ta elementga ega bo'lgan teng quvvatli qism to'plamlarga ajratilgan. Shuning bilan ular juft-jufti bilan kesishmaydi. Masalada nechta shunday qism to'plam borligi so'ralayapti. Javobdagi 4 soni 12 elementli to'plamning 3 elementdan ajratilganlar sonini bildiradi.

Boshqacharoq masalani qaraylik. 12 ta gilosni 4 ta bolaga teng bo'lib berishdi. Har bir bolaga nechtadan gilos berildi? Bu masala ham bo'lish amali bilan yechiladi: 12:4=3(gilos). Bu yerda 3 soni boshqa ma'noda – 12 elementdan iborat to'plam berilgan teng quvvatli kesishmaydgan har bir qism to'plamdagi elementlar sonini bildiradi. Bo'lish amalining to'g'ri bajarilganini tekshirish uchun ko'paytirish amaliga murojaat qilinadi, chunki bo'lish va ko'paytirish amallari o'zaro bog'liq. Bu bog'lanishni qaraylik. $a=n(A)$ bo'lgan A to'plam b ta juft-jufti bilan kesishmaydigan teng quvvatli $A_1, A_2, ..., A_b$ qism to'plamlarga ajratilgan bo'lsin. U holda $c=a:b$ har bir shunday qism to'plamdagi elementlar soni bo'ladi, ya'ni $c=a:b=n(A_1)=n(A_2)=...=n(A_b)$. Shartga ko'ra $A=A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_b$, bo'lgani uchun $n(A)=n(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_b)$ bo'ladi. Ammo A_1, A_2, ..., A_b qism to'plamlar juft-jufti bilan kesishmaydi. Yig'indi ta'rifiga ko'ra

$$n(A_1 \cup A_2 \cup .... \cup A_b) = n(A_1) + n(A_2) + ... + n(A_b) = \underbrace{c + c + ... + c}_{b\ marta}$$

Ko'paytma ta'rifiga ko'ra $c \cdot b$ ga teng. Shunday qilib $a=c \cdot b$ ekan. Bundan esa a va b sonlarning bo'linmasi shunday c sonki, u bilan b sonining ko'paytmasi a ga teng bo'ladi. Bundan foydalanib bo'linmaga quyidagicha ta'rif berish mumkin.

2-ta'rif. Butun nomanfiy a soni bilan b natural sonning bo'linmasi deb, shunday butun nomanfiy $c=a:b$ songa aytiladiki, uning b soni bilan ko'paytmasi a ga teng bo'ladi. Bu ta'rifdan $a:b=c \Leftrightarrow a=c \cdot b$ ekanligi ko'rinadi.

Bo'lishning bajarilishi va bir qiymatliligi.

Bo'linma har doim ham mavjud bo'laveradimi, degan savol tug'iladi.

1-teorema. Ikkita a va b natural sonning bo'linmasi mavjud bo'lishi uchun $b \leq a$ bo'lishi zarur.

Isbot. a va b natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsin, ya'ni $a=c \cdot b$ bajariladigan c natural son mavjud bo'lsin. Ixtiyoriy natural son uchun $1 \leq c$ ekanligi o'z-o'zidan ravshan. Bu tengsizlikning ikkala qismini b natural songa ko'paytirib $b \leq c \cdot b$ ga ega bo'lamiz, $c \cdot b=a$ bo'lgani uchun $b \leq a$ bo'ladi. Teorema isbotlandi.

$a=0$ va b natural sonning bo'linmasi nimaga teng? Ta'rifga ko'ra, bu $c \cdot b=0$ shartni qanoatlantiruvchi a sonidir. $b \neq 0$ bo'lgani uchun $c \cdot b=0$ tenglik $c=0$ bo'lganda bajariladi. Demak, $\forall b \in N$ da $0:b=0$ bo'ladi.

2-teorema. Agar a va b natural sonlarning bo'linmasi mavjud bo'lsa, u yagonadir.

Bu teoremaning isboti ayirmaning yagonaligi haqidagi teorema isbotiga o'xshash bajariladi.

Butun nomanfiy sonni nolga bo'lish mumkin emasligini qaraymiz. $a \neq o$ va $b=0$ sonlar berilgan bo'lsin. a va b sonlarning bo'linmasi mavjud, deb faraz qilaylik. U holda bo'linmaning ta'rifiga ko'ra $a=c \cdot 0$ tenglik bajariladigan butun nomanfiy c soni mavjud bo'ladi va bundan $a=0$ ekani kelib chiqadi. Bu esa $a \neq o$ shartga zid. Demak, farazimiz noto'g'ri, $a \neq 0$ va $b=0$ sonlarining bo'linmasi mavjud emas.

Agar $a=0$ va $b=0$ bo'lsa, $0=c \cdot 0$ tenglik kelib chiqadi, undan esa a va b sonlarning bo'linmasi har qanday son bo'lishi mumkin degan xulosa chiqadi. Shuning uchun matematikada nolni nolga bo'lish ham mumkin emas yoki aniqlanmagan deb hisoblanadi.

Nomanfiy butun sonlarni bo'lish ta'rifidan «... marta katta» va «... marta kichik» munosabatlari aniqlanadi.

Agar $a= n(A)$, $b=n(B)$, $a>b$ bo'ladigan a va b sonlar berilgan va bunda A to'plamni B to'plamga teng quvvatli c ta qism to'plamga ajratish mumkin bo'lsa, a soni b sonidan c marta katta, b soni esa a sonidan c marta kichik deyiladi. c sonini o'zi bo'linmani ifodalaydi. Shularni hisobga olib quyidagi qoidani hosil qilamiz:

Bir son ikkinchi sondan necha marta katta yoki kichik ekanini bilish uchun katta sonni kichik songa bo'lish zarur.

Yig'indini songa bo'lish qoidasi:

3-teorema. Agar a va b sonlar c songa bo'linsa, u holda ularning $a+b$ yig'indisi ham c ga bo'linadi: $a+b$ yig'indini c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linma a ni c ga va b ni c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linmalar yig'indisiga teng, ya'ni $(a+b):c=a:c+b:c$.

Isbot. a soni c ga bo'lingani uchun $a=c \cdot m$ bo'ladigan $m=a:c$ natural son mavjud. Shunga o'xshash $b=c \cdot n$ bo'ladigan $n=b:c$

natural son mavjud. U holda $a+b=c\cdot m+c\cdot n=c(m+n)$. Bundan esa $a+b$ yig'indining c ga bo'linishi va $a+b$ ni c ga bo'lganda hosil bo'ladigan bo'linma $m+n$ ga teng bo'lishi, ya'ni $a:c+b:c$ ekani kelib chiqadi. Bu qoidani to'plamlar nuqtaiy nazaridan tahlil qilsak quyidagicha:

$a=n(A)$, $b=n(B)$ va bunda $A\cap B=\varnothing$ bo'lsin.

Agar A va B to'plamlarning har birini quvvati c ga teng qism to'plamlarga ajratish mumkin bo'lsa, u holda bu to'plamlar birlashmalarini ham shunday ajratish mumkin. Bunda, agar A to'plamni ajratishdagi har bir qism to'plam $a:c$ elementga, B to'plamning har bir qism to'plami $b:c$ elementga ega bo'lsa, u holda $A\cup B$ to'plamning har bir qism to'plamida $a:c+b:c$ element bo'ladi.

Sonni ko'paytmaga bo'lish va sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish qoidalari:

4-teorema. Agar a natural son b va c natural sonlarga bo'linsa, u holda a sonni b va c sonlar ko'paytmasiga bo'lish uchun a sonni b(c) ga bo'lish va hosil bo'lgan bo'linmani c(b) ga bo'lish yetarli:

$a:(b\cdot c)=(a:b):c=(a:c):b$

Isbot: $(a:b):c=x$ deb faraz qilamiz, u holda bo'linmaning ta'rifiga ko'ra $a:b=c\cdot x$ bo'ladi, bundan shunga o'xshash $a=b\cdot(c\cdot x)$ bo'ladi. Ko'paytirishning gruppalash qonuniga asosan $a=(b\cdot c)\cdot x$. hosil bo'lgan tenglik $a:(b\cdot c)=x$ ekanini bildiradi.

5-teorema. Sonni ikki sonning bo'linmasiga ko'paytirish uchun bu sonni bo'linuvchiga ko'paytirish va hosil bo'lgan ko'paytmani bo'luvchiga bo'lish yetarli, ya'ni $a\cdot(b:c)=(a\cdot b):c$

Isbot. Bu tenglikni ham sonni ko'paytmaga bo'lish qoidasiga o'xshash isbotlash mumkin.

Misollar.

2) $(220+140):10=220:10+140:10=22+14=36$;

3) $240:(10\cdot2)=(240:10):2=24:2=12$;

4) $12\cdot(30:15)=(12\cdot30):15=360:15=24$.

Nazorat uchun savollar

1. Nomanfiy butun sonlar ko'paytmasi ta'rifini ayting. Ko'paytmaning mavjudlik va yagonalik shartlari qanday?
2. Ko'paytmaning qanday xossalari bor? Ularni to'plamlar nazariyasiga ko'ra asoslang.
3. Ko'paytmaga yig'indi orqali ta'rif bering.
4. Nomanfiy butun sonlar bo'linmasini ta'riflang.
5. Bo'linmaga ko'paytma orqali ta'rif bering.
6. Bo'linmaning mavjudlik va yagonalik shartlarini ayting.
7. Yig'indi va ko'paytmani songa bo'lish qoidalarini aytib, isbotlab bering.

5.6. Nomanfiy butun sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish

Nazariyani aksiomatik metod bilan qurish tushunchasi. Har bir fanni bayon etishda tushunchalarga nisbatan turlicha mulohaza yuritiladi. Chunki bu tushunchalarning ayrimlari o'z-o'zidan tushuniladigan bo'lsa, ayrim tushunchalar esa ma'lum tushunchalarga asoslangan holda mantiqiy mulohazalar yuritish asosida ta'riflanadi.

Boshqacha aytganda, tushunchalar ta'riflanmaydigan va ta'riflanadigan tushunchalarga bo'linadi. Tariflamnaydigan tushunchalar insonning ko'p asrlik amaliy-ijodiy faoliyatining natijasi bo'lib, ular boshlang'ich tushunchalar deb yuritiladi.

Har qanday nazariyani aksiomatik qurish uchun boshlang'ich tushunchalar asosida nazariyaning aksiomalari tuziladi. Aksiomalar isbotlanmaydigan mulohazalar bo'lib, biri ikkinchisining natijasi sifatida kelib chiqmasligi va biri ikkinchisini inkor etmasligi zarur. Shuningdek, berilgan nazariyani aksiomatik qurishda uning teoremalarini isbotlash uchun aksiomalar yetarli bo'lishi zarur.

Amaliyot shuni ko'rsatadiki, bitta nazariya bir necha yo'llar bilan aksiomatik qurilishi mumkin. Bu yo'llar bir-biridan tanlab olingan boshlangich tushuncha va munosabatlar, ularga oid aksiomalar sistemasi bilan farqlanadi.

Asosiy tushunchalar, munosabatlar va aksiomalar kiritilgandan keyin nazariyaning rivojlanishi faqat mantiqiy fikrlash asosida boradi. Aksiomatik nazariyani qurishda tushuncha, munosabat va aksiomalar ixtiyoriy bo‘lmasdan, ular ba’zi bir haqiqiy obyekttlar va ularning xossalarini aks ettirishi lozim. Masalan, ixtiyoriy uchta A, B va M nuqtalar uchun, M nuqtadan A va B nuqtalargacha masofalarning yig‘indisi bu nuqtalar orasidagi masofadan kichik, degan aksioma aytilsa, u holda haqiqatan hayotga aloqasi bo‘lmagan nazariya yuzaga kelar edi, haqiqatda esa $|MA|+|MB|\geq|AB|$. Shunday qilib, aksiomatik nazariya reallikning matematik modelini berishi kerak ekan.

Agar munosabatlari bilan berilgan to‘plamda aksiomalar sistemasining barcha aksiomalari bajarilsa, u holda munosabatlari bilan berilgan to‘plam aksiomalar sistemasining modeli deyiladi. Biz quyidagi aksiomalar sistemasining modellarini qaraylik.

1-misol. Quyidagi uchta aksiomani qanoatlantiruvchi $a\sim b$ ekvivalentlik munosabati bilan berilgan aksiomalar sistemasini qaraymiz:

1) barcha a lar uchun $a\sim a$ bajariladi;

2) ixtiyoriy a va b lar uchun $a\sim b$ dan $b\sim a$ kelib chiqadi;

3) ixtiyoriy a,b va c lar uchun $a\sim b$ va $b\sim c$ dan $a\sim c$ kelib chiqadi.

2-misol. $a<b$ birgina munosabat va quyidagi aksiomalar bilan aniqlanuvchi aksiomalar sistemasini qaraylik:

1) Ixtiyoriy a va b lar uchun $a<b$ dan $b<a$ yolg‘onligi kelib chiqadi;

2) Ixtiyoriy a va b lar uchun $a<b$ va $b<c$ dan $a<c$ kelib chiqadi.

Bu aksioma qat’iy tartiblanganlik munosabatini ifodalaydi. Bu sistema interpretatsiyasini quyidagicha ifodalash mumkin: talabalar to‘plamida «a talaba b talabadan baland», «a talabaning yoshi b talabaning yoshidan katta» va hokazo. Bu sistemaga quyidagi aksiomani qo‘shamiz.

3) $a\neq b$ ekanligidan $a<b$ yoki $b<a$ kelib chiqadi. Endi biz qat’iy chiziqli tartib aksiomalar sistemasiga ega bo‘ldik. Berilgan

aksiomalar sistemasining ikkita modeli bir-biridan tashqi ko'rinishi bilan farq qilishi mumkin, ya'ni izomorf bo'ladi.

Masalan, agar a <b, b<c va a<c hamda 1<2, 2<3 va 1<3 desak, X={a;b;c}va Y{1,2,3} to'plamlar tartib aksiomalari sistemasi modelini ifodalaydi. Birinchi modelni 2-modelga aylantirish uchun a ni 1, b ni 2, c ni 3 deb olish yetarli. Ikkita model bir-biridan tashqi ko'rinishi bilan farq qilib, mazmuni bir xil bo'lsa, izomorf modellar deyiladi.

Aksiomalar sistemasi modeli real dunyo xossalarini aniqroq ifodalashi uchun ular mantiqan bir qancha talablarni bajarishi lozim.

Birinchi navbatda aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo'lishi kerak. Boshqacha aytganda, berilgan aksiomalar sistemasida bir paytda rost va yolg'on tasdiq kelib chiqmasligi kerak.

Ikkinchidan, aksiomalar sistemasi bir-biriga bog'liq bo'lmasligi, ya'ni bir aksioma aksiomalar sistemasining boshqa aksiomalaridan kelib chiqmasligi kerak.

Uchinchidan, aksiomalar sistemasi qat'iy, ya'ni sistemaning barcha modellari izomorf bo'lishi kerak.

5.7. Natural sonlar to'plamini aksiomatik asosda qurish

N natural sonlar to'plamini aksiomatik qurish uchun aksiomalar sistemasini turli usullar bilan tanlash mumkin. Asosiy tushunchalar uchun sonlar yig'indisi, yoki tartib munosabati, yoki bir son ketidan bevosita keyin keluvchi son tushunchalarini olish mumkin. Har bir hol uchun asosiy tushunchalar xossalarini ifodalovchi aksiomalarni berish lozim. Biz asosiy tushuncha deb qo'shish amalini olib, aksiomalar sistemasini quramiz. Agar bo'sh bo'lmagan N to'plamda quyidagi xossalarga ega, qo'shish deb ataluvchi (a;b)$\Rightarrow$a+b binar algebraik operatsiya aniqlangan bo'lsa, N to'plamga natural sonlar to'plami deyiladi (bunda a+b sonni a va b sonlarning yig'indisi deymiz).

1) qo'shish kommutativ, ya'ni a$\in$N va b$\in$N bo'lsa, u holda a+b=b+a;

2) qo'shish assotsiativ, ya'ni $a \in N$, $b \in N$, $c \in N$ bo'lsa, u holda $a+(b+c)=(a+b)+c$;

3) ixtiyoriy ikki a va b natural sonlari uchun $a+b$ yig'indi a sonidan farqli $a+b \neq a$;

4) N to'plamning bo'sh bo'lmagan ixtiyoriy A to'plam ostida shunday a soni mavjudki, a sonidan farqli barcha $x \in A$ sonlarini $x=a+b$ shaklida yozish mumkin, bunda $b \in N$.

1-4 aksiomalar sistemasi, natural sonlar arifmetikasini qurish uchun yetarli.

Natural sonlar arifmetikasini bu aksiomalar asosida qurganda chekli to'plam xossalaridan foydalanishga ehtiyoj qolmaydi.

1-4-aksiomalar sistemasidan uchinchini isbotlaymiz:

Bizga ma'lumki, A va B to'plam bo'sh bo'lmasa u holda B to'plam AUB to'plamdan farq qiladi va $b \neq b+a$ munosabat bajariladi. 3-aksiomada berilishicha yig'indi birinchi qo'shiluvchidan farq qiladi. Shuning uchun $b \neq a+b$ munosabatda b ni birinchi qo'shiluvchi o'rniga qo'yish kerak. Buni esa birinchi, ya'ni $a+b=b+a$ aksiomaga asosan amalga oshiramiz. $b \neq a+b$ da 1-aksiomaga asosan $b \neq a+b$ ga ega bo'lamiz. Odatda, ko'rgazmaliliksiz 1-4-aksiomalar vositasida bajarilgan isbotlar juda uzun bo'ladi, lekin ulardan kelib chiqadigan natijalarni nafaqat natural sonlar to'plami, balki 1-4-aksiomalar sistemasi ixtiyoriy modellariga qo'llash mumkin bo'ladi. Bizga yaxshi tanish bo'lgan aksiomalar sistemasi modellaridan biri bu oddiy ma'noda qo'shish amali berilgan {1;2;3;4; ...} to'plamdir. Bu model bilan birga boshqa modellar ham mavjud. Masalan: {-1;-2;-3;-4; ...} sonli to'plamda ham qo'shish amali oddiy ma'noda aniqlangan. Ba'zi bir qo'shish aksiomalar sistemasida qo'shish amali odatdagi qo'shish amalidan farq qiladi.

Masalan, agar oddiy qo'shish amali bilan berilgan {3;4;5; ...} sonli to'plamni qaraydigan bo'lsak, bu to'plamda 4) aksiomalar bajarilmaydi, ya'ni 4 va 5 sonlarini 3 sonlarining yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin bo'lmaydi. Agar qo'shishni $a*b=a+b-2$ ko'rinishida qabul qilinsa, bu to'plamda 1–4 - aksiomalar bajariladi.

Masalan: $4=3*3=3+3-2$, $5=3*4=3+4-2$

Agar qo'shish amali o'rniga ko'paytirish amali qabul qilinsa, ushbu aksiomalar $\{2; 2^2; 2^3; 2^4;\ldots\}$ to'plamda ham bajariladi.

Yuqorida qaralgan to'plamlar turlicha va ularda qo'shish amali berilgan oddiy ma'nodagi qo'shish amalidan farq qilishiga qaramasdan 1–4-aksiomalarga asoslangan holda natural sonlarni qo'shishga oid bo'lgan barcha isbotlar har qanday aksiomalar sistemasi modellari uchun o'rinli bo'ladi.

1-4-aksiomalar sistemasi barcha modellari qat'iy izomorfligini isbotlash mumkin. Bu aksiomalar sistemasi uchun ikkita interpretatsiyaning izomorfligini quyidagicha isbotlaymiz:

Aksiomalar sistemasining birining interpretatsiyasi oddiy ma'nodagi qo'shish amali bilan berilgan $\{1;2;3;\ldots\}$ to'plam bo'lsin, ikkinchi interpretatsiya oddiy ma'noda ko'paytirish amali bilan berilgan. Bu ikki interpretatsiyaning izomorfligini ko'rsatish uchun har bir natural *n* soniga 2^n sonini mos qo'yish lozim bo'ladi. U holda m+n soniga 2^{m+n} soni mos qo'yiladi.

$2^{m+n}=2^m\ 2^n$ ekanligidan $n\to2^n$ mos qo'yuvchi akslantirish jarayonida qo'shish amali ko'paytirish amaliga o'tadi.

Peano aksiomalari. Natural sonlarni qo'shish tushunchasi natural sonlar to'plami aksiomatikasini qurish uchun yagona asos emas. Shuning bilan birga bu tushuncha sodda ham emas. Ma'lumki, *n* natural soniga *m* natural sonini qo'shishni qadamma-qadam, ya'ni har qadamga yana bitta birlikni qo'shish yordamida hosil qilamiz. Masalan, $5+3=(((5+1)+1)+1)$.

Shuning uchun, qo'shish operatsiyasini eng sodda ya'ni 1 sonini qo'shish operatsiyasiga keltirish mumkin. n+1 soni bevosita n sonidan keyin kelganligi uchun keyingi songa o'tish to'g'risida gapirish mumkin. Shunga ko'ra, natural sonlar to'plamida asosiy tushuncha sifatida «*b* soni *a* sonidan bevosita keyin keladi» tushunchasini tanlash mumkin.

Natural sonlar nazariyasini aksiomatik qurishda Peano ta'riflanmaydian tushuncha sifatida "natural son" va ta'riflanmaydian munosabat sifatida "...dan keyin keladi" degan munosabatni asos qilb olgan.

Peano aksiomalari:

1. Hech qanday sondan keyin kelmaydigan 1 soni mavjud.

Bu aksiomadan ko'rinadiki, natural sonlar to'plamida birinchi element aniqlanan bo'lib, u 1 sonidan iboratdir.

2. Har qanday a son uchun undan bevosita keyin keluvchi faqat va faqat bitta son a' soni mavjud. Ya'ni $a=b \Rightarrow a'=b'$.

Bu aksioma natural sonlar to'plamining cheksiz ekanligini ifodalaydi.

3. 1 dan boshqa ixtiyoriy natural son faqat va faqat bitta natural sondan keyin keladi $a'=b' \Rightarrow a=b$.

Bu aksiomadan ko'rinadiki, natural sonlar to'plami qat'iy tartiblangan to'plamdir.

4. Natural sonlar to'plami N ning biror A qism to'plamiga 1 soni tegishli bo'lsa va undagi har bir n natural soni bilan undan bevosita keyin keluvchi n+1natural son ham tegishli bo'lsa, A to'plam N to'plamga teng bo'ladi.

Bu aksioma matematik induksiya aksiomasi deyiladi va unga matematik induksiya metodi asoslanadi.

Agar biror F qoida 1 soni uchun o'rinli ekanligi isbotlangan bo'lsa va uning n natural soni uchun o'rinli ekanligidan navbatdagi natural son n+1 uchun to'g'riligi kelib chiqsa, bu F qoida barcha natural sonlar uchun o'rinli bo'ladi.

Matematik induksiya metodi. X to'plam berilgan bo'lsin. Mulohaza yuritishning quyidagi ikki usulini qaraymiz:

1) biror tasdiq ba'zi $x \in X$ elementlar uchun to'g'ri bo'lsa, bu tasdiq barcha $x \in X$ lar uchun to'g'ri bo'ladi;

2) biror tasdiq har bir $x \in X$ elementlar uchun o'rinli bo'lsa, bu tasdiq barcha $x \in X$ lar uchun o'rinli bo'ladi.

Mulohaza yuritishning birinchi usuli to'liqmas induksiya, ikkinchi usuli esa to'liq (mukammal) induksiya deyiladi («induksiya» so'zi lotincha so'z bo'lib, o'zbek tilida «hosil qilish», «yaratish» ma'nosini bildiradi).

Matematik induksiya metodi quyidagidan iboratdir:

I. n=1 uchun berilgan A(n) predikatning rostligi tekshiriladi. (Agar n=1 uchun berilgan A(n) predikat rost bo'lsa, navbatdagi qadamga o‘tiladi, aksincha bo‘lsa, u holda berilgan predikat barcha n lar uchun yolg‘on deb, umumiy xulosa chiqariladi).

II. n=k uchun A(n) predikat rost deb faraz qilinadi.

III. n=k+1 uchun A(n) predikatning rostligi, ya’ni A(k)⟹A(k+1) isbotlanadi. Shundan so‘ng, A(n) predikat n ning barcha qiymatlarida rost deb umumiy xulosa chiqariladi.

Masalan,

$$1^2 + 2^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad (1)$$

tenglikning barcha n natural sonlar uchun to‘g‘riligini isbotlang.

n ning o‘rniga n=1 dan boshlab qiymatlar qo‘yish bilan bu tenglikni n ning ma’lum bir qiymatigacha to‘g‘riligiga ishonch hosil qilish mumkin, ya’ni

$n = 1$ bo‘lsa, $\frac{1(1+1)(2\cdot1+1)}{6} = \frac{1\cdot2\cdot3}{6} = 1$, demak 1=1.

$n = 2$ bo‘lsa, $\frac{2(2+1)(2\cdot2+1)}{6} = \frac{2\cdot3\cdot5}{6} = 5$, demak $1^2 + 2^2 = 5$.

$n = 3$ bo‘lsa, $\frac{3(3+1)(2\cdot3+1)}{6} = \frac{3\cdot4\cdot7}{6} = 14$, demak $1^2 + 2^2 + 3^3 = 14$

Ammo n ning katta qiymatlari uchun tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatish qiyin. Boshqacha aytganda, barcha n natural sonlar uchun tenglikning to‘g‘riligini ko‘rsatishga qodir emasmiz. Shu sababli, tenglikni isbotlashda boshqacha muhokama yuritamiz. Dastlab tenglikni n=1 uchun to‘g‘riligini ko‘rsatamiz, buni biz ko‘rsatdik. Keyinchalik bu tenglikni biror n qiymat uchun to‘g‘ri deb faraz qilib, undan bevosita keyin keluvchi n+1 qiymat uchun to‘g‘riligini isbotlaymiz, ya’ni

$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ to‘g‘ri deb,

$$1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 + (n+1)^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \qquad (2)$$

to‘g‘riligini isbotlaymiz.

Buning uchun (1) tenglikning chap tomoniga $(n+1)^2$ hadni qo‘shib, o‘ng tomonida n ni n+1 ga almashtiramiz. (1) da n ta natural sonlar kvadratlarining yig‘indisi $\frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng bo'lgani uchun (2) ni chap tomonida almashtirish bajaramiz va quyidagini hisoblaymiz.

$$\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)+6(n+1)^2}{6}=$$
$$\frac{(n+1)[n(2n+1)+6(n+1)]}{6}=\frac{(n+1)(2n^2+7n+6)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

Demak, n ta natural sonlar kvadratlarining yig'indisi $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ga teng ekan.

Induksiya va matematik induksiya metodiga doir misollar.

1-misol. N{1; 2; 3; 4; ...} natural sonlar to'plamida aniqlangan $A(n)=n^2+n+17$ ifodani qaraymiz. A(1)=19, A(2)=23, A(3)=29 va A(4)=37 sonlari tub sonlardir. Shuning uchun, barcha $n\in N$ sonlari uchun $A(n)=n^2+n+17$ ifodaning qiymati tub son bo'ladi.

Bu yerda to'liqmas induksiya yordamida xulosa chiqariladi. Chiqarilgan bu xulosa noto'g'ridir, chunki $A(16)=289=17^2$ soni tub son emas.

2-misol. X={10; 20; 30; 40; 50; ...} to'plam yozuvi 0 raqami bilan tugaydigan barcha natural sonlar to'plami bo'lsin. 10; 20; 30; 40; 50 sonlarining har biri 2 ga qoldiqsiz bo'linadi. Shuning uchun, X to'plamning har qanday x elementi 2 ga bo'linadi. To'liqmas induksiya yordamida chiqarilgan bu xulosa to'g'ri xulosadir, chunki X to'plamning har qanday elementi juft sondir.

3-misol. N={1;2;3;...; 1 000 000 001; ...} natural sonlar to'plamida aniqlangan $B(n)=991n^2+1$ ifodani qaraymiz. B(1), B(2), ... , B(1000000001) sonlari butun sonning kvadrati emas (bu tasdiq isbotlangan). Shuning uchun, barcha $n\in N$ lar uchun B(n) soni butun sonning kvadrati bo'la olmaydi.

To'liqmas induksiya yordamida chiqarilgan bu xulosa noto'g'ridir. Zamonaviy hisoblash mashinalari yordamida n ning B(n) soni butun sonning kvadrati bo'ladigan qiymati aniqlangan (bu qiymat 29 xonali sondan iborat).

To'liqmas induksiya ba'zan noto'g'ri xulosaga olib kelmaganda (1-misol, 3-misol), uning matematika va boshqa fanlar (fizika, kimyo, biologiya va hokazo)dagi, shuningdek, amaliyotdagi ahamiyati juda kattadir. U xususiy xulosalar yordamida umumiy xulosa (faraz, taxmin) qilish imkonini beradi.

To‘liq induksiya hamma vaqt to‘g‘ri xulosaga olib keladi, lekin uni qo‘llashda hisoblash ishlariga yoki to‘plamdagi elementlar soniga bog‘liq bo‘lgan ba’zi qiyinchiliklar paydo bo‘ladi.

3-misol. X={1; 2; 3; 4} to‘plamni qaraymiz.

A(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)(x-5)(x-6)(x-7)(x-8)(x-9) ifoda har bir $x \in X$ da nolga teng qiymat qabul qiladi:

A(1)=(1-1)(1-2)(1-3)(1-4)(1-5)(1-6)(1-7)(1-8)(1-9)=0;

A(2)=(2-1)(2-2)(2-3)(2-4)(2-5)(2-6)(2-7)(2-8)(2-9)=0;

A(3)=(3-1)(3-2)(3-3)(3-4)(3-5)(3-6)(3-7)(3-8)(3-9)=0;

A(4)=(4-1)(4-2)(4-3)(4-4)(4-5)(4-6)(4-7)(4-8)(4-9)=0.

Demak, barcha $x \in X$ lar uchun, A(x)=0 tenglik o‘rinli.

Agar X to‘plam cheksiz to‘plam bo‘lsa, yoki undagi elementlar soni juda katta bo‘lsa, to‘plamning har bir elementi uchun berilgan tasdiqning to‘g‘ri ekanligini ko‘rsatish mumkin bo‘lmaydi yoki juda qiyin bo‘ladi. Shu sababli to‘liq induksiyadan juda kam hollarda foydalaniladi.

5-misol. To‘liqmas induksiyadan foydalanib, «Agar m xonali $N = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + ... + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$ sonining oxirgi n ta (bu yerda $n \leq m$) raqamidan tuzilgan son 5^n ga bo‘linsa, N soni ham 5^n ga bo‘linadi» degan farazni aytish mumkinmi?

Yechish: n=1 bo‘lib, N sonining oxirgi bitta raqamidan tuzilgan son 5 ga bo‘linsin. U holda, berilgan m xonali N natural sonni $N = (a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + ... + a_{m-1} \cdot 10) + 5k$ ko‘rinishda yozish mumkin. O‘ng tomondagi ikkita qo‘shiluvchining har biri 5 ga bo‘lingani uchun, ularning yig‘indisi bo‘lgan N soni ham 5 ga bo‘linadi.

n=2 bo‘lib, N sonining oxirgi ikkita raqamidan tuzilgan son 25 ga bo‘linsin: $a_{m-1} \cdot 10 + a_m = 25 \cdot t$.

U holda, berilgan m xonali N natural sonni $N = (a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + ... + a_{m-2} \cdot 100) + 25 \cdot t$ ko‘rinishda yozish mumkin. O‘ng tomondagi ikkita qo‘shiluvchilarning har biri 25 ga bo‘lingani uchun, ularning yig‘indisi bo‘lgan N soni ham 25 ga bo‘linadi.

Yuqorida yuritilgan mulohazalardan foydalanib (to'liqmas induksiya qo'llanilmoqda), «Agar berilgan m xonali natural $N = a_1 \cdot 10^{m-1} + a_2 \cdot 10^{m-2} + ... + a_{m-1} \cdot 10 + a_m$ sonning oxirgi n ta (bu yerda $n \le m$) raqamidan tuzilgan son 5^n ga bo'linsa, N soni ham 5^n ga bo'linadi» degan farazni aytish mumkin.

6-misol. 2 dan katta bo'lgan dastlabki bir nechta juft sonlarni ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida tasvirlash mumkin: 4=2+2, 6=3+3, 8=3+5, 10=3+7=5+5, ... , 50=13+37.

To'liqsiz induksiya yordamida «2 dan katta bo'lgan har qanday juft soni ikkita tub sonning yig'indisi ko'rinishida yozish mumkin» degan xulosaga kelamiz. Bu xulosaning to'g'ri yoki noto'g'ri ekanligi hozircha isbotlanmagan. Bu muammo L.Eyler – X.Goldbax muammosi deb yuritiladi.

7-misol. Agar $(n^3+11n) \vdots 6$ $(n \in N)$ mulohaza n ning n=k $(k \in N)$ qiymatida to'g'ri bo'lsa, u holda bu mulohaza n ning n=k+1 qiymatida ham to'g'ri bo'lishini isbotlang.

Isbot. Berilgan mulohaza n ning n=k qiymatida to'g'ri bo'lgani uchun, $(k^3+11k) \vdots 6$ (1) to'g'ri mulohazaga egamiz. n=k+1 bo'lsa, berilgan mulohaza $[(k+1)^3+11(k+1)] \vdots 6$ (2) ko'rinishini oladi.

2) n=k bo'lsa, n^3+11n ifodaning qiymati k^3+11k soniga teng bo'ladi. Bu son 6 ga bo'linadi, deb faraz qilamiz.

3) n=k+1 bo'lsin. U holda $(k+1)^3+11(k+1)=(k+1)(k^2+7k+12)=$ $(k^3+11k)+3k(k+1)+12$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Farazimizga ko'ra, k^3+11k soni 6 ga bo'linadi. Ketma-ket keluvchi ikkita natural sonning ko'paytmasi bo'lgan k(k+1) soni 2 ga bo'lingani uchun, 3k(k+1) soni 6 ga bo'linadi. Shuning uchun $(k^3+11k)+3k(k+1)+12$ soni 6 ga bo'linadi.

Demak, n ning barcha natural qiymatlarida n^3+11n ifoda 6 ga bo'linadi.

Matematik induksiya metodi biror-bir tasdiqni hosil qilish usuli emas, balki berilgan (tayyor) tasdiqni isbotlash usuli ekanligini eslatib o'tamiz.

Ba'zan bu metod noto'g'ri ham qo'llanilishi mumkin.

8-misol. Har qanday n natural soni o'zidan keyin keluvchi n+1 natural soniga «tengdir».

Isbot. Har qanday k natural soni uchun tasdiq to‘g‘ri, ya’ni k=k+1 bo‘ladi, deb faraz qilaylik. Agar endi bu tenglikning har ikki qismiga 1 soni qo‘shilsa, k+1=k+2 bo‘ladi.

Demak, tasdiq n larda o‘rinli. Bunda isbotning ba’zi qismi unutib qo‘yilgan. Boshidayoq, $1 \neq 2$ bo‘ligani ma’lum edi.

Nazorat uchun savollar

1. Nazariyani aksiomatik qurish haqida tushuncha bering.
2. Peano aksiomalarini aytib bering.
3. Qo‘shish aksiomalari bilan Peano aksiomalari teng kuchlimi?
4. Matematik induksiya metodi mohiyatini aytib bering.
5. To‘la va chala induksiya metodlari haqida tushuncha bering. Misollar keltiring

5.8. Nomanfiy butun sonlarni qo‘shish amalining aksiomatik ta’rifi. Qo‘shish qonunlari

Natural sonlarni qo‘shish va uning xossalari. Qo‘shish amalining ta’rifi German Grossman (1809–1877) tomonidan berilgan qo‘shish amalining induktivlik ta’rifiga asoslanadi. Bu ta’rif ikki qismdan iborat bo‘lib, u quyidagicha:

1) ixtiyoriy a natural songa 1 ni qo‘shish, bevosita a dan keyin keladigan sonni beradi. Ya’ni $(\forall a \in N)$ $(a + 1 = a')$.

2) amali, a songa bevosita b sondan keyin keladigan b' sonni qo‘shish natijasida a + b sondan bevosita keyin keladigan natural (a+b)' sonni beradi. Ya’ni $(\forall a, b \in N)[\, a + b' = (a+b)' = (a+b) + 1]$.

Peanoning ikkinchi aksiomasidan ma’lumki, n – natural son bo‘lsa, n + 1 ham albatta natural son bo‘ladi. Bunda a va $a + b$ lar natural son bo‘lganda $a + b' = (a + b)'$ ham natural son bo‘lishi kelib chiqadi. Shuningdek, $a + 1 = a'$ dan Peanoning aksiomasiga asosan a natural son bilan b natural sonning yig‘indisi aniqlangan va natural sondan iborat bo‘ladi.

Demak, qo‘shish amali natural sonlar to‘plamida hamma vaqt bajariladigan bir qiymatli operatsiya ekan.

Natural sonlarni qo'shish ta'rifidan ko'rinadiki, har qanday natural son o'zidan oldingi natural son bilan birning yig'indisiga teng bo'lar ekan. Ya'ni

2=1+1	6=5+1
3=2+1	7=6+1
4=3+1	8=7+1
5=4+1	9=8+1

Natijada biz 1 ni qo'shish jadvalini hosil qildik. Endi 2 ni qo'shish jadvalini tuzaylik:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4.$$

Demak, 2 ni qo'shish jadvali:

$$1 + 2 = 1 + (1 + 1) = (1 + 1) + 1 = 2 + 1 = 3,$$
$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4,$$
$$3 + 2 = 3 + (1 + 1) = (3 + 1) + 1 = 4 + 1 = 5,$$
$$4 + 2 = 4 + (1 + 1) = (4 + 1) + 1 = 5 + 1 = 6.$$

3 ni qo'shish jadvalini tuzsak:

$$1 + 3 = 1 + (2 + 1) = (1 + 2) + 1 = 3 + 1 = 4,$$
$$2 + 3 = 2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 = 4 + 1 = 5,$$
$$3 + 3 = 3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1 = 5 + 1 = 6.$$

Xuddi shu yo'l bilan bir xonali sonlarni qo'shish jadvalini tuzishimiz mumkin. Yuqoridagilardan ko'rinadiki, agar natural sonlar qatorida a dan bevosita keyin keladigan b ta sonni sanasak, natijada oxiri sanalgan son a va b sonlarning yig'indisi bo'ladi hamda u $a + b$ ko'rinishda belgilanadi. Bunda a – birinchi qo'shiluvchi, b – ikkinchi qo'shiluvchi, $a + b$ esa yig'indi deb yuritiladi.

Qo'shish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Guruhlash (assotsiativlik) xossasi.

$(\forall a, b, c \in N)[(a + b) + c = a + (b + c)]$.

Bu xossani matematik induksiya metodi yordamida isbotlaylik. Isbot. 1) c = 1 bo'lsin. U holda $(a + b) + 1 = a + b' = a + b' = a + (b + 1)$ (ta'rifga asosan).

Demak, c = 1 uchun guruhlash xossasi o'rinli.

2) c = n uchun $(a + b) + n = a + (b + n)$ o'rinli deb faraz qilaylik.

3) $c = n + 1$ uchun bu xossaning to‘g‘riligini isbotlaylik.

$(a + b) + (n + 1) = [(a + b) + n] + 1$ =[ta’rifga asosan].

$= [a + (b + n)] + 1$ = [farazga asosan] $= a + [(b + n) + 1]$ = [ta’rifga asosan] $= a + [b + (n + 1)]$ (ta’rifga asosan).

Demak, $(a + b) + (n + 1) = a + [b + (n + 1)]$.

Peanoning 4-aksiomasiga asosan, $(a+b)+c=a+(b+c)$ekanligi kelib chiqadi.

2°. O‘rin almashtirish (kommutativlik) xossasi.

$(\forall a, b \in N)$ $(a + b = b + a)$.

Bu xossani ham matematik induksiya metodidan foydalangan holda isbotlaymiz.

Isbot. 1) $a=1$ bo‘lsa, $1+b=b+1$ bo‘lishini isbotlaylik. $b = 1$ bo‘lsa, $1 + 1 = 1 + 1$ bo‘ladi. Demak, $b = 1$ uchun $1 + b = b + 1$ tenglik to‘g‘ri.

$b=n$ uchun $1+n=n+1$ to‘g‘ri deb faraz qilaylik. $b=n+1$ uchun $1+(n+1)=(n+1)+1$ to‘g‘riligini isbotlaymiz.

$1+(n+1)=(1+n)+1$=[ta’rifga asosan] $= (n+1)+1$[farazga asosan].

Demak, $1+(n+1)=(n+1)+1$ bo‘ladi.

Endi yuqoridagi xossa $\forall a \in N$ uchun o‘rinli ekanligini isbotlaylik.

$a = 1$ uchun o‘rinli ekanligini ko‘rdik. $a=m$ uchun $m+b=b+m$ deb faraz qilaylik.

$a=m+1$ uchun $(m+1)+b=b+(m+1)$ ekanligini isbotlaylik. U holda $(m+1)+b=m+(1+b)=m+(b+1)$=(1°-xossaga asosan) $= (m+b) + 1$ =[ta’rifga asosan] $= (b + m) + 1 = b + (m + 1)$ [farazga asosan] tekslik o‘rinli.

Demak, $a + b = b + a$ (4-aksiomaga asosan).

5.9. Nomanfiy butun sonlarni ko‘paytirish amalining aksiomatik ta’rifi. Ko‘paytirish qonunlari

Natural sonlarni ko‘paytirish amali ta’rifi va xossalari.

Har biri a ga teng bo‘lgan b ta natural son yig‘indisi $\underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{b\ ta}$ ni topish talab qilingan bo‘lsin. Bunday ko‘rinishdagi yigindini hisoblash ko‘p hollarda amaliy jihatdan qiyinchilik tug‘diradi. Shuning uchun bir xil qo‘shiluvchilar yig‘indisini topishni osonlashtirish maqsadida yangi amal kiritiladi. Bu amal ko‘paytirish amali deb yuritiladi.

Ta’rif. Har biri *a* ga teng bo‘lgan *b* ta qo‘shiluvchining yig‘indisini topishga **ko‘paytirish amali** deyiladi.

U $a \times b$ yoki $a \cdot b$ ko‘rinishda belgilanib, a sonining b soniga ko‘paytmasi deb ataladi.

Demak, $a \cdot b = \underbrace{a+a+a+\cdots+a}_{b\ ta}$. Bunda $a \cdot b$ – ko‘paytma, *a*, *b* –ko‘paytuvchilar deb yuritiladi.

Ko‘paytirish amalining aksiomatik ta’rifi quyidagicha:

Ta’rif. a natural sonining b natural soniga ko‘paytmasi deb, shunday algebraik operatsiyaga aytiladiki, unda

1) $a \cdot 1 = a$,

2) $a \cdot (b+1) = a \cdot b + a$ bo‘ladi.

Bu ta’rif yordamida bir xonali sonlar uchun ko‘paytirish jadvalini tuzishimiz mumkin.

Masalan, a) 2 ni ko‘paytirish jadvalini tuzaylik:

$2 \cdot 1=2$

$2 \cdot 2=2 \cdot (1+1)=2 \cdot 1+2=2+2=4$

$2 \cdot 3=2 \cdot (2+1)=2 \cdot 2+2=4+2=6$

$2 \cdot 4=2 \cdot (3+1)=2 \cdot 3+2=6+2=8$

b) 3 ni ko‘paytirish jadvalini tuzaylik:

$3 \cdot 1=3$,

$3 \cdot 2=3 \cdot (1+1)=3 \cdot 1+3=6$

$3 \cdot 3=3 \cdot (2+1)=3 \cdot 2+3=6+3=9$

$3 \cdot 4=3 \cdot (3+1)=3 \cdot 3+3=9+3=12$

Ko'paytirish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. Distributivlik xossasi (chapdan). $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$, ya'ni natural sonning boshqa ikki natural son yig'indisiga ko'paytmasi, shu sonning har bir qo'shiluvchi bilan ko'paytmasining yig 'indisiga teng.

Isbot. Bu xossani isbotlashda matematik induksiya metodidan foydalanamiz.

$c = 1$ uchun $a \cdot (b + 1) = a \cdot b + a \cdot 1 = a \cdot b + a$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $a \cdot (b + n) = ab + an$ to'g'ri deb faraz qilamiz.

$c = n + 1$ uchun bu xossaning to'g'riligini isbotlaymiz.

$a \cdot (b+n+1)=a \cdot [(b+n)+1]=a(b+n)+a \cdot 1 =$ [ta'rifga asosan)

$=ab+an+a=$ [farazga asosan)

$=ab+a(n+1)=$[ta'rifga asosan).

Demak, $a \cdot (b+c)=ab+ac$ bo'ladi.

2°. Distributivlik xossasi (o'ngdan)x$(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$ bo'ladi. ya'ni ikkita son yig'indisining uchinchi son bilan ko'paytmasi, har bir sonning uchinchi son bilan ko'paytmasining yig'indisiga teng.

Isbot. Buni matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$c = 1$ uchun $(a+b) \cdot c=(a+b) \cdot 1=a \cdot 1+b \cdot 1$ to'g'ri bo'ladi.

$c = n$ uchun $(a + b) \cdot n = a \cdot n + b \cdot n$ to'g'ri deb faraz qilamiz.

$c = n+1$ uchun $(a + b) \cdot (n + 1)$ ni to'g'ri bo'lishini isbotlaymiz.

$(a+b)(n+1)=(a+b) \cdot n+(a+b)=$(ta'rifga asosan)

$=an+bn+a+b=$ (farazga asosan)

$=an+a+bn+b=$(yigindining o'rin almashtirish xossasiga asosan)

$= a(n+1)+b(n+1)$ (ko'paytirish ta'rifiga asosan).

Demak, $(a + b)(n + 1)$ uchun yuqoridagi xossa to'g'ri ekan. Bundan $(a+b) \cdot c=a \cdot c+b \cdot c$ bo'ladi.

3°. Ko'paytirishning o'rin almashtirish xossasi. $a \cdot b=b \cdot c$, ya'ni ko'paytuvchilarning o'rnini o'zgartirish bilan ko'paytma o'zgarmaydi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida amalga oshiramiz.

$a = 1$ uchun $1 \cdot b = b = b \cdot 1$ bo'lib, bu xossa o'rinli bo'ladi.

$a = n$ uchun $n \cdot b = b \cdot n$ deb faraz qilaylik.

$a = n + 1$ uchun to‘g‘ri ekanligini isbotlaylik.

$a \cdot b = (n+1) \cdot b = nb + 1 \cdot b =$ (ko‘paytirishning chapdan distributivlik xossasiga asosan) $= b \cdot n + b =$ (farazga asosan) $= b \cdot (n+1)$ (ko‘paytirishning o‘ngdan distributivlik xossasiga asosan).

Demak, $(n+1) \cdot b = b \cdot (n+1)$. Bundan $a \cdot b = b \cdot a$ ekanligi kelib chiqadi.

4°. Ko‘paytirishning guruhlash xossasi. $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ bo‘ladi.

Isbot. Bu xossani ham matematik induksiya metodi yordamida isbotlaymiz.

$(a \cdot b) \cdot 1 = ab = a \cdot (b \cdot 1)$ to‘g‘ri bo‘ladi.

$c = n$ uchun $(a \cdot b) \cdot n = a \cdot (b \cdot n)$ deb faraz qilamiz. $c = n + 1$ uchun to‘g‘riligini isbotlaymiz.

$C = 1$, $(a \cdot b) \cdot (n+1) = (a \cdot b) \cdot n + ab =$ (ko‘paytirish ta’rifiga asosan)

$= a \cdot (b \cdot n) + a \cdot b =$ (farazga asosan) $= a \cdot (b \cdot n + b) = a(b \cdot (n+1))$ (ko‘paytmaning distributivlik xossasiga asosan).

Demak, $(a \cdot b)(n+1) = a(b(n+1))$. Bundan $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$.

Natija. Har qanday natural sonning 0 soni bilan ko ‘paytmasi nolga teng.

Haqiqatan ham, $0 \cdot a = \underbrace{0 + 0 + 0 + \ldots + 0}_{a\ ta} = 0$.

Nazorat uchun savollar:

1. Natural sonlarni qo‘shish ta’rifini ayting.
2. Natural sonlarni qo‘shish xossalarini ayting va asoslang.
3. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasi ta’rifini ayting, uning mavjudligi va yagonaligi haqidagi fikrni asoslang.
4. Nomanfiy butun sonlar ko‘paytmasining xossalarini ayting va asoslang.

5.10. Ayirish va bo‘lishning ta’rifi. Nolga bo‘lishning mumkin emasligi. Qoldiqli bo‘lish

Ayirish amalining ta’rifi va xossalari. Aytaylik, bizga ikkita qo‘shiluvchining yig‘indisi *a* va qo‘shiluvchilardan biri *b* berilgan holda ikkinchi qo'shiluvchini topish talab qilinsin. Demak, shunday x sonini topish kerakki, bunda $a = b + x$ bo'lsin.

1-ta'rif. Berilgan a sondan b sonni **ayirish** deb, b ga qo'shganda a hosil bo'ladigan x sonni topishga aytiladi.

Bunda: a – kamayuvchi, b – ayiriluvchi; x – ayirma deb yuritiladi va $x = a - b$ ko'rinishda yoziladi.

Ta'rifdan ko'rinadiki, kamayuvchi ayiriluvchi bilan ayirmaning yig'indisidan iborat bo'ladi. Demak,

$a - b = x \Rightarrow a = b + x$. Bundan ko'rinadiki, yig'indining monotonligiga asosan kamayuvchi ayiriluvchidan katta bo'ladi, ya'ni a>b. Nomanfiy butun sonlar to'plamida kamayuvchi ayiriluvchidan katta yoki unga teng bo'lgan holdagina ayirish amali aniqlangan bo'ladi. Ya'ni $a \geq b$ bo'lgan holda $a - b$ ayirma mavjud bo'ladi.

Ayirish amali quyidagi xossalarga ega:

1°. Agar ikki sonning ayirmasiga ayiriluvchi qo'shilsa, kamayuvchi hosil bo'ladi, ya'ni $a - b = c$ bo'lsa, $a = b + c$ bo'ladi.

Isbot. Ta'rifga asosan $a = b + c$ yoki $c + b = a$. Lekin

$c = a - b \Rightarrow c + b = (a - b) + b = a$.

2°. Agar ikki son yig'indisidan qo'shuvchilardan biri ayirilsa, ikkinchi qo'shiluvchi hosil bo'ladi, ya'ni

$(\forall a, b \in N)\ [(a + b) - b = a]$.

3°. Berilgan songa ikki sonning ayirmasini qo'shish uchun kamayuvchini qo'shib, ayiriluvchini ayirish kifoya, ya'ni

$(\forall a, b, c \in N)\ [a + (b - c) = (a + b) - c]$.

4°. Berilgan sondan yig'indini ayirish uchun bu sondan qo'shiluvchilarni birin-ketin ayirish kifoya, ya 'ni

$(\forall a, b, \in N)[(a - (b + c) = a - b - c]$.

5°. Berilgan sondan ayirmani ayirish uchun kamayuvchini ayirib, ayiriluvchini qo'shish kifoya, ya 'ni

$(\forall a, b, c \in N)[a - (b - c) = (a - b) + c]$.

Natural sonlarni bo'lish ta'rifi va xossalari.

2-ta'rif. Ikki ko'paytuvchining ko'paytmasi va bir ko'paytuvchi berilgan holda ikkinchi ko'paytuvchini topish amali bo'lish amali deyiladi.

Bunda berilgan ko‘paytmani ifodalovchi son – bo‘linuvchi, berilgan ko‘paytuvchi – bo‘luvchi, izlanayotgan ko‘paytuvchi – bo‘linma deyiladi.

Agar a – ko‘paytma, b – berilgan ko‘paytuvchi, c – izlanayotgan ko‘paytuvchi bo‘lsa, u bo‘lish amali yordamida $a:b=c$ ko‘rinishda belgilanadi. Ta’rifdan ko‘rinadiki, bo‘lish amali ko‘paytirish amaliga teskari amal ekan.

Bo‘lishamali bir qiymatlidir.

Masalan, a) 9:3=3; b) 21:7=3; d) 111:3=37.

Bo‘lish amali quyidagi xossalarga ega.

1°. Ko‘paytmani noldan farqli biror songa bo‘lish uchun ko‘paytuvchilardan birini shu songa bo‘lish kifoya, ya’ni

$(a\cdot b):c=(a:c)\cdot b$, bunda a soni c ga karrali bo‘ladi, ya’ni c soniga butun marta bo‘linadi.

Isbot. $(a\cdot b):c=x$ bo‘lsin, $a\cdot b= c\cdot x$. Lekin, $(a:c)\cdot c=a$ bo‘ladi.

U holda $(a:c)\cdot cb = cx\Rightarrow(a:c)\cdot b=x\Rightarrow(a:c)\cdot b=(ab):c$ bo‘ladi.

2°. Biror sonni ikki sonning bo‘linmasiga ko‘paytirish uchun shu sonni bo‘linuvchiga ko‘paytirish va hosil bo‘lgan ko‘paytmani bo‘luvchiga bo‘lish kifoya, ya’ni

$(\forall a, b, c\in N)$ $[a\cdot (b: c) = (a\cdot b): c)$.

Isbot. $a \cdot(b : c) = x$ bo‘lsin.

Tenglikning ikkala tomonini c ga ko‘paytirsak, $a\cdot(b:c)\cdot c=xc$ bo‘ladi.

Lekin $(b : c) \cdot c = b$ bo‘ladi. Bundan $ab = xc$. U holda ta’rifga asosan $(ab): c = x$ bo‘ladi. Demak, $(ab): c = a \cdot (b : c)$.

3°. $(\forall a, b, c\in N)$ $[a: (b\cdot c) = (a : b): c = (a :c):b]$.

Isbot. $a:(b\cdot c)=x$ desak, $a=bc\cdot x$ bo‘ladi. Tenglikning ikkala tomonini b ga bo‘lsak $a:b=c\cdot x$ bo‘ladi. U holda bo‘lish ta’rifga asosan $(a:b):c=x$ bo‘ladi.

Demak, $(a:b):c=(a:c):b$ bo‘ladi.

4°. $(\forall a,b,c\in N)[a:(b:c)=ac:b]$.

Isbot. $a:(b:c)=x$ desak, $a=(b:c)\cdot x$ bo‘ladi. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga ko‘paytirsak, $a\cdot c=[(b:c)\cdot c]\cdot x$ bo‘ladi. Bunda $(b:c)\cdot c=b$ ekanligidan $a\cdot c=b\cdot x$ bo‘ladi. Bundan $(a\cdot c):b=x$ bo‘ladi. Demak, $a:(b:c)=(ac):b$.

5°. $(\forall a, b \in N_0, c \in N)(a:c \wedge b:c) \Rightarrow [(a+b): c = a:c + b:c]$.

Isbot. $(a+b):c=x$ bo'lsin. U holda $a=(a:c)\cdot c$ va $b=(b:c)\cdot c$. Bundan $(a:c)\cdot c+(b:c)\cdot c=cx$ yoki $[(a:c)+(b:c)]:c=cx$ yoki $a:c+b:c=x$. Bundan $a:c+b:c=(a+b):c$ bo'ladi.

6°. $(\forall a, b \in N_0, \forall c \in N)(a:c \wedge a\ b:c) \Rightarrow (a-b): c = a:c - b:c$.

Isbot. $(a-b):c=x$ desak, $a-b=cx$ bo'ladi. $a=(a:c)\cdot c$ va $b=(b:c)\cdot c$ desak, $(a:c)\cdot c-(b:c)\cdot c=cx$, bundan $[(a:c)-(b:c)]\cdot c=cx$. U holda tenglikning ikkala tomonini c ga bo'lsak, $a:c-b:c=x$.

Demak, $a:c-b:c=(a-b):c$ tenglik to'g'ri ekanligi ma'lum bo'ldi.

Nazorat uchun savollar

1. Ayirish va bo'lishning ta'riflarini ayting.
2. Ayirish va bo'lishning komponentlari natijalari nomini ayting va ular orasidagi boglanishni ko'rsating.
3. Ayirish va bo'lishning qanday qoidalarga bo'ysunishini ayting. Ba'zi qoidalarni asoslang.
4. Boshlangich siflarda bu qoidalarni qo'llashga doir misollar keltiring.

5.11. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari. Natural sonlar qatori kesmasi va chekli to'plam elementlari soni tushunchasi. Tartib va sanoq natural sonlari

Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalari. Yuqorida aytilgan fikrlarni umumlashtirib, nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalarini sanab o'tish mumkin:

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamida eng kichik element mavjud va u 0 ga teng. Bu esa to'plamning quyidan chegaralanganligini bildiradi.

2. Nomanfiy butun sonlar to'plamida eng katta element mavjud emas (2-aksiomaga asosan). Shuning uchun N_0 to'plam cheksiz va yuqoridan chegaralanmagan.

3. Nomanfiy butun sonlar to'plami diskret.

Diskretlik nomanfiy butun sonlar to'plamida har bir natural sondan bevosita keyin va oldin keladigan sonlarni ko'rsatish mumkinligi bilan izohlanadi. Faqat 0 hech qanday sondan keyin kelmaydi. Boshqacha aytganda, ikkita ixtiyoriy nomanfiy butun son orasida chekli sondagi nomanfiy sonlar joylashgan.

4. Nomanfiy butun sonlar to'plami «<» munosabati orqali tartiblangan. (Bu xossalar izohi tegishli bo'limlarda qaralgan edi.)

N natural sonlar to'plamiga tartib munosabatini kiritamiz. Bunda biz birinchi va to'rtinchi aksiomalarga hamda sonlar yig'indisi ta'riflariga asoslanamiz.

«*a* natural son *b* natural sondan kichik» ta'rifini keltirib chiqarishda chekli to'plamlarga bog'liqlikdan foydalanamiz.

Bizga ma'lumki, chekli A to'plam bilan bo'sh bo'lmagan chekli B to'plam birlashmasi $C=A\cup B$ $(A\cap B=\emptyset)$ A to'plamdagidan ko'p elementlarga ega bo'ladi. Bu esa quyidagi ta'rifga olib keladi:

Ta'rif. Agar *a* va *b* natural sonlari uchun shunday bir c natural soni mavjud bo'lib, $a+c=b$ munosabat o'rinli bo'lsa, *a* natural soni *b* natural sonidan kichik deyiladi va $a<b$ ko'rinishda yoziladi.

Masalan, 5<7, bu holda shunday natural 2 soni mavjudki, 2+5=7 bo'ladi.

a<b munosabatdan foydalanib, 4-aksiomani quyidagicha ifodalash mumkin:

4'-aksioma. N natural sonlarning bo'sh bo'lmagan A to'plam ostida eng kichik son bor, ya'ni shunday sonni *a* desak, A to'plamdagi a dan farqli barcha *x* sonlari uchun $a<x$ bajariladi.

Endi «<» munosabatini *N* to'plamda qat'iy tartib munosabati ekanini ko'rsatamiz, ya'ni bu munosabat tranzitiv va asimmetrik. Aytaylik, $a<b$ va $b<c$ bo'lsin. Ta'rifga asosan shunday *k* va l sonlari topiladiki $b=a+k$, $c=b+l$ bo'ladi. U holda $c=(a+k)+l$.

2- aksiomaga asosan $c=a+(k+l)$, $k+l$ natural son bo'lgani uchun tenglikdan $a<c$. Demak, $a<b$ va $b<c$ dan a<c kelib chiqadi. Bu esa < munosabati tranzitiv ekanligini ko'rsatadi.

«<» munosabati asimmetrik ekanligi 4-aksiomadan ko'rinadi. Bu aksiomaga asosan natural sonlar to'plamining bo'sh bo'lmagan *A* to'plamida eng kamida bitta eng kichik element a bor. A da bu element bir qiymatli aniqlangan va bundan boshqa eng kichik element yo'q ekanligini ko'rsatamiz. Aytaylik, a dan boshqa eng kichik b element bor bo'lsin, u holda $a<b$ va $b<a$ bajariladi. Bunday bo'lishi esa mumkin emas. Shunday qilib, «<» munosabati N to'plamda qat'iy tartib munosabati ekan. Bu tartibning chiziqli ekanini ko'rsatamiz, ya'ni ixtiyoriy ikkita turli xil a va b natural sonlar uchun $a<b$ va $b<a$ munosabatlardan biri bajariladi. Haqiqatan ham ikkita elementdan tashkil topgan A={a; b} to'plamni olaylik.

4'- aksiomaga asosan bu to'plamda eng kichik element bo'lishi kerak. Agar bu element a bo'lsa, $a<b$, agar bu element b bo'lsa, $b<a$ munosabat o'rinli.

Endi natural sonlarni qo'shish monotonlik xossasiga ega ekanligini ko'rsatamiz.

Agar $a<b$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy $c\in N$ uchun $a+c<b+c$ ga ega bo'lamiz (tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil soni qo'shsak, tengsizlik o'zgarmaydi). Aslida ta'rifga ko'ra $a<b$ deganda shunday bir k soni mavjud bo'lib, $b=a+k$ ekanini bildiradi. Lekin $b+c=(a+k)+c$. birinchi va ikkinchi aksiomalarga ko'ra $b+c=(a+k)+c=a+(k+c) = a+(c+k)=(a+c)+k$.

Demak, b+c=(a+c)+k. Bu esa a+c<b+c ekanini bildiradi.

Endi natural sonlarni qo'shish qisqaruvchanligini ko'rsatamiz, ya'ni $a+c= b+c$ bo'lsa, u holda $a=b$ ga teng. Aslida quyidagi uch hol bo'lishi mumkin: $a<b$, $b<a$, $a=b$; Ammo $a<b$ bo'lsa, u holda $a+c<b+c$ bo'ladi, biz esa $a+c=b+c$ deb oldik. Demak $a<b$ hol mumkin emas. Shu sababli $b<a$ hol ham mumkin emas, faqat $a=b$ bo'lgan hol qoladi.

Tartib va sanoq natural sonlar. Shuni xulosa qilib aytish kerakki, natural sonlar nafaqat miqdorlarni oichash va to'plam elementlarini sanash uchun ishlatiladi, balki to'plam elementlarini tartiblash ham natural sonlar yordamida amalga oshiriladi. Bunda chekli to'plam uchun natural sonlar qatori kesmasi tushunchasi ishlatiladi.

Ta'rif. Natural sonlar qatorining N_a **kesmasi** deb, a natural sondan katta bo'lmagan barcha natural sonlar to'plamiga aytiladi.

Masalan, $N_5 = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

Ta'rif. A to 'plam elementlarini **sanash** deb, *A* to 'plam bilan natural sonlar qatorining N_a kesmasi orasidagi o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatilishiga aytiladi.

a soni *A* to'plam elementlari sonini bildiradi va $n(A)=a$ deb yoziladi. To'plam elementlarini sanash faqat ularning miqdorini aniqlab qolmay, balki to'plam elementlarini tartiblaydi ham. Bunda har bir elementning sanoqda «nechanchi» ekanligini ham aytish mumkin bo'ladi. Elementning nechanchi bo'lishi sanashning olib borilishiga bog'liq. Kombinatorikada ko'rilganidek, *a* ta elementli to'plam tartiblanishlari umumiy soni $a!$ ga teng bo'lgani uchun bu turli usullar bilan sanalganda element tartib nomeri $a!$ marta o'zgarishi mumkin degani. Lekin qanday usul bilan sanalmasin, to'plam elementlari soni o'zgarmasdir. Demak, «nechta» savoliga javob beruvchi natural sonlar miqdoriy, «nechanchi» savoliga javob beruvchi natural sonlar tartib natural sonlar deyiladi. To'plam oxirgi elementining tartib nomeri bir vaqtda to'plam elementlari sonini bildiradi. Demak, sanoq 19-elementida tugasa, to'plamda 19 ta element bor degan xulosa chiqariladi.

Nazorat uchun savollar

1. Nomanfiy butun sonlar to'plamining xossalarini ayting.
2. *a* natural soni *b* natural sonidan qachon kichik deyiladi?
3. Kichik munosabati *N* to'plamda tartib munosabati bo'lishini izohlang.
4. Natural sonlar to'plamini chegaralanmaganligi va diskretligini tushuntiring.

Mashqlar

1. Quyidagi tengliklarning tuzilishidagi qonuniyatni aniqlang va uni umumlashtiring: $1^3 = 1^2$; $1^3 + 2^3 = (1+2)^2$; $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$; ...

2. $a_4 + a_5 + \ldots + a_n$ yig'indini Yunon harfi $\sum$ dan foydalanib, $\sum_{i=4}^{n} a_i$ ko'rinishda belgilash mumkin: $\sum_{i=4}^{n} a_i = a_4 + a_5 + \ldots + a_n$.

Quyidagi yig'indilarni yoyib yozing:

a) $\sum_{i=1}^{n} \frac{2}{i^2}$; b) $\sum_{i=1}^{n} i^3$; c) $\sum_{i=1}^{n} \frac{i}{i+1}$; d) $\sum_{i=1}^{n} \frac{(-1)^i}{i^3}$.

3. $\sum$ belgisi yordami bilan yozing.

a) $\frac{1}{1+2}+\frac{1}{2+3}+...+\frac{1}{n(n+1)}$;

b) $1\cdot4+2\cdot7+3\cdot10+...+n(3n+1)$.

4. $a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot...\cdot a_n$ ko'paytmani yunon harfi $\prod$ («pi») dan foydalanib, $\prod_{i=4}^{n} a_i$ ko'rinishda belgilash mumkin: $\prod_{i=4}^{n} a_i = a_4\cdot a_5\cdot a_6\cdot ...\cdot a_n$.

Ko'paytmani yoyib yozing:

a) $\prod_{i=1}^{4}\frac{i}{3-i+i^2}$; b) $\prod_{i=1}^{5}\frac{i+1}{(i-1)i}$; c) $\prod_{i=1}^{n}(2-\frac{3}{i^3})$; d) $\prod_{i=1}^{n} i^3$.

5. Ko'paytmalarni Π belgisi yordami bilan yozing:

a) $(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{9})\cdot...\cdot(1-\frac{1}{(n+1)^2})$;

b) $\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{13}{14}$.

6. To'liqmas induksiya yordamida «m xonali natural son K ning oxirgi n ta raqamlaridan tuzilgan son 2^n ga (3^n ga) bo'linsa, K sonining o'zi ham 2^n ga (3^n ga) bo'linadi», degan farazni aytish mumkinmi?

7. Qadimgi Samarqand madrasalari o'quv qo'llanmalarida sonlar ustida bajarilgan amallar natijalarini tekshirishda mezon usulidan foydalanganlar. Mezon arabcha so'z bo'lib, o'zbek tilida «o'lcham», «o'lchov» kabi ma'nolarni beradi. Eslatilgan o'quv qo'llanmalarda sonning mezoni sifatida, shu sonni 9 soniga bo'lishda hosil bo'ladigan qoldiq olingan. Masalan, 8 sonining mezoni 8 soniga, 21 sonining mezoni 3 soniga teng deb olingan. Induksiyadan va 9 ga bo'linish belgisidan foydalanib, quyidagi tasdiqlarni isbot qiling:

a) ko'p xonali sonning mezoni shu son tarkibidagi raqamlar yig'indisining mezoniga teng. Masalan, 467 ning mezoni 4+6+7=17, 1+7=8;

b) ikki son ko'paytmasi (ayirmasi, bo'linmasi)ning mezoni shu sonlar mezonlarining ko'paytmasiga (ayirmaga, bo'linmaga) teng.

8. n ning barcha natural qiymatlarida tengsizlik o'rinli bo'lishini isbotlang:

a) $2^n \geq n+1$;

b) $\frac{1}{n} \leq 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{2^n-1} \leq n$;

c) $(1+a)^n \geq 1+na$ *buyerda* $a \geq -1$.

9. n ning barcha natural qiymatlarida tenglik o‘rinli bo‘lishini isbotlang.

$$1^3+2^3+3^3+...+n^3 \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

10. Ketma-ketliklarning n-hadi formulasini toping:

a) 2, 4, 6, 8, 10, …;

b) 1, 3, 5, 7, 9, 11, …;

d) 5, 10, 15, 20, 25,…;

e) 1, 4, 9, 25, …;

f) 1, -2, 3, -4, 5, -6, 7, -8, …;

g) $\frac{1}{1\cdot 2}, \frac{1}{2\cdot 3}, \frac{1}{3\cdot 4},...$;

h) $-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{16}...$;

i) $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4},...$;

5.12. Natural sonlar miqdorlarni o‘lchash natijasi sifatida. Natural son kesma o‘lchami sifatida

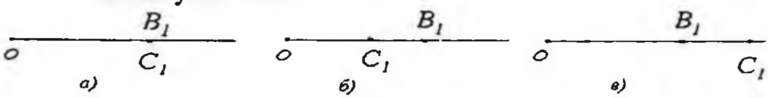
Kishilarning turmush faoliyatida faqat buyumlarning sanog‘ini bilishgina emas, balki turli miqdorlarni – uzunlik, massa, vaqt va boshqalarni ham o‘lchashga to‘g‘ri keladi. Shu sababli natural sonlarning paydo bo‘lishida sanoqqa bo‘lgan ehtiyoj bilan o‘lchashga bo‘lgan ehtiyoj ham sabab bo‘ldi. Natural songa bunday yondoshish bilan bog‘liq bo‘lgan hamma nazariy dalillarni bitta kattalik-uzunligi misolida qaraymiz.

Kesmalarni taqqoslash. Kesmalar ustida amallar. Bizga a=[AB] va b=[BC] kesmalar berilgan bo‘lsin. Bu kesmalarga teng kesmalarni boshi O nuqtada bo‘lgan biror nurga qo‘yamiz. OB_1=a va OC_1=b kesmalarni hosil qilamiz. Bunda uchta hol bo‘lishi mumkin:

1) B_1 va C_1 nuqtalar ustma-ust tushadi (5.2-a rasm). U holda OB_1 va OC_1 bitta kesmani ifodalaydi, demak a=b;

2) C_1 nuqta OB_1 kesma ichida yotadi (5.2-б rasm). U holda OC_1 kesma OB_1 kesmadan kichik (yoki OB_1 kesma OC_1 kesmadan katta) deyiladi va quyidagicha yoziladi; $OC_1 < OB_1$ ($OB_1 > OC_1$) yoki $b < a$ ($a > b$);

3) B_1 nuqta OC_1 kesma ichida yotadi (5.2-в rasm). U holda OB_1 kesma OC_1 kesmadan kichik deyiladi. $OB_1 < OC_1$ yoki $a < b$ ko'rinishda yoziladi.

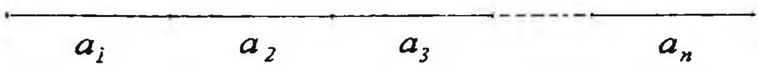


5.2-rasm

Kesmalar ustida turli amallar bajariladi.

1-ta'rif: Agar $a_1, a_2, ..., a_n$ kesmalarning birlashmasi a kesmaga teng bo'lib, kesmalar biri-biri bilan ustma-ust tushmasa (ya'ni ichki nuqtalarga ega bo'lmasa) va bir kesma uchi ikkinchi kesmaning boshiga ustma-ust tushsa, u holda a kesma $a_1, a_2, ... ,a_n$ kesmalarning yig'indisi deyiladi (5.3-rasm) yig'indi quyidagi ko'rinishda yoziladi:

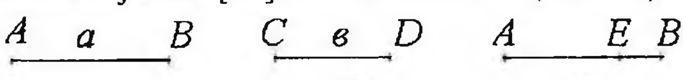
$a=a_1 + a_2+ .... + a_n$



5.3-rasm

2-ta'rif. a va b kesmalarning ayirmasi deb, shunday c kesmaga aytiladiki, uning uchun $b+c=a$ tenglik bajariladi.

a va b kesmalarning ayirmasi quyidagicha topiladi. $a=[AB]$ kesma yasaladi va shu kesmada b kesmaga teng $[AE]$ kesma ajratiladi. Natijada $c=[EB]$ kesma hosil bo'ladi (5.4-rasm).



5.4-rasm

a-b ayirma mavjud bo'lishi uchun a kesma b kesmadan katta bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kesmalar ustida amallar quyidagi xossalarga ega:

1) Har qanday a va b kesmalar uchun $a+b=b+a$ tenglik o'rinli (kesmalarni qo'shish o'rin almashtirish qonunga bo'ysunadi).

2) Har qanday a, b, c kesmalar uchun $a+(b+c)=(a+b)+c$ tenglik o'rinli (kesmalarni qo'shish gruppalash qonuniga bo'ysunadi)

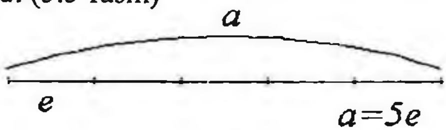
3) Har qanday a, b va c kesmalar uchun $a<b$ bo'lsa, u holda $a+c<b+c$ bo'ladi.

Natural son kesma uzunligining qiymati sifatida.

Eng avvalo kesmalar uzunligini o'lchashni eslaymiz. Kesmalar to'plamida birorta e kesma tanlanib, u birlik kesma yoki uzunlik birligi deyiladi. Keyinchalik esa, boshqa kesmalar shu birlik e kesma bilan taqqoslanadi. Biror a kesma e birlik kesmaga teng n ta kesma yig'indisidan iborat bo'lsa, u quyidagicha yoziladi:

$$\underbrace{e + e + \ldots + e}_{n\ ta} = ne$$

n natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi son qiymati deyiladi (5.5-rasm)



5.5-rasm

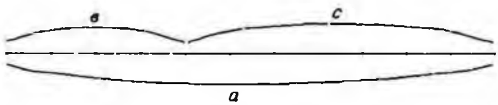
Agar uzunlik birligi sifatida boshqa kesma olinsa, u holda a kesma uzunligining son qiymati o'zgaradi.

Shunday qilib, a kesma uzunligining son qiymati sifatidagi n natural son a kesma tanlab olingan e birlik kesmalarning nechtasidan iboratligini ko'rsatadi. Tanlab olingan e uzunlik birligida bu son yagonadir. Bu sonlar uchun «teng» va «kichik» munosabatlarini qaraylik. Aytaylik, m natural son a kesma uzunligining, n natural son b kesma uzunligining e uzunlik birligidagi son qiymatlari bo'lsin. Agar a va b kesmalar teng bo'lsa, ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo'ladi, ya'ni $m=n$;

Agar a kesma b kesmadan kichik bo‘lsa, u holda $m<n$ bo‘ladi va teskari tasdiq ham to‘g‘ri bo‘ladi. Kesmalar va ular uzunliklarining son qiymatlari orasida o‘rnatilgan bog‘lanish kesmalar uzunliklarini taqqoslashni ularni tegishli son qiymatlarini taqqoslashga keltiradi.

Kesmalarning o‘lchami sifatida qaralgan sonlar ustida arifmetik amallarning ta’rifi. Agar natural sonlar kesmalarning uzunliklarini o‘lchash natijasida hosil bo‘lgan bo‘lsa, bu sonlarni qo‘shish va ayirish qanday ma’noga ega bo‘lishini aniqlaymiz.

Qo‘shish. Masalan, 4 va 7 sonlari b va c kesmalarni e birlik yordamida o‘lchash natijalari bo‘lsin, $b=4e$, $c=7e$. 4+7=11 ekani ma’lum. Bunda 11 soni $a=b+c$ kesma uzunligining qiymati bo‘ladi.



5.6-rasm

Umumiy holda a kesma b va c kesmalar yig‘indisi hamda $b=me$; $c=ne$ bo‘lsin. Bunda m va n - natural sonlar. Bu deganimiz, b kesma m ta, c kesma n ta shunday bo‘lakka bo‘linadiki, bu bo‘laklarning har biri birlik kesma e ga teng. Shunday qilib, m va n natural sonlar yig‘indisini uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalangan b va c kesmalardan tuzilgan a kesma uzunligining qiymati sifatida qarash mumkin.

Ayirish. Agar a kesma, b va c kesmalardan iborat bo‘lib, a va b kesmalarning uzunliklari m va n natural sonlar bilan ifodalansa (bir xil uzunlik birligida), c kesma uzunligining son qiymati a va b kesmalar uzunliklari son qiymatlari ayirmasiga teng. $c=(m-n)e$

Bundan ko‘rinadiki, natural sonlarning m-n ayirmasining uzunliklari mos ravishda m va n natural sonlar bilan ifodalangan a va b kesmalar ayirmasi bo‘lgan c kesma uzunligining qiymatini ifodalar ekan.

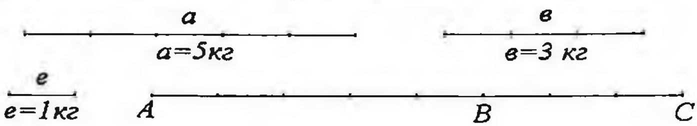
Agar a=7e kesma b va c kesmalardan iborat bo‘lib b=3e bo‘lsa, u holda c =(7-4)e=3e bo‘ladi.

Natural sonlarni qo‘shish va ayirishga bunday yondashish nafaqat kesmalar uzunliklarini o‘lchash, balki boshqa miqdorlarni o‘lchash bilan ham bog‘liq. Boshlang‘ich sinf matematika darsliklarida turli xil miqdorlar va ular ustida amallarga doir masalalar ko‘p. Bu masalalarni yechish esa miqdorlarning qiymatlari bo‘lgan natural sonlar ustida amallar bajarish bilan bog‘liq bo‘lib, qo‘shish va ayirishning ma’nosini aniqlash bunday masalalarni yechishda amallarni tog‘ri tanlashga imkon beradi.

Masalan, Karim 5 kg olma, Olim 3 kg nok terdi. Karim va Olim hammasi bo‘lib necha kilogramm meva tergan?

Masala qo‘shish amali bilan yechiladi. Masalani yechishda terilgan olmalar massasini a kesma, noklar massasini b kesma ko‘rinishida tasvirlaymiz (5.7-rasm).

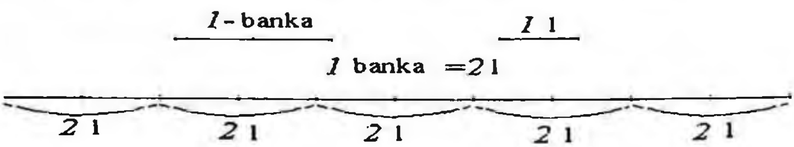
U holda terilgan hamma mevalar massasini a ga teng [*AB*] va b ga teng [*BC*] kesmadan tuzilgan [*AC*] kesma yordamida tasvirlash mumkin. [*AC*] kesma uzunligining son qiymati [*AB*] va [*BC*] kesmalar son qiymatlarining yig‘indisiga teng bo‘lgani uchun terilgan mevalar massasini qo‘shish amali bilan topamiz.



5.7-rasm

Miqdorlarning qiymatlari bo‘lgan sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishning ma’nosi. Miqdorlarning qiymatlari bo‘lgan sonlarni ko‘paytirish va bo‘lishning ma’nosini ko‘rsatish uchun dastlab masalalarga murojaat qilamiz.

Masala. Omborxonada har birida 2 litr sharbat bo‘lgan 5 ta banka bor. Bu bankalarda hammasi bo‘lib qancha litr sharbat bor. Bu masalani kesmalar yordamida ifodalaylik (5.8-rasm).



5.8-rasm

Bu masala ko'paytirish amali bilan yechiladi: $2\cdot 5=10(l)$. Nima uchun?

Bu savolga yuqoridagi rasm yordamida javob beramiz.

5 ta bankada hammasi bo'lib qancha litr sharbat borligini bilish uchun $2l+2l+2l+2l+2l$ yig'indini topish yetarli. $2\ l$ deganimiz $2\cdot 1$ ko'paytma bo'lgani uchun yig'indini quyidagi ko'rinishda yozish mumkin. 5 ta bir xil qo'shiluvchining yig'indisini $2\cdot 5$ ko'paytma bilan almashtirib, $(2+2+2+2+2)\cdot 1=(2\cdot 5)\cdot 1l=10\cdot 1l=10l$ ni hosil qilamiz. Bu masalada sharbat egallagan hajmning ikki o'lchov birligi banka va litr haqida so'z yuritilmoqda. Shu sababli bu masalani boshqa usulda ham yechish mumkin. Dastlab birlik sifatida bankani olsak, keyin litrga o'tsak, boshqacha aytganda yangi birlik sifatida litrni olsak 1 banka-2 litr.

U holda $5\cdot 1\ b= 5\cdot(2l)= 5(2\cdot\ 1l)=(5\cdot 2)\cdot 1l=10l$

Bundan ko'rinadiki, natural sonlarni ko'paytirish kattalikning yangi, yanada maydaroq birligini tasvirlar ekan. Bu xulosamizni sonlarga - kesmalar uzunliklarining qiymatlariga qo'llab umumiy ko'rinishda isbotlaymiz.

a kesma e ga teng m ta kesmadan, e kesmaning o'zi e_l ga teng n ta kesmadan iborat bo'lsa, a kesma uzunligining son qiymati uzunlikning e_l birligida $m\cdot n$ ga teng bo'ladi. Haqiqatan ham, a kesmaning e_l kesmaga teng bo'laklar soni $\underbrace{n+n+\ldots+n}_{m\,ta}$ ga teng. Shuning uchun u $n\cdot m$ ga teng. Demak, $a=(m\cdot n)e_l$;

Shunday qilib, natural sonlarni ko'paytirish uzunlikning yangi birligiga o'tishni ifodalaydi. Bu deganimiz, agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining e_l uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa, $m\ n$ ko'paytma a kesma uzunligining e_l uzunlik birligidagi qiymati demakdir. Kattaliklarning qiymatlari bo'lgan natural sonlarni bo'lishning ma'nosini aniqlaymiz.

Masala. Bir bankaning sig'imi $2l$ bo'lsa, $10l$ meva sharbatini qo'yish uchun necha banka kerak bo'ladi?

Masalani yechish uchun $10l$ ni kesma bilan tasvirlaymiz va unda $2l$ ni tasvirlovchi kesma necha marta joylashishini aniqlaymiz: $10l : 2l=5(b)$

Bu masalaning yechilishini boshqacha asoslash mumkin. Masalada sharbat egallagan hajmning ikki birligi – litr va banka qaralmoqda, o'lchash natijasini bankalar bilan, ya'ni yangi birlikda ifodalash talab etilmoqda. Yangi birlikda (bankada) 2 ta eski birlik ($2l$) bor.

Shuning uchun, $1l$=1b:2 ; $10l$ = 10·(1b:2)=(10:2)·1b=5·1b=5b;

Ko'rinib turibdiki, natural sonlarni bo'lish miqdorning yangi birligiga o'tish bilan bog'liq ekan. Buni umumiy holda ko'rsatamiz. a kesma e ga teng m ta kesmadan, e_1 kesma e ga teng n ta kesmadan iborat bo'lsin. e_1 uzunlik birligida a kesma uzunligini ifodalaydigan sonni qanday topish mumkinligini aniqlaymiz.

$e_1=n$ e bo'lgani uchun $e=e_1:n$. U holda $a=me=m(e_1:n)=(m:n\ e_1;$

Shunday qilib, kesmalar uzunliklarining qiymati bo'lgan natural sonlarni bo'lish uzunlikning yangi (yanada yirikroq) birligiga o'tishni aniqlaydi: agar m natural son a kesma uzunligining e uzunlik birligidagi qiymati, n natural son e kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati bo'lsa, $m:n$ bo'linma a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymatidir.

Masalan, agar $a=16e$ va $e_1=4e$ bo'lsa, a kesma uzunligining e_1 uzunlik birligidagi qiymati $4e_1$ ga teng bo'ladi:

$a=16e=16\cdot(e_1:4)=(16:4)\ e_1=4\ e_1;$

Boshlang'ich sinf matematika darslarida turli miqdorlar qatnashadigan ko'paytirish va bo'lish bilan yechiladigan sodda masalalar ko'p. Bularni yechishda ko'paytirish bir xil qo'shiluvchilarni qo'shish amali sifatida, bo'lish esa ko'paytirishga teskari amal sifatida qaraladi.

Nazorat uchun savollar

1. Kesmalarni taqqoslashni tushuntirib bering.
2. Kesmalar ustida bajariladigan amallarni tushuntiring.
3. Kesmalar ustida amallar qanday xossalarga ega?
4. Miqdorlarning qiymatlari bo'lgan sonlar ustida bajariladigan amallarning ma'nosi.
5. Tartib va miqdor natural sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?

VI BOB. SANOQ SISTEMALARI

6.1. Sanoq sistemasi tushunchasi. Pozitsion va nopozitsion sanoq sistemalari. O'nli pozitsion sanoq sistemasini targ'ib qilishda M.Xorazmiyning roli

Hozirgi kunda har bir qadamda sonlar bilan ish ko'rishga to'g'ri keladi. Shuning uchun biz har qanday sonni to'g'ri aytishimiz va yozishimiz, ular ustida amallar bajarishimiz kerak. Buning uchun sanoq sistemalari to'g'risida bilishimiz lozim. Umuman, sanoq sistemasi deb, sonlarni aytish va yozish hamda ular ustida amallar bajarishda ishlatiladigan tilga aytiladi. Dastavval sanoq sistemalari tarixi bilan tanishamiz.

Ma'lumki, son tushunchasi juda qadim zamonlarda vujudga kelgan. O'sha vaqtning o'zidayoq sonlarni yozishga zaruriyat tug'ilgan. Yozuv paydo bo'lmasdan oldin kishilar sonlarni ayta bilganlar, hisob-kitoblar yuritganlar. Bunda ularga turli qurollar, eng avvalo qo'l va oyoqdagi barmoqlar yordam bergan. Shuningdek, yog'och tayoqchalar, tugunli ip va arqonlar kabi hisob-kitob asboblaridan foydalanilgan. Tayoqcha va tugunlar yordamida sonlarni «yozish»gan. Ammo bunday «yozish» qulay bo'lmagan, chunki katta sonlarni yozish uchun anchagina tayoqcha va tugunlar yasashga to'g'ri kelgan. bu esa yozuvnigina qiyinlashtirmasdan, balki sonlarni taqqoslashda, sonlar ustida amallar bajarishda ham qiyinchiliklar tug'dirgan. Shuning uchun sonlarni yozishning boshqacha, tejamliroq usuli vujudga kelgan: hisoblash ishlari bir xil sondagi elementlardan iborat bo'lgan gruppalar bilan olib borilgan.

Masalan, bitta odam ikkita qo'l barmoqlari elementlari bir gruppa hisoblangan. Bunda hisob bir necha odam tomonidan olib borilgan. Birinchi odam barmoqlarini tartibli ravishda hammasini buklagandan keyin, ularni yozdiradi va shu zahoti ikkinchi odam birinchi barmog'ini bukadi. Undan keyin ikkinchi odam keyingi o'nliklarni hisobini olib boradi, uning hamma barmoqlari bukilgandan keyin, qaytadan barmoqlarini yozdiradi va uchinchi odam birinchi barmog‘ini bukadi, hisob natijasi taxminan quyidagicha olib boriladi:

Masalan: uchinchi odamning beshta barmog‘i, ikkinchi odamning sakkizta barmog‘i va birinchi odamning uchta barmog‘i bukilsa, bu 583 sonni bildirgan. Odamning ikkita qo‘l barmoqlari va ikkita oyoq barmoqlari gruppa hisoblangan va u 20 ta elementdan iborat bo‘lgan. Bunday 20 lik hisob-kitoblar Amerika qabilalarida XVI asrgacha saqlanib kelgan. Fransuzlarda hozir ham uning qoldiqlari bor.

Masalan, ular «sakson besh» sonini «to‘rt marta yigirma va besh» deb ataydilar. Iqtisodiy ehtiyojning o‘sib borishi natijasida insoniyat asta-sekin hisoblash usullarini vujudga keltira boshladi. Ularning keyingi rivoji bundan taxminan besh ming yil avval qadimgi davlatlar – Vavilon, Misr, Xitoy va boshqalarning shakllanish davriga to‘g‘ri keladi. Bu davrda sonlar yozuvining yangi usullari yaratildi. Qadimgi Vavilonda oltmishtadan gruppalab hisoblaganlar, ya’ni u yerda oltmishli sanoq sistemasidan foydalanilgan.

Masalan, Vavilonlik matematiklar 137 sonini bunday tasvirlagan: $137=2\cdot 60+17$. Albatta bu son belgilar – uchburchaklar va ponalar bilan yozilgan.

Gap shundaki, qadimgi vavilonliklar yozish uchun loyli tablichkalardan uchburchakli ponalar bosib chiqarganlar. Keyin bu tablichkalarni quritganlar va olovga tutib kuydirganlar. Sonlarni yozish uchun ponalarning holatlaridan foydalanilgan: vertikal holat – uchi bilan pastga va gorizontal holat – uchi bilan chapga qaratilgan. Bunda ∇ belgi bir va oltmishni, $\lhd$ belgi – o‘nlikni bildirgan boshqa sonlar bu belgilar va qo‘shish amali bilan tasvirlangan.

Masalan, 6 soni bunday tasvirlangan: $\begin{matrix}\nabla\nabla\nabla\\ \nabla\nabla\nabla\end{matrix}$

199 soni bunday: $\nabla\nabla\nabla\lhd\begin{matrix}\nabla\nabla\nabla\\ \nabla\nabla\nabla\\ \nabla\nabla\nabla\end{matrix}$. Oxirgi yozuv sonining oltmishli sistemadagi yozuvidir: $60+60+60+10+9=3\cdot 60+19$. Biroq qadimgi Vavilonda paydo bo‘lgan sonlar yozuvi kamchiliklarga ega edi:

Unda katta sonlarni belgilash qiyin edi: sanoq sistemasining asosini – 60 sonini belgilash uchun maxsus belgi yo‘q edi, bu esa ba’zi yozuvlarni turlicha o‘qishga olib kelar edi. Oltmishli sanoq sistemasining vujudga kelishida aylanani 360 ta teng bo‘lakka bo‘lish, shu bilan birga yilni 360 kunga bo‘lish asos qilib olingan, degan taxmin mavjud. Bu sanoq sistemasining qoldiqlari shu kungacha saqlanib kelgan: aylanani 360^0 ga bo‘lishga yana burchaklarni gradus, minut va sekundlar bilan o‘lchashni ko‘rsatish mumkin. Qadimgi misrliklar o‘ntalab hisoblaganlar. Ularda maxsus belgilar faqat xonalarni – birlar, o‘nlar, yuzlar, minglar va boshqalarni belgilash uchun ishlatilgan. Birdan to‘qqizgacha bo‘lgan sonlar tayoqchalar yordamida yozilgan.

1-I, 10-∩, 100-⊂, 1000-1

Masalan, 132 sonini misrliklar quyidagicha: ⊂∩∩∩II

1234 sonini esa bunday: 1⊂⊂∩∩∩IIII ko‘rinishda ayrim holatlarda tekis qator qilib o‘ngdan chapga yoki ustun qilib yuqoridan pastga qarab yozilgan.

Masalan, 65 sonini III∩∩∩, II∩∩∩ yoki ∩∩∩III, ∩∩∩II ko‘rinishda ham yozganlar. Yozuvlar asosan papiruslarda bo‘yoqlar bilan bajarilgan. Ba’zan yozish uchun tosh, daraxt, teri, holst, sopol sinig‘idan foydalanilgan.

Nopozitsion sanoq sistemalari. Yuqorida sonlarni yozishda sonni ifodalovchi belgilarning o‘rni ahamiyatga ega emas. Shuning uchun sonlarni yozishning bu sistemasiga nopozitsion sanoq sistemasi deyiladi. Misr papiruslarining ayrimlari bizning kungacha yetib kelgan. Ulardan biri – «Moskva matematik papirusi» deb nomlangani Moskvada A.S.Pushkin nomidagi tasviriy san’at davlat muzeyida saqlanadi. Shunisi qiziqki, misrliklar ko‘paytirish amalini ikkilantirish usuli bilan bajarganlar.

Masalan, 25 ni 9 ga ko‘paytirish uchun quyidagi amallarni bajarish kerak bo‘lgan.

$25\cdot(1+2\cdot2\cdot2)=25+25\cdot2\cdot2\cdot2=25+50\cdot2\cdot2=25+100\cdot2=25+200=225$

Bo‘lish amali ko‘paytirishga teskari amal deb qaralgan, ya’ni shunday son tanlanganki, uni bo‘luvchiga ko‘paytirganda bo'linuvchi hosil bo'lgan. Umuman, qadimgi misrliklar va vavilonliklar yetarlicha katta hajmdagi matematik bilimga ega edilar, lekin bularning hammasi asosan tajriba xarakterida edi. Aslini olganda umumlashmalar va isbotlar yo'q edi, ya'ni matematika fani endigina dunyoga kelmoqda edi. Uning keyingi rivojlanishiga qadimgi Gretsiya olimlaridan Fales (bizning eramizgacha 624-547 y.), Pifagor (eramizgacha taxminan 580-495 y.), Demokrit (eramizgacha taxminan 460-370 y.), Platon (bizning eramizgacha 427-347 y.), Yevklid (bizning eramizgacha taxminan 300 y.), Arximed (bizning eramizgacha taxminan 287-212 y.), Eratosfen (eramizgacha 276-194 y.) va boshqalar katta hissa qo'shdilar. Bu son haqidagi ta'limotning tarixi va rivojlanishidagi butun bir davrdir. Shuni eslatish kerakki, Qadimgi Gretsiyada ham nopozitsion sanoq sistemasi mavjud edi. Ular 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sonlarni grek alfavitining birinchi to'qqizta harfi bilan, 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90 sonlarini esa navbatdagi 9 ta harf bilan, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800,900 sonlarni qolgan 9 ta harf bilan belgilaganlar.

1	α	alpha	10	ι	iota	100	ρ	rho
2	β	beta	20	κ	kappa	200	σ	sigma
3	γ	gamma	30	λ	lambda	300	τ	tau
4	δ	delta	40	μ	mu	400	υ	upsilon
5	ϵ	epsilon	50	ν	nu	500	ϕ	phi
6	ϛ	vau*	60	ξ	xi	600	χ	chi
7	ζ	zeta	70	o	omicron	700	ψ	psi
8	η	eta	80	π	pi	800	ω	omega
9	θ	theta	90	ϙ	koppa*	900	ϡ	sampi

Masalan, 345 sonini $\overline{\tau\mu\epsilon}$ ko'rinishda yozilgan, bu yozuvda son so'zdan farq qilishi uchun ustiga chiziq qo'yilgan.

Greklar mingliklarni ifodalashda birliklarni ifodalovchi harfni chapdan pastiga shtrix qo'yganlar.

Masalan, $\overline{,\beta\varphi\pi\theta}$ yozuv 2589 sonini bildirgan. 10000 soni esa miriado deyilib, M harfi bilan belgilangan. $\overline{\lambda\delta M\nu\beta}$ yozuv 340052 sonini bildiradi.

Ikki ming yildan sal ilgari G'arbiy Yevropadagi barcha mamlakatlar va Osiyoning ko'pgina mamlakatlari qadimgi rimliklarga bo'ysungan. Rim imperiyasida matematika rivojlantirilmasdan, undan faqat amaliy maqsadlar uchun foydalanilgan. Qadimgi Rimdan qolgan narsalardan biri sonlarni yozishning yana bitta usulidir. Rim sanoq sistemasida ham Qadimgi Misr sistemasidagi kabi belgili sonlar bor:

bir- I,	ellik – L,
besh – V,	yuz –C,
o'n - X ,	besh yuz –D,

ming – M

Qolgan hamma sonlar shu belgili sonlarga qo'shish va ulardan ayirish orqali hosil qilinadi. Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan oldin turgan bo'lsa, ayirish bajariladi.

Kichik songa tegishli belgi katta songa tegishli belgidan keyin turgan bo'lsa qo'shish bajariladi.

Masalan, IV–to'rt (5-1=4), XC-to'qson (100-10=90), XL–qirq (50-10=40). VI-olti (5+1=6), CX – bir yuz o'n (100+10=110)

Bir necha sonni rim raqami bilan yozamiz.

265 - bu ikki yuz (CC) plyus oltmish, ya'ni ellik plyus o'n (LX), plyus besh (V). Demak, 265 soni bunday yoziladi: CCLXV; 385 – bu uch yuz (CCC) plyus sakson, ya'ni ellik plyus o'ndan 3 marta (LXXX), plyus besh (V).

Demak, 385 soni bunday yoziladi: CCC LXXXV. To'rt, besh va olti xonali sonlar M harfi (lotincha millming so'zidan olingan) yordamida yoziladi, uning chap tomoniga minglar, o'ng tomoniga yuzlar, o'nlar, birlar yoziladi.

Masalan, $\mathrm{XXXIX_M DXXXVI}$ yozuv 39536 sonning,

$\mathrm{CCXXXVIII_M}$ DCXLVI yozuv 238646 sonning yozuvidir.

Qadimgi Rus madaniyati greklar madaniyati bilan bog'liq bo'lgani uchun, ularda ham sonlarning belgilanishi greklardagi belgilashlarga o'xshash bo'lgan, ya'ni sonlarni harflar bilan belgilashgan.

Pozitsion sanoq sistemalari. Pozitsion sanoq sistemasining vujudga kelishi matematikaning rivojlanishida katta rol o'ynaydi. Bu sistemada bitta belgi (raqam) sonlarning yozilishida joylashish tartibiga ko'ra turli sonlarni ifodalashi mumkin. Pozitsion sistemaning vujudga kelish tarixi bilan birmuncha tanishib o'tamiz.

V-XII asrlarda Sharq mamlakatlaridan Hindiston va Yaqin Sharqda matematika sezilarli darajada rivojlandi. Hindiston va Xitoyda matematika Misrdagidek bundan 5 ming yil avval paydo bo'lgan.

Ayniqsa, hind olimlarining arifmetikaga qo'shgan hissalari kattadir, chunki ular hozirgi kunda butun insoniyat qo'llagan sonlarni o'qish va yozish usulini ya'ni o'nli sanoq sistemasini kashf qildilar.

Hind matematiklari o'ylab topgan kashfiyotning mohiyati shundaki, ular sonlarni yozishda har bir raqamning yozuvidagi qiymati uning o'rniga, pozitsiyasiga bog'liq.

Masalan, 823 sonidagi 8 raqami 8 yuzlikni, 87 sonidagi o'sha 8 raqami 8 o'nlikni, 8926 sonidagi 8 raqami esa 8 minglikni bildiradi. Bundan o'nta raqam yordamida har qanday sonni yozish mumkin ekan degan xulosa chiqadi. Shuning uchun o'nli sanoq sistemasi pozitsion sistema deyiladi. Undan tashqari, Hindistonda birinchi marta xona birligi yo'qligini bildirish uchun noldan foydalanildi, bu esa sonlar yozuvini takomillashtirish va hisoblashlarni osonlashtirishda katta rol o'ynaydi.

To'g'ri nolning bizga odat bo'lgan yozuvi birdaniga paydo bo'lmagan. Avvalo sonda birorta xona bo'lmasa, hindlar shu xona raqamini aytish o'rniga «bo'sh» so'zini aytardilar, yozishda esa bo'sh o'ringa nuqta qo'yadilar. Keyinchalik nuqtalar o'rniga doiracha chizadigan bo'ldilar. Sonlar yozuvidagi o'nta 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 belgining hammasi raqamlar deyiladi. Biroq bundan 200 yil avval bitta belgi – 0 gina raqam deyilar edi. Sonning o‘nli sanoq sistemasida yozilishidagi raqamlarni ham qadimgi Hindiston matematiklari o‘ylab topgan, lekin ularning dastlabki yozilishi hozirgi yozilishidan farq qiladi, raqamlarning hozirgi formasi kitob bosib chiqarish kashf qilingandan keyin - XV asrda qaror topdi. Nima uchun Hindistonda kashf qilingan raqamlar ko‘pincha arab raqamlari deyiladi? Chunki VII asrda vujudga kelgan Arab xalifaligi rivojlanishning yuqori darajasida turgan bir qancha davlatlarni ikki yuz yilga yaqin o‘ziga bo‘ysundirgan edi. Jumladan: Shimoliy Hindiston, Misr, O‘rta Osiyo, Mesopotamiya, Kavkaz orti, Shimoliy Afrika va boshqa davlatlar. Bu katta mamlakatning poytaxti (markazi) Bag‘dod shahri edi. Arablar fanning muhimligini tushunar va o‘zlari bosib olgan mamlakatlarning, jumladan, Gretsiya, Hindiston, O‘rta Osiyo olimlarining asarlarini (ishlarini) o‘z tillariga tarjima qilar, o‘rganar va to‘plar edilar. Biroq arab matematiklari qadimgi buyuk olimlarning asarlarini saqlabgina qolmasdan, matematikani rivojlantirishga katta hissa ham qo‘shdilar. IX asrning buyuk olimlaridan biri o‘zbek (Xorazm) matematigi Muhammad ibn Muso al-Xorazmiydir. Uning «Kitob al-jabr» nomli kitobi fanga algebra nomini berdi. Bu kitobda arifmetik masala va tenglamalarning yechilish qoidalari bayon qilingan. Al-Xorazmiy o‘zining boshqa kitobida Hindistonda kashf qilingan hind arifmetikasini, ya’ni o‘nli sanoq sistemasini yoritdi. Uch yuz yil keyin, ya’ni XII asrda u lotin tiliga tarjima qilindi va bu kitob butun Yevropa xalqlari uchun arifmetikadan birinchi darslik bo‘lib qoldi. Natijada Yevropa mamlakatlarida Arab davlatida yashagan muallif yozgan kitob bo‘yicha o‘nli sanoq sistemasi o‘rganilgani uchun o‘nli sistemadagi arab raqamlari deyila boshlandi. Bu esa noto‘g‘ridir. XII asrdan boshlab Garbiy Yevropada uzoq davom etgan turg‘unlikdan so‘ng matematikaga qiziqish uyg‘ondi, bunga savdo-sotiqning kengayishi sabab bo‘ldi.

Yevropada o‘nli sanoq sistemasining tarqalishiga Leonardo Fibonachchining 1202-yilda chop qilingan «Abak kitobi» yordam berdi. XIII asrdan boshlab o‘nli sistema joriy qilindi va u XVI asrga kelib Garbiy Yevropa mamlakatlarida to‘la foydalana boshlandi.

XVI asr oxirida, Ivan Grozniy podsholigi davrida, Russiyada birinchi bosma matematik kitoblar paydo bo‘ldi, bu kitoblardan maqsad turli amaliy masalalarni yechishda hisoblashni osonlashtirishdan iborat edi. Ularda sonlar slavyancha sanoq sistemasida yozilgan edi.

Rus fanining rivojlanishida Leontiy Filippovich Magniskiy tomonidan yozilgan «Arifmetika sirech nauka chislitelnaya» kitobi muhim rol o‘ynadi. Bu kitob Pyotr I davrida 1703-yilda slavyan tilida nashr qilindi, ammo undagi hamma hisoblashlar o‘nli sanoq sistemasida bajarilgan edi. Bu kitob uzoq vaqt barcha ilm kishilari uchun eng zarur kitob bo‘lib qoldi, chunki bu kitobda nafaqat matematikaga oid materiallar, balki astronomiya, navigasiya va boshqa fanlarning ba’zi bir bo‘limlari haqida ma’lumotlar bor edi.

O‘nli pozitsion sanoq sistemasida sonlarning yozilishi va o‘qilishi. Ma’lumki, o‘nli sanoq sistemasida sonlarni yozish uchun 10 ta belgi (raqam)dan foydalaniladi: 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9. Ulardan chekli ketma-ketliklar hosil qilinib, bu ketma-ketliklar sonlarining qisqacha yozuvidir.

Masalan, 5 ming +4 yuz+5 o‘n+7 bir 5457 ketma-ketlik sonining qisqacha yozuvidir. Bu yig‘indini bunday ko‘rinishda yozish qabul qilingan:

$5\cdot10^3+4\cdot10^2+5\cdot10+7$.

Ta’rif. *n* natural sonning o‘nli yozuvi deb bu sonni

$$n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+n_1\cdot10+n_0$$

ko‘rinishda yozishga aytiladi, bu yerda n_k, n_{k-1}, ... , n_1, n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi ($n_k\neq 0$) va ushbu $n=n_k\cdot10^k+n_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+n_1\cdot10+n_0$ yig‘indini qisqacha $n=n_kn_{k-1}\ldots n_1n_0$ kabi yozish qabul qilingan.

$1,10,10^2,10^3, \ldots, 10^k$ ko‘rinishdagi sonlar mos ravishda, birinchi, ikkinchi,... , k+1 - xona birliklari deyiladi, shu bilan birga bitta xonaning 10 ta birligi keyingi yuqori xonaning bitta birligini tashkil qiladi, ya’ni qo‘shni xonalar nisbati 10 ga – sanoq sistemasining asosiga teng. Sonlar yozuvidagi dastlabki uchta xona bitta gruppaga birlashtiriladi va birinchi sinf yoki birlar sinfi deyiladi. Birinchi sinfga birlar, o‘nlar, yuzlar kiradi. Sonlar yozuvidagi to‘rtinchi, beshinchi va oltinchi xonalar ikkinchi sinf-minglar sinfini tashkil qiladi. Unga bir minglar, o‘n minglar va yuz minglar kiradi. Keyingi uchinchi xona – millionlar sinfi bo‘ladi, bu sinf ham uchta xonadan iborat: yettinchi, sakkizinchi va to‘qqizinchi xonalardan, ya’ni bir millionlar, o‘n millionlar va yuz millionlardan iborat. Navbatdagi uchta xona ham yangi sinfni hosil qiladi va hokazo. Birlar, minglar, millionlar va hokazo sinflarning ajratilishi sonlarni yozishga va o‘qishga qulayliklar yaratadi. O‘nli sanoq sistemasida hamma sonlarni $n_k \cdot 10^k + n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_1 \cdot 10 + n_0$ (bunda n_k, n_{k-1}, n_1, n_0, koeffitsientlar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k \neq 0$) ko‘rinishdagina yozmasdan ularning hammasiga nom, ism berish mumkin. Bu quyidagicha amalga oshiriladi: birinchi o‘nta sonning nomi bor. So‘ngra bu sonlardan o‘nli yozuv ta’rifiga mos ravishda va ozgina so‘z qo‘shish natijasida keyingi sonlarning nomi kelib chiqadi.

Masalan, ikkinchi o‘nliklardagi sonlar (ular $1 \cdot 10 + a_0$ ko‘rinishda yoziladi) o‘n bilan birinchi o‘nlikdagi sonlar nomining qo‘shilishidan tuziladi: o‘n bir, o‘n ikki va hokazo. Yigirma so‘zi ikkita o‘nlikni bildiradi. Uchinchi o‘nlikdagi sonlar nomi (ular $2 \cdot 10 + a_0$ ko‘rinishdagi sonlar) yigirma so‘ziga birinchi o‘nlikdagi sonlar nomini qo‘shish natijasida hosil bo‘ladi: yigirma bir, yigirma ikki va h.k. hisobni shunday davom ettirib, to‘rtinchi, beshinchi, oltinchi, yettinchi, sakkizinchi, to‘qqizinchi va o‘ninchi o‘nliklarni hosil qilamiz. Navbatdagi o‘nliklar mos ravishda quyidagicha ataladi: o‘ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson, to‘qson. Yuz so‘zi o‘nta o‘nni bildiradi. Yuzdan katta sonlar nomi (ya’ni $1 \cdot 10^2 + a_1 \cdot 10 + a_0$ ko‘rinishdagi sonlar) yuz va birinchi hamda keyingi o‘nliklardagi sonlar nomidan tuziladi va birinchi yuzlikni anglatish uchun ular oldiga bir so‘zi yoziladi: bir yuz bir, bir yuz ikki, ... bir yuz yigirma va h.k. Bu yuzlikni keyingi yuzlikkacha to‘ldirib, ikkita yuzlikka ega bo‘lamiz, u ikki yuz deyiladi. Ikki yuzdan katta sonlarni hosil qilish uchun ikki yuz soniga birinchi va keyingi o‘nlikdagi sonlar qo‘shib aytiladi. Har bir yuzlikdan keyin yangi yuzlik hosil bo‘ladi: uch yuz, to‘rt yuz, besh yuz va h.k., o‘nta yuz maxsus nom bilan «ming» deb yuritiladi. Mingdan keyingi sonlar mingga bittadan qo‘shib borish natijasida hosil bo‘ladi, bu yerda ham birinchi minglik oldiga bir so‘zi qo‘yiladi (bir ming bir, bir ming ikki va h.k.). Natijada ikki ming, uch ming va h.k. sonlar hosil bo‘ladi. Mingta ming soni maxsus nom bilan «million» deb ataladi. Yana sanashni davom ettirib, mingta millionni hosil qilamiz. Mingta million soni maxsus nom bilan «milliard» deb ataladi. hisoblashlarda million 10^6, milliard (yoki billion) 10^9, trillion 10^{12} ko‘rinishida yoziladi. Shunga o‘xshash undan ham katta sonlarni yozish mumkin. Shunday qilib, milliard ichidagi hamma natural sonlarni aytish uchun hammasi bo‘lib 22 ta turli so‘z ishlatiladi: bir, ikki, uch, to‘rt, besh, olti, yetti, sakkiz, to‘qqiz, o‘n, yigirma, o‘ttiz, qirq, ellik, oltmish, yetmish, sakson, to‘qson, yuz, ming, million, milliard. Natural sonning o‘nli yozuvi sonlarni taqqoslashning yana bir usulini beradi. Agar n va m natural sonlar o‘nli sanoq sistemasida, ya’ni

$$n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_1\cdot 10+n_0,\ n_k\neq 0$$

$$m=m_p\, 10^p+m_{p-1}\, 10^{p-1}+...+m_1\cdot 10+m_0,\ m_p\neq 0$$

ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, quyidagi shartlardan biri bajarilsa, n soni m dan kichik bo‘ladi:

1) $k < p$ (*n* sondagi xonalar soni *m* sondagi xonalar sonidan kichik):

2) $k=p$, ammo $n_k< m_p$

3) $k=p$, $n_k=m_k$, ... , $n_s=m_s$, ammo $n_{s-1}<m_{s-1}$;

Bu tasdiqni isbotsiz qabul qilamiz. Ulardan foydalanib, sonlarni oson taqqoslash mumkin.

Masalan,

a) 2465<18328, chunki 2465 sonning yozuvidagi raqamlar 18328 sonning yozuvidagi raqamlardan kam;

b) 2456 <5287, bunda raqamlar soni bir xil, ammo 2456 sonidagi minglar xonasidagi raqam 5287 sonining minglar xonasidagi raqamdan kichik;

c) 2475<2486, bunda raqamlar soni hamda minglar va yuzlar xonasidagi raqamlar bir xil, 2475 sonining o'nlar xonasidagi raqam 2486 sonining o'nlar xonasidagi raqamdan kichik.

6.2. O'nli sanoq sistemasida nomanfiy butun sonlar ustidagi arifmetik amallarning algoritmi

O'nlik sanoq sistemasida sonlarni qo'shish algoritmi.

Ma'lumki, har qanday ko'pxonali sonlarni xona birliklari yig'indisi shaklida ifodalash mumkin. Masalan,

527 = 5 ta yuzlik 2 ta o'nlik va 7 ta birlik

yoki $527 = 5\cdot 100 + 2\cdot 10 + 7\cdot 1$;

$3728 = 3\cdot 1000 + 7\cdot 100 + 2\cdot 10 + 8\cdot 1$,

$3728 = 3\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 2\cdot 10^1 + 8\cdot 10^0$.

Dastlab misollardan boshlaymiz.

1-misol.

$540 + 126 = (5\cdot 10^2 + 4\cdot 10 + 0) + (1\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 6) =$

$= (5 + 1)\cdot 10^2 + (4 + 2)\cdot 10 + (0 + 6) = 6\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 6 = 666$

2-misol.

364+2423 sonlarni qo'shamiz. Buning uchun qo'shiluvchilarni koeffitsientli o'nning darajalari yig'indisi ko'rinishda yozamiz:

$364 + 2423 = (3\cdot 10^2+6\cdot 10+4) + (2\cdot 10^3+4\cdot 10^2+2\cdot 10+3)$.

Bu ifodada qavslarni ochib, qo'shiluvchilar o'rnini shunday almashtiramizki, birlar birlar oldida, o'nlar o'nlar oldida va hokazo bo'lsin va yana qavs ichiga olamiz. Bularning hammasini qo'shishning tegishli qonunlari asosida bajarish mumkin. Haqiqatan, gruppalash qonuni ifodalarini qavslarsiz yozishga imkon beradi:

$3\cdot 10^2 + 6\cdot 10 + 4 + 2\cdot 10^3 + 4\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 3$. O'rin almashtirish qonuniga ko'ra qo'shiluvchilar o'rnini almashtiramiz:

$2\cdot 10^3 + (3\cdot 10^2 + 4\cdot 10^2) + (6\cdot 10 + 2\cdot 10) + (4 + 3)$. Birinchi qavsdan 10^2 ni, ikkinchisidan 10 ni qavsdan tashqariga chiqaramiz. Buni qo'shishga nisbatan ko'paytirishning taqsimot qonunini qo'llab bajarish mumkin:

$2 \cdot 10^3 + (3 + 4)\cdot 10^2 + (6 + 2)\cdot 10 + (4 + 3)$

Ko‘rib turibmizki, 364 va 2423 sonlarini qo‘shish tegishli xonalar raqamlari bilan tasvirlangan bir xonali sonlarni qo‘shishga keltirildi. Bu yig‘indini qo‘shish jadvalidan topamiz:

$2\cdot 10^3 + 7\cdot 10^2 + 8\cdot 10 + 7$.

Hosil qilingan ifoda 2787 sonining o‘nli yozuvidir.

Endi $n=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_o$ va $m=m_k\cdot 10^k+m_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+m_o$ sonlarini qo‘shishni ko‘raylik. Agar ikkala sonda ham xona birliklari teng bo‘lib (agar teng bo‘lmasa teng bo‘lmagan son oldiga nollar yozib tenglashtiramiz) $n_s + m_s < 10$ bo‘lsa, yig‘indi quyidagicha bo‘ladi:

$$(n_k\cdot 10^k+ n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_o)+(m_k \cdot 10^k+m_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+m_o)=$$
$$=(n_k+m_k)\cdot 10^k+(n_{k-1}+m_{k-1})10^{k-1}+...+(n_o+m_o).$$

Agar $n_s + m_s \geq 10$ bo‘lsa qo‘shish birmuncha qiyin bo‘ladi.

3-misol. Masalan, 394+827 yig‘indini qaraylik.

Qo‘shiluvchilarni koeffitsientli o‘nning darajalari yig‘indisi ko‘rinishida yozamiz: $(3\cdot 10^2 + 9\cdot 10 + 4) + (8\cdot 10^2 + 2\cdot 10 +7)$.

Qo‘shish qonunlari, qo‘shishga nisbatan ko‘paytirishning taqsimot qonunidan foydalanib, berilgan ifodani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$(3 + 8)\cdot 10^2 + (9 + 2)\cdot 10 + (4 + 7)$.

Ko‘rib turibmizki, bu holda ham berilgan sonlarni qo‘shish bir xonali sonlarni qo‘shishga keltirildi, ammo 3+8, 9+2, 4+7 yig‘indilar 10 sonidan katta, shuning uchun hosil bo‘lgan ifoda biror sonning o‘nli yozuvi bo‘lmaydi. Shunday qilish kerakki, 10 ning darajalari oldidagi koeffitsientlar 10 dan kichik bo‘lsin. Buning uchun bir qator almashtirishlar bajaramiz. Avval 4+7 yig‘indini 10+1 ko‘rinishda yozamiz:

$(3+8)\cdot 10^2+ (9+2)\cdot 10 + (10+1)$

Endi qo‘shish va ko‘paytirish qonunlaridan foydalanib, topilgan ifodani quyidagi ko‘rinishga keltiramiz:

$(3 + 8)\cdot 10^2+ (9 + 2 + 1)\cdot 10 + 1$

Oxirgi almashtirishning mohiyati ravshan: birlarni qo‘shishda hosil bo‘lgan o‘nni berilgan sonlardagi o‘nliklarga qo‘shdik. 9+3 yig‘indini $1\cdot 10+2$ ko‘rinishda yozib, quyidagini hosil qilamiz:

$(3+8)\cdot10^2 + (10+2)\cdot10+1 = (3+8)\cdot10^2 +10^2 + 2\cdot10 + 1 =$
$= (3+9)\cdot10^2 + 2\cdot10 + 1$

va nihoyat 3+9 yig'indini quyidagicha almashtiramiz:

$(1\cdot10 +2)\cdot10^2 + 2\cdot10 + 1 = 1\cdot10^3 + 2\cdot10^2 + 2\cdot10 + 1 = 1221.$

Hosil bo'lgan ifoda 1221 sonining o'nli yozuvidir.

4-misol.

3248 + 725 yig'indini quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$3848+0725=(3\cdot10^3+8\cdot10^2+4\cdot10+8)+(0\cdot10^3+7\cdot10^2+2\cdot10+5)=$
$=3\cdot10^3+8\cdot10^2+4\cdot10+8+0\cdot10^3+7\cdot10^2+2\cdot10+5;$

Yig'indi xossalaridan foydalanib, bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$3848 + 0725 = (3+0)\cdot10^3 + (8 + 7)\cdot10^2 + (4 + 2)\cdot10 + (8 + 5) =$
$=3\cdot10^3 +15\cdot10^2 + 6\cdot10 + 13= 3\cdot10^3 + (10+5)\cdot10^2 + 6\cdot10 + (10+3)=$
$=3\cdot10^3 + 1\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 6\cdot10 + 1\cdot10 + 3 = (3+1)\cdot10^3 + 5\cdot10^2 +$
$+(6+1)\cdot10 + 3 = 4\cdot10^3 + 5\cdot10^2 + 7\cdot10 + 3 = 4573$

O'nli sanoq sistemasida yozilgan ko'p xonali sonlarni qo'shish algoritmi umumiy ko'rinishda quyidagicha ifodalanadi:

1) Ikkinchi qo'shiluvchining tegishli xonalari bir-birining ostiga tushadigan qilib birinchi qo'shiluvchining ostiga yozamiz, agar qo'shiluvchilarning bittasida xonalar soni kam bo'lsa, uning oldiga nollar yozib xonalar sonini tenglashtiramiz;

2) Birlar xonasidagi raqamlar qo'shiladi. Agar yig'indi 10 dan kichik bo'lsa, uni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga (o'nlar xonasiga) o'tamiz.

3) Agar birliklar raqamlarining yig'indisi 10 dan katta yoki 10 ga teng bo'lsa, uni $10+S_0$, bunda S_0 ni javobdagi birlar xonasiga yozamiz va birinchi qo'shiluvchidagi o'nlar raqamiga 1 ni qo'shamiz, keyin o'nlar xonasiga o'tamiz.

4) O'nlar bilan yuqoridagi amallarni bajaramiz, keyin yuzlar bilan va hokazo. Yuqori xona raqamlari qo'shilgandan keyin bu jarayonni to'xtatamiz.

O'nlik sanoq sistemasida sonlarni ayirish algoritmi.

1-misol.

$769 - 547 = (7\cdot10^2 + 6\cdot10 + 9) - (5\cdot10^2 + 4\cdot10 + 7) =$
$= (7\cdot10^2 - 5\cdot10^2) + (6\cdot10 - 4\cdot10) + (9 - 7) =$
$= (7 - 5)\cdot10^2 + (6 - 4)\cdot10 + (9 - 7) = 2\cdot10^2 + 2\cdot10 + 2 = 222$

2-misol. 3848 sonidan 725 sonini ayirish talab qilinsin. Dastlab kamayuvchi va ayriluvchida xonalar sonini tenglashtiramiz. Ayriluvchini 0725 ko'rinishda yozib, sonlarni o'nning darajalari ko'rinishida yozamiz.

$3248 = 3\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 4\cdot10 + 8$

$0725 = 0\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 2\cdot10 + 5$

Endi 3248 – 0725 ayirmani quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$3848 - 0725 = (3\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 4\cdot10 + 8) - (0\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 2\cdot10 + 5) = 3\cdot10^3 + 8\cdot10^2 + 4\cdot10 + 8 - 0\cdot10^3 - 7\cdot10^2 - 2\cdot10 - 5.$

Yig'indi va ayirma xossalaridan foydalanib, bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$3848 - 0725 = (3-0)\cdot10^3 + (8-7)\cdot10^2 + (4-2)\cdot10 + (8-5) = 3\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + 2\cdot10 + 3 = 3123$

3-misol. 6157 – 376 ayirmani topish talab qilinsin. Bu holda ayirish oldingi misoldan qiyinroq bo'ladi, chunki bu ayirmani

$(6-0)\cdot10^3+(1-3)\cdot10^2+(5-7)\cdot10+(7-6)$ ko'rinishda yozib bo'lmaydi, sababi ayrim qavs ichidagi ifodalarda ayriluvchi kamayuvchidan katta. Shuning uchun kamayuvchini quyidagi ko'rinishda yozamiz.

$6\cdot10^3 + 1\cdot10^2 + 5\cdot10 + 7$

Bu ifodada 6 ni 5+1 ko'rinishda yozamiz. U holda $6157=(5+1)\cdot10^3+1\cdot10^2 + 5\cdot 10 +7$;

ammo $10^3 = 900 + 100 = 9\cdot10^2 + 10\cdot10$ bo'lganligidan

$6157 = 5\cdot10^3 + (9+1)\cdot10^2 + (5+10)\cdot10 + 7 =$
$= 5\cdot10^3 + 10\cdot10^2 + 15\cdot10+7$

Demak, $6157 - 376 = (5-0)\cdot10^3 + (10-3)\cdot10^2 + (15-6)\cdot10 + (7-6) = 5\cdot10^3 + 7\cdot10^2 + 9\cdot10 + 1 = 5791$

Endi umumiy holda $n = n_k10^k + n_{k-1}10^{k-1} + \ldots + n_0$ va $m = m_k10^k + m_{k-1}10^{k-1} + \ldots + m_0$ sonlari berilgan bo'lsin.

U holda *n-m* ayirma barcha s ($o \le s \le k$) lar uchun $n_s \ge m_s$ shart bajarilganda quyidagiga teng bo'ladi:

$n-m=(n_k - m_k)10^k + (n_{k-1} - m_{k-1})\,10^{k-1}+\ldots+(n_o - m_o).$

Shunday qilib, ikki son ayirmasini topish algoritmi quyidagicha ifodalanadi:

1) ayriluvchini mos xonalari bir-birining ostida bo'ladigan qilib kamayuvchining ostiga yozamiz. Xonalar sonini tenglashtiramiz.

2) agar ayriluvchining birlar xonasidagi raqam kamayuvchining tegishli raqamidan katta bo'lsa, uni kamayuvchining raqamidan ayiramiz va natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz, so'ngra keyingi xonaga o'tamiz.

3) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta, ya'ni $n_0<m_0$ bo'lib, kamayuvchining o'nlar raqami noldan farqli bo'lsa, kamayuvchining o'nlar raqamini bitta kamaytiramiz, shu vaqtning o'zida birlar raqami 10 ta ortadi, shundan keyin $10+n_0$ sonidan m_0 ni ayiramiz va natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz, so'ngra keyingi xonaga o'tamiz.

4) agar ayriluvchining birlar raqami kamayuvchining birlar raqamidan katta bo'lib, kamayuvchining o'nlar, yuzlar va boshqa *x* onasidagi raqamlar nolga teng bo'lsa, kamayuvchining noldan farqli birinchi (birlar xonasidan keyingi) raqamini olib, uni bitta kamaytiramiz, kichik xonalardagi barcha raqamlarni o'nlar xonasigacha 9 ta orttiramiz, birlar xonasidagi raqamni esa 10 ta orttiramiz va $10+n_0$ dan m_0 ni ayiramiz, natijani ayirmaning birlar xonasiga yozamiz va keyingi xonaga o'tamiz.

5) keyingi xonada bu jarayonni takrorlaymiz.

6) kamayuvchining katta xonasidan ayirish bajarilgandan keyin ayirish jarayoni tugallanadi.

O'nlik sanoq sistemasida sonlarni ko'paytirish algoritmi.

Ma'lumki, ikkita bir xonali sonni ko'paytirishda hosil bo'lgan hamma ko'paytmalar esda saqlanadi. Hamma bunday ko'paytmalar maxsus jadvalga yoziladi, bu jadval bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvali deyiladi.

325 sonini 1000 ga ko'paytirishni bajarganda 325 soni ketiga uchta nolni yozish yetarli, ya'ni 325000 bo'ladi. Haqiqatan ham, $325 = 3\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 5$ ko'rinishida yozish mumkin va qo'shishga nisbatan ko'paytirish distributivlik xossasiga ega bo'lishidan $10^k\cdot 10^s=10^{k+s}$ ga ko'ra,

$325\cdot 1000 = (3\cdot 10^2 + 2\cdot 10 + 5)\cdot 10^3 = 3\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3$ bo'ladi.

Bu ifodani quyidagicha yozamiz:

$325\cdot 1000 = 3\cdot 10^5 + 2\cdot 10^4 + 5\cdot 10^3 + 0\cdot 10^2 + 0\cdot 10 + 0 = 325000$

Bundan ko'rinadiki n sonini 10^s ga ko'paytirish uchun n sonining o'ng tomoniga s ta nol yozish kifoya.

Haqiqatan ham, agar $n=n_k n_{k-1}\ldots n_0$ soni berilgan bo'lsa, u holda $n = n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + n_0$ ni 10^s ga ko'paytiramiz.

$n\cdot 10^s = (n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + n_0)\cdot 10^s =$
$= n_k 10^{k+s} + n_{k-1} 10^{k-1+s} + \ldots + n_0\cdot 10^s + 0\cdot 10^{s-1} + \ldots + 0.$

Demak, $n\cdot 10^s = n_k n_{k-1}\ldots n_0 \underbrace{00\ldots 0}_{s\ ta}$

Endi $n = n_k n_{k-1}\ldots n_0$ sonini bir xonali m soniga ko'paytiramiz.

$n\cdot m = (n_k\cdot 10^k + n_{k-1}\cdot 10^{k-1} + \ldots + n_0)\cdot m = n_k\cdot m\cdot 10^k + n_{k-1}\cdot m\cdot 10^{k-1} +$
$+ \ldots + n_0\cdot m;$

bu yerda n_s, m lar bir xonali sonlar, ularning ko'paytmalari bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalida bor bo'lib, ularning natijalari bir xonali yoki ikki xonali sonlar bo'ladi.

$n_s\cdot m$ ko'paytmani $n_s\cdot m = a_s\cdot 10 + b_s$ ko'rinishida yozish mumkin, (bunda faqat $a_s=0$ bo'lgan holni hisobga olgan holda).

U holda biz quyidagiga ega bo'lamiz:

$n\cdot m = (a_k\cdot 10 + b_k)\cdot 10^k + (a_{k-1}\cdot 10 + b_{k-1})\cdot 10^{k-1} + \ldots + (a_0\cdot 10 + b_0) =$
$= (a_k\cdot 10^{k+1} + a_{k-1}\cdot 10^k + \ldots + a_0\cdot 10) + (b_k\cdot 10^k + b_{k-1}\cdot 10^{k-1} + \ldots + b_0).$

Misol.

$48\cdot 7 = (4\cdot 10 + 8)\cdot 7 = 4\cdot 7\cdot 10 + 8\cdot 7 = 28\cdot 10 + 56 = (2\cdot 10+8)\cdot 10 +$
$+ (5\cdot 10 + 6) = 2\cdot 10^2 + (8 + 5)\cdot 10 + 6 = 2\cdot 10^2 + (10 + 3)\cdot 10 + 6 =$
$= 2\cdot 10^2 + 10^2 + 3\cdot 10 + 6 = 3\cdot 10^2 + 3\cdot 10 + 6 = 336$

Endi ko'p xonali sonlarni ko'paytirishni qaraymiz:

$n = n_k\cdot 10^k + n_{k-1}\cdot 10^{k-1} + \ldots + n_0$ va $m = m_p\cdot 10^p + m_{p-1}\cdot 10^{p-1} + \ldots + m_0$ sonlari berilgan bo'lsin. $n\cdot m$ ko'paytmani topamiz. Dastlab ko'paytirish xossasiga ko'ra quyidagini hisoblaymiz:

$n\cdot(m_p\cdot 10^p + m_{p-1}\cdot 10^{p-1} + \ldots + m_0) = (n\cdot m_p)\cdot 10^p + (n\cdot m_{p-1})\cdot 10^{p-1} + \ldots + n\cdot m_0.$

n sonini ketma-ket bir xonali m_l, m_{l-1}, ..,m_0 sonlariga ko'paytirib, natijani $10^p, 10^{p-1}$, ..., 1 sonlariga ko'paytirib qo'shamiz natijada $n\cdot m$ ko'paytmaga ega bo'lamiz.

Bu esa bizni odatdagi sonlarni ustun shaklda yozib ko'paytirish qoidalarimizga mos keladi.

Masalan,

$$\begin{array}{r} 385 \\ \times\ 24 \\ \hline 1540 \\ +\ 770 \\ \hline 9240 \end{array}$$

Shunday qilib, ko'p xonali sonni ko'p xonali songa ko'paytirish ko'p xonali sonni bir xonali songa ko'paytirishga keltirildi.

Umuman, $n = n_k n_{k-1}...n_1 n_0$ sonni $m = m_p m_{p-1}...m_1 m_o$ songa ko'paytirish algoritmini quyidagicha ifodalash mumkin:

1) n ko'paytuvchini yozamiz va uning ostiga ikkinchi ko'paytuvchi m ni yozamiz.

2) n sonni m sonning kichik xonasi m_0 ga ko'paytiramiz va $n \cdot m_0$ ko'paytmani m sonning ostiga yozamiz.

3) n sonni m sonning keyingi xonasi m_1 ga ko'paytiramiz va $n \cdot m_1$ ko'paytmani bir xona chapga surib yozamiz. Bu $n \cdot m_1$ ni 10 ga ko'paytirishga mos keladi.

4) bu jarayonni $n \cdot m_p$ ni hisoblaguncha davom ettiramiz.

5) topilgan $p+1$ ta ko'paytmani qo'shamiz.

O'nli sanoq sistemasida sonlarni bo'lish.

Sonlarni bo'lish texnikasi haqida so'z borar ekan, bu jarayon qoldiqli bo'lish amali kabi qaraladi. Ta'rifni eslaylik. Butun nomanfiy a sonni b natural songa qoldiqli bo'lish deb, $a=bq+r$ va $0 \leq r < b$ bo'ladigan butun nomanfiy q va r sonlarni topishga aytiladi, q soni esa to'liqsiz bo'linma deyiladi.

Bir xonali va ikki xonali sonlarni bir xonali songa bo'lganda bir xonali sonlarni ko'paytirish jadvalidan foydalaniladi.

Masalan, 63 ni 8 ga bo'lamiz. Ko'paytirish jadvalidan 8-ustunda 63 soni yo'q. Shuning uchun bu ustunda 63 dan kichik eng yaqin 56 sonini olamiz. 56 soni 8-satrda bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 7 ga teng. Qoldiqni topish uchun 63 dan 56 ni ayiramiz: 63 – 56 = 7.

Shunday qilib, $63 = 8 \cdot 7+7$;

Endi ko‘p xonali sonni bir xonali songa bo‘lish qanday amalga oshirilishini aniqlaymiz. 346 ni 4 ga bo‘lish kerak bo‘lsin. Bu degani shunday to‘liqsiz bo‘linma q va r qoldiqni topish kerakki, ular uchun $346=4q+r$, $0 \le r < 4$ bo‘lsin.

Shuni aytish kerakki, 346 va 4 sonlarni to‘liqsiz bo‘linmasi q ga bo‘lgan talabni quyidagicha yozish mumkin:

$n \cdot q \le 346 < n(q+1)$.

Avval q sonining yozuvida nechta raqam bo‘lishini aniqlaymiz. q bir xonali son ko‘paytmasi plyus qoldiq 346 ga teng emas. Agar q soni ikki xonali bo‘lsa, ya’ni agar $10<q<100$ bo‘lsa, u holda 346 soni 40 va 400 sonlari orasida bo‘ladi, bu esa to‘g‘ri. Demak, 346 va 4 sonlarining bo‘linmasi ikki xonali son.

Bo‘linmaning o‘nlar raqamini topish uchun bo‘linuvchi 4 ni ketma-ket 20 ga, 30 ga, 40 ga va hokazo ko‘paytiramiz. $4\cdot 80=320$, $4\cdot 90=360$ va $320<346<360$ bo‘lgani uchun to‘liqsiz bo‘linma 80 va 90 sonlari orasida bo‘ladi, ya’ni $q = 80 + q_0$. U holda 346 soni haqida bunday deyish mumkin: $4\cdot(80+q_0) \le 346<4\cdot(80+q_0+1)$, bundan $320 + 4\cdot q_0 \le 346 < 320 + 4\cdot(q_0+1)$ va $4\cdot q_0 \le 26 < 4\cdot(q_0+1)$.

Berilgan tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini (bo‘linmaning birlar raqamini) ko‘paytirish jadvalidan foydalanib topish mumkin. $q_0=6$ hosil bo‘ladi demak, to‘liqsiz bo‘linma $q=80+6=86$, qoldiq ayirish bilan topiladi: $346-4\cdot 86=2$.

Shunday qilib, 346 ni 4 ga bo‘lganda to‘liqsiz bo‘linma 86 va 2 qoldiq hosil bo‘ladi: $346 = 4\cdot 86 + 2$.

Bo‘lishni ifodalagan bu jarayon burchak qilib bo‘lish deb nomlanadigan bo‘lish asosida yotadi.

$$\begin{array}{r|l} 346 & 4 \\ \cline{2-2} -\underline{32} & 86 \\ 26 & \\ -\underline{24} & \\ 2 & \end{array}$$

Ko‘p xonali sonni ko‘p xonali songa bo‘lish quyidagicha bajariladi.

Masalan, 6547 ni 57 ga bo'laylik. Bu bo'lishni bajarish shunday butun nomanfiy q va r sonlarni topish kerakki, uning uchun $6547=57q+r$, $0\leq r< 57$ bajarilsin.

Bundan $57q \leq 6547 < 57(q+1)$, q bo'linmadagi raqamlar sonini aniqlaymiz. Shubhasiz, q bo'linma 100 va 1000 sonlari orasida yotadi (u uch xonali), chunki $5700 < 6547 < 57000$;

Bo'linmaning yuzlar raqamini topish uchun bo'linuvchi 57 ni ketma-ket 100 ga, 200 ga, 300 ga va hokazo ko'paytiramiz. $57\cdot 100=5700$; $57\cdot 200=11400$ va $5700<6547<11400$ bo'lgani uchun to'liqsiz bo'linma 100 va 200 sonlari orasida yotadi, ya'ni $q=100+q_1$, bu yerda q_1 ikki xonali son. U holda quyidagi tengsizlik o'rinli bo'ladi:

$57\cdot(100+ q_1) \leq 6547 < 57\cdot(100 + q_1 +1)$.

Qavslarni ochib va 5700 sonini ayirib, ushbu tengsizlikka kelamiz:

$57 q_1 \leq 847 < 57\cdot(q_1+1)$

q_1 soni ikki xonali. Shuning uchun bo'linmadagi o'nlar raqamini topish uchun bo'linuvchi 57 ni ketma-ket 10 ga, 20 ga, 30 ga va hokazo ko'paytiramiz.

$57\cdot 10=570$, $57\cdot 20=1140$ va $570 < 847 < 1140$ bo'lgani uchun $10<q_1< 20$ va q_1 sonini $q_1=10+q_0$ ko'rinishda yozish mumkin. U holda 847 soni haqida quyidagilarni aytish mumkin:

$57\cdot(10+ q_0) \leq 847 < 57\ (10+q_0+1)$, ya'ni

$57\cdot 10+57\cdot q_0 \leq 847< 57\cdot 20+57\cdot(q_0 +1)$, $57\cdot q_0\leq 77< 57\cdot(q_0 +1)$.

Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonining (bo'linmaning birlar raqamini) 57 ni ketma-ket 1 ga, 2 ga, ... , 9 ga ko'paytirib tengsizlikni qanoatlantiruvchi q_0 sonini tanlab topamiz. $57\cdot 4=228$. Demak q_0 soni 4 ga q_1 esa 14 ga, to'liqsiz bo'linma $q=100+14=114$ ga teng. Qoldiq ayirish yo'li bilan topiladi $6547 - 114\cdot 57 = 49$.

6547 ni 57 ga bo'lganda, to'liqsiz bo'linma 114 ga, qoldiq 49 ga teng. $6547=114\cdot 57 + 49$.

Butun nomanfiy a sonni b natural songa bo'lishning turli usullarining umumlashmasi quyidagi burchak qilib bo'lish algoritmi hisoblanadi:

Agar $a = b$ bo'lsa, bo'linma q=1 qoldiq r = 0 bo'ladi.

Agar $a > b$ bo'lib, a va b sonlardagi xonalar soni bir xil bo'lsa, b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ga ko'paytirib, bo'linma tanlab olinadi, chunki $a < 10\cdot b$.

Agar $a > b$ bo'lib, a sondagi xonalar soni b sondagi xonalar sonidan katta bo'lsa, a bo'linuvchini yozib, uning o'ng tomoniga b bo'luvchini yozamiz va oralariga burchak belgisini qo'yib, bo'linma hamda qoldiqni ushbu ketma-ketlikda qidiramiz:

b sonda nechta xona bo'lsa, a sonda shuncha katta xonalarni yoki, agar zarur bo'lsa, bitta ortiq xonani shunday ajratamizki, ular b dan katta yoki unga teng d_1 sonni hosil qilsin. b ni ketma-ket 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ga ko'paytirib, d_1 va b sonlarning q_1 bo'linmasini tanlab topamiz. q_1 ni burchak ostiga (b dan pastga) yozamiz.

b ni q_1 ga ko'paytirib, ko'paytmani a sonining ostiga shunday yozamizki, bq_1 sonning quyi xonasi ajratilgan d_1 sonning quyi xonasi ostiga yozilsin.

b_1 ning ostiga chiziqcha chizamiz va ayirmani topamiz:

$r_1 = d_1 - bq_1$

r_1 ayirmani bq_1 sonning ostiga yozamiz. r_1 ning o'ng tomoniga a bo'linuvchining foydalanilmagan xonalaridan yuqori xonasini yozamiz va chiqqan d_2 sonni b son bilan taqqoslaymiz.

Agar chiqqan d_2 son b dan katta yoki unga teng bo'lsa, u holda d ga nisbatan 1- yoki 2-punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo'linmani q_1 dan keyin yozamiz.

Agar chiqqan d_2 son b dan kichik bo'lsa, birinchi chiqqan d_3 son b dan katta yoki unga teng bo'lishi uchun keyingi xonadan qancha zarur bo'lsa yana shuncha yozamiz. Bu holda q_1 dan keyin shuncha nol yozamiz. Keyin d_3 ga nisbatan 1- yoki 2-punktlardagidek ish tutamiz. q_2 bo'linma nollardan keyin yoziladi. Agar a sonning kichik xonadan foydalanganda $d_3 < b$, bo'lsa, d_3 va b sonlarning bo'linmasi nolga teng bo'ladi va bu nolni bo'linmaning oxirgi xonasiga yozamiz, qoldiq $r = d_3$ bo'ladi.

Ifodaning qiymatini qulay usul bilan hisoblang, hisoblash usulingizni asoslang:

1. $7549-(1020+2549)$
2. $(9547+2395)-7547$
3. $(3949+5027+4843)-(2027+3843)$

Hisoblang:

1) $1:1+0:428+428:1$
2) $20\cdot 17+15\cdot 18-43310:71$
3) $178-4\cdot(25-13)-40$
4) $510:17+24\cdot 38-80:4$
5) $510:17+24\cdot(38-80:4)$
6) $(510:17+24)\cdot 38-80:4$
7) $(510:17+24)\cdot(38-80:4)$
8) $510:(27+24\cdot 38-33\cdot 13)$
9) $2098\cdot 0+1\cdot(207+0:4567)+728:1$
10) $(627900:8050+5420635:67)\cdot 2458763:307-999600:4900$

6.3. O'ndan farqli pozitsion sanoq sistemalari: sonlarning yozilishi, arifmetik amallar, bir sanoq sistemasida yozilgan sonni boshqa sanoq sistemasidagi yozuvga o'tkazish

Biz asosi 10 bo'lgan sanoq sistemasida har qanday son ushbu $n_n10^k+n_{k-1}10^{k-1}+\ldots+n_1\cdot 10+n_0$ ko'rinishida yozilishini bilamiz, unda $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$ koeffitsiyentlar 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 qiymatlarini qabul qiladi va $n_k \neq 0$.

O'nli sanoq sistemasi pozitsiondir – ayni bir belgi (raqam) ning qiymati bu belgining shu sonning yozuvida tutgan o'rniga (pozitsiyasiga) bog'liq.

Ma'lumki, o'nli sanoq sistemasidan boshqa bir qancha pozitsion sanoq sistemalari mavjud va bularni o'nli sanoq sistemasidan farqi bu sistemalarning asoslari turlicha bo'lishligidir.

Masalan, Vavilonda sanoq sistemasi oltmishli bo'lgan. Bundan boshqa sanoq sistemalar ham ma'lum: o'n ikkili sistema va hokazo. Umuman, pozitsion sanoq sistemasining asosi ikkidan katta yoki ikkiga teng istalgan p natural son bo'lishi mumkin.

Agar p=2 bo'lsa, sistema ikkili, p=3 bo'lsa, uchli, p=10 bo'lsa, o'nli sistema deyiladi. *p* asosli sistemada son qanday yoziladi?

O'nli sistemada sonni yozish uchun 10 ta belgidan foydalaniladi. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Ravshanki, ikkili sistemada sonni 2 ta belgi, masalan, 0,1 belgilar yordamida, sakkizli sistemada 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 belgilar yordamida yozish mumkin.

Umuman, *p* asosli sanoq sistemasida sonni yozish uchun *p* ta belgidan foydalanish kerak: 0,1,2, 3, ..., p – 1.

Ta'rif. *p* asosli sanoq sistemasida *n* natural sonning yozuvi deb uning $n=n_k\cdot p^k+n_{k-1}\cdot p^{k-1}+\ldots+n_1\cdot p+n_0$ ko'rinishdagi yozuviga aytiladi, bunda n_k, n_{k-1}, ... , n_0 lar 0,1,2 ..., p-1 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k\neq 0$.

Har qanday n natural sonni bunday yagona ko'rinishda yozish mumkinligini isbotsiz qabul qilamiz.

n sonining $n=n_k\, p^k+n_{k-1}\, p^{k-1}+\ldots+n_1\cdot p+n_o$ ko'rinishini qisqacha ushbu ko'rinishda yozish qabul qilingan: $n=n_k\, n_{k-1}\ldots n_1 n_0$.

Masalan, to'rt asosli sanoq sistemada, ya'ni p = 4 da

$3\cdot 4^3+0\cdot 4^2+2\cdot 4+3$ yig'indi $n=3023_4$ ko'rinishda qisqacha yozish mumkin bo'lgan biror n sonining yozuvidir.

Bu son quyidagicha o'qiladi: «uch, nol, ikki, uch to'rtli sanoq sistemasida».

Sonlarni yozishda turli belgilardan foydalanish nuqtaiy nazaridan ikkili sanoq sistemasi tejamkorliroqdir – unda sonlarni yozish uchun faqat ikkita belgi 0 va 1 kerak. Bu sistemada sonning qisqa yozuvi nol va birlardan tuzilgan chekli ketma-ketlikdan iborat.

Masalan,

$1011_2=1\cdot 2^3+0\cdot 2^2+1\cdot 2+1;$

$10001_2=1\cdot 2^4+0\cdot 2^3+0\cdot 2^2+0\cdot 2+1.$

p asosli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslash o'nli sanoq sistemadagidek bajariladi.

Masalan, $2101_3<2102_3$ chunki bu sonlarda xonalar soni bir xil va yuqori xonadagi uchta raqam bir xil bo'lib, birinchi sondagi kichik xona raqami ikkinchi sondagi o‘sha xona raqamidan kichik.

O‘ndan boshqa pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni qo‘shish.

Boshqa sanoq sistemalarida sonlarni qo‘shish o‘nli sanoq sistemasida qo‘shishga o‘xshaydi. Bunda faqat shu sistemadagi bir qiymatli sonlarni qo‘shish jadvalini bilish kerak.

Masalan, ikkilik sanoq sistemasida qo‘shish jadvali quyidagicha:

m\n	0	1
0	0	1
1	1	10

Sakkizlik sanoq sistemasida qo‘shish jadvali quyidagicha:

Mn	0	1	2	3	4	5	6	7
0	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7	10
2	2	3	4	5	6	7	10	11
3	3	4	5	6	7	10	11	12
4	4	5	6	7	10	11	12	13
5	5	6	7	10	11	12	13	14
6	6	7	10	11	12	13	14	15
7	7	10	11	12	13	14	15	16

Yuqoridagi jadvallarga mos sonlarni qo‘shishga misollar keltiramiz.

$$\begin{array}{r} 1101110_2 \\ +\ \underline{110101_2} \\ 10100011_2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 230\,547_8 \\ +\ \underline{326\,715_8} \\ 557\,464_8 \end{array}$$

O‘ndan farqli pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ayirish. Boshqa sanoq sistemalarida sonlarni ayirish o‘nli sanoq sistemasida sonlarni ayirishga o‘xshash, ammo farqi ayirish qaysi sistemada bajarilayotgan bo‘lsa shu sistemalardagi birlik sonlarni qo‘shish jadvalidan foydalaniladi. Misollar keltiramiz:

$$\begin{array}{r} 4823_9 \\ -\ 745_9 \\ \hline 4067_9 \end{array}$$

Haqiqatan ham qo‘shish jadvaliga asosan $5_9 + 7_9 = 13_9$, demak $13_9 - 5_9 = 7_9$ bo‘ladi, boshqalarini ham shunga o‘xshash ko‘rsatish mumkin.

O‘ndan farqli pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni ko‘paytirish.

O‘nli sanoq sistemadan boshqa sistemadagi sonlarni ko‘paytirish o‘nli sanoq sistemasida sonlarni ko‘paytirishga o‘xshash. Bunday ko‘paytirishda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvalidan foydalaniladi. Ikki, uch va oltilik sanoq sistemalari uchun shunday jadvallarni keltiramiz:

ikkilik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1
0	0	0
1	0	1

uchlik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	11

oltilik sanoq sistemasi uchun

n\m	0	1	2	3	4	5
0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5
2	0	2	4	10	12	14
3	0	3	10	13	20	23
4	0	4	12	20	24	32
5	0	5	14	23	32	41

Misol.
$$\begin{array}{r} \times\ 43_6 \\ 32_6 \\ \hline +\ 130 \\ 213\ \ \\ \hline 2300_6 \end{array}$$

O‘ndan farqli pozitsion sanoq sistemalarida sonlarni bo‘lish.

Boshqa sanoq sistemalarida bo‘lishda hisoblashlar burchak qilib bo‘lishga keltiriladi va unda shu sistemadagi bir xonali sonlarni ko‘paytirish jadvallaridan foydalaniladi.

Masalan, $10220_3:12_3$ hisoblangan (uchlik sanoq sistemasi).

$$\begin{array}{l|l}
-10220_3 & \underline{12_3} \\
\ \underline{101} & 210_3 \\
\quad -12 & \\
\quad\ \ \underline{12} & \\
\qquad -00 & \\
\qquad\ \ \underline{00} & \\
\qquad\quad 0 &
\end{array}$$

Demak, $10220_3:12_3=210_3$.

Bir sanoq sistemasidan ikkinchisiga o‘tish.

1) Sonning p asosli sistemadagi yozuvidan o‘nli sistemadagi yozuviga o‘tish. n soni p asosli sanoq sistemasida yozilgan bo‘lsin: $n = n_k n_{k-1} \ldots n_1 n_0$.

Uni ushbu $n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot p + n_0$ ko‘p had ko‘rinishda yoyib yozish mumkin, bunda $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_1$, n_0 va p sonlar yozuvi o‘nli sistemada berilgan. Bu sonlar ustida o‘nli sistemada qabul qilingan qoidalar bo‘yicha amallar bajarib, n sonning o‘nli yozuvini hosil qilamiz.

Masalan, 253_6 sonining o‘nli yozuvini topish uchun uni $2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 3$ yig‘indi ko‘rinishida yozamiz va qiymatlarini topamiz: $2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 3 = 112$.

Demak, $253_6 = 112_{10}$

2) Sonning o‘nli sistemadagi yozuvidan p asosli sistemadagi yozuviga o‘tish.

n soni o‘nli sistemada yozilgan bo‘lsin. Uni p asosli sistemada yozish degan so‘z $n_k, n_{k-1}, \ldots, n_0$ larning $n = n_k \cdot p^k + n_{k-1} p^{k-1} + \ldots + n_1 p + n_0$ bo‘ladigan qiymatini topish demakdir, bunda

$1 \leq n_k < p,\ 0 \leq n_{k-1} < p, \ldots,\ 0 \leq n_0 < p$.

Diqqatimizni ushbu qonuniyatga qaratamiz.

$n=n_k \cdot p^k+n_{k-1} \cdot p^{k-1}+...+n_1 \cdot p+n_0$ sonini

$n=p \cdot (n_k \cdot p^{k-1}+n_{k-1} \cdot p^{k-2}+...+n_1)+n_0$ ko'rinishda yozish mumkin $0 \leq n_0 < p$ bo'lgani uchun *n* sonining oxirgi yozuvini n sonini p qoldiqli bo'lishdagi yozuv deb qarash mumkin, bunda n_0 - qoldiq, $n_k \cdot p^k + n_{k-1} \cdot p^{k-2} + ... + n_1$ - to'liqsiz bo'linma. Xuddi shuningdek, n_1 – ni hosil bo'lgan bo'linmani *p* ga bo'lganda chiqqan qoldiq deb qarash mumkin va hokazo.

Bu qonuniyat sonning o'nli yozuvidan *p* asosli sistemadagi yozuviga o'tish jarayoniga asos bo'ladi. *n* sonini *p* ga o'nli sistemada bo'lish qoidasi bo'yicha qoldiqli bo'lamiz. Bo'lishda chiqqan qoldiq sonning *p* asosli sistemadagi yozuvining oxirgi raqami bo'ladi.

Chiqqan bo'linmani yana *p* ga qoldiqli bo'lamiz. Yangi qoldiq n sonining *p* asosli sistemasidagi yozuvning oxiridan bitta oldingi raqami bo'ladi. Bo'lish jarayonini davom ettirib, *n* sonining *p* asosli sistemadagi yozuvining hamma raqamlarini topamiz.

Masalan, 97 sonining uchli sanoq sistemasidagi yozuvini topaylik, ya'ni 97 sonini $n_k \cdot 3^n + n_{k-1} \cdot 3^{n-1} + ... + n_1 \cdot 3 + n_0$ ko'rinishda yozamiz, bunda $n_k, n_{k-1},..., n_1, n_0$ lar 0, 1, 2 qiymatlarni qabul qiladi. 97 ni 3 ga bo'lamiz: $97=32 \cdot 3+1$. Bo'lish natijasida $n_0=1$ ekanligi topildi. Biroq 3 soni oldidagi koeffitsient 3 dan katta: shuning uchun 32 ni 3 ga bo'lamiz: $32=10 \cdot 3+2$, ya'ni $97=(10 \cdot 3+2) \cdot 3+1=10 \cdot 3^2 +2 \cdot 3+1$. Bu bo'lishda $n_1 =2$ ni topdik, biroq 3^2 daraja oldidagi koeffitsient 2 dan katta, shuning uchun 10 ni 3 ga bo'lamiz: $10=3 \cdot 3+1$, ya'ni $97=(3 \cdot 3 +1) \cdot 3^2 + 2 \cdot 3+1= 3 \cdot 3^3 +1 \cdot 3^2 + 2 \cdot 3 +1$

Bu bosqichda $n_2 = 1$ ekanini aniqladik, ammo 3^2 daraja oldidagi koeffitsient 3 ga teng, shuning uchun 3 ni 3 ga bo'lamiz: $3=1 \cdot 3+0$, ya'ni

$$97=(1 \cdot 3+0) \cdot 3^3+1 \cdot 3^2+2 \cdot 3+1=1 \cdot 3^4+0 \cdot 3^3+1 \cdot 3^2+2 \cdot 3+1$$

Oxirgi bo'lishni bajarib, biz $n_3=0$ ekaninigina topmasdan, katta xona raqamini ham aniqladik. Shuning uchun bo'lish jarayoni tugallandi. $1 \cdot 3^4 + 0 \cdot 3^3 +1 \cdot 3^2 +2 \cdot 3+1$ ko'phad 10121_3 sonining yozuvidir. Demak, $97_{10} = 101\,21_3$.

Ko'rsatilgan bu jarayonni burchak qilib bo'lishni bajarib ham olib borish mumkin. Bunday bo'lish natijasini yoza borib, katta xona raqami ketma-ket bo'lishdagi oxirgi bo'linma ekanligini esda tutish lozim.

Nazorat uchun savollar

1. Pozitsion sanoq sistemasi deganda nimani tushunasiz?
2. O'nli sanoq sistemasida sonlar qanday ifodalanadi?
3. Sonlar yozuvidagi sinflarni aytib bering.
4. O'nli sanoq sistemasida yozilgan sonlarni taqqoslang.
5. O'ndan farqli pozitsion sistemalarda sonlarning yozilishiga misollar keltiring.
6. Bir sanoq sistemasidan ikkinchi sanoq sistemasiga o'tishni misollar yordamida tushuntiring.
7. Yettilik sanoq sistemasida sonlarni qo'shishni misollar yordamida tushuntiring.
8. Sakkizlik sanoq sistemasida sonlarni ko'paytirishni misollar yordamida tushuntiring.
9. Uchlik sanoq sistemasida sonlarni bo'lishni misollar yordamida tushuntiring.

6.4. Nomanfiy butun sonlar ustida arifmetik amallar bajarisning og'zaki usullari

Hisoblashning qulay usullari haqida. Boshlang'ich matematika kursining asosiy vazifalaridan biri bu o'quvchilarda puxta va mustahkam hisoblash malakalarini shakllantirishdan iboratdir. Bu borada asosiy e'tibor avvalo hisoblashning og'zaki usullariga qaratiladi va mumkin bo'lgan hamma hollarda hisoblashlarni og'zaki bajarish talab qilinadi. Faqatgina katta sonlar bilan ishlaganda, oraliq natijalarni esda saqlash qiyin bo'lgan hollardagina yozma hisoblash usullariga murojaat qilish tavsiya etiladi.

Qulay hisoblash usullari natijani oson, ortiqcha murakkab amal bajarmasdan tez topishga imkon beradi. Buning uchun o'qituvchining o'zi ham puxta matematik tayyorgarlikka ega bo'lishi, qulay usullarni qo'llay olishi va ularning nazariy asoslarini yaxshi bilishi kerak.

Ushbu ma'ruzada hisoblashning ba'zi bir usullari nazariy asoslangan holda beriladi. Arifmetik amallarning asosiy qonun va qoidalari isbotsiz keltiriladi, chunki ularning isbotlari boshlang'ich matematika kursining nazariy asoslariga oid darsliklarda berilgan.

Qo'shishga oid hisoblash usullari qo'shishning quyidagi qonunlariga asoslanadi:

1. Qo'shishning kommutativlik qonuni.

$\forall a, b \in N$ uchun $a + b = b + a$ o'rinli.

2. Qo'shishning assotsiativlik qonuni.

$\forall a, b, c \in N$ uchun $(a + b) + c = a + (b + c)$.

1-natija. Qo'shiluvchilardan biri bir necha birlik orttirilsa yoki kamaytirilsa, yig'indi ham shunchaga ortadi yoki kamayadi.

$(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in N)$ $[(a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S) \Rightarrow ((a_1 \pm b) + a_2 + \ldots + a_n = S \pm b)]$.

Isbot. $a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in N$ ва $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S$. bo'lsin. Assotsiativlik va kommutativlik qonunlariga ko'ra: $(a_1 \pm b) + a_2 + \ldots + a_n = a_1 \pm b + a_2 + \ldots + a_n = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \pm b = S \pm b$.

2-natija. Qo'shiluvchilardan biri bir necha birlik orttirilsa va ikkinchisi shuncha birlikka kamaytirilsa, yig'indi o'zgarmaydi.

$(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in N)$ $[(a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S) \Rightarrow ((a_1 + b) + (a_2 - b) + + \ldots + a_n = S)]$.

Bu natijning isboti 1-natija isbotiga o'xshash bajariladi.

3-natija. Agar qo'shiluvchilarning har biri bir necha marta orttirilsa yoki kamaytirilsa, yig'indi ham shuncha marta ortadi yoki kamayadi.

$(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in N)[(a_1 + a_2 + \ldots + a_n = S) \Rightarrow (a_1 \cdot b + a_2 \cdot b + \ldots + a_n \cdot b = S \cdot b) \wedge (a_1 : b + a_2 : b + \ldots a_n : b = S : b)]$.

Isbot. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in N$ ва $b \in N$ bo'lsin. Ko'paytirishning distributivligiga ko'ra:

$(a_1 \cdot b + a_2 \cdot b + \ldots + a_n \cdot b = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot b = S \cdot b$ va

$a_1 : b + a_2 : b + \ldots a_n : b = a_1 \cdot \frac{1}{b} + + a_2 \cdot \frac{1}{b} + \ldots + a_n \cdot \frac{1}{b} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \cdot \frac{1}{b} = (a_1 + a_2 + \ldots + a_n) : b = S : b$.

Bir yoki bir necha qo‘shiluvchini yaxlitlash. Bir (yoki bir necha) qo‘shiluvchini unga yaqin yaxlit son bilan almashtirib, hosil bo‘lgan sonlar yig‘indisi topiladi va undan tegishli to‘ldirma son ayiriladi yoki qo‘shiladi.

Misol:

a) $173 + 59=(173 + (59+ 1))-1 = (173 + 60) - 1=233 - 1 =232$;

b) $882+197=(882+(197+3))-3 = (882+200) - 3 = 1082-3 =$
$= 1\ 079$.

c) $78 + 364 = 364 + 78 = (360 + 80) + 4 - 2 = 440 + 2 = 442$.

d) $664 + 243=(660+240)+(4+3)=900+7=907$.

Xona birliklari bo‘yicha qo‘shish. Ko‘p xonali sonlar yig‘indisini mos xona birliklarini qo‘shib topish mumkin.

Masalan:

a) $26+17+85+43=(20+10+80+40)+(6+7+5+3)=150+21=171$;

b)$328+681+237+495=(300+600+200+400)+(20+80+30+90)+$
$+(8+1+7+5)=1500+220+21=1000+(500+200)+(20+20)+1=1000+$
$+700 +40+1=1741$.

“Negiz” son atrofida guruhlash. Bu usul bir-biriga yaqin sonlar yig‘indisini topish talab qilinganda qo‘llanadi.

Masalan: $57+54+53+55+54+52+54+50$ yig‘indini topish talab etilsin.

Bu sonlarning istalgan birini “negiz”uchun tanlash mumkin.

54 ni olaylik:

1) Hammasi bo‘lib 8 ta qo‘shiluvchi bo‘lgani uchun 54 ni 8 ga ko‘paytiramiz: $54 \cdot 8 = 432$;

2) Qo‘shiluvchilarning 54 dan farqlarini yig‘amiz:
$3+0-1+1+0-2+0-4=-3$;

3) Natijani 432 ga qo‘shamiz:
$432+(-3)=432-3=429$.

Negiz son farqlarni jamlash oson bo‘ladigan qilib tanlanadi. Masalan, 50 ni negiz son qilib tanlasak:

1) $50\cdot 8 = 400$,

2) $7+4+3+5+4+2+4 =(7+3)+(4+4+2)+5+4=29$.

3) $400+29 =429$.

Umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish. Bir xil songa karrali sonlarni qo'shish uchun umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarib, qavs ichidagi sonlar yig'indisi topiladi va natija umumiy ko'paytuvchiga ko'paytiriladi.

Masalan, $28+20+36+16=4\cdot(7+5+9+4)=4\cdot25=100$.

Ayirish usullari. Ayirish bilan bog'liq hisoblash usullari qo'shish qonunlari va yig'indidan sonni va sondan yig'indini ayirish qoidalariga asoslanadi.

2.1 - xossa. Agar kamayuvchi bir necha birlikka orttirilsa yoki kamaytirilsa, ayirma ham shunchaga ortadi yoki kamayadi. $(\forall a_1,a_2,b\in Z)[(a_1-a_2=c)\Rightarrow((a_1\pm b)-a_2=c\pm b)]$.

2.2-xossa. Agar ayriluvchi bir necha birlikka orttirilsa yoki kamaytirilsa, ayirma shunchaga kamayadi yoki ortadi.

$(\forall a_1,a_2,b\in Z)\ [(a_1-a_2=c)\Rightarrow(a_1-(a_2\pm b)=c\mp b)]$.

2.3-xossa. Agar kamayuvchi va ayriluvchini bir necha birlikka orttirilsa yoki kamaytirilsa, ayirma o'zgarmaydi.

$(\forall a_1,a_2,b\in Z)\ [(a_1-a_2=c)\Rightarrow((a_1\pm b)-(a_2\pm b)=c)]$.

2.4-xossa. Agar kamayuvchi va ayriluvchini bir necha marta orttirilsa yoki kamaytirilsa, ayirma shuncha marta ortadi yoki kamayadi.

$(\forall a_1,a_2,b\in N)[(a_1-a_2=c)\Rightarrow(a_1\cdot b-a_2\cdot b=c\cdot b)\wedge(a_1:b-a_2:b=$
$=c:b)]$.

Bu xossalarning isboti qo'shish xossalari isboti kabi bajariladi.

Ayirishga oid hisoblash usullarini ko'raylik.

Kamayuvchi va ayriluvchini bir necha birlikka orttirish yoki kamaytirish.

Masalan.

$342-26=(342-2)-(26-2)=340-24=316$.

Sonlar yaxlit sonlarga yaqin bo'lganda bu usulni qo'llash juda qulay.

Misol.

$1285-296=(1285+4)-(296+4)=1289-300=1289-(200+100)=$
$=(1289-200)-100=1089-100=989$.

Faqat ayriluvchini yaxlitlash. Ayriluvchi yaxlit songa to'ldiriladi, ayirma topiladi, to'ldirilgan son ayirmaga qo'shiladi.

Misol.

1285–296=1285–((296+4)–4)=1285–(300–4)=(1285–300)+4= =1285–(200+100)+4=(1085–100)+4=985+4=989.

Umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqariga chiqarish. Bir xil songa karrali sonlarni ayirish uchun umumiy ko'paytuvchini qavsdan tashqaruiga chiqarib, qavs ichidagi sonlar ayirmasi topiladi va natija umumiy ko'paytuvchiga ko'paytiriladi.

Misol.

a) 724–148=4·(181–37)=4·144=2·2·144=2·288=576;

b) 91–35–28=7·(13–5–4)=7·4=28.

Ko'paytirishga oid hisoblash usullari. Ko'paytirishga oid hisoblash usullari ko'paytirishning qonunlariga asoslanadi:

1. Ko'paytirishning kommutativligi:

$\forall a, b \in N$ uchun $a \cdot b = b \cdot a$ o'rinli.

2. Ko'paytirishning assotsiativligi.

$\forall a, b, c \in N$ uchun $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$.

3. Ko'paytirishning qo'shishga nisbatan distributivligi

$\forall a, b, c \in N$ uchun $(a+b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$.

3.1-xossa. Agar ko'paytuvchilardan biri bir necha marta orttirilsa, yoki kamaytirilsa, ko'paytma ham shuncha marta ortadi yoki kamayadi.

$(\forall a_1, a_2, \ldots, a_n, b \in N)[(a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = p) \Rightarrow$

$\Rightarrow (a_1 \cdot b) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = p \cdot b) \wedge (a_1 : b) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = p : b)]$.

Isbot. $a_1, a_2, \ldots, a_n \in N$, $b \in N$ va $a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = p$ berilgan bo'lsin. Ko'paytirishning kommutativligi va assotsiativligiga ko'ra:

$(a_1 \cdot b) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (b \cdot a_1) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = b \cdot (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) = p \cdot b$ va

$(a_1 : b) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (a_1 \cdot \frac{1}{b}) \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n = (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) \cdot \frac{1}{b} =$

$= (a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n) : b = p : b$.

3.2-xossa. Agar ko'paytuvchilardan birini biron songa ko'paytirilsa va ikkinchi ko'paytuvchini shu songa bo'linsa, ko'paytma o'zgarmaydi.

3.3-xossa. Agar ko'paytuvchilardan ikki va undan ortig'i bir necha marta orttirilsa, yoki kamaytirilsa, ko'paytma ham shuncha marta ortadi yoki kamayadi, biron sonlarga ko‘paytirilsa, ko‘paytma shu sonlar ko‘paytmasi barobar ortadi.

3.2-3.3-xossalar 3.1-xossa kabi isbot qilinadi.

Ko‘paytmaning yuqoridagi xossalaridan hisoblashning ko‘paytirishga oid usullari kelib chiqadi.

Bo‘laklab ko‘paytirish. Ko‘paytuvchilardan biri ko‘paytuvchilarga ajratilib, 2-ko‘paytuvchini birin-ketin shu ko‘paytuvchilarga ko‘paytirjladi.

Bu usul 2 ning darajalariga ko‘paytirishda qo‘l keladi. 2 ning darajalariga ko‘paytirishni sonni ketma-ket ikkilantirish bilan almashtirish mumkin.

2^n ga ko‘paytirish: $a\cdot 2^n = a\cdot 2\cdot 2\cdot \ldots \cdot 2$ (n marta).

Misol.

a) $948\cdot 4=(948\cdot 2)\cdot 2=(900\cdot 2+40\cdot 2+8\cdot 2)\cdot 2=(1800+80+16)\cdot 2=$
$=1896\cdot 2=1000\cdot 2+800\cdot 2+90\cdot 2+6\cdot 2=2000+1600+180+12=3792$;

b) $474\cdot 8=(474\cdot 2)\cdot 4=948\cdot 4=(948\cdot 2)\cdot 2=1896\cdot 2=3792$;

c) $237\cdot 16 = (237\cdot 2)\cdot 8 = 474\cdot 8 = (474\cdot 2)\cdot 4 = 948\cdot 4 = (948\cdot 2)\cdot 2=$
$= 1896\cdot 2 = 3792$.

Juft sonlarni 5 ga karrali sonlarga ko‘paytirish:

$(2n)\cdot(5k)= (2\cdot 5) \cdot (n\cdot k) =10\cdot(n\cdot k)$

Misol.

a) $24\cdot 15 = (12\cdot 2)\cdot 15= 12\cdot(2\cdot 15)=12\cdot 30 = 360$;

b) $42 \cdot 25 = (42:2) \cdot (25 \cdot 2)=21 \cdot 50 = 1\ 050$;

c) $18 \cdot 45 = (18:2) \cdot (45 \cdot 2) = 9 \cdot 90 = 810$.

Ko‘paytuvchilardan birini bo‘linma shaklida ifodalash.

Bu usul 5 (50, 500) ga ko‘paytirishda qo‘l keladi

3.4-qoida. 5 (50, 500)ga ko‘paytirish. Sonni 5 (50, 500)ga ko‘paytirish uchun, uni 10 (100, 1 000) ga ko‘paytirib natijani 2 ga bo‘lish kifoya.

Misol.

a) $387\cdot 5 = (387 \cdot 10) : 2 = 3870 : 2 = 3000 : 2 + 800 : 2+70:2=$
$= 1500 + 400 + 35 = 1935$;

b) $347\cdot 50 =(347 \cdot 100): 2=34\ 700 : 2= 30\ 000 : 2 + 4\ 000 : 2+$
$+700 : 2 = 15\ 000 +2\ 000 + 350= 17\ 350$;

c) $237 \cdot 500 = (237 \cdot 1\,000) : 2 = 237\,000 : 2 = 200\,000 : 2 + 30\,000 : 2 +$
$+ 7\,000 : 2 = 100\,000 + 15\,000 + 3\,500 = 118\,500.$

3.4 – qoidaning umumlashmasi keyingi qoidada ifodalaniladi .

$5 \cdot 10^n$ ko‘paytirish ($n \geq 0$). Sonni $5 \cdot 10^n$ ga ko‘paytirish uchun, uni 10^{n+1}ga ko‘paytirib natijani 2 ga bo‘lish kifoya.

Isbot. a – berilgan son bo‘lsin. $(a \cdot 10^{n+1}):2$ ifodasi qoidaga asoslanib, sodda $a \cdot 5 \cdot 10^n$ shakliga ega bo‘ladi.

Demak, $a \cdot 5 \cdot 10^n = (a \cdot 10^{n+1}) : 2.$

25 (250, 2 500) ga ko‘paytirish. Sonni 25 (250, 2 500) ga ko‘paytirish uchun, uni 100 (1 000, 10 000) ga ko‘paytirib 4 ga bo‘lish kifoya.

Misol.

a) $137 \cdot 25 = (137 \cdot 100) : 4 = 13\,700 : 4 = (13\,700 : 2) : 2 =$
$= (10\,000 : 2 + 3\,000 : 2 + 700 : 2) : 2 = (5\,000 + 1\,500 + 350) : 2 =$
$= 6\,850 : 2 = 6\,000 : 2 + 800 : 2 + 50 : 2 = 3\,000 + 400 + 25 =$
$= 3\,425;$

b) $279 \cdot 250 = (279 \cdot 1\,000) : 4 = 279\,000 : 4 = (279\,000 : 2) : 2 =$
$= 139\,500 : 2 = 69\,750;$

c) $328 \cdot 2500 = (328 \cdot 10\,000) : 4 = 3\,280\,000 : 4 = (3\,280\,000 : 2) : 2$
$= 1\,640\,000 : 2 = 820\,000.$

Qoidaning umumlashmasi keyingi qoidada ifodalaniladi .

$25 \cdot 10^n$ ga ko‘paytirish ($n \geq 0$). Sonni $25 \cdot 10^n$ga ko‘paytirish uchun, uni 10^{n+2} ga ko‘paytirib, natijani 4 ga bo‘lish kifoya.

Qoidaning isboti oldingi qoidaga o‘xshash.

125 (1 250)ga ko‘paytirish. Sonni 125 (1 250)ga ko‘paytirish uchun, uni 1000 (10000)ga ko‘paytirib natijani 8 ga bo‘lish kifoya.

Misol.

a) $398 \cdot 125 = (398 \cdot 1\,000) : 8 = 398\,000 : 8 = (398\,000 : 2) : 4 =$
$= 199\,000 : 4 = (199\,000 : 2) : 2 = 99\,500 : 2 = 49\,750;$

b) $816 \cdot 1\,250 = (816 \cdot 10\,000) : 8 = 8\,160\,000 : 8 = (8\,160\,000 : 2) : 4 =$
$= (4\,080\,000 : 2) : 2 = 2\,040\,000 : 2 = 1\,020\,000.$

Qoidaning umumlashmasi keyingi qoidada ifodalaniladi.

$125 \cdot 10^n$ ga ko‘paytirish ($n \geq 0$). Sonni $125 \cdot 10^n$ ga ko‘paytirish uchun, uni 10^{n+3}ga ko‘paytirib natijani 8 ga bo‘lish kifoya.

75 ga ko'paytirish. Sonni 75 ga ko'paytirish uchun, uni 4 ga bo'lib, bo'linmani 3ga ko'paytirib va natijani 100 ga ko'paytirish kifoya.

a – berilgan son bo'lsin. $(a : 4) \cdot 3 \cdot 100$ ifodasi, qoidaga asoslanib sodda $a \cdot 75$ shakliga ega bo'ladi. Demak,

$a \cdot 75 = (a : 4) \cdot 3 \cdot 100.$

Misol. $804 \cdot 75=(804:4) \cdot 3 \cdot 100=201 \cdot 3 \cdot 100=603 \cdot 100=60\,300.$

Musbat sonni 55ga ko'paytirishning qiziqarli qoidasi mavjud.

Musbat sonni 55 ga ko'paytirish. Musbat sonni 55 ga ko'paytirish uchun, uni 2 ga bo'lib, bo'linmani 100 ga va 10 ga ko'paytirib, keyin ikkala natijani qo'shish kifoya.

Isbot. a – berilgan son bo'lsin. $(a:2) \cdot 100+(a:2) \cdot 10$ ifodasi, qoidaga asoslanib sodda 55a shakliga ega bo'ladi. Demak, $a \cdot 55=(a:2) \cdot 100+(a:2) \cdot 10.$

Misol.

$968 \cdot 55=968:2 \cdot (100+10)=484 \cdot (100+10)=48400+4840=53\,240.$

Bir ko'paytmaning ko'payuvchisini ikkita sonning ayirmasi shaklida ifodalanishi. Bir ko'paytmaning ko'payuvchisini ikkita sonning ayirmasi shaklida ifodalanishi uchun, ikkinchi ko'paytmani kamayuvchi va ayriluvchiga ko'paytiriladi, keyin ko'paytmaning ayirmasi topiladi.

Berilgan usul qator qoidalarni ifodalashga imkon beradi.

9 (99, 999)ga ko'paytirish. Sonni 9 (99, 999)ga ko'paytirish uchun, uni 10 (100, 1 000) marta oshirish va olingan natijadan sonning o'zini ayirish kifoya.

Isbot. a – berilgan son bo'lsin. 9 ga ko'paytirish qoidasiiga asoslanib, $a \cdot 10 - a$ ifodasi sodda $a \cdot 9$ shakliga ega bo'ladi. Demak, $a \cdot 9 = a \cdot 10 - a$.

99 va 999 ga ko'paytirish qoidalari o'xshash isbotlanadi.

Misol.

a) $87 \cdot 9 = 87 \cdot 10 - 87 = 870 - 87 = 783;$

b) $469 \cdot 99 = 469 \cdot 100 - 469 = 46\,900 - 469=46431;$

c) $3\,726 \cdot 999 = 3\,726 \cdot 1\,000 - 3\,726 = 3\,726\,000 - 3\,726 =$
$=3\,722\,274.$

10^n -1(n $\geq$ 4) ga ko'paytirish qoidalarini huddi shunday ifodalash va isbotlash mumkin.

9, 99 va 999 ga ko'paytirishning yana boshqa qoidalari mavjud.

9 ga ko'paytirish. Sonni 9 ga ko'paytirish uchun, shu sondan uning o'nliklar sonini birga oshirib ayirish va hosil bo'lgan ayirmaga uning birdan o'ngacha raqamining to'ldiruvchisini qo'shib qo'yish kifoya.

Isbot. $10 \cdot a + b$ – berilgan son bo'lsin. $((10 \cdot a+ b)-(a+1)) \cdot 10 + +10 - b$ ifodasi, qoidaga asoslanib sodda $9 \cdot (10 \cdot a + b)$ shakliga ega bo'ladi. Demak, $(10 \cdot a+b) \cdot 9=((10 \cdot a+b)-(a+1)) \cdot 10+10-b$.

Misol.

$176 \cdot 9 = (176 - 18) \cdot 10 + (10 - 6)= 158 \cdot 10 + 4 = 1\ 584.$

99 ga ko'paytirish. Sonni 99ga ko'paytirish uchun, shu sondan uning yuzliklar sonini birga oshirib ayirish va shu sonni oxirgi 2 ta raqamidan hosil bo'lgan songa uni yuzgacha bo'lgan to'ldiruvchisini qo'shib qo'yish kifoya.

Isbot. $100a + 10b + c$ – berilgan son bo'lsin. $((100a + 10b + c) - (a+1)) \cdot 100 + (100 - 10b - c)$ ifodasi, qoidaga asoslanib sodda, $99 \cdot (100a + 10b + c)$ shakliga ega bo'ladi. Demak, $(100a+10b+c) \cdot 9=((100a+10b+c)-(a+1)) \cdot 100+(100-10b-c)$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

Misol. $462 \cdot 99$ ifodaning qiymatini topish uchun quyidagilarni amalga oshiramiz:

1) Berilgan sondan yuzliklar sonini 1 ga oshirilganidan ayiramiz : 462 - 5=457;

2) Berilgan sonning oxirgi 2 ta raqamidan tashkil topgan to'ldiruvchisini 100 gacha to'ldiramiz: 100 - 62 = 38;

3) Avvalgi natijaga to'ldiruvchini qo'shib qo'yamiz va javobga ega bo'lamiz: $462 \cdot 99 = 45\ 738$.

999 ga ko'paytirish. Sonni 999ga ko'paytirish uchun, shu sondan uning mingliklar sonini birga oshirib ayirish va shu sonni oxirgi 3 ta raqamidan hosil bo'lgan songa uni minggacha bo'lgan to'ldiruvchisini qo'shib qo'yish kifoya.

Misol. $2\ 453 \cdot 999$ ifodaning qiymatini topish uchun quyidagilarni amalga oshiramiz:

1) Berilgan sondan mingliklar sonini 1 ga oshirilganidan ayiramiz: $2\ 453 - (2 + 1) = 2\ 450$;

2) Berilgan sonning oxirgi 3 ta raqamidan tashkil topgan to'ldiruvchisini 1000 gacha to'ldiramiz: $1\ 000-453 = 547$;

3) Avvalgi natijaga to'ldiruvchini qo'shib qo'yamiz va javobga ega bo'lamiz: $2\ 453 \cdot 999 - 2\ 450\ 547$.

$10^n - 1$ $(n \geq 4)$ ga ko'paytirish qoidalarini huddi shunday ifodalash va isbotlash mumkin.

98 (97, 96) ga ko'paytirish. Sonni 98 (97, 96) ga ko'paytirish uchun, uni yuzga ko'paytirish va hosil bo'lgan natijadan sonni ikkilanganini (uchlanganini, to'rtlanganini) ayiramiz.

Isbot. a – berilgan son bo'lsin. $a \cdot 100 - 2 \cdot a$ ifodasi, qoidaga asoslanib sodda, $a \cdot 98$ shakliga ega bo'ladi. Shu kabi:
$a \cdot 100 - 3 \cdot a = a\,(100 - 3) = a \cdot 97$;
$a \cdot 100 - 4 \cdot a = a\,(100 - 4) = a \cdot 96$. Demak, $a \cdot 98 = a \cdot 100 - 2a$, $a \cdot 97 = a \cdot 100 - 3a$, $a \cdot 96 = a \cdot 100 - 4a$.

Misol,

a) $523 \cdot 98 = 523 \cdot 100 - 2 \cdot 523 = 52\ 300 - 1\ 046 = 51\ 254$;

b) $487 \cdot 97 = 487 \cdot 100 - 3 \cdot 487 = 48\ 700 - 1\ 461 = 47\ 239$;

c) $258 \cdot 96 = 258 \cdot 100 - 4 \cdot 258 = 25\ 800 - 1032 = 24\ 768$.

998 (997, 996) ga ko'paytirish. Sonni 998 (997, 996) ga ko'paytirish uchun, uni mingga ko'paytirish va hosil bo'lgan natijadan sonni ikkilanganini (uchlanganini, to'rtlanganini) ayiramiz

Qoidaning isboti oldingi qoidalarga o'xshash.

Misol.

a) $445 \cdot 998 = 445 \cdot 1\ 000 - 445 \cdot 2 = 445\ 000 - 890 = 444\ 110$;

b) $247 \cdot 997 = 247 \cdot 1000 - 247 \cdot 3 = 247\ 000 - 741 = 246\ 259$;

c) $836 \cdot 996 = 836 \cdot 1\ 000 - 836 \cdot 4 = 836\ 000 - 3\ 344 =$
$= 832\ 656$.

10^n-2, 10^n-3, 10^n-4 $(n \geq 4)$ ga ko'paytirish qoidalarini huddi shunday ifodalash va isbotlash mumkin.

Ko'paytmaning ko'paytuvchilardan birini ikkita son yig'indisi sifatida ifodalanilishi. Ko'paytmaning ko'paytuvchilaridan birini ikkita son yig'indisi sifatida ifodalaniladi, ikkinchi ko'paytuvchi har bir qo'shiluvchiga ko'paytiriladi, keyin hosil bo'lgan ko'paytmalar qo'shiladi.

Berilgan usul qator qoidalarni ifodalashga imkon beradi.

11 (101, 1001) ga ko'paytirish. Sonni 11 (101,1001) ga ko'paytirish uchun, uni 10 baravar oshirib hosil bo'lgan natijaga shu sonni qo'shib qo'yish kifoya.

Isbot. a – berilgan son bo'lsin. $a \cdot 10 + a$ ifodasi, 11ga ko'paytirish qoidasiga asoslanib sodda, $a \cdot 11$ shakliga ega bo'ladi. Demak, $a \cdot 11 = a \cdot 10 + a$.

101 va 1001ga ko'paytirish qoidalari xuddi shunday isbotlanadi.

Misol,

a) $87 \cdot 11 = 87 \cdot 10 + 87 = 870 + 87 = 957$;

b) $294 \cdot 101 = 294 \cdot 100 + 294 = 29\,400 + 294 = 29\,694$; .

c) $6\,397 \cdot 1\,001 = 6\,397 \cdot 1\,000 + 6\,397 = 6\,397\,000 + 6397 -$
$- 6\,403\,397$.

$10^n + 1$ $(n \geq 4)$ ga ko'paytirish qoidalarini huddi shunday ifodalash va isbotlash mumkin.

11, 101, 99ga ko'paytirishning qiziqarli qoidasi mavjud.

Ikki xonali sonni 11ga ko'paytirish. Ikki xonali sonni 11ga ko'paytirish uchun, uning raqamlarining orasiga raqamlarning yig'indisini qo'yish kifoya. Agar hosil bo'gan yig'indi ikki xonali bo'lsa, birliklarni berilgan sonning raqamlari orasiga qo'yiladi, o'nliklari esa birinchi raqamga qo'shiladi.

Isbot. $10a + b$– berilgan son bo'lsin. $a \cdot 10^2 + (a + b) \cdot 10 + b$ ifodasi, qoidaga asoslanib, sodda $11(10a + b)$ shakliga ega bo'ladi. Demak, $(10a+b) \cdot 11 = a \cdot 10^2 + (a + b) \cdot 10 + b$.

Misol. $53 \cdot 11$ ifodaning qiymatini topish uchun quyidagilarni amalga oshiramiz.

Yig'indini topamiz: $5 + 3 = 8$;

1) 53 sonining raqamlarining orasini ochib, 8 raqamini qo'yamiz va javobga ega bo'lamiz: $53 \cdot 11 = 583$.

Misol. $58 \cdot 11$ ifodaning qiymatini topish uchun quyidagilarni amalga oshiramiz:

1) Yig'indini topamiz: $5 + 8 = 13$;

2) 58 sonining raqamlarining orasini ochib, 3 raqamini qo'yamiz, o'nlikni birga oshirib ($5 + 1 = 6$) va javobga ega bo'lamiz: $58 \cdot 11 = 638$.

Ikki xonali sonni 101 ga ko'paytirish. Ikki xonali sonni 101ga ko'paytirish uchun o'sha sonni o'n tarafga ko'chirib qo'yish kifoya.

Isbot. $10a + b$ – berilgan son bo'lsin. $(10a+b) \cdot 10^2 + 10a+b$ ifodasi, qoidaga asoslanib, sodda $(10a+ b) \cdot 101$ shakliga ega bo'ladi. Demak, $(10a+ b) \cdot 101=(10a+ b) \cdot 100+ 10a + b$.

Misol. $72 \cdot 101 = 7272$.

Ikki xonali sonni 99ga ko'paytirish. Ikki xonali sonni 99ga ko'paytirish uchun oldidagi songa uning 100gacha bo'lgan to'ldiruvchisini yozib qo'yish kifoya.

Isbot. $10a + b$ – berilgan son bo'lsin.

$(10a + b - 1) \cdot 10^2 + (100 - 10a - b)$, ifodasi, qoidaga asoslanib, sodda $99 \cdot (10a + b)$ shakliga ega bo'ladi.

Demak, $(10a +b) \cdot 99 = (10a + b - 1) \cdot 100 + (100 - 10a- b)$.

Misol. $73 \cdot 99 = 7\,227$.

9 ta o'nlikdan iborat ikki xonali sonni ko'paytirish. 9 ta o'nlikdan iborat ikki xonali sonni ko'paytirish uchun, ikkinchi sonning 100gacha bo'lgan to'ldiruvchisini topib, birinchi sondan ayirib va natijaga berilgan sonlarning 100 gacha bo'lgan to'ldiruvchilarini yozib qo'yish kifoya.

Isbot. $90 + a$ va $90 + b$ – berilgan son bo'lsin, $10 - a$ va $10 - b$ – ularning to'ldiruvchilari bo'lsin.

Qoidaga asoslanib $(90 + a - (10 - b)) \cdot 100 + (10 - a)(10 - b) =$ $=(90 + a - 10 + b)\,100 + 100 - 10b - 10a + ab = 9\,000 + 100a -$ $-1000+ 100b+ 100 - 10b - 10a+ ab = 8\,100 + 90\,(a + b) + ab=$ $=(90 + a)(90 + b)$ ifodasini tuzamiz va shaklini almashtiramiz. Demak, $(90 + a)(90 + b) = (90+a - (10 - b)) \cdot 100+(10- a)(10 - b)$.

Misol. $94 \cdot 97$ ifodaning qiymatini topish uchun quyidagilarni amalga oshiramiz:

1) Birinchi sondan ikkinchi sonning yuzgacha to'ldiruvchisini ayiramiz:

94 - 3 = 91;

2) Berilgan sonlarning yuzgacha bo'lgan sonlarning ko'paytmasini topamiz:

(100-94) · (100-97) = 6·3 = 18;

3) Ko'paytmani avvalgi natijaga qo'shib natijaga ega bo'lamiz:

94 ·97 = 9 118.

Yigirmadan kichik sonlarni ko'paytirish. Yigirmadan kichik ikki sonni ko'paytirish uchun, birinchi songa ikkinchi sonning birliklarini qo'shib, natija oxiriga nolni yozib qo'yib va birliklar ko'paytmasini qo'shish kifoya.

Isbot. $A_1 = 10 + a_1$ va $A_2 = 10 + a_2$ – berilgan son bo'lsin. Qoidaga asoslanib $(10 + a_1 + a_2) \cdot 10 + a_1 \cdot a_2 = 100 + 10\,a_1 + 10\,a_2 + a_1 \cdot a_2 = 100 + 10\,(a_1 + a_2) + a_1 \cdot a_2 = A_1 \cdot A_2$ ifodasini tuzamiz va shaklini almashtiramiz. Demak, $A_1 \cdot A_2 = (10 + a_1 + a_2) \cdot 10 + a_1 \cdot a_2$.

Misol. 18·13 ifodaning qiymatini topish uchun quyidagilarni amalga oshiramiz:

1) Birinchi songa ikkinchi sonning birliklarini qo'shamiz:

18 + 3=21;

2) Natijaning oxiriga nolni yozib qo'yamiz va birliklarning ko'paytmasini qo'shamiz, natijaga ega bo'lamiz:

210 + 8 ·3 = 234.

Bo'lish usullari. Bo'lish uchun ratsional hisoblash usullari ko'paytirish qoidalari va quyidagi keyingi (bo'linmaning o'zgarishlari) xossalarga asoslanadi:

1-xossa. Agar bo'linuvchini bir necha marta oshirsak yoki kamaytirsak, bo'linma ham mos ravishda oshadi yoki kamayadi, ya'ni: $(\forall a_1, a_2 \in Z,\ b \in N)\ [(a_1 : a_2 = d) \Rightarrow [((a_1 \cdot b) : a_2 = d \cdot b) \wedge ((a_1 : b) : a_2 = d : b)]$.

Isbot. $a_1, a_2 \in Z$, $b \in N$, $a_1 : a_2 = d$ bo'lsin. Ko'paytirish va bo'lish amallarning o'zaro bog'lanishi va ko'paytmaning assotsiativ va kommutativ qoidalariga asoslanib, $(a_1 \cdot b) : a_2 = (a_1 \cdot b) \cdot \frac{1}{a_2} = a_1 \cdot (b \cdot \frac{1}{a_2}) = a_1 \cdot (\frac{1}{a_2} \cdot b) =$

$= (a_1 \cdot \frac{1}{a_2}) \cdot \mathrm{b} = (a_1 : a_2) \cdot b =$ d·b va

$(a_1 : b) : a_2 = (a_1 \cdot \frac{1}{b}) \cdot \frac{1}{a_2} = a_1 \cdot (\frac{1}{b} \cdot \frac{1}{a_2}) = a_1 \cdot (\frac{1}{a_2} \cdot \frac{1}{b}) =$

$= (a_1 \cdot \frac{1}{a_2}) \cdot \frac{1}{b} = (a_1 : a_2) \cdot \frac{1}{b} =$ d:b ga ega bo‘lamiz.

Demak, $(a_1 \cdot b) : a_2 =$ d·b va $(a_1 : b) : a_2 =$d:b.

2-xossa. Agar bo‘luvchini bir necha marta oshirsak (kamaytirsak), bo‘linma ham mos ravishda kamayadi (oshadi).

$a_1 : (a_2 \cdot b) =$ d:b va $a_1 : (a_2 : b) =$d·b.

Xossaning isboti 1-xossaga o‘xshash.

Berilgan xossaga asoslangan hisoblash jarayonini soddalashtirishga yordam beruvchi usullarni ko‘rib chiqamiz.

Xona birliklari bo‘yicha sonlarni bo‘lish. Bo‘liniluvchini xona birliklari bo‘yicha bo‘lishni yuqori xona birliklaridan boshlanadi.

2 ga bo‘lish. Ikkiga bo‘lish yuqori xona birliklaridan boshlaniladi.

Misol. 374 : 2 = 300 : 2 + 70 : 2 + 4 : 2 = 150 + 35 + 2 = 187.

Bo‘luvchilarni ko‘paytuvchilarga ajratish. Bo‘luvchini bir nechta ko‘paytuvchilar ko‘paytmasi sifatida ko‘rsatiladi, keyin bo‘linuvchi ketma-ket ravishda shu ko‘paytuvchilarga bo‘linadi.

Quyidagi usul qator qoidalarni ifodalashga imkon beradi.

4 (8,16) ga bo‘lish. 4 (8, 16) ga bo‘lish ikki (uch, to‘rt) baravar ikkiga bo‘lishga keltiriladi.

Misol.

a) 1948 : 4 = 1948 : 2 : 2 = (1000:2 + 900:2 + 40:2 + 8:2):2 = =(500 + 450 + 20 + 4):2 = 974 :2 = 900:2+70:2+4:2 = 450+35+2= = 487;

b) 104 : 8 = (104 : 2): 4 = (52 :2): 2 = 26 : 2 = 13;

c) 256 : 16 = (256 : 2): 8 = (128 : 2): 4 = (64: 2): 2 = 32:2 = =16.

Ushbu qoidaning umumlashmasi quyidagi qoida bo‘ladi.

2^n (n $\geq$2) ga bo‘lish. 2^n ga bo‘lish n-baravar 2 ga bo‘lishga keltiriladi. a – berilgan son bo‘lsin. Berilgan qoidaga asoslanib $(((a : 2): 2): 2...): 2$, bo‘luvchilar sifatida n ta “ikkilar” bor. Sodda $a : 2^n$ shakliga ega bo‘ladi.

Bo'luvchining ikkita sonning bo'linmasi sifatida ko'rinishi. Bo'luvchi ikkita sonning bo'linmasi sifatida ko'rsatiladi, bo'linuvchi ikkinchi songa ko'paytiriladi, keyin shu natija birinchi songa bo'linadi.

Quyidagi usul qator qoidalarni ifodalashga imkon beradi.

5 (50, 500) ga bo'lish. Sonni 5ga bo'lish uchun, uni 2 ga ko'paytirish va natijani 10 (100, 1000) ga bo'lish kifoya.

Misol.

a) $465 : 5 = (465 \cdot 2) : 10 = 930 : 10 = 93$;

b) $21\,700 : 50 = (21\,700 \cdot 2) : 100 = 43\,400 : 100 = 434$;

c) $383\,000 : 500 = (383\,000 \cdot 2) : 1\,000 = 766\,000 : 1\,000 = 766$.

Ushbu qoidaning umumlashmasi quyidagi qoida bo'ladi.

$5 \cdot 10^n$ ga bo'lish ($n \geq 0$).

Sonni $5 \cdot 10^n$ bo'lish uchun, uni 2 ga ko'paytirish va natijani 10^{n+1} bo'lish kifoya.

a – berilgan son bo'lsin. $(a \cdot 2) \cdot 10^{n+1}$ ifodasi, qoidaga asoslanib, sodda $a : (5 \cdot 10^n)$ shakliga ega bo'ladi. Demak, $a : (5 \cdot 10^n), = (a \cdot 2) \cdot 10^{n+1})$. Shuni isbotlash talab qilingan edi.

25 (250) ga bo'lish. Sonni 25 (250) ga bo'lish uchun, uni 4 ko'paytirish va 100 (1 000) ga bo'lish kifoya.

Misol.

a) $14\,100 : 25 = (14\,100 \cdot 4) : 100 = (14\,100 \cdot 2 \cdot 2) : 100 =$
$= (28\,200 \cdot 2) : 100 = 56\,400 : 100 = 564$;

b) $521\,000 : 250 = (521\,000 \cdot 4) : 1000 = (521000 \cdot 2 \cdot 2) : 1000 =$
$= (1\,042\,000 \cdot 2) : 1\,000 = 2\,084\,000 : 1000 = 2\,084$.

Ushbu qoidaning umumlashmasi quyidagi qoida bo'ladi.

$25 \cdot 10^n$ ga bo'lish ($n \geq 0$). Sonni $25 \cdot 10^n$ ga bo'lish uchun, uni 4 ga ko'paytirish va natijani 10^{n+2} ga bo'lish kifoya.

125 (1 250)ga bo'lish. Sonni 125 ga bo'lish uchun, uni 8 ga ko'paytirish va 1 000 (10 000)ga bo'lish kifoya.

Misol.

a) $201000 : 125 = (201000 \cdot 8) : 1000 = ((201000 \cdot 2) \cdot 4) : 1000 =$
$=(402\,000 \cdot 2) \cdot 2 : 1000 = (804000 \cdot 2) : 1000 = 1608000 : 1\,000 =$
$=1608$;

b) $405000:1250 = (405000\cdot 8):10000=(405000 \cdot 2) \cdot 4): 10000= = ((810\,000 \cdot 2) \cdot 2): 10\,000 = (1\,620\,000 \cdot 2) : 10\,000 = 3\,240\,000: : 10\,000 = 324$.

Qoidaning umumlashmasi quyidagi qoida bo‘ladi.

$125 \cdot 10^n$ ga bo‘lish ($n \geq 0$).

Sonni $125 \cdot 10^n$ ga bo‘lish uchun, uni 8ga ko‘paytirish va natijani 10^{n+3}ga bo‘lish kifoya.

75 ga bo‘lish. Sonni 75 ga bo‘lish uchun, uni 3 ga bo‘lib, bo‘linmani 4 ga ko‘paytirish va natijani 100ga bo‘lish kifoya.

a – berilgan son bo‘lsin. $((a : 3) \cdot 4): 100$ ifodasi, qoidaga asoslanib, sodda $a : 75$ shakliga ega bo‘ladi. Demak,

$a : 75 = ((a : 3) \cdot 4): 100.$

Misol. $60900:75=((60900:3)\cdot 4):100=(20300\cdot 4):100=81200:100= =812$.

O‘nli va boshqa pozitsion sanoq sistemalarida arifmetik amallarni bajarishga doir misollar

Topshiriqlarda ifodalarning qiymatlari qaysi sanoq sistemasida berilgan bo‘lsa, shu sistemada amal bajarib, natija boshqa sanoq sistemasiga o‘tkazilsin.

1-misol. $42_5 \cdot 324_5 + 213_5 = x_8$

Yechish. 5-lik sanoq sistemasi uchun bir xonali sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish jadvalini tuzamiz.

Qo‘shish jadvali

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	10
2	2	3	4	10	11
3	3	4	10	11	12
4	4	10	11	12	13

Ko‘paytirish jadvali

x	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	11	13
3	0	3	11	14	22
4	0	4	13	22	31

Jadvaldan foydalangan holda,

1) $42_5 \cdot 324_5$ning qiymatini topamiz:

$$\begin{array}{r} \times\, 324_5 \\ \underline{42_5} \\ +\,1203 \\ \underline{2411} \\ 30313_5 \end{array} \qquad 2) \begin{array}{r} +\,30313_5 \\ \underline{213_5} \\ 31031_5 \end{array}$$

Shunday qilib, ifodaning qiymati 31031_5 ga teng.

3) $31031_5 \Rightarrow x_8$ sonlarni birinchi sanoq sistemasidan ikkinchisiga o‘tkazish uchun dastlab berilgan sonni 10 lik sanoq sistemasiga quyidagi formula orqali keltiramiz.

$$n = n_k n_{k-1} \ldots n_0, \qquad n_k 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + \ldots + n_0;\ 31031_5 \Rightarrow x_{10}.$$

1-usul: 31031_5 asosning darajalarini belgilab olamiz

$$\begin{array}{l} \scriptstyle 4\,3\,2\,1\,0 \\ 31031_5 = 3\cdot5^4 + 1\cdot5^3 + 0\cdot5^2 + 3\cdot5^1 + 1\cdot5^0 = 3\cdot625 + 1\cdot125 + 0\cdot25 + 3\cdot5 + 1\cdot1 = \\ = 1875 + 125 + 15 + 1 = 2016_{10} \end{array}$$

2- usul: $31031_5 \Rightarrow x_{10} \Rightarrow 2016_{10}$

$3\cdot5+1=16$

$16\cdot5+0=80$

$80\cdot5+3=403$

$403\cdot5+1=2016$

4) $31031_5 \Rightarrow x_8$. Sonni 8 ga ketma-ket qoldiqli bo‘lamiz:

```
_2016| 8
  16   _252| 8
 _41    24   _31| 8
  40   _12    24  3
 _16     8    7
  16     4
   0
```

Qoldiqlarni teskari tartibda yozamiz. $2016_{10} \Rightarrow x_8 \Rightarrow 3740_8$

8-lik sistemadagi son hosil bo‘ldi. Demak, $31031_5 \Rightarrow 3740_8$.

Javob: $x_8 = 3740_8$

Nazorat uchun savollar

1. Hisoblashning qulay usullari haqida nima bilasiz?
2. Qo‘shishning qulay usullarini aytib bering.
3. Ayirishning qulay usullarini aytib bering.
4. Ko‘paytirishning qulay usullarini aytib bering.
5. Bo‘lishning qulay usullarini aytib bering.

Topshiriqlar

Amallarni bajaring.

1. $1221_3 \cdot (2212 - 1220_3) \Rightarrow x_5$.
2. $573_8 \cdot 34_8 + 1763_8 \Rightarrow x_6$.
3. $34_5 \cdot (4321_5 + 2042_5) \Rightarrow x_7$.
4. $4203_5 + 2132_5 - 24_5 \cdot 13_5 \Rightarrow x_9$.
5. $12134_5 - 34_5 \cdot 14_5 \Rightarrow x_3$.
6. $1201_3 + 2122_3 \cdot 201_3 \Rightarrow x_6$.
7. $(45704_8 - 62102_8) \cdot 4_8 \Rightarrow x_7$.
8. $(122_3 + 212_3) \cdot 22_3 \Rightarrow x_2$.
9. $342_5 \cdot 111_5 + 134_5) \Rightarrow x_8$.
10. $75504_8 + 34021_8 - 23_8 - 23_8 \cdot 7_8 \Rightarrow x_9$

Sonlar ustida amallarni bajaring.

1. $4342_5 + 4221_5 \Rightarrow x_7$
2. $5032_9 + 2106_9 \Rightarrow x_6$
3. $6235_7 + 3463_7 \Rightarrow x_5$
4. $42401_5 - 13432_5 \Rightarrow x_3$
5. $12034_5 + 3444_5 \Rightarrow x_2$
6. $110101_2 + 10101_2 \Rightarrow x_3$
7. $42401_5 - 13432_5 \Rightarrow x_4$
8. $6235_7 + 1235_7 \Rightarrow x_6$
9. $5032_9 + 2106_9 \Rightarrow x_8$
10. $2102_3 \cdot 21_3 \Rightarrow x_2$
11. $120101_3 : 102_3 \Rightarrow x_2$
12. $2143_5 - 334_5 \Rightarrow x_3$
13. $3203_5 + 263_5 \Rightarrow x_2$
14. $4203_5 + 2132_5 \Rightarrow x_4$
15. $4212_7 + 1132_7 \Rightarrow x_3$
16. $2303_9 + 2112_9 \Rightarrow x_9$
17. $4284_5 + 2062_5 \Rightarrow x_6$
18. $1653_5 + 2132_5 \Rightarrow x_4$
19. $4203_6 + 2122_6 \Rightarrow x_8$
20. $4233_5 + 2152_5 \Rightarrow x_2$

VII BOB. SONLARNING BO‘LINISHI

7.1. Nomanfiy butun sonlar to‘plamida bo‘linish munosabatining ta’rifi va xossalari

Bo‘linuvchanlik munosabati. Ma’lumki, butun nomanfiy sonlarni har doim ham ayirib va bo‘lib bo‘lmaydi. Ammo butun nomanfiy a va b sonlari ayirmasining mavjudligi haqidagi masala oson yechiladi, ya’ni $a \geq b$ ni aniqlash yetarli. Bo‘lish uchun esa bunday umumiy shart yo‘q. Bu bo‘linish alomatlarini topish uchun bo‘linuvchanlik munosabati tushunchasini aniqlashtirish kerak.

Butun nomanfiy a son va b natural son berilgan bo‘lsin

1-ta’rif. Agar a ni b ga qoldiqli bo‘lganda, qoldiq nolga teng bo‘lsa, b soni a sonining bo‘luvchisi deyiladi.

2-ta’rif. Agar $a \in N_0$ va $b \in N$ sonlar uchun shunday $q \in N_0$ son topilsaki, $a=b \cdot q$ tenglik bajarilsa, a soni b songa bo‘linadi deyiladi va $a \vdots b$ kabi yoziladi.

Masalan, 6 soni 24 sonining bo‘luvchisidir, chunki shunday butun nomanfiy $q=4$ son mavjudki, uning uchun $24=6 \cdot 4$ bo‘ladi.

“Berilgan sonning bo‘luvchisi” terminini “bo‘luvchi” terminidan ajrata bilish kerak. Masalan, 25 ni 4 ga bo‘lganda 6 soni bo‘luvchi deyiladi, lekin bu son 25 ning bo‘luvchisi emas. Agar 25 ni 5 ga bo‘lsak, bunda “bo‘luvchi” va “berilgan sonning bo‘luvchisi” terminlari bitta narsani anglatadi.

b soni a sonining bo‘luvchisi bo‘lganda a soni b ga karrali yoki a soni b ga bo‘linadi deyiladi va $a \vdots b$ kabi yoziladi.

$a \vdots b$ yozuv bo‘linuvchanlik munosabati yozuvidir, bu yozuv a va b sonlari ustida bajariladigan amalni ko‘rsatmaydi, ya’ni $a \vdots b = c$ deb yozib bo‘lmaydi.

Berilgan sonning bo‘luvchisi shu sondan katta bo‘lmagani uchun uning bo‘luvchilari to‘plami chekli. Masalan, 24 sonining hamma bo‘luvchilarini qaraylik. Ular chekli to‘plamni hosil qiladi: $\{1,2,3,4,6,8.12,24\}$.

Bo‘linuvchanlik munosabati xossalari. Bo‘linuvchanlik munosabati qator xossalarga ega.

1-teorema. 0 soni ixtiyoriy natural songa bo'linadi, ya'ni $(\forall b\in N)\ 0\vdots b$

Isbot. Haqiqatan ham, ixtiyoriy $b\in N$ uchun shunday $0\in N_0$ topildiki, $0=b\cdot 0$. Bundan bo'linuvchanlik ta'rifiga ko'ra $0\vdots b$.

2-teorema. Ixtiyoriy natural son nolga bo'linmaydi, ya'ni $(\forall a\in N)\ a\vdots 0$ bajarilmaydi.

Isbot. Aytaylik, $a\in N$ bo'lsin. Ixtiyoriy $b\in N_0$ soni uchun $0\cdot b=0$ bo'lganligidan, b ning hech bir qiymati uchun $a = 0\cdot b$ tenglik bajarilmaydi, chunki $a\neq 0$. Demak, a soni 0 ga bo'linmaydi.

3-teorema. Ixtiyoriy son 1 ga bo'linadi, ya'ni $(\forall a\in N_0)\ a\vdots 1$.

Isbot. Ixtiyoriy $a\in N_0$ soni uchun shunday $a\in N_0$ topildiki, $a=1\cdot a$, bundan esa a ning 1 ga bo'linishi kelib chiqadi.

4-teorema. Bo'linuvchanlik munosabati refleksivdir, ya'ni har qanday natural a son o'ziga bo'linadi $a\vdots a$.

Isbot. Har qanday natural a son uchun $a=a\cdot 1$ tenglik o'rinli. Bu degani, shunday q=1 son mavjudki, uning uchun $a=a\cdot 1$, bundan bo'linuvchanlik munosabati ta'rifiga ko'ra $a\vdots a$.

5-teorema. Agar $a\vdots b$ va $a>0$ bo'lsa, u holda $a\geq b$ bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham $a\vdots b$ bo'lsa, u holda $a=bc$, bu yerda $c\in N_0$. Shuning uchun $a-b=bc-b=b(c-1)$. $a>0$ deganimiz uchun $c>0$. N_0 – butun nomanfiy sonlar to'plamida ixtiyoriy son 1 dan kichik bo'lmagani uchun $c\geq 1$, demak, $b(c-1)\geq 0$. Shuning uchun $a-b\geq 0$, bundan $a\geq b$.

6-teorema. Bo'linuvchanlik munosabati tranzitivdir, ya'ni $a\vdots b$ va $b\vdots c$ dan $a\vdots c$ kelib chiqadi.

Isbot. $a\vdots b$ bo'lgani uchun, shunday butun nomanfiy k soni mavjudki, uning uchun $a=b\cdot k$ bo'ladi. $b\vdots c$ bo'lgani uchun, shunday butun nomanfiy ℓ soni mavjudki, uning uchun $b=c\cdot\ell$ bo'ladi. Birinchi tenglikda b o'rniga $c\cdot\ell$ ni qo'yamiz: $a=(c\cdot\ell)\cdot k$ bo'ladi, bundan $a=(c\cdot\ell)\cdot k=c\cdot(\ell\cdot k)$. $\ell\cdot k$ ko'paytma ikkita nomanfiy butun sonlar ko'paytmasidan iborat bo'lgani uchun ko'paytma ham nomanfiy butun son. Demak, shunday butun nomanfiy $\ell \cdot k$ soni mavjudki, uning uchun $a=c\cdot(\ell \cdot k)$ tenglik bajariladi. Shuning uchun a soni ham c ga bo'linadi, ya'ni $a \vdots c$.

7-teorema. Bo'linuvchanlik munosabati antisimmetrikdir, ya'ni $a \vdots b$ dagi turli a va b sonlar uchun $b \vdots a$ emasligi kelib chiqadi.

Bo'linuvchanlik munosabatlariga doir masalalarini o'rganish va masalalar yechish uchun quyidagilarni bilish zarur.

Masalan, agar son 5 ga bo'linsa, u 5q ko'rinishga ega bo'ladi, bu yerda q – butun nomanfiy son. Agar son 5 ga bo'linmasa, u qanday ko'rinishga ega bo'ladi?

Ma'lumki, agar son 5 ga butun son marta bo'linmasa, u holda uni 5 ga qoldiqli bo'lish mumkin, bunda qolgan qoldiq 5 dan kichik bo'lishi kerak, ya'ni 1,2,3 yoki 4 sonlari bo'lishi kerak. Unda 5 ga bo'lganda qoldiqda 1 qoladigan sonlar 5q+1 ko'rinishda; 5 ga bo'lganda qoldiqda 2 qoladigan sonlar 5q+2 ko'rinishda; 5 ga bo'lganda qoldiqda 3 qoladigan sonlar 5q+3 ko'rinishda; 5 ga bo'lganda qoldiqda 4 qoladigan sonlar 5q+4 ko'rinishda bo'ladi. 5q, 5q+1, 5q+2, 5q+3, 5q+4 ko'rinishdagi sonlar juft-jufti bilan o'zaro kesishmaydigan, ularning birlashmasi esa butun nomanfiy sonlar to'plami bilan ustma-ust tushadigan to'plamlar hosil qiladi.

7.2. Nomanfiy butun sonlar yig'indisi, va ko'paytmasining bo'linishi. 2, 3, 4, 5, 9, 10, 25ga bo'linish alomatlari

Teorema. Agar a va b sonlari c ga bo'linsa, ularning yig'indisi ham c ga bo'linadi, ya'ni

$$(\forall a,b \in N_0, c \in N_0)\ (a \vdots c \wedge b \vdots c) \Rightarrow ((a+b) \vdots c).$$

Isbot. Haqiqatan ham, shunday k va ℓ sonlari topiladiki, $a=ck$ va b=cℓ bo'ladi. U holda $a+b=ck+c\ell=c(k+\ell)$. $k+\ell$ – nomanfiy butun son bo'lgani uchun, $(a+b) \vdots c$ bo'ladi.

Bu isbotlangan tasdiq qo'shiluvchilar soni ikkitadan ko'p bo'lganda ham o'rinli. Bu teorema isbotidan quyidagi jumlaning isboti ham kelib chiqadi.

Agar $a \geq b$ shartda a va b sonlari c ga bo'linsa a - b ayirma ham c ga bo'linadi.

2, 3, 4, 5, 9, 10, 25 ga bo'linish alomatlari. Quyidagicha savol tug'iladi: O'nli sanoq sistemasida yozilgan biror x sonini a soniga bo'linuvchanligini bevosita (bo'lish ishlarini bajarmasdan) aniqlash mumkinmi?

Ta'rif: O'nli sanoq sistemasida yozilgan x sonini biror a soniga bo'linuvchanligini aniqlash qoidasi bo'linuvchanlik alomatlari deyiladi.

O'nli sanoq sistemasida ba'zi bir bo'linuvchanlik alomatlari mavjud.

2 ga bo'linish alomati. x soni 2 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugashi zarur va yetarlidir.

Isbot. x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x=n_k \cdot 10^k+n_{k-1} \cdot 10^{k-1} + ... + n_1 \cdot 10+n_0$ (1), bunda n_k, n_{k-1}, ... , n_1, n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $n_k \neq 0$ hamda n_0 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qiladi. U holda $x \vdots 2$ bo'lishini isbotlaymiz.

$10 \vdots 2$ bo'lgani uchun 10^2:2, 10^3:2,... ,10^p:2 va demak, $(n_k \cdot 10^k + n_{k-1} 10^{k-1} + ... + n_1 \cdot 10) \vdots 2$. Shartga ko'ra, n_0 ham 2 ga bo'linadi, shuning uchun x ni, ya'ni (1) ni har biri 2 ga bo'linadigan ikki qo'shiluvchining yig'indisi sifatida qarash mumkin.

Demak, yig'indining bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra, x sonning o'zi ham 2 ga bo'linadi.

Endi teskarisini isbotlaymiz. Agar x son 2 ga bo'linsa, uning o'nli yozuvi 0,2,4,6,8 raqamlaridan biri bilan tugaydi.

(1) tenglikni $n_0=x-(n_k \cdot 10^k+n_{k-1} \cdot 10^{k-1}+...+n_1 \cdot 10)$ ko'rinishda yozamiz. U holda ayirmaning bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra $n_0 \vdots 2$, chunki $x \vdots 2$ va $(n_k \cdot 10^k+n_{k-1} \cdot 10^{k-1}+ +...+n_1 \cdot 10) \vdots 2$. Bir xonali son 2 ga bo'linishi uchun u 0,2,4,6,8 qiymatlarni qabul qilishi kerak. Bu isbotdan 2 ga bo'linish alomatini quyidagicha ham ta'riflash mumkin: o'nli sanoq sistemasida yozilgan sonning faqat va faqat oxirgi raqami 2 ga bo'linsa, u 2 ga bo'linadi.

5 ga bo'linish alomati. x soni 5 ga bo'linishi uchun uning o'nli yozuvi 0 yoki 5 raqami bilan tugashi zarur va yetarlidir.

Bu alomatning isboti 2 ga bo'linish alomatining isbotiga o'xshaydi.

4 ga bo'linish alomati. x soni 4 ga bo'linishi uchun x sonining o'nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamidan hosil bo'lgan ikki xonali sonning 4 ga bo'linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_1\cdot 10+n_0$ bunda n_k, n_{k-1}, ..., n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va oxirgi ikkita raqam 4 ga bo'linadigan sonni tashkil qilsin. U holda $x\vdots 4$ bo'lishni isbotlaymiz.

$100\vdots 4$ bo'lgani uchun $(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10k^{-1}+...+n_2\cdot 10^2)\vdots 4$. Shartga ko'ra $n_1\cdot 10+n_0$ (bu ikki xonali sonning yozuvidir) ham 4 ga bo'linadi. Shuning uchun x ni har biri 4 ga bo'linadigan ikki qo'shiluvchining yig'indisi deb qarash mumkin. Demak, yig'indining bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra x sonining o'zi ham 4 ga bo'linadi.

Teskarisini isbot qilamiz, ya'ni agar x soni 4 ga bo'linsa, uning o'nli yozuvidagi oxirgi ikkita raqamdan hosil bo'lgan ikki xonali son ham 4 ga bo'linadi.

(1) tenglikni quyidagicha yozamiz:

$n_1\cdot 10+n_0=x-(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_2\cdot 10^2)$;

$x\vdots 4$ va $(n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+...+n_2\cdot 10^2)\vdots 4$ bo'lgani uchun ayirmaning bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra $(n_1\cdot 10+n_0)\vdots 4$. Ammo $n_1\cdot 10+n_0$ yozuv x sonining oxirgi ikkita raqamidan hosil bo'lgan ikki xonali sonning yozuvidir.

3 va 9 ga bo'linish alomati. x soni 9 ga (3 ga) bo'linishi uchun uning o'nli yozuvidagi raqamlari yig'indisi 9 ga (3ga) bo'linishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Avval 10^k-1 ko'rinishdagi sonlar 9 ga bo'linishini isbotlaymiz.

Haqiqatan, $10^k-1=(9\cdot 10^{k-1}+10^{k-1})-1=(9\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^{k-2}+$ $+10^{k-2})-1=(9\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^{k-2}+...+10)-1=9\cdot 10^{k-1}+9\cdot 10^{k-2}+$

$+\ldots+9$. Hosil bo'lgan yig'indining har bir qo'shiluvchisi 9 ga bo'linadi, demak, 10^k-1 soni ham 9 ga bo'linadi.

x soni o'nli sanoq sistemasida yozilgan bo'lsin, ya'ni $x=n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+n_1\cdot 10+n_0$, bunda n_k, n_{k-1}, ..., n_1, n_0 lar 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlarni qabul qiladi va $(n_k+n_{k-1}+\ldots+n_0)\vdots 9$.

U holda $x\vdots 9$ bo'lishini isbotlaymiz.

$n_k\cdot 10^k+n_{k-1}\cdot 10^{k-1}+\ldots+n_0$ yig'indiga $n_k+n_{k-1}+\ldots+n_0$ ifodani qo'shib va ayirib, natijani bunday ko'rinishda yozamiz:

$x=(n_k\cdot 10^k-n_k)+\ldots+(n_1\cdot 10-n_1)+(n_0-n_0)+(n_k+n_{k-1}+\ldots+n_1+n_0)=$
$=n_k\cdot(10^k-1)+n_{k-1}\cdot(10^{k-1}-1)+\ldots+n_1\cdot(10-1)+(n_k+n_{k-1}+..++n_0)$

Oxirgi yig'indida har bir qo'shiluvchi 9 ga bo'linadi:

$n_k(10^k-1)\vdots 9$, chunki $(10^k-1)\vdots 9$

$n_{k-1}(10^{k-1}-1)\vdots 9$, chunki $(10^{k-1}-1)\vdots 9$

....

$n_1(10-1)\vdots 9$, chunki $(10-1)\vdots 9$.

Shartga ko'ra $(n_k+n_{k-1}+\ldots+n_0)\vdots 9$. Demak, $x\vdots 9$.

3 ga bo'linish alomatning isboti 9 ga bo'linish alomatining isbotiga o'xshashdir.

Boshqa pozitsion sanoq sistemalarida bo'linuvchanlik alomatlarini qaraymiz. Aytaylik, p sanoq sistemasining asosi bo'lsin.

Agar $p\vdots a$ bo'lsa, u holda p^2, p^3, ... , p^k ko'rinishdagi barcha sonlar a ga bo'linadi. Shuningdek, $x_kp^k+x_{k-1}p^{k-1}+\ldots+x_0p_0$ ko'rinishdagi yig'indi ham a ga bo'linadi.

Ta'rif. Agar p soni a soniga bo'linsa va x soni p asosli sanoq sistemasida $x=x_kp^k+x_{k-1}p^{k-1}+\ldots+x_0$ ko'rinishda bo'lsa, u holda x soni a ga faqat va faqat x_0 soni a ga bo'linsa bo'linadi.

Masalan, o'n ikkilik sanoq sistemasidagi son faqat va faqat uning oxirgi raqami 0,3,6 va 9 bilan tugasa 3 ga bo'linadi.

Umumiy holda p–1 ga bo'linuvchanlik alomatini yozamiz.

$x=x_kp^k+x_{k-1}p^{k-1}+\ldots+x_1p+x_0$ soni berilgan bo'lsin, shu sonni p–1 ga bo'linuvchanlik alomatini yozamiz.

Algebradan bizga quyidagi formula ma'lum.

$p^k-1=(p-1)(p^{k-1}+p^{k-2}+\ldots+1)$

Bu formuladan k ning ixtiyoriy qiymatida p^k-1 ni $p-1$ ga bo'linishi kelib chiqadi. x sonini quyidagicha yozish mumkin.

$$x=[x_k(p^k-1)+\ldots+x_1(p-1)]+(x_k+x_{k-1}+\ldots+x_0)$$

Birinchi qo'shiluvchi $p-1$ ga bo'linadi. Bundan esa quyidagi qoida kelib chiqadi: x soni $p-1$ soniga faqat va faqat uning raqamlarining yig'indisi $p-1$ songa bo'linsa bo'linadi.

Masalan: 6753_8 soni $8-1=7$ ga bo'linadi, chunki uning raqamlarini yig'indisi $6+7+5+3=25_8$; 25_8 esa 7 ga bo'linadi.

Nazorat uchun savollar

1. Qachon b soni a sonining bo'luvchisi deyiladi?
2. Bo'linuvchanlik munosabati nima?
3. «Berilgan sonning bo'luvchisi» va «bo'luvchi» terminlarining farqi nimada?
4. Bo'linuvchanlik munosabatlarining xossalarini ayting.
5. 2 ga va 3 ga bo'linish alomatlarini aytib, isbotlab bering.
6. 4 ga va 9 ga bo'linish alomatlarini aytib , isbotlab bering.

7.3. Tub va murakkab sonlar. Eratosfen g'alviri. Tub sonlar to'plamining cheksizligi

Tub sonlar va ularning xossalari. Har bir a son kamida ikkita bo'luvchiga ega, a sonining o'zi va 1.

1-ta'rif. Faqat ikkita bo'luvchiga ega bo'lgan va birdan katta sonlarga tub sonlar deyiladi, boshqacha aytganda, o'ziga va 1 ga bo'linadigan sonlarga tub sonlar deyiladi.

Masalan, 7 tub son, uning bo'luvchilari 7 va 1, 15 soni tub son emas, chunki u 15 va 1 bo'luvchilaridan boshqa 3 va 5 bo'luvchilarga ega.

2-ta'rif. Ikkitadan ortiq har xil bo'luvchilarga ega bo'lgan sonlar murakkab sonlar deyiladi.

1 soni 1 ta bo'luvchiga, ya'ni o'ziga, 0 soni esa cheksiz ko'p bo'luvchilarga ega. Shu sababli 1 va 0 sonlari tub sonlarga ham murakkab sonlar tarkibiga ham kiritilmaydi.

Shunday qilib, nomanfiy butun sonlar to'plami N_0 4 ta sinfga ajratiladi:

1) birinchi sinf faqat 0 soni (cheksiz ko'p bo'luvchilarga ega);

2) ikkinchi sinf faqat 1 soni (faqat bitta bo'luvchiga ega);

3) tub sonlar sinfi (ikkita bo'luvchiga ega);

4) murakkkab sonlar sinfi (0 dan farqli ikkitadan ortiq bo'luvchilarga ega).

Tub sonlar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar *r* tub soni 1 dan farqli biror n natural soniga bo'linsa, u *n* soni bilan ustma-ust tushmasa, u uchinchi bo'luvchiga ega bo'ladi, ya'ni 1, *r* va *n*. U holda r tub son emas.

2) Agar *r* va *q* lar har xil tub sonlar bo'lsa, u holda *r* soni *q* ga va *q* soni *r* ga bo'linmaydi.

3) Agar $a > r$ bo'lib, *a* natural soni *r* tub songa bo'linmasa, u holda *a* va *r* sonlari o'zaro tub sonlar.

4) Agar ikkita *a* va *b* natural sonlar ko'paytmasi *r* tub songa bo'linsa, u holda ulardan bittasi shu tub songa bo'linadi.

5) Agar natural son 1 dan katta bo'lsa, kamida bitta tub bo'luvchiga ega bo'ladi.

6) Murakkab *a* sonining eng kichik tub bo'luvchisi $\sqrt{a}$ dan oshmaydi.

Eratosfen g'alviri. Matematiklar tomonidan tub sonlarni ifodalovchi bir qancha jadvallar tuzilgan. Bu jadvallardan foydalanilsa, har bir sonning tub yoki murakkabligini tekshirib o'tirish shart emas. Eramizdan oldingi III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi va astronomi Eratosfen, tub sonlarni aniqlashning oddiy usulini, ya'ni ma'lum qoidaga ko'ra sonlarni o'chirishga asoslangan usulini yaratdi.

Bu metodni qo'llaganda o'chirilgan sonlar o'rni bo'sh qoladi, boshqacha aytganda murakkab sonlar tushib, tub sonlar qoladi, shu sababli bu metodni Eratosfen g'alviri deb ataganlar. Bu metodning mohiyati quyidagicha. Dastlab 2 dan *n* gacha barcha natural sonlar yoziladi. Shundan keyin 2 soni qoldirilib, 2 ga karrali sonlar o'chiriladi.

Masalan: $n = 30$ deb olsak, 2 dan 30 gacha sonlarni jadvalga yozib chiqamiz, 2 ga bo'linadigan sonlar o'chirilgandan keyin quyidagi sonlar qoladi:

2, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29.

Jadvaldan 2 sonidan boshqa 2 ga bo‘linadigan sonlar o‘chirilgan, bundan esa qolgan sonlarni eng kichik tub bo‘luvchisi 2 dan katta ekanligi ko‘rinadi.

Jadvalda 2 dan keyin o‘chirilmagan son 3. 3 sonini o‘zini qoldirib, jadvaldan 3 ga bo‘linuvchi sonlarni o‘chiramiz, natijada quyidagi sonlar qoladi:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29.

(Ba’zi bir sonlar ikki martadan chizildi). 2 va 3 dan boshqa qolgan sonlar 2 ga ham 3 ga ham bo‘linmaydi.

Kelgusi bosqichda 5 sonini qoldirib, 5 ga karrali sonlarni o‘chiramiz. U holda jadval quyidagi ko‘rinishga keladi.

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Uch marta chizilgandan keyin qolgan sonlar 2, 3 va 5 ga bo‘linmaydi. Tub sonlar quyidagilar:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29.

Eratosfen metodi berilgan n natural sonidan oshmaydigan tub sonlarni topishga imkon beradi. Ammo u bu tub sonlar soni cheklimi yoki cheksizmi degan savolga javob bera olmaydi. Bu savolga eramizdan oldin III asrda Aleksandriyada yashagan grek matematigi Yevklid javob berdi. U tub sonlar to‘plami cheksizdir degan tasdiqni isbotladi va u Yevklidning tub sonlar haqidagi teoremasi nomi bilan yuritiladi. Bu teorema isbotini ko‘raylik.

Teorema. Tub sonlar to‘plami cheksiz.

Isbot. Teorema isbotini teskarisidan boshlaymiz. Faraz qilaylik, tub sonlar to‘plami chekli, u $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sonlardan iborat bo‘lsin. Bu sonlar ko‘paytmasini hosil qilib unga 1 sonini qo‘shaylik, ya’ni $a = r_1 \cdot r_2 \cdot \ldots \cdot r_p + 1$:

Bu son yoki murakkab, yoki tub son bo‘lishi mumkin. Bu son tub son emas, chunki u $r_1, r_2, \ldots, r_p$ sonlardan katta, biz esa shu sonlardan boshqa tub son yo‘q deb faraz qilganmiz. Ikkinchi tomondan, a soni murakkab son bo‘lsa, u kamida bitta tub ko‘paytuvchiga ega bo‘lishi kerak va bu tub ko‘paytuvchi $r_1, r_2, \ldots, r_p$ lardan bittasi bo‘lishi kerak. a soni esa bu sonlardan bittasiga ham bo‘linmaydi (bo‘linganda 1 qoldiqqa ega). Bu esa bizning farazimizga qarama-qarshi. Demak tub sonlar to'plami cheksiz.

7.4. Sonlarning eng kichik umumiy karralisi va eng katta umumiy bo'luvchisi, ularning asosiy xossalari

Sonlarning eng kichik umumiy karralisi. Agar a soni b soniga bo'linsa, a soni b ga karrali deyiladi. 0 soni barcha sonlarga bo'lingani uchun 0 soni barcha sonlarga karrali. Biz b soniga karrali deganda, b soniga natural karralini tushunmog'imiz kerak, ya'ni b, $2b$, ... , nb lar b sonining karralilari, bularning eng kichigi b hisoblanadi.

Bo'linuvchanlik munosabati xossalarini karralilik xossalari kabi ifodalash ham mumkin.

Masalan, a soni b soniga karrali, b soni esa c ga karrali bo'lsa, a soni c ga karrali bo'ladi. a va b sonlarini olaylik. Agar m soni a sonini ham, b sonini ham karralisi bo'lsa, u holda m soni bu sonlarning umumiy karralisi deyiladi.

a va b sonlarining umumiy karralisi ularning ko'paytmasi ab hisoblanadi, chunki u a ga ham, b ga ham bo'linadi.

a va b sonlarining umumiy karralisi bo'lgan sonlar to'plami, a va b sonlariga karrali sonlar to'plamining kesishmasidan iborat bo'ladi.

Masalan: 3 ga karrali sonlar to'plami A, 4 ga karrali sonlar to'plami B bo'lsin.

$A=\{3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,24,27,30,33,36,\ldots\}$

$B=\{4,8,12,16,20,24,28,32,36,\ldots\}$

A va B to'plamlarning kesishmasi

$A \cap B=\{12,24,36, \ldots\}$

Bu to'plamning barcha sonlari 3 va 4 ga karrali.

Bu sonlarning ichida eng kichigi 12 soni.

1-ta'rif. a va b sonlariga umumiy karrali bo'lgan sonlarni ichida eng kichigiga, bu sonlarning eng kichik umumiy karralisi deyiladi va u $K(a,b)$ bilan belgilanadi. Masalan, $K(3,4)= 12$.

Umumiy karralilik xossalari.

1-teorema. Ixtiyoriy ikkita *a* va *b* sonlarning umumiy karralisi, u sonlarning eng kichik umumiy karralisiga bo'linadi.

Isbot. Aytaylik K(a,b)=n bo'lsin, m soni esa *a* va *b* sonlarining umumiy karralisi bo'lsin. Biz $m \vdots n$ ekanini ko'rsatishimiz kerak. m soni n ga bo'linsin va biror r qoldiq qolsin, ya'ni $m=n\cdot q+r$; r=0 ekanini ko'rsatamiz.

m ham, n ham *a* soniga bo'lingani uchun $r = m-n\cdot q$ ham *a* soniga bo'linadi. Shuningdek, m ham, n ham *b* soniga bo'lingani uchun r ham *b* ga bo'linadi. Demak, r ham, *a* ga ham *b* ga bo'linadi. Agar r noldan farqli bo'lsa, u *a* va *b* sonlarining umumiy karralisi bo'lishi kerak va u n dan kichik bo'lmasligi kerak, ya'ni $r \geq n$ (n esa *a* va *b* sonlarining eng kichik umumiy karralisi). Buning esa bo'lishi mumkin emas, chunki qoldiq bo'luvchidan katta bo'lmaydi.

Demak, qoldiq r noldan farqli emas, ya'ni r=0.

Demak, $m = n\cdot q$, ya'ni m n ga bo'linadi.

2-teorema. Agar K(*a*,*b*)=n bo'lsa, u holda ixtiyoriy natural *c* soni uchun K(*ac*, *bc*)=*nc* tenglik o'rinli.

Endi bo'luvchi ustida to'xtalamiz. "*a* sonini *b* soniga karrali" munosabatiga "*b* soni *a* sonining bo'luvchisi" munosabati teskari. Boshqacha aytganda *b* soni *a* sonining bo'luvchisi bo'lishi uchun, faqat va faqat *a* soni *b* soniga karrali bo'lishi kerak.

Agar *b* soni *a* sonining bo'luvchisi bo'lsa, $b|a$ ko'rinishida yoziladi. Masalan, 4|16 yozuvi $16 \vdots 4$ ni bildiradi.

Bo'linuvchilik munosabatining har bir xossasiga bo'luvchilik munosabati mos keladi.

Masalan, bo'linuvchilik munosabatida tranzitivlik xossa quyidagicha ifodalanadi: agar *a* soni *b* ning bo'luvchisi, *b* esa *c* ning bo'luvchisi bo'lsa, u holda *a* soni *c* ning bo'luvchisi bo'ladi. Har bir son o'zining bo'luvchisi, 1 esa ixtiyoriy sonning bo'luvchisidir.

Sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi.

2-ta'rif. Agar *a* va *b* sonlari *c* ga bo'linsa, *c* soni bu sonlarning umumiy bo'luvchisi deyiladi. *a* va *b* sonlarining umumiy bo‘luvchilarini topish uchun a soni bo‘luvchilari to‘plami bilan b soni bo‘luvchilari to‘plami kesishmasini topish kerak.

Masalan, 16 va 28 sonlarining umumiy bo‘luvchilarini toping.

A va B to‘plamlar mos ravishda 16 va 28 sonlarining umumiy bo‘luvchilarini ifodalasin. U holda

$$A=\{1,2,4,8,16\}, \quad B=\{1,2,4,7,14,28\}$$

$A \cap B=\{1,2,4\}$. Demak, 16 va 28 sonlarining umumiy bo‘luvchilari 1,2,4 sonlari ekan. Aytaylik, a natural son b ga bo‘linsin. a sonining bo‘luvchilar soni a dan oshmaydi, shu sababli bo‘luvchilar soni chekli bo‘ladi. Shunga asosan a va b sonlarining umumiy bo‘luvchilar soni chekli to‘plam tashkil etadi.

3-ta’rif. a va b sonlarining umumiy bo‘luvchilari ichida eng kattasiga, a va b sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi deyiladi va $D(a,b)$ ko‘rinishda belgilanadi.

Yuqoridagi misolda $D(16,28)=4$ ga teng.

4-ta’rif. Agar a va b sonlari 1 dan boshqa umumiy bo‘luvchilarga ega bo‘lmasa, ular o‘zaro tub deyiladi. Masalan. 13 va 15 sonlari uchun $D(13, 15)=1$.

Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo‘luvchining xossalari.

1-xossa. Agar c soni a va b sonlarining umumiy bo‘luvchisi bo‘lsa (ya’ni $a=a_1c$; $b=b_1c$), u holda $\ell=\frac{ab}{c}$ - son a va b sonlarining umumiy karralisi bo‘ladi.

Isbot: Shartga ko‘ra $a=a_1c$; $b=b_1c$ bo‘lganda $\ell=a_1b$ $\ell=b_1a$ ekanligini ko‘rsatamiz.

$\ell=\frac{ab}{c}$ dan $\ell=\frac{a_1cb_1c}{c}=a_1b_1c=b_1(a_1c)=b_1a$ bundan ℓ ni a ga bo‘linishi kelib chiqadi.

Ikkinchi tomondan, $\ell=a_1(b_1c)=a_1b$, bundan esa ℓ soni a va b sonlarining umumiy karralisi ekan.

Misol. 6 soni 12 va 18 sonlarining umumiy bo‘luvchisi ya’ni, $12=6\cdot2$; $18=6\cdot3$.

Bundan $\ell=\frac{12\cdot18}{6}=36$soni 12 va 18 sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo‘ladi.

2-xossa. Agar k soni a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisi bo‘lsa (ya’ni k=K(a,b) bo‘lsa), u holda $D=\frac{ab}{k}$ soni a va b sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi bo‘ladi.

Bu xossa to‘g‘riligini ko‘rsatish oson (buni ko‘rsatishni talabalarga mustaqil topshiramiz).

Bu xossadan quyidagi natijalar kelib chiqadi.

1-natija. Ikkita a va b sonlarining eng kichik umumiy karralisini, uning eng katta umumiy bo‘luvchisiga ko‘paytmasi shu sonlarning ko‘paytmasiga teng.

$$D(a,b)\cdot K(a,b)=\frac{ab}{k}k=ab$$

Xususiy holda, agar D(a,b) = 1 bo‘lsa, u holda K(a,b)=a·b ga teng.

2-natija. O‘zaro tub ikkita natural sonning eng kichik umumiy karralisi shu sonlarning ko‘paytmasiga teng.

3-xossa. a va b natural sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi shu sonlarning ixtiyoriy umumiy bo‘luvchilariga bo‘linadi.

4-xossa. Agar a va b natural sonlar ko‘paytmasi $a\cdot b$ m natural soniga bo‘linsa hamda m soni a soni bilan o‘zaro tub bo‘lsa, b soni ham m ga bo‘linadi.

5-xossa. Agar a natural soni o‘zaro tub bo‘lgan b va c sonlarining har biriga bo‘linsa, u holda a soni ularning $b\cdot c$ ko‘paytmasiga ham bo‘linadi.

Bu xossadan natural sonning murakkab sonlarga bo‘linish alomatlari kelib chiqadi. Masalan, natural x soni 12 ga bo‘linishi uchun u 4 va 3 sonlariga bo‘linishi zarur va yetarli.

Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish (yoyish) usuli bilan ularning eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish. Sonni tub sonlar ko‘paytmasi ko‘rinishida ifodalash bu sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratish (yoyish) deyiladi. Masalan, 86=2·43 yozuv 86 soni 2, 43 tub ko‘paytuvchilarga ajratilganini bildiradi.

Umuman, har qanday murakkab sonni tub ko‘paytuvchilarga ajratish mumkin. U qanday usulda ajratilsa ham bir xil yoyilma hosil bo‘ladi (agar ko‘paytuvchilar tartibi hisobga olinmasa). Shuning uchun 86 sonini $2\cdot43$ ko‘paytma yoki $43\cdot2$ ko‘paytma ko‘rinishida yozish 86 sonini tub ko‘paytuvchilarga ajratishning bir xil yoyilmasidir. 436 sonining yoyilmasini topamiz.

$$\begin{array}{r|l} 436 & 2 \\ 218 & 2 \\ 109 & 109 \\ 1 & \end{array}$$

Bir xil ko‘paytuvchilarni ko‘paytmasining darajasi qilib yozish qabul qilingan. $436=2^2\cdot109$ sonining bunday yozilishi uning kanonik ko‘rinishi deyiladi. Sonlarni tub ko‘paytuvchilarga ajratish ularning eng katta umumiy bo‘luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topishda ishlatiladi.

Masalan, 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topaylik. Bu sonlarning har birini kanonik ko‘rinishda yozamiz.

$1800=2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5=2^3\cdot3^2\cdot5^2$ $\qquad$ $244=2\cdot2\cdot61=2^2\cdot61$

$$\begin{array}{r|l} 1800 & 2 \\ 900 & 2 \\ 450 & 2 \\ 225 & 3 \\ 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 244 & 2 \\ 122 & 2 \\ 61 & 61 \\ 1 & \end{array}$$

1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasidagi barcha umumiy tub ko‘paytuvchilar kirishi va bu tub ko‘paytuvchilarning har biri berilgan sonlarning yoyilmalaridagi eng kichik ko‘rsatkichi bilan olinishi kerak. Shuning uchun 1800 va 244 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisining yoyilmasiga 2^2 kiradi. Demak, $D(1800,244)=2^2=4$. 1800 va 244 sonlarining eng kichik umumiy karralisining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasiga berilgan sonlar yoyilmasining hech bo‘lmaganda bittasida bo‘lgan hamma tub ko‘paytuvchilar kirishi va bu tub ko‘paytuvchilarning har biri shu yoyilmalardagi eng katta darajasi bilan olinishi kerak. Shuning uchun 1800 va 244 sonlarning eng kichik umumiy karralisining yoyilmasiga 2^3, 3^2, 5^2, 61 ko‘paytuvchilar kiradi. Demak, $K(1800, 244)= 2^3\ 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 61=$ $=109800$.

Umuman, berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun:

1) berilgan har bir sonni kanonik ko‘rinishda yozamiz;

2) berilgan sonlar yoyilmasidagi hamma tub ko‘paytuvchilar ko‘paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko‘paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko‘rsatkichi bilan olamiz;

3) bu ko‘paytmaning qiymatini topamiz – u berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisi bo‘ladi.

Bir nechta misol qaraymiz:

1-misol. 60, 252, 264 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz.

Har bir sonni kanonik ko‘rinishda yozamiz:

$$60=2^2 \cdot 3 \cdot 5, \qquad 252=2^2 \cdot 3^2 \cdot 7, \qquad 264=2^3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisini topish uchun berilgan yoyilmalardagi umumiy tub ko‘paytuvchilar ko‘paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko‘paytuvchini berilgan sonlarning yoyilmasiga kirgan eng kichik ko‘rsatikichi bilan olamiz. $D(60,252,264)= 2^2 \cdot 3=12$.

Berilgan sonlarning eng kichik umumiy karralisini topish uchun berilgan sonlarning yoyilmasidagi hamma ko‘paytuvchilar ko‘paytmasini hosil qilamiz, bunda har bir ko‘paytuvchini berilgan sonlar yoyilmasiga kirgan eng katta ko‘rsatkichi bilan olamiz: $K(60,252, 264)= 2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11= 83160$

2-misol. 48 va 245 sonlarining eng katta umumiy bo‘luvchisini va eng kichik umumiy karralisini topamiz. Har bir sonni kanonik ko‘rinishda yozamiz. $48= 2^4 \cdot 3$; $245= 5 \cdot 7^2$.

Berilgan sonlar yoyilmasida umumiy ko‘paytuvchilar bo‘lmagani uchun $D(48, 245)=1$, $K(48,245)=48 \cdot 245=11760$.

Nazorat uchun savollar

1. Karrali deganda nimani tushunasiz?
2. Eng kichik umumiy karraliga ta'rif bering.
3. Sonlarning umumiy bo'luvchisini tushuntiring va eng katta umumiy bo'luvchiga ta'rif bering.
4. Eng kichik umumiy karrali va eng katta umumiy bo'luvchining xossalarini aytib bering.
5. Tub va murakkab sonlar deb qanday sonlarga aytiladi?

7.5. Murakkab songa bo'linish alomati. Arifmetikaning asosiy teoremasi. Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish algoritmi

Bizga ma'lumki maktabda o'quvchilar natural sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajrata oladilar.

Masalan, $124 = 2 \cdot 2 \cdot 31$, $210 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7$. Ammo maktab matematika kursida ixtiyoriy murakkab son uchun tub ko'paytuvchilarga ajratish mavjudmi va ajratish usuli bir xilmi, degan savolga javob berilmagan. Bu savolga natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasi deb ataluvchi quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. Ixtiyoriy murakkab sonni yagona usulda tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin.

Isbot. Teorema isboti ikki qismdan iborat:

1) Ixtiyoriy natural son uchun tub sonlar ko'paytmasi mavjudmi?

2) Ko'paytma mavjud bo'lsa, u yagonami?

Birinchi qismini isbot qilamiz. Faraz qilamiz, tub ko'paytuvchilarga ajralmaydigan murakkab son mavjud. U holda shunday sonlar to'plami A da eng kichik a soni bor. A to'plamdagi hamma sonlar murakkab bo'lgani uchun, a sonini ikkita a_1 va a_2 sonlar ko'paytmasi shaklida yozish mumkin. a_1 va a_2 larni har biri a dan kichik.

$a_1 < a$; $a_2 < a$; a_1 va a_2 sonlari a dan kichik bo'lgani uchun ular A to'plamga tegishli emas. Shuning uchun ular tub sonlar yoki ular tub sonlar ko'paytmasiga ajraladigan sonlar.

Agar $a_1= r_1...r_m$ va $a_2=q_1...q_n$ bo'lsa, (bu yerda $r_1,....,r_m$ va $q_1, ... q_n$ lar tub sonlar). U holda $a=a_1 \cdot a_2= r_1 ... r_m q_1 ... q_n$ Bu esa a sonini tub ko'paytuvchilarga ajratilmaydi degan farazimizga zid. Demak, murakkab sonni tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mavjud.

Endi teoremaning ikkinchi qismini isbotlaymiz.

Murakkab sonni tub sonlar ko'paytmasi shaklida ifodalash mumkin va u bir qiymatli aniqlanganligini ko'rsatamiz.

Boshqacha aytganda, murakkab sonni ikki xil tub ko'pay-tuvchilarga ajratish bir-biridan ko'paytuvchilarning o'rinlarini almashinuvi bilan farq qilishini ko'rsatamiz.

Faraz qilaylik, ikki xil tub ko'paytuvchilarga ajratilgan natural sonlar mavjud. Bu sonlar to'plamini A bilan belgilaymiz. Farazga ko'ra A to'plam bo'sh to'plam emas, unda eng kichik a son mavjud. Shartga ko'ra quyidagi tub ko'paytuvchilarga egamiz.

$a= r_1 ... r_m$; $a=q_1 ... q_n$

U holda $r_1 ... r_m = q_1 ... q_n$ (1)

(1) tenglikni o'ng tomoni tub q_1 soniga bo'linadi, u holda chap tomoni ham q_1 soniga bo'linadi, ya'ni chap tomondagi ko'paytuvchilardan biri bo'linadi.

Agar r_1 q_1 ga bo'linadi desak, u holda $r_1 = q_1$ bo'ladi.

(1) tenglikni ikkala tomonini r_1 ga qisqartiramiz.

U holda $c= r_2...r_m = q_2 ... q_n$ tenglikka ega bo'lamiz, bu yerda $c=a:r_1$; $r_1>1$ bo'lsa, u holda $c < a$ bo'ladi.

Farazimizga ko'ra a eng kichik son va ikki xil tub ko'paytuvchilarga ega. Demak, c bitta tub ko'paytuvchilarga ega bo'lib, $c=r_2...r_m=q_1...q_n$ tub ko'paytuvchilar ajratmasi bir-biridan ko'paytuvchilar tartibi bilan farq qiladi. Bu esa tub ko'paytuvchilarga ajratish turlicha degan farazimizga zid.

Demak, tub ko'paytuvchilarga ajratish yagonadir.

Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratishdagi yoyilmada tub sonlar tub sonlarni o'sish tartibida joylashtiriladi.

$2520= 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$

Yevklid algoritmi. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish usuli bilan ularning eng katta umumiy bo'luvchisini topish, ba'zan, qator qiyinchiliklarga olib keladi. Masalan 6815 sonini tub ko'paytuvchilarga ajratishda birinchi bo'luvchi 5 ni topib, 1363 sonini hosil qilamiz, bu sonning eng kichik bo'luvchisi 29 ga teng. Ammo 29 ni topish uchun 1363 sonining 2 ga, 3 ga, 5 ga, 7 ga, 11 ga, 13 ga, 17 ga, 19 ga, 23 ga, 29 ga bo'linish-bo'linmasligini tekshirishimiz kerak, bunda 1363 soni faqat 29 gagina butun son marta bo'linadi. Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisini qiyinchiliklarsiz topish usuli mavjud.

Buning uchun ikki son umumiy bo'luvchisining bitta muhim xossasini eslaymiz. Masalan, 525 va 231 sonlarini olamiz va 525 ni 231 ga qoldiqli bo'lamiz: $525=231\cdot2+63$.

525 va 231 sonlarining umumiy bo'luvchilari to'plamini A orqali, 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchilari to'plamini B orqali belgilaymiz va A=B ni isbotlaymiz, boshqacha aytganda 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo'luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchisi ekanligini isbotlaymiz. Haqiqatan, agar 525:d va 231:d bo'lsa, ayirmaning bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra 63:d ni hosil qilamiz. Agar $525=231\cdot2+63$ tenglikni $63=525-231\cdot2$ ko'rinishida yozsak, bunga oson ishonch hosil qilish mumkin. Shunday qilib, 525 va 231 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo'luvchisi 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchisi bo'ladi, ya'ni $A\subset B$ aksincha, agar 231 va 63 sonlarining umumiy bo'luvchisi, ya'ni 231:t va 63:t bo'lsa, yig'indining bo'linuvchanligi haqidagi teoremaga ko'ra 525:t bo'ladi. Demak, 231 va 63 sonlarining ixtiyoriy umumiy bo'luvchisi 525 va 231 sonlarining ham umumiy bo'luvchisi bo'lar ekan, ya'ni $B\subset A$.

Teng to'plamlar ta'rifiga ko'ra A=B. Ammo agar berilgan sonlar juftining umumiy bo'luvchilari to'plami bir xil bo'lsa, ularning eng katta umumiy bo'luvchisi ham teng bo'ladi, ya'ni D (525, 231)= D (231, 63).

Umuman, agar a va b – natural sonlar hamda $a=bq+r$ bo'lsa, $D(a,b)=D(b,r)$ bo'ladi, bunda $r<b$.

Bu teoremaning isboti yuqorida keltirilgan xususiy holning isboti kabidir.

Bu xossaning muhimligi nimada? Bu xossa a va b sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisini topishda bu sonlarni kichik sonlarga almashtirishga imkon yaratadi, bu esa hisoblashlarni osonlashtiradi. Bunday almashtirishni bir necha bor bajarish mumkin. Masalan, 525 ni 231 ga qoldiqli bo'lib, qoldiqda 63 ni hosil qilamiz.

Demak, D (525, 231)= D(231, 63). 231 ni 63 ga qoldiqli bo'lamiz: $231=63\cdot3+42$, ya'ni D(231, 63)=D (63, 42).

63 ni 42 ga qoldiqli bo'lamiz: $63=42\cdot1+21$. Demak, D(63,42)=D(42,21). 42 ni 21 ga qoldiqli bo'lganda qoldiqda 0 hosil qilamiz, ya'ni D(42, 21)=D (21,0). 21 bilan 0 ning eng katta umumiy bo'luvchisi 21 ga teng. Demak, 21 soni 525 va 231 sonlarining eng katta umumiy bo'luvchisi bo'ladi, chunki
D(525, 231)=D(231, 63)=D(63,42)=(42, 21)=D(21, 0)=21.

Biz bajargan hisoblashlar ko'pincha bunday yoziladi:

$525 = 231 \cdot 2 + 63$

$231 = 63 \cdot 3 + 42$

$63 = 42 \cdot 1 + 21$

$42 = 21 \cdot 2 + 0$

D(525,231)=21.

Eng katta umumiy bo'luvchini topishning ko'rilgan usuli qoldiqli bo'lishga asoslangan. Bu usulni birinchi marta qadimgi grek matematigi Yevklid (eramizgacha III asr) yaratgan va shuning uchun u Yevklid algoritmi nomi bilan yuritiladi. Yevklid algoritmini umumiy ko'rinishda bunday ifodalash mumkin:

a va b – natural sonlar hamda $a>b$ bo'lsin. a soni b soniga qoldiqli bo'linadi, keyin b soni qolgan qoldiqqa qoldiqli bo'linadi, so'ngra birinchi qoldiq ikkinchi qoldiqqa qoldiqli bo'linadi va hokazo, u holda oxirgi holdan farqli qoldiq a va b sonlarning eng katta umumiy bo'luvchisi bo'ladi.

Nazorat uchun savollar

1. Sonlarni tub ko'paytuvchilarga ajratish yo'li bilan eng katta umumiy bo'luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topishni misollar yordamida tushuntirib bering.

2. Tub sonlarni aniqlashdagi Eratosfen g‘alviri metodini tushuntiring.

3. Natural sonlar arifmetikasining asosiy teoremasini ifodalang va isbotlab bering.

4. Sonlarni eng katta umumiy bo‘luvchisini topishni, Yevklid algoritmini tushuntirib bering.

Berilgan sonlarning eng katta umumiy bo‘luvchisi va eng kichik umumiy karralisini topish algoritmiga doir misollar

Misol. 2346 va 646

Yechilishi. Ushbu sonlarning EKUB va EKUKni topish uchun Yevklid algoritmidan foydalaniladi.

$$-\begin{array}{r|l} 2346 & \underline{646} \\ \underline{1938} & 3 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 646 & \underline{408} \\ \underline{408} & 1 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 408 & \underline{238} \\ \underline{238} & 1 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 238 & \underline{170} \\ \underline{170} & 1 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 170 & \underline{68} \\ \underline{136} & 2 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r|l} 68 & \underline{34} \\ \underline{68} & 2 \\ 0 & \end{array}$$

Demak, oxirgi noldan farqli qoldiq 34 bo‘lib, u berilgan sonlarning EKUBidir, ya’ni EKUB (2346, 646) = 34.

$$EKUK(2346,\ 646) = \frac{2346 \cdot 646}{34} = 44574\,.$$

Bu misolni tub ko‘paytuvchilarga ajratib ham yozish mumkin.

$2346 = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 23$

$646 = 2 \cdot 17 \cdot 19$

$EKUB\ (2346, 646) = 2 \cdot 17 = 34$

$EKUK\ (2346, 646) = 2 \cdot 3 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 23 = 44574$

Topshiriq

Sonlarning EKUB va EKUK ni toping.

1. 420 va 126.
2. 549493 va 122433
3. 67283 va 122433
4. 122433 va 221703
5. 476 va 1258
6. 1258 va 21114
7. 1515 va 600
8. 8104 va 5602
9. 5555 va 11110
10. 980 va 100
11. 5345 va 4856
12. 2165 va 3556
13. 5400 va 8400
14. 78999 va 80000
15. 71004 va 154452
16. 42628 va 33124
17. 795 va 2585
18. 6663 va 887
19. 875 va 1346
20. 23 va 1785
21. 75 va 1853
22. 28 va 947
23. 743 va 907
24. 109 va 1005
25. 827 va 953
26. 56 va 953
27. 419 va 854
28. 113 va 9881
29. 821 va 934
30. 1000 va 999

VIII BOB. SON TUSHUNCHASINI KENGAYTIRISH MASALASI

8.1. Kasr va manfiy son tushunchasini vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlar

Kasr tushunchasini vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumotlar. Kasr (arab. كسر - bo'lak, parcha) matematikada birning bitta yoki bir nechta qismidan (bo'lagidan) iborat son. Kasr ikkita butun sonning nisbati bilan ifodalanadi: $\frac{n}{m}$ yoki n/m. Bu yerda m kasrning maxraji, *n* bo'lsa surati deyiladi. Maxraj chiziqning ostiga (yoki ketiga), surat bo'lsa chiziqning ustiga (yoki oldiga) yoziladi.

Maxraj bir sonni necha bo'lakka bo'linganini ko'rsatadi, surat bo'lsa shu kasrda shunday ulushlardan nechta borligini ko'rsatadi. Masalan, $\frac{3}{4}$ kasrida surat 3 dir va u kasr teng uch bo'lakni ifodalashini ko'rsatadi. Maxraj bo'lsa 4 dir va u to'rtta bo'lak bir bo'lib butunni hosil qilishini anglatadi.

Eng qadimgi kasrlar butun sonlarning teskari yozilgani bo'lgan. Bu qadimiy belgilar ikkining bir qismini, uchning bir qismini, to'rtning bir qismini va hokazoni ifodalagan. Misrliklar misr kasrlaridan eramizdan avval taxminan 1000 yillarda foydalanishgan. Taxminan 4000 yil avval misrliklar sonlarni kasr bilan bo'lish uchun biroz boshqacha uslublardan foydalanishgan. Ular surati bir bo'lgan kasrlar ustida amallar bajarish uchun eng kichik umumiy bo'luvchidan foydalanishgan. Ularning uslublari zamonaviy uslublar bilan bir xil natijalar bergan.

Yunonlar surati bir bo'lgan kasrlardan foydalanishgan. Eramizdan avvalgi taxminan 530-yilda yunon faylasufi Pifagorning shogirdlari ikkining kvadrat ildizini kasr ko'rinishida yozib bo'lmasligini aniqlashgan. Eramizdan avvalgi taxminan 150-yilda Hindistonlik jainchi matematiklar „Sthananga sutra" (talaffuzi: Sananga sutra) asarini yozishgan. Bu asarda sonlar teoriyasi, arifmetik amallar va kasrlar ustida amallar haqida yozilgan.

Bir sonni ikkinchisining ostida yozish va kasrlarni hisoblash usullari bizning eramizning 499-yili atrofida Aryab hatta yozgan asarda uchraydi. Sanskrit adabiyotlarda kasrlar yoki ratsional sonlar doim butun son va uning ketidan kasr son ko'rinishida yozilgan. Kasr son butun son yozilgan qatorning ostiga yozilgan. Kasrning o'zi ikki qatorda yozilgan. Birinchi qatorda yozilgan surat amsa deb atalgan, ikkinchi qatorga yozilgan naxraj cheda deb atalgan. Agar kasr biror-bir boshqa belgisiz yozilgan bo'lsa, demak bu kasrni yuqoridagi butun songa qo'shish kerak bo'lgan deb tushuniladi. Agar kasrning o'ng tarafiga kichkina aylana belgisi qo'yilgan bo'lsa, bu kasrni butun sondan ayirish kerak bo'lgan deb tushuniladi. Masalan, hind matematigi Bhaskara I quyidagicha yozgan:

६ १ २

१ १ १०

४ ५ ९

Ya'ni,

6 1 2

1 1 1०

4 5 9

yozuvi 6+1/4, 1+1/5 va 2-1/9 ni ifodalagan.

O'rta asrlarda yashagan marokashlik musulmon matematik Abu Bakr al-Hassar birinchi marta surat ba maxrajni ajratuvchi gorizontal chiziq haqida yozgan. O'z asarida al-Hassar: „...masalan, agar sizga beshdan uch va beshdan birning uchdan birini yoz deyishsa, bunday deb yozing: $\frac{3}{5}, \frac{1}{5}\frac{1}{3}$. Kasrni shu uslubda yozish ozginadan keyin 13-asrda Leonardo Fibonachchining ishlarida ham uchraydi.

Fors matematigi Jamshid al-Koshi o'nli kasrlarni 15-asrda o'ylab topganman deb aytsa ham, J.Lennart Berggrenga ko'ra u adashgan. Chunki o'nli kasrlar undan 5 asr oldin, ya'ni 10-asrda yashagan Bog'dodlik matematik Abu'l-Hasan al-Uqlidisi ishlarida uchraydi. Matematika tarixchilari orasida al-Uqlidisi birinchi-lardan bo‘lgani haqida har xil qarashlar bo‘lsa ham, uning o‘nli kasr tushunchasiga katta hissa qo‘shganiga shubha yo‘q.

Sharq matematiklari o‘nli sanoq sistemasida ishlash bilan birga, o‘nli kasrlar bilan ham bemalol ishlashgan. Bu haqdagi dastlabki ma’lumotlar XV asrning birinchi yarmida yashab ijod etgan al-Koshiga tegishli. U o‘nli kasrlar ustida bemalol amallar bajargan va vergulni sonlarda ishlatilishini o‘ylab topgan (~1442). Masalan: 25,07 ni 14,3 ko‘paytirib 358,501 ko‘rinishda yozishni ko‘rsatgan. π ning 16 aniq o‘nli xonalarini aylanaga ichki va tashqi chizilgan muntazam 3*228 ko‘pyoq yordamida hisoblagan. Bundan 150 yil keyin F.Viyet 3*217 burchak yordamida 9 ta aniq xonasini topgan, 1597-yili esa Van Roumen al Koshi natijasini takrorladi va nazariy ma’lumotlarni kengaytirdi.

Umuman esa Yevropada 1585 yili flamandiyalik matematik va injener S.Stevin tomonidan kiritildi. Bundan ilgariroq ham o‘nli kasrlar haqida ma’lumotlar mavjud bo‘lgan. Masalan, Xitoyda Sun dinastiyasi davrida yashab ijod etgan Yan Xuey (1261-y). Uning misollaridan biri 24,68 * 36,56 = 902,3008.

Manfiy son tushunchasini vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma’lumot. Manfiy sonlarning vujudga kelishi tarixi taxminan eramizdan avvalgi II asrda Xitoyda boshlandi. Balki, Xitoyda manfiy sonlarni avval ham ma'lum bo‘lgan, lekin birinchi marta ular haqidagi ma’lumotlar aynan shu paytga to‘g‘ri keladi. U yerda manfiy sonlarni ishlatish boshlandi va musbat sonlarni "mulk" deb nomlanishi bilan, manfiy sonlar "qarz" deb hisoblangan edi. U paytda manfiy sonlar qora rang bilan, musbat sonlar esa qizil rang bilan yozilgan.

Manfiy sonlar haqidagi birinchi ma’lumotni Xitoylik olim Chjan Tsanning "Matematikaga oid to‘qqizta kitob" kitobida topish mumkin.

Bundan keyin, V-VI asrlarda manfiy sonlar Xitoy va Hindistonda juda keng ishlatilgan. Biroq, Xitoyda ulardan ehtiyotlik bilan foydalanishga harakat qilishgan, Hindistonda esa, aksincha, manfiy sonlarni juda keng ishlatishgan, xattoki ular bilan barcha hisob-kitoblarni amalga oshirishgan, hindistonliklar uchun manfiy sonlar tushunarsiz narsa emas edi.

Hind olimlari Bhaskara va Brahmaguptalarning asarlarida (VII-VIII asr) manfiy sonlar va ular ustida amallar haqida batafsil tushuntirishlar berilgan.

Qadimgi Bobil va qadimgi Misrda esa manfiy sonlar umuman ishlatilmagan. Agar hisoblashda manfiy natija chiqadigan bo'lsa, bu hisob-kitob hech qanday yechimga ega emas, deb hisoblangan.

Yevropada ham manfiy sonlar uzoq vaqt davomida tan olinmagan. Ularni "mavhum" va "absurd" deb hisoblashar edi. Ular bilan hech qanday amallar bajarishmagan, javob manfiy bo'lsa, o'chirib tashlangan edi. Hech narsa nol – bo'shliqdan kam bo'lishi mumkin emas, deb hisoblar edi ular.

Yevropada birinchi marta manfiy sonlarga Leonardo Pizanskiy (Fibonachchi) e'tibor qaratgan. U 1202-yilda o'zining "Abak kitobi" asarida ularni tasvirlagan.

Keyinchalik, 1544-yilda birinchi marta Mihail Shtifel o'zining "To'liq arifmetika" kitobida manfiy sonlar tushunchasi va ular ustida amallarni batafsil yoritib berdi. "Nol absurd va haqiqiy sonlar o'rtasida joylashgan". XVII asrda esa matematik Rene Dekart manfiy sonlarni sonlar o'qida noldan chapda ko'rsatishni taklif qildi.

Shundan beri, manfiy sonlar keng foydalanila boshladi va ko'plab olimlar uzoq vaqt davomida ularni inkor qilgan bo'lsa-da, tan olingan.

1831-yilda Gauss manfiy sonlari musbat sonlar bilan mutlaqo teng ahamiyatli deb atadi. XIX asrda esa Uilman Hamilton va Hermann Grassmann manfiy sonlarning to'liq tugallangan nazariyasini yaratishdi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kasr so'zining ma'nosini ayting.
2. Kasr sonlar birinchi marta qayerda paydo bo'ldi?
3. Kasr chizig'ini kim o'ylab topdi?
4. Manfiy sonlar nimani anglatadi?
5. Manfiy sonlar birinchi marta qayerda paydo bo'ldi?
6. Manfiy sonlar nazariyasini kim yaratdi?

8.2. Butun sonlar. Butun sonlar to'plamining xossalari va ularning geometrik interpretatsiyasi

Son tushunchasini dastlabki kengaytirish. *a* va *b* natural sonlar va a+b=c yig'indi berilgan bo'lsin. Bu yig'indi uchun 1) c>a va c>b; 2) har bir qo'shiluvchi yig'indidan ikkinchi qo'shiluvchi ayirmasiga teng, ya'ni b=c-ava a=c-b.

«0» soni bo'sh to'plamlar sinfining xarakteristikasi sifatida kiritilgan bo'lib, «*a*» natural son esa, bo'shmas to'plamlar sinfning xarakteristikasi bo'lganligi uchun, a+0=a ekanligini tushunish qiyin emas. Yig'indida biror qo'shiluvchini topish qoidasini qo'shiluvchilardan biri nol bo'lgan holda qarab, 0=a-a ni hosil qilamiz. Shunday qilib, «0» sonini ikkita teng sonning ayirmasi deb qarash mumkin.

Nol sonini natural sonlar to'plamiga qo'shib, nomanfiy butun sonlar to'plami deb ataladigan yangi sonli to'plam hosil qilamiz. Bu kengaytirilgan to'plam N_0bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi $N_0 = \{0,1,2,3,4,\dots,n,\dots\}$

Nol soni bilan amallar bajarish qoidalarini, ushbu tengliklar ko'rinishida yozish mumkin: a+0=a (ta'rifga ko'ra), 0+a=a;

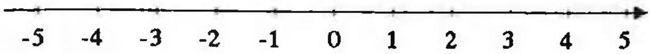
a-0=a; a·0=0, 0·a=0 agar a≠0 bo'lsa, 0:a=0

Nolga bo'lishni alohida qaraymiz. Noldan farqli a son berilgan bo'lsin, ya'ni a≠0a:0 bo'linma mavjud bo'lsin deb faraz qilaylik; uni b orqali belgilaylik. U holda a:0=b ga ega bo'lamiz, bundan esa quyidagi kelib chiqadi; a=0·b yoki a=0 bu esa shartga ziddir. Demak, a:0 bo'linmaning mavjudligi haqida qilgan farazimiz noto'g'ri. Shunday qilib, nolga bo'lish mumkin emas.

Nolni natural sonlar to'plamiga qo'shish natijasida son tushunchasini dastlabki kengaytirish amalga oshirildi.

Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasi. Manfiy sonlarning kiritilishi. Nol sonini kiritilishi natijasida teng sonlarni ayirish mumkin bo'ldi. Katta sonni kichik sondan ayirish mumkin bo'lishi uchun sonlar to'plamini yangi sonlar kiritish yo'li bilan kengaytirilgan.

To'g'ri chiziqni olib, unda yo'nalish, O boshlang'ich nuqta va masshtab birligini olamiz.



8.1-rasm

Boshlang‘ich nuqtaga 0 sonini mos qo‘yamiz. Boshlang‘ich nuqtadan o‘ng tomonda bir, ikki, uch va h.k. masshtab birligi masofada joylashgan nuqtalarga 1,2,3, ... natural sonlarni mos qo‘yamiz, boshlang‘ich nuqtadan chap tomonda bir, ikki, uch va h.k. birlik masofada joylashgan nuqtalarga –1, –2, –3 ... simvollari bilan belgilanadigan yangi sonlarni mos qo‘yamiz. Bu sonlar butun manfiy sonlar deb ataladi.

Sonlar belgilangan bu to‘g‘ri chiziq **son o‘qi** deb ataladi. O‘qning strelka bilan ko‘rsatilgan yo‘nalishi musbat yo‘nalish, qarama-qarshi yo‘nalishi esa manfiy yo‘nalish deb ataladi. Natural sonlar son o‘qida boshlang‘ich nuqtadan musbat yo‘nalishda qo‘yiladi, shuning uchun ularni musbat butun sonlar deb ataladi.

Nomanfiy butun sonlar to‘plami bilan butun manfiy sonlar to‘plamining birlashmasi yangi sonli to‘plamni hosil qiladi, bu to‘plam butun sonlar to‘plami deb ataladi va Z simvoli bilan belgilanadi va quyidagicha yoziladi:

$Z = \{... -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$.

Yuqoridagi 8.1-rasm butun sonlar to‘plamining geometrik ko‘rinishini tashkil etadi. Chizmadan ko‘rinadiki, har bir butun songa son o‘qida aniq nuqta mos keladi, lekin son o‘qining har bir nuqtasiga ham butun son mos kelavermaydi.

Natural sonlar to‘plamini butun sonlar to‘plamiga kengaytirilishini ikkinchi talqini. 0- simvoli bilan belgilanadigan nol soni va manfiy butun sonlar quyidagicha *kiritiladi*: a) istalgan n - natural son va 0- sonining yig‘indisi n sondir.

n+0=n

b) istalgan n natural songa shunday yagona (n) - manfiy butun son mos keladiki, n va $-n$ sonlarning yig‘indisi nolga teng.

n+(-n)=0

$-n$ soni n songa qarama-qarshi son deb aytiladi. n soniga qarama-qarshi son n sonidir; -(-n)=n.

Natural sonlar to'plamiga yangi obyektlarni – nol sonini va manfiy butun sonlarni kiritish natijasida hosil bo'lgan to'plamga butun sonlar to'plami deyiladi. Butun sonlar to'plamidagi natural sonlar musbat butun sonlar deb ataladi. Barcha butun sonlar to'plami Z bilan belgilanadi.

Butun sonlar to'plami Z ning xossalari:

1° Butun sonlar to'plami cheksizdir, ya'ni istalgan *n* butun son uchun shunday *m* butun son topiladiki, $|m|>|n|$ tengsizlik bajariladi.

2° Butun sonlar to'plami tartiblangan to'plamdir, ya'ni istalgan ikkita *m* va *n* butun sonlar uchun quyidagi munosabatlardan biri va faqat biri o'rinlidir.

$m=n$ yoki $m<n$ yoki $n<m$

3° Butun sonlar to'plami diskret to'plamdir, ya'ni istalgan n butun son uchun undan keyin keladigan $n+1$ butun son mavjud bo'lib,ular orasida joylashgan butun son mavjud emas.

Butun sonlar ustida amallar. Butun sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishdan oldin sonning moduli to'g'risida tushuncha beramiz. *n* sonining absolyut qiymati (yoki moduli) deb $|n|$ bilan belgilanadigan va ushbu qoida bo'yicha hisoblanadigan songa aytiladi:

n sonining absolyut qiymati musbat n sonlar uchuno'ziga, manfiy *n* sonlar uchun musbat bo'libn sonning qarama-qarshisi *n* ga, faqat n=0 bo'lgandagina nolga teng.

1. Qo'shish. Butun sonlarni qo'shishda quyidagi ikki holga e'tibor berish lozim.

a) qo'shiluvchilar bir xil ishorali;

b) qo'shiluvchilar turli ishorali.

1-ta'rif. Bir xil ishorali ikki butun sonning yig'indisi deb, shunday ishorali, moduli esa qo'shiluvchilar modullarining yig'indisiga teng bo'lgan butun songa aytiladi. Turli ishorali va turli modulli ikki butun sonning yig'indisi deb, moduli qo'shiluvchilar modullari ayirmasiga teng, ishorasi esa moduli katta bo'lgan qo'shiluvchi ishorasi bilan bir xil bo'lgan songa aytiladi. Ikkita qarama-qarshi sonning yig'indisi nolga teng, ya'ni $a+(-a)=0$

Masalan,

$(+8)+(+13)=+21$, $(-12)+(-11)=-23$,

$(+8)+(-13)=-5$, $(-8)+(+13)=+5$, $(8)+(-8)=0$.

Natural sonlar to‘plamidagi qo‘shish qonunlari (o‘rin almashtirish, guruhlash) butun sonlar to‘plami uchun ham o‘rinli. Bundan tashqari butun sonlar to‘plamida qo‘shish monotonlik qonuniga bo‘ysinadi.

Yig‘indining monotonlik qonuni:

Agar $a>b$ bo‘lsa, u holda $a+c>b+c$ ning saqlanishini misollarda tekshirib ko‘ramiz. Haqiqatan, ham $-7>-9$ tengsizlikdan quyidagilar kelib chiqadi:

$(-7)+(11)>(-9)+(+11)$

$(-7)+0>(-9)+0$, $(-7)+(-3)>(-9)+(-3)$

Natural sonlar to‘plamida yig‘indi har bir qo‘shiluvchidan doimo katta. Butun sonlar to‘plamida yig‘indi bu cheklanishdan xoli.

Ikkita butun sonning yig‘indisi: 1) har bir qo‘shiluvchidan katta bo‘lishi mumkin; 2) bir qo‘shiluvchidan katta va ikkinchisidan kichik bo‘lishi mumkin; 3) har bir qo‘shiluvchidan kichik bo‘lishi mumkin; 4) qo‘shiluvchilardan biriga teng bo‘lishi mumkin.

2. Ko‘paytirish.

2-ta’rif. Ikki butun sonning ko‘paytmasi deb, moduli ko‘paytuvchilar modullari ko‘paytmasiga teng va ko‘paytuvchilar bir xil ishorali bo‘lsa, plus ishora bilan olingan, ko‘paytuvchilar turli ishorali bo‘lsa, minus ishora bilan olinadigan songa aytiladi; agar ko‘paytuvchilardan biri nolga teng bo‘lsa, ko‘paytma nolga teng.

Masalan,

$(+3)\cdot(+8)=24$; $(-3)\cdot(-8)=24$; $(-3)\cdot(+8)=-24$; $(+3)\cdot(-8)=-24$.

Bulardan $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$ kelib chiqadi, ya’ni ko‘paytmaning moduli ko‘paytuvchilar modullari ko‘paytmasiga teng.

Butun sonlarni ko‘paytirish uchun o‘rin almashtirish, gruppalash va taqsimot qonunlari o‘rinli. Bu qonunlarni o‘rinli ekanligini bevosita misollar yordamida ko‘rsatish mumkin.

$$2\cdot 3=3\cdot 2;\ (-2)\cdot(3)=(3)\cdot(-2);\ (-2)\cdot(-3)=(-3)\cdot(-2)$$
$$[(-5)\cdot(-4)]\cdot(+3)=(-5)\cdot[(-4)\cdot(+3)]$$
$$[(+5)\cdot(-4)]\cdot(-3)=(+5)\cdot[(-4)\cdot(-3)]$$

Butun sonlar to'plamida monotonlik qonuni natural sonlar to'plamidagi monotonlik qonunidan kengaytirilgan shaklda bo'ladi, ya'ni agar a>b va m>0 bo'lsa, u holda am>bm, agar a>b va m<0 bo'lsa, u holda am<bm. Shunday qilib, natural sonlar uchun monotonlik qonuni butun sonlar uchun monotonlik qonunining xususiy holidir.

Natural sonlar to'plamidan butun sonlar to'plamiga o'tilganda ko'paytirishning ma'nosi o'zgaradi. Haqiqatan, a natural sonni 6 ga ko'paytirish a sonni 6 marta orttirish demakdir.

Natural ko'rsatkichli darajaga ko'tarish amalining natural asos uchun ifodalangan ta'rifi istalgan butun asos uchun ham saqlanadi.

Masalan,

$(-4)^3=(-4)\cdot(-4)\cdot(-4)=-64$

$(-2)^6=(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)\cdot(-2)=64$

Ishoralar qoidasi:

$a>0$ va $a<0$ da $a^{2m}>0$;

$a>0$ da $a^{2m+1}>0$; $a<0$ da $a^{2m+1}<0$.

Butun sonlar to'plamida to'g'ri amallar (qo'shish, ko'paytirish va darajaga ko'tarish) doimo bir qiymatli bajariladi, bu tegishli qoidalardan bevosita kelib chiqadi.

3. Ayirish. Ayirish amalining ta'rifi natural sonlar uchun ayirish amali qoidasiga o'xshash.

3-ta'rif. a va b butun sonlarning ayirmasi deb, shunday x butun songa aytiladiki, uni b songa qo'shganda a soni hosil bo'ladi. Shu sababli, agar a-b=x bo'lsa, u holda x+b=a.

Ayirish qoidasi ta'rifini ayirma ta'rifi, butun sonlarni qo'shish qoidasi va qo'shishning gruppalash qonuniga asoslanib keltirib chiqaramiz. a va b butun sonlar ayirmasini topish talab qilinayotgan bo'lsin. Izlanayotgan ayirmani x orqali belgilaymiz. Ayirma ta'rifiga ko'ra x+b=a.

Bu tenglikning ikkala qismiga – *b* ni qo'shib x+b+(-b)=a+(-b) ni hosil qilamiz. Yig'indining gruppalash xossasini qo'llanib, quyidagini topamiz:

x+[b+(-b)]=a+(-b)

b+(-b)=0 bo'lganligi uchun x=a+(-b) yoki a-b=a+(-b) so'nggi tenglik butun sonlarni ayirish qoidasini ifodalaydi va bunday ta'riflanadi: bir butun sondan ikkinchi butun sonni ayirish uchun ayiriluvchiga qarama-qarshi sonni kamayuvchiga qo'shish kerak.

Bundan butun sonlarni ayirish qo'shishga keltirilishi kelib chiqadi. Butun sonlar to'plamida qo'shish bir qiymatli bajarilganligidan butun sonlar to'plamida ayirish amali ham bir qiymatli bajarilishi kelib chiqadi.

Shuni ta'kidlash kerakki, manfiy sonlar kiritilishi bilan kichik sondan katta sonni ayirish mumkin bo'ladi.

Masalan, (+4)–(+7)=(+4)+(–7)=–3

(–4)–(+7)=(–4)+(–7)=–11

4. Bo'lish. Butun sonlar to'plamida bo'lish amali natural sonlar to'plamidagi kabi aniqlanadi. Butun sonlarni bo'lish qoidasini bo'linmaning ta'rifi va butun sonlarni ko'paytirish qoidasiga asoslanib keltirib chiqaramiz.

a butun sonni noldan farqli *b* butun songa bo'lishdan chiqadigan bo'linmani topish talab qilingan bo'lsin. Izlanayotgan bo'linmani *x* bilan belgilaymiz va bunday yozamiz: a:b=x. Natural sonlarni bo'lishdagi bo'linmaning ta'rifiga ko'ra b·x=a. Bu tenglikdan ko'rish osonki, agar a va b turli ishorali bo'lsa, u holda *x* bo'linma manfiy, *a* va *b* bir xil ishorali bo'lsa, *x* bo'linma musbatdir. Bu tenglikning o'zidan yana |b|·|x|=|a| bo'lishi kelib chiqadi, bunda agar |a| son |b| ga karrali bo'lsa, |x|=|a|:|b| bo'ladi. Shunday qilib, bir butun sonni noldan farqli ikkinchi butun songa bo'lish uchun, bo'linuvchining modulini bo'luvchining moduliga bo'lish hamda, agar bo'linuvchi va bo'luvchi bir xil ishorali bo'lsa, hosil bo'lgan bo'linmani «+» ishora bilan olish, agar bo'linuvchi va bo'luvchi turli ishorali bo'lsa, bo'linmani «–» ishora bilan olish yetarlidir; agar bo'linuvchi nolga teng bo'lsa, u holda bo'linma ham nolga teng.

Bundan kelib chiqadiki, butun sonlar to‘plamida bo‘linma faqat bo‘linuvchining moduli bo‘luvchining moduliga karrali bo‘lganda mavjud ekan. Bu har qanday ixtiyoriy ikkita butun son uchun bo‘lish amali bajarilmasligini ko‘rsatadi. Bu esa sonli to‘plamni yanada kengaytirishni, ya’ni yangi sonlarni kiritishni talab etadi.

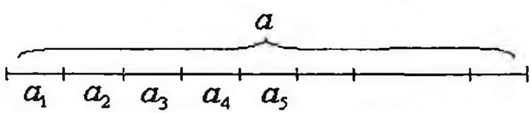
O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Nomanfiy butun sonlar deganda qanday sonlarni tushunasiz?
2. Manfiy sonlarning kiritilishini tushuntiring.
3. Butun sonlarning geometrik interpretatsiyasini tushuntiring.
4. Butun sonlar to‘plamining xossalarini ayting.
5. Butun sonlarni qo‘shish va ko‘paytirish qoidalarini keltiring.
6. Butun sonlarni ayirish va bo‘lish ta’riflarini keltirib tushuntirib bering.
7. Sonning moduli deganda nimani tushunasiz?

8.3. Ratsional sonlar

Kesmalarni o‘lchash. Son tushanchasini kengaytirish mazmunini ochishdan oldin, o‘lchanuvchi kattaliklar va o‘lchov birliklari orasidagi bog‘lanishni aniqlash lozim. Buning uchun kesmalarni o‘lchashni qaraymiz.

Aytaylik a kesma $a_1, a_2, \dots, a_n$ kesmalar birlashmasidan tashkil topgan bo‘lib, ularni hech bir ikkitasi ichki nuqtalarga ega bo‘lmasin (kesmalar uchlari umumiy bo‘lishi mumkin) (8.2-rasm).



8.2-rasm

U holda a kesmaga $a_1, a_2, \dots, a_n$ kesmalarni yig‘indisi deyiladi va quyidagi ko‘rinishda yoziladi: $a=a_1+a_2+a_3+\dots+a_n$ yoki

$$a=\sum_{k=1}^{n} a_k$$

Biror e kesmani tanlab, uni birlik kesma yoki uzunlik o‘lchov birligi deymiz. Agar a kesmani har biri e kesmaga kongruent (teng o‘lchovli) bo‘lgan n ta bo‘lakchaga ajratish mumkin bo‘lsa, u holda n soni a kesmaning e o‘lchov biriligidagi qiymati deyiladi va $m_e(a)$ kabi belgilanadi.

Boshqacha aytganda, a kesma e kesmaga karrali deyiladi.

Agar e o‘lchov birligi sifatida qabul qilingan bo‘lsa, $m_e(a)$ o‘rniga m(a) yoziladi. m(a)=n bo‘lsa, uni $a \cong n \cdot e$ ko‘rinishida yozish mumkin, ya’ni a kesma e kesmaga kongruent n ta kesmadan tashkil topganini bildiradi.

Kesma o‘lchovi ikkita hossaga ega – additivlik va multiplikativlik.

1) Additivlik xossasi.

Agar a=b+c bo‘lib, bunda b va c kesmalar uzunliklari natural sonlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda a kesma uzunligi kesmalar bo‘laklari uzunliklari yig‘indisiga teng bo‘ladi:

$$m(a)=m(b)+m(c) \tag{1}$$

bu additivlik hossasi. (Additivlik so‘zi lotincha “addition” – so‘zidan olingan bo‘lib, qo‘shish degan ma’noni beradi.)

2) Multiplikativlik xossasi.

Uzunlik o‘lchov birligini biridan ikkinchisiga o‘tishning umumiy holini qaraylik. Aytaylik, e_1 e_2 dan n marta katta bo‘lsin, ya’ni $e_1 \cong e_2$(n– natural son). Agar a kesmani e_1 o‘lchov birligida o‘lchaganda biror k soni hosil bo‘lsa (ya’ni $a \cong k \cdot e_1$), shu a kesmani e_2 o‘lchov birligida o‘lchasa kn soni hosil bo‘ladi (ya’ni $a \cong (kne_2)$. Haqiqatan ham, a kesma e_1 kesmaga kongruent bo‘lgan k ta kesmadan tashkil topadi. Bunda k ta kesmalarning har biri e_2 kesmaga kongrent. Demak a kesma e_2 kesmaga kongruent bo‘lgan kn kesmadan tashkil topadi, ya’ni $a \cong (kn)\, e_2$.

Bulardan $a \cong ke_1$ va $e_1 \cong ne_2$ bo‘lishidan $k(ne_2)=(kn)e_2$ ekanligi kelib chiqadi.

a kesmaning e_1 o‘lchov birligidagi uzunligini $m_1(a)$, e_2 o‘lchov birligidagi uzunligini $m_2(a)$ bilan belgilaymiz. U holda $m_1(a)=k$, $m_2(a)=kn$

e_1 kesmaning e_2 o‘lchov birligidagi uzunligini n ga tengligini hisobga olsak (ya’ni $m_2(e_1)=n$; $m_2(a)=kn$) quyidagi munosabatga ega bo‘lamiz.

$$m_2(a) = m_1(a)m_2(e_1) \tag{2}$$

(2) dan quyidagi xossa kelib chiqadi.

Agar a kesma e_1 kesmaga karrali, e_1 kesma esa e_2 kesmaga karrali bo‘lsa, u holda a kesma e_2 kesmaga karrali bo‘ladi va (2) tenglik bajariladi.

Bu xossaga multiplikativlik xossasi deyiladi (multiplikativ so‘zi lotincha "multiplicatio" – so‘zidan olingan bo‘lib, ko‘paytirish degan ma’noni beradi).

Kasr tushunchasini kiritilishi. Matematikaning amaliyotga ko‘pgina tadbiqi ikkita asosiy masalaga, ya’ni kattaliklarni o‘lchash va chekli to‘plamlar elementlari sonini hisoblashga doir masalalarga olib keladi. To‘plamlar elementlari sonini sanash natural sonlar bilan ifodalanadi.

Lekin hamma vaqt ham o‘lchanadigan kattalikni butun son marta o‘lchov birligi orqali ifodalab bo‘lmagan. Bu esa natural sonlardan boshqa sonlarni ham kiritishga ya’ni sonlar tushunchasini kengaytirishga olib kelgan. Ma’lumki, matematika kursida natural, butun, ratsional, irratsional, haqiqiy va kompleks sonlar to‘plamlari bilan ish ko‘riladi. Sonlarning turli to‘plamlari orasidagi o‘zaro bog‘lanishlari xususida to‘xtalamiz.

Son tushunchasining kengayishi jarayonidagi dastlabki to‘plam N_0 bo‘ldi. Biz buni oldingi mavzuda ko‘rib o‘tdik. Juda qadim zamonlarda paydo bo‘lgan natural son tushunchasi ko‘p asrlar davomida kengaydi va umumlashtirildi. Kattaliklarni (miqdorlarni) yanada aniqroq o‘lchashga bo‘lgan talab musbat kasr sonlar tushunchasiga olib keldi. Manfiy sonlar tushunchasining paydo bo‘lishi tenglamalarni yechish va nazariy izlanishlar bilan bog‘liq. Nol avval sonning yo‘qligini bildirgan bo‘lsa, manfiy sonlarning kiritilishi bilan butun sonlar to‘plami Z da hamda ratsional sonlar to‘plami Q da teng huquqli songa aylandi.

Bizning eramizgacha V asrda Pifagor maktabida musbat ratsional sonlar kesmalar uzunliklarini aniq o‘lchash uchun yetarli emasligi aniqlangan va keyinroq bu muammo hal qilingandan keyin irratsional sonlar paydo bo‘ldi, XVI asrda esa o‘nli kasrlarning kiritilishi bilan haqiqiy sonlarga qadam qo‘yildi. Haqiqiy sonning qat’iy ta’rifi, haqiqiy sonlar to‘plami xossalarining asoslanishi XIX asrda berildi.

Haqiqiy sonlar tushunchasi kengayishi jarayonini davom ettirish mumkin va u davom etadi.O‘quvchilarning kasr sonlar bilan dastlabki tanishuvi boshlang‘ich sinflarda boshlanadi. Keyinchalik o‘rta sinflarda kasr sonlar tushunchasi aniqlashtiriladi va kengaytiriladi. Shuning uchun boshlang‘ich sinf o‘qituvchisi kasr va ratsional sonlar ta’rifini, ratsional sonlar ustida amallar bajarish qoidasini va bu amallar qonunlarini bilishi zarur, shuningdek, ratsional va haqiqiy sonlar to‘plamlari bilan natural sonlar to‘plamining o‘zaro bog‘liqligini ko‘ra bilishi kerak. Bu boshlang‘ich va o‘rta sinflarda matematikani ketma-ket o‘rganish uchun zarurdir.

Kasrlarning paydo bo‘lishi tarixi kattaliklarni o‘lchash bilan bog‘liq. Masalan, kesma uzunligini o‘lchashda kasrlar qanday paydo bo‘lishini aniqlaymiz.

a kesma olamiz. Uning uzunligini topish uchun kesma uzunligning birligi sifatida e ni olamiz (8.3-rasm). O‘lchashda a kesmaning uzunligi $4e$ dan katta, lekin $5e$ dan kichikligi topildi. Shuning uchun uni natural son bilan (e uzunlik birligida) ifodalab bo‘lmaydi. Ammo e kesmani har biri e_1 ga teng bo‘lgan to‘rtta teng qismga bo‘lsak, e kesmanig uzunligi $4e_1$ bo‘ladi. Agar dastlabki uzunlik birligi e ga qaytsak, unda a kesma e kesmaning to‘rtdan bir qismiga teng kesmalarning 18 tasidan iborat bo‘ladi,

8.3-rasm

ya’ni a kesmaning uzunligi haqida gapirar ekanmiz, ikkita natural son - 18 va 4 sonlari ustida amallar bajarishga majbur bo‘lamiz. Bunday vaziyatda kesma uzunligini $\frac{18}{4}e$ ko‘rinishida yozishga, $\frac{18}{4}$ belgini esa kasr deb aytishga kelishib olamiz.

Kasr tushunchasi umumiy ko‘rinishda bunday ta’riflanadi: a kesma va e birlik kesma berilgan bo‘lsa, bunda e kesma har biri e_1 ga teng bo‘lgan n ta kesma yig‘indisi. Agar a kesma har biri e_1 ga teng m ta kesmadan tuzilgan bo‘lsa, uning uzunligi $\frac{m}{n}e$ ko‘rinishida bo‘lishi mumkin. $\frac{m}{n}$ belgi kasr deyiladi, bunda m va n - natural sonlar, bu belgi bunday o‘qiladi: «n dan m».

Tanlab olingan e_1 kesma e kesmaning to‘rtdan bir qismidir. a kesmaga butun son marta qo‘yiladigan e kesmaning bunday ulushidan boshqa ulishini, ya’ni e kesmaning sakkizdan bir qismini ham tanlash mumkin, unda a kesma 36 ta shunday kesmadan iborat bo‘lib, uning uzunligi $\frac{36}{8}e$ ga teng bo‘ladi. e kesmaning o‘n oltidan bir qismini olish mumkin, unda a kesma 72 ta shunday kesmadan iborat bo‘lib, uning uzunligi $\frac{72}{16}e$ bo‘ladi. Bu jarayonni cheksiz davom ettirsak, a kesmaning uzunligi turli kasrlarning cheksiz to‘plami bilan ifodalanishi mumkin: $\frac{18}{4}; \frac{36}{8}; \frac{72}{16}; \ldots$.

Umuman, agar e uzunlik birligida a kesmaning uzunligi $\frac{m}{n}$ kasr bilan ifodalansa, u ixtiyoriy $\frac{mk}{nk}$ kasr bilan ifodalanadi, bunda k-natural son.

Bundan ko‘rinadiki, bir xil uzunlikdagi kasr berilgan o‘lchov birligida turli xil ko‘rinishdagi kasrlar bilan ifodalanishi mumkin.

Ta’rif. e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalovchi kasrlar teng kasrlar deyiladi.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$-kasrlar teng bo‘lsa, bunday yoziladi: $\frac{p}{n} = \frac{t}{q}$.

Masalan, $\frac{18}{4}$va $\frac{36}{8}$ kasrlar e uzunlik birligida bitta kesmaning uzunligini ifodalaydi, demak, $\frac{18}{4} = \frac{36}{8}$.

Berilgan kasrlarning tengligi yoki teng emasligini quyidagi teorema aniqlab beradi.

Teorema. $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar teng bo‘lishi uchun pq=nt bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Isboti: 1) $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan pq=nt ekanligini ko‘rsatamiz. Har qanday q natural son uchun $\frac{p}{n}=\frac{t}{q}$, har qanday n natural son uchun $\frac{t}{q}=\frac{tn}{qn}$ bo‘lgani uchun, $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlarning tengligidan $\frac{pq}{nq}=\frac{tn}{qn}$ tenglik kelib chiqadi, bundan o‘z navbatida pq=nt tenglik kelib chiqadi.

2) $pq=nt \Longrightarrow \frac{p}{n}=\frac{t}{q}$ ni ko‘rsatamiz. pq=nt to‘g‘ri tenglikning ikkala qismini nq natural songa bo‘lsak, $\frac{pq}{nq}=\frac{nt}{nq}$ to‘g‘ri tenglikning hosil qilamiz. Ammo $\frac{pq}{nq}=\frac{n}{n}, \frac{nt}{nq}=\frac{t}{q}$. Demak, $\frac{p}{n}=\frac{t}{q}$.

Yuqorida qaralgan faktlardan kasrning asosiy xossasi kelib chiqadi: agar berilgan kasrning surat va maxraji bir xil natural songa ko‘paytirilsa, bo‘linsa, berilgan kasrga teng kasr hosil bo‘ladi. Kasrlarni qisqartirish va kasrlarni bir xil maxrajga keltirish shu xossaga asoslangan.

Kasrlarni qisqartirish – berilgan kasrni unga teng, lekin surati va maxraji undan kichik bo‘lgan kasrga almashtirishdir.

Agar kasrning surat va maxraji uchun umumiy bo‘luvchilarining eng kattasi 1ga teng bo‘lsa, kasr qisqarmas kasr deyiladi. Masalan $\frac{3}{4}$ qisqarmas kasr.

Kasrni qisqartirish natijasida, odatda, unga teng qisqarmas kasrni hosil qilish uchun, berilgan kasrning surat va maxrajini ularning eng katta umumiy bo‘luvchisiga bo‘lish kerak.

Masalan, $\frac{35}{40}$ kasrni qisqartirish uchun D(35,40)ni topamiz, D(35,40)=5. Endi 35ni 5ga va 40ni 5ga bo‘lib, $\frac{35}{40}=\frac{7}{8}$ni hosil qilamiz. $\frac{7}{8}$ - qisqarmas kasr.

Agar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar faqat va faqat bitta kesma uzunligini ifodalasa, ekvivalent kasrlar deyiladi.

Musbat ratsional sonlar. Ma'lumki, bitta kesmaga cheksiz ko'p ekvivalent kasrlar mos keladi. Shuning uchun ekvivalent kasrlar to'plamiga musbat ratsional sonlar deyiladi. Boshqacha aytganda, agar sonni kasr ko'rinishida yozish mumkin bo'lsa, bunday songa musbat ratsional son deyiladi.

Umuman, musbat ratsional son – bu teng kasrlar to'plami, bu to'plamga tegishli har bir kasr shu sonning yozuvidir.

Masalan, $\left\{\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{20}{16}, \frac{40}{32}, \ldots\right\}$ to'plam biror ratsional sonni ifodalaydi. Bunda $\frac{5}{4}, \frac{10}{8}, \frac{20}{16}$ va h.k. kasrlar esa shu sonning turli yozuvidir. $\left\{\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{12}{20}, \frac{24}{40}, \ldots, \frac{3n}{5n}\right\}$ to'plam boshqa musbat ratsional sonni aniqlaydi.

Yuqorida berilgan ta'rifiga ko'ra, biz $\frac{p}{n}$ yozuvga qarab, $\frac{p}{n}$ bu kasr yoki $\frac{p}{n}$ kasr ko'rinishidagi yozilgan musbat ratsional son deymiz. Ko'pincha qisqa bunday deyiladi: «musbat ratsional son $\frac{p}{n}$ berilgan». Bu degani musbat ratsional son va kasr tushunchasi aynan bir xil degani emas. Bular turli tushunchalardir, lekin jumla qisqa bo'lishi uchungina shunday deyiladi.

$\frac{7}{8}$ yozuv nimani anglatadi? Javoblar bunday bo'lishi mumkin: «Bu kasr», «Bu musbat ratsional sonning yozuvi».

$\frac{7}{8}$ -musbat ratsional son deyish mumkinmi? Mumkin, faqat gapni qisqartish maqsadida shunday deyish mumkin.

Biror musbat ratsional sonning barcha yozuvlari orasidan qisqarmas kasr ajratiladi, ya'ni surat va maxrajini eng katta umumiy bo'luvchisi 1 ga teng bo'lgan kasr ajratib olinadi. Masalan, ratsional sonni aniqlovchi $\left\{\frac{3}{4}, \frac{6}{8}, \frac{12}{16}, \frac{24}{12}, \ldots\right\}$ kasrlar orasida $\frac{3}{4}$ kasr qisqarmas kasrdir. Bu esa quyidagi teoremaga olib keladi.

Teorema. Har qanday musbat ratsional son uchun shu sonning yozuvi bo'lgan bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjud.

Teorema isboti talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi.

Natural sonlar to‘plamini musbat ratsional sonlar to‘plamiga to‘ldiruvchi sonlar kasr sonlar deyiladi.

O‘z- o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. O‘lchanuvchi kattaliklar va o‘lchov birliklari orasidagi boglanishni aniqlashda kesmalarni o‘lchashning mohiyatini tushuntirib bering.
2. Kesma o‘lchovi xossalarini sanang va tushuntiring.
3. Son tushunchasini kengaytirish zarurligini aytib bering.
4. Kasrlarning paydo bo‘lishini aytib bering va kasr tushunchasiga ta’rif bering.
5. Kasrlar teng bo‘lishi haqidagi teoremani aytib bering.
6. Kasrlarni qisqartirish deganda nimani tushunasiz?
7. Musbat ratsional kasrga ta’rif bering.
8. Har qanday musbat ratsional son uchun bitta va faqat bitta qisqarmas kasr mavjudligi haqidagi teoremani isbotlab bering.

8.4. Ratsional sonlar ustida arifmetik amallar. Qo‘shish va ko‘paytirish qonunlari

Q_+ to‘plamda qo‘shish va ayirish amallarini qaraymiz.

Qo‘shish. Qo‘shish amalini aniqlash uchun dastlab quyidagi tasdiqni to‘g‘riligini ko‘rsatamiz.

$a,b \in Q_+$ sonlarni bir xil maxrajga ega bo‘lgan kasrlar shaklida ifodalash mumkin. Haqiqatan ham, a sonini $\frac{p}{n}$, b sonini $\frac{t}{q}$ ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, u holda bu kasrlarni bir xil maxrajga ega bo‘lgan $\frac{pq}{nq}$ va $\frac{tn}{qn}$ kasrlar ko‘rinishida ifodalash mumkin.

$\frac{p}{n} va \frac{t}{q}$ kasrlarni ularga ekvivalent bo‘lgan bir xil maxrajli kasrlar bilan almashtirishga kasrlarni umumiy maxrajga keltirish deyiladi.

$\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ ikki kasrning umumiy maxrajini topish n va q sonlarning eng kichik umumiy karralisi K(n,q) ni topish demakdir.

Agar k=K(n;q) bo‘lsa, u holda k=nl=ql', bundan esa $\frac{p}{n}$ kasr $\frac{pl}{nl}=\frac{pl}{k}$ kasrlarga, $\frac{t}{q}$ kasr esa $\frac{tl'}{ql'}=\frac{tl'}{k}$ kasrlarga ekvivalent.

Misol. $\frac{11}{5}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni eng kichik umumiy maxrajini topish uchun K(15; 6) ni topamiz.

K(15; 6)=30. Eng kichik umumiy maxraj 30 soniga teng.

Demak, $\frac{11}{5}$ va $\frac{5}{6}$ kasrlarni $\frac{11\cdot2}{15\cdot2}$ va $\frac{5\cdot5}{5\cdot5}$ kasrlarga almashtiramiz, ya’ni $\frac{22}{30}$ va $\frac{25}{30}$ kasrlarni hosil qilamiz.

Aytaylik, *a* va *b* musbat ratsional sonlar mos ravishda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko‘rinishida berilgan bo‘lsin.

1-ta’rif. Agar a, b$\in Q_+$ musbat ratsional sonlar bo‘lsa, u holda *a* va *b* sonlarning yig‘indisi deb $\frac{p+t}{n}$ kasr bilan ifodalangan songa aytiladi.

$$\frac{p}{n}+\frac{t}{n}=\frac{p+t}{n} \qquad (1)$$

Agar a va b musbat ratsional sonlar turli maxrajli kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, bu kasrlar eng kichik umumiy maxrajga keltiriladi va (1) qoida bo‘yicha qo‘shiladi.

Masalan, $\frac{11}{15}+\frac{5}{6}=\frac{22}{30}+\frac{25}{30}=\frac{47}{30}$.

Endi musbat ratsional sonlarni kesmalar bo‘yicha qo‘shishni qaraymiz.

a, b, c kesmalar berilgan bo‘lib, c=a+b va tanlab olingan uzunlik birligi *e* da a=$\frac{7}{3}$*e*, b=$\frac{9}{3}$*e* bo‘lsin (8.4-rasm).

8.4-rasm

U holda, c kesma uzunligi $\frac{16}{3}$ soni bilan ifodalanadi, chunki $c=a+b=\frac{7}{3}e+\frac{9}{3}e=7e_1+9e_1=(7+9)e_1=16e_1=\frac{16}{3}e$ sonni $\frac{7}{3}$ va $\frac{9}{3}$ sonlarining yig‘indisi sifatida qarash mumkin.

Agar a, b$\in$Q$_+$ musbat ratsional sonlarni ifodalovchi kasrlarning ikkitasi yoki bittasi noto‘g‘ri kasr bo‘lsa, (ya’ni $\frac{p}{n}$ noto‘g‘ri kasr bo‘lsin (p$\geq$n), u holda *pn* ga karrali bo‘lsa, u holda $\frac{p}{n}$ - kasr natural sonning yozuvi bo‘ladi.

Misol. $\frac{16}{4} = 4$

Agar *pn* ga karrali bo‘lmasa, *p* ni *n* ga qoldiqli bo‘lamiz: p=nq+r, bunda r<n]

$\frac{p}{n}$ kasrda *p* o‘rniga nq+r ni qo‘yamiz va (1) qoidani qo‘llaymiz

$\frac{p}{n} = \frac{nq+r}{n} = \frac{nq}{n} + \frac{r}{n} = q + \frac{r}{n}$.

Bunga noto‘g‘ri kasrdan butun qismni ajratish deyiladi.

Qo‘shishning xossalari:

1) Qo‘shish amali kommutativlik xossasiga ega, ya’nia, b$\in$Q$_+$ uchun a+b=b+a.

Haqiqatan ham, *a* va *b* musbat ratsional sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda *a+b* musbat ratsional soni $\frac{p+t}{n}$ kasr ko‘rinishida, *b+a* musbat ratsional soni esa $\frac{t+p}{n}$ ko‘rinishida ifodalanadi, p+t=t+p bo‘lgani uchun a+b=b+a.

2) Qo‘shish amali assotsiativ, ya’ni a+(b+c)=(a+b)+c.

Haqiqatan ham *a, b* va *c* musbat ratsional sonlari mos ravishda $\frac{p}{n}, \frac{t}{n}$ va $\frac{l}{n}$ kasrlar ko‘rinishida berilgan bo‘lsa, u holda a+(b+c) soni $\frac{p+(t+l)}{n}$ kasr ko‘rinishida, (a+b)+c soni esa $\frac{(p+t)+l}{n}$ kasr ko‘rinishida ifodalanadi.

p+(t+l)=(p+t)+l (natural sonlar xossasiga ko‘ra) bo‘lganligi sababli a+(b+c)=(a+b)+c.

3) Qo‘shish amali qisqaruvchan, ya’ni a+c=b+c dan a=b kelib chiqadi.

Natural sonlar to`plamidagi kabi Q$_+$ da ">" munosabati asimmetrik, tranzitiv va chiziqli. Kattalik munosabati quyidagicha: agar a va b sonlari teng maxrajli $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda faqat va faqat p>t bo‘lganda a>b bo‘ladi. Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo‘lsa, u holda faqat va faqat pq>nt bo‘lganda a>b bo‘ladi. Bundan Q_+ to‘plamda tartib munosabati mavjudligi kelib chiqadi.

Ayirish. Aytaylik $a,b \in Q_+$va a>b bo‘lsin. U holda qo‘shish ta’rifiga asosan shunday $c \in Q_+$mavjudki, a=b+c tenglik o‘rinli bo‘ladi. Tenglik uchun *c* sonini bir qiymatli aniqlanishini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, faraz qilaylik a=b+d bo‘lsin, bunda $d \in Q_+$.

U holda, b+c=b+d tenglikga ega bo‘lamiz. $Q_+$to‘plamda qisqaruvchanlik xossasiga ko‘ra $c=d$ bo‘ladi. Bu esa c sonining bir qiymatli aniqlanganini ko‘rsatadi.

2-ta’rif. Agar Q_+ to‘plamda *c* soni mavjud bo‘lib, a=b+c tenglik o‘rinli bo‘lsa, u holda *c* soniga a va *b* sonlarining ayirmasi deyiladi va a-b ko‘rinishida belgilanadi.

Agar *a* va *b* sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasr ko‘rinishida ifodalansa, a-b ayirma $\frac{p-t}{n}$ kasr ko‘rinishida bo‘ladi.

Agar a va b sonlari $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasr ko‘rinishida bo‘lsa, a-b ayirma $\frac{pq-tn}{nq}$ kasr ko‘rinishida ifodalanadi. Bunda $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{n}$ kasrlar umumiy maxrajga keltiriladi.

Misol. $\frac{5}{12}-\frac{3}{20}=\frac{25-9}{60}=\frac{16}{60}=\frac{4}{15}$.

Musbat ratsional sonlarni ko‘paytirish va bo‘lish.

Aytaylik, *a* kesma, e_1 birlik kesma, e_1 kesma esa e_2 birlik kesma bilan o‘lchangan bo‘lsa, u holda $a \cong \frac{p}{n}e_1, e_1 = \frac{t}{q}e_2$bo‘ladi, ya’ni $na \cong pe_1;\ qe_1 \cong te_2$.

U holda $(nq)a \cong (pq)e_1, (pq)e_1 \cong (pt)e_2$ shuning uchun $(nq)a \cong (pt)e_2$. Bu esa *a* kesmaning e_2 birlik kesmaga nisbatan uzunligi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanishini ko‘rsatadi, boshqacha aytganda m_2 (a) son $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalanadi, ya’ni $m_2(a)=\frac{pt}{nq}$.

Ammo shartga ko‘ra, $m_1(a)=\frac{p}{nq}$; $m_2(e_1)=\frac{t}{q}$.

Kesmalarni o'lchashni multiplikativlik xossasi $m_2(a)= m_1(a)\cdot m_2(e_1)$ bajarilishi talab qilinsa, $\frac{pt}{nq} = \frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q}$ tenglik bajarilishi lozim.

3-ta'rif. Agar musbat ratsional sonlar $\frac{p}{n}$ va $\frac{t}{q}$ kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, u holda ularning ko'paytmasi $\frac{pt}{nq}$ kasr bilan ifodalangan son bo'ladi.

$$\frac{p}{n}\cdot\frac{t}{q} = \frac{pt}{nq} \qquad (2)$$

Kasrni kasrga ko'paytirish qoidasi maktabda quyidagicha ta'riflanadi: kasrni kasrga ko'paytirish natijasi shunday kasrga tengki, u kasrning surati ko'paytuvchi kasrlarning suratidagi sonlar ko'paytmasidan, maxraji esa ko'paytuvchi kasrlarning maxrajlari ko'paytmasidan iborat.

Musbat ratsional sonlarni ko'paytirish kommutativlik, assotsiativlik, qisqaruvchanlik xossalariga bo'ysinadi. Shuningdek, musbat ratsional sonlarni ko'paytirish qo'shishga nisbatan taqsimot qonuniga bo'ysinadi.

4-ta'rif. Ikki *a* va *b* ratsional sonning bo'linmasi deb, shunday *c* songa aytiladiki, uning uchun a=bc bo'ladi.

Biz *a* va *b* sonlarining bo'linmasi ta'rifini berdik. Agar $a=\frac{p}{n}$, $b=\frac{t}{q}$ bo'lsa, bo'linma qanday topiladi? $c=\frac{pq}{nt}$ son shu bo'linma ekanligini ko'rsatamiz. Bo'linma ta'rifiga ko'ra $a=bc=\frac{t}{q}\cdot\frac{pq}{nt}$.

Musbat ratsional sonlarning ko'paytirishning (2) qoidasini va ko'paytirish qonunlarini qo'llab, shakl almashtirishlar bajaramiz:
$\frac{t(pq)}{q(nt)} = \frac{(tq)p}{(tq)n} = \frac{p}{n}$.

Shunday qilib, ikki musbat ratsional sonning bo'linmasi
$\frac{p}{n}:\frac{t}{q}\cdot\frac{pq}{nt}$ (3) formula bo'yicha topiladi.

Hosil bo'lgan formula ixtiyoriy musbat ratsional sonlar uchun bo'linma mavjudligini ko'rsatadi, ya'ni natural sonlar to'plamida har doim ham bajarib bo'lmaydigan bo'lish amallarini Q_+ to'plamda har doim bajarib bo'ladi.

Shuni eslatamizki, $\frac{p}{n}$ kasr yozuvidagi chiziq belgisini bo'lish amalining belgisi deb qarash mumkin. Haqiqatdan, ikkita p va n natural sonni olamiz va (3) qoida bo'yicha ularning bo'linmasini topamiz. $p:n = \frac{p}{1}:\frac{n}{1} = \frac{p \cdot 1}{1 \cdot n} = \frac{p}{n}$. Aksincha, agar $\frac{p}{n}$ bo'lgani uchun har qanday musbat ratsional sonni ikki natural sonning bo'linmasi deb qarash mumkin. Shuni aytish kerakki, "ratsional son" termini lotincha "ratio" so'zdan kelib chiqqan bo'lib, tarjimasi "nisbat" (bo'linma) ni anglatadi.

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar:

1. Musbat ratsional sonlarni qo'shish va ayrishni misollar yordamida tushuntiring. Qo'shishning xossalarini sanab, tushuntirib bering.
2. Musbat ratsional sonlarni ko'paytirish va bo'lishni ta'riflang va misollar yordamida tushuntirib bering.

8.5. Ratsional sonlar to'plamining xossalari

Musbat ratsional sonlar to'plamining tartiblanganligi. Agar ratsional sonlar teng kasrlar bilan ifodalangan bo'lsa, ular teng bo'ladi. Masalan, agar a ratsional son $\frac{3}{4}$ $(a = \frac{3}{4})$ kasr bilan, b ratsional son $\frac{6}{8}\left(b = \frac{6}{8}\right)$ kasr bilan ifodalangan bo'lsa, u holda $a = b$ bo'ladi, chunki $\frac{3}{4} = \frac{6}{8}$.

a va b ratsional sonlardan qaysi biri kichik (katta) ekanligini qanday bilish mumkin?

a va b – musbat ratsional sonlar bo'lsin.

Ta'rif. Agar shunday c ratsional son mavjud bo'lib, unda $a + c = b$ bo'lsa, a soni b sondan kichik $(a < b)$ yoki b soni a dan katta $(b > a)$ deb aytiladi.

Bu ta'rif musbat ratsional sonlar to'plamida ayirma mavjud bo'lishining zarur va yetarli shartini ifodalashga imkon yaratadi.

a va b musbat ratsional sonlarning ayirmasi mavjud bo‘lishi uchun ($b < a$) bo‘lishi zarur va yetarlidir.

Bu shartning isboti natural sonlar to‘plamida ayirma mavjud bo‘lishi haqidagi teoremaning isbotiga o‘xshaydi.

“Kichik” munosabatining keltirib chiqarilgan ta’rifidan bu munosabatni o‘rgatishning amaliy usullarini chiqarish mumkin.

Agar $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{n}$ bo‘lsa, $m < p$ bo‘lganda va faqat shunda $a < b$ bo‘ladi.

Agar $a = \frac{m}{n}, b = \frac{p}{q}$ bo‘lsa, $mq < np$ bo‘lganda va faqat shunda $a < b$ bo‘ladi.

Haqiqatdan ham, $\frac{m}{n}$ va $\frac{p}{q}$ kasrlarni umumiy maxrajga keltiramiz: $\frac{m}{n} = \frac{mq}{nq}$; $\frac{p}{q} = \frac{pn}{qn}$ Natijada, berilgan kasrlarni taqqoslash, ularning suratlarini taqqoslashga keltiriladi: agar $mq > pn$ bo‘lsa, $a > b$; agar $mq < np$ bo‘lsa, $a < b$.

Masalan, agar $a = \frac{7}{8}, b = \frac{11}{13}$ bo‘lsa, $a > b$, chunki $7 \cdot 13 = 91$, $8 \cdot 11 = 88$ va $7 \cdot 13 > 8 \cdot 11$. Bunday aniqlangan "kichik" munosabati tranzitiv va asimmetrik ekanligini, ya’ni "kichik" munosabati musbat ratsional sonlar to‘plamida tartib munosabati ekanini, bu to‘plamning o‘zi tartiblangan to‘plam ekanini ko‘rsatish mumkin. Shuni eslatib o‘tamizki, musbat ratsional sonlar to‘plamidagi tartib munosabati natural sonlar to‘plamidagi tartib munosabatidan farqli xossalarga ega. Ma’lumki, N to‘plam diskret – ikkita ketma-ket natural sonlar orasida boshqa natural sonlar yo‘q.

Musbat ratsional sonlar to‘plamida: 1) eng kichik son yo‘q; 2) ixtiyoriy ikkita musbat ratsional sonning orasida Q_+ to‘plamining cheksiz ko‘p soni bor.

Q_+ to‘plamda eng kichik son yo‘qligini isbotlaymiz. Faraz qilaylik a Q_+ to‘plamdagi eng kichik son bo‘lsin. a sonini $\frac{m}{n}$ kasr ko‘rinishida ifodalash mumkin, u holda $\frac{m}{n+1}$ soni $\frac{m}{n}$ sonidan kichik bo‘ladi, ya’ni $\frac{m}{n+1} < \frac{m}{n}$ chunki ($mn < mn + m$). Demak, farazimiz noto‘g‘ri. Musbat ratsional sonlar to‘plamida eng kichik son yo‘q.

Ikkinchi xossani misolda ko'rsatamiz. $\frac{1}{3}$ dan katta va $\frac{2}{3}$ dan kichik ratsional son mavjudmi? Mavjud. Buning uchun berilgan sonlarning o'rta arifmetigini topish yetarli: $(\frac{1}{3}+\frac{2}{3}):2=\frac{1}{2}$. Shunday qilib, $\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$.

$\frac{1}{3}$ bilan $\frac{2}{3}$ ning orasida yotgan son yana topiladimi? Ha, uni topish uchun $\frac{1}{3}$ va $\frac{1}{2}$ sonlarning o'rta arifmetigini topish yetarli: $(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}):2=\frac{5}{12}$. Shunday qilib, $\frac{1}{3}<\frac{5}{12}<\frac{1}{2}<\frac{2}{3}$. Bu jarayonni davom ettirish mumkin: Q_+ to'plamda olingan ixtiyoriy ikki son orasida shu to'plamda yotadigan cheksiz ko'p son bor. Q_+ to'plamning bu xossasi zichlik xossasi deyiladi.

Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatikasi. Biz musbat ratsional sonlar va uning ustida bajariladigan amallarni geometrik nuqtai nazardan, ya'ni kesmalarni o'lchash masalalaridan kelib chiqib aniqladik.

Ammo musbat ratsional sonlar faqat kesmalarni uzunliklarini o'lchash uchun emas, balki massa, yuza, hajm va boshqalarni o'lchash uchun ham zarur. Bu esa musbat ratsional sonlar nazariyasini yaratishni talab qiladi. Buning uchun bu sonlarni qanoatlantiruvchi aksiomalarni ko'rsatish yetarli.

Q_+ da qo'shish xossalarini va natural songa ko'paytirishni (na=a+a+...+a; n marta) ifodalovchi aksiomalar sisitemasi yordamida Q_+ to'plamni aniqlaymiz. Bu aksiomalar sistemasi quyidagicha:

1. Q_+ to'plam N natural sonlar to'plamini o'z ichiga oladi.

2. Q_+ to'plamda qo'shish amali aniqlangan bo'lib, u Q_+ to'plamdagi ixtiyoriy ikkita *a* va *b* sonlar uchun shu to'plamda *a* va *b* sonlarining yig'indisi deb ataluvchi a+b sonini qo'yadi. *N* to'plam ostida qo'shish amali *N* to'plamda aniqlangan qo'shish amali bilan bir xil.

3. Q_+ da aniqlangan qo'shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan.

4. Ixtiyoriy $a\in Q_+$ son uchun shunday natural p va n sonlari topiladiki, bular uchun na = p o'rinli.

5. Ixtiyoriy natural p va n sonlari uchun shunday $a \in Q_+$ soni topiladiki, bunda $na = p$.

6. Agar $na = nb$ bo'lsa, u holda $a = b$.

Bu aksiomalar sistemasi ziddiyatsiz bo'lib, Q_+ to'plamni va undagi qo'shish amalini aniqlaydi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Musbat ratsional sonlar to'plamining tartiblanganganligini tushuntiring.
2. a va b musbat ratsional sonlari o'rtasida asonidan b sonini kichik bo'lishi ta'rifini keltiring.
3. Musbat ratsional sonlar to'plamida eng kichik son yo'qligi va ikkita musbat ratsional sonlar o'rtasida cheksiz ko'p ratsonal sonlar mavjudligini isbotlang.
4. Musbat ratsional sonlar nazariyasining aksiomatik qurishni tushuntiring.

8.6. O'nli kasrlar va ular ustida arifmetik amallarni bajarish algoritmi

Musbat ratsional sonlarning o'nli kasr ko'rinishidagi yozuvi. Ma'lumki, kasr sonlarning paydo bo'lishi kattalikning bir birligidan ikkinchi birligiga o'tishdir, kasr maxraji berilgan kattalik birligi nechta ulushga bo'linishini ko'rsatadi. Hozirgi paytda deyarli barcha mamlakatlarda xalqaro birliklar sistemasi ishlatiladi. Bu sistemada o'nli sanoq sistemasidan foydalanilganligi uchun kattaliklarning yangi birliklari berilganlarni 10, 100, 1000 va hakozo marta kamaytirish va ko'paytirish bilan hosil qilinadi. Masalan, 1 dm=10 sm;1 sm=100 mm; 1 km=1000 m=10000 dm;1 kg = 1000 g va h.k. Shuning uchun amalda maxraji 10 ning darajalari bo'lgan kasrlar ya'ni $\frac{m}{10^n}$ (bunda m, n – natural sonlar) katta ahamiyatga ega. Bunday kasrlarga o'nli kasrlar deyiladi. O'nli kasrlardan farqli ravishda $\frac{m}{n}$ ko'rinishdagi kasrlar oddiy kasrlar deyiladi.

Sonning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvining ma’nosini aniqlaymiz. $\frac{4362}{10^2}$ kasrni olamiz va quyidagi shakl almashtirishlar bajaramiz:

$$\frac{4362}{10^2}=\frac{4\cdot 10^3+3\cdot 10^2+6\cdot 10+2}{10^2}=4\cdot 10+3+\frac{6}{10}+\frac{2}{10^2}$$

$4\cdot 10+3$ yig‘indi 43 sonining yozuvidir, $\frac{6}{10}+\frac{2}{10^2}$ yig‘indi esa $\frac{4362}{10^2}$ sonining kasr qismining yozuvidir. Bunday kasr qismini maxrajsiz yozish qabul qilingan, bunda kasr qismi butun qismidan vergul bilan ajratiladi: $\frac{4362}{10^2}=43{,}62$.

Umumiy holda qaraylik. Kasr suratining o‘nli sanoq sistemasidagi yozuvi $m=m_k\ldots m_0$ ko‘rinishga, boshqacha yozganda $m=m_k\cdot 10^k+\cdots+m$ ko‘rinishga ega bo‘lsin. U holda daraja ustidagi amallarni bajarish qoidasiga ko‘ra ($n\leq k$ bo‘lganda) quyidagiga ega bo‘lamiz.

$$\frac{m}{10^n}=\frac{m_k\cdot 10^k+\cdots+m_n 10^n+m_{n-1}10_{n-1}+\cdots+m_0}{10^n}=$$

$$=m_k 10^{k-n}++\frac{m_{n-1}}{10}+\cdots+\frac{m_0}{10^n}$$

$m_k 10^{k-n}+\cdots+m_n$- natural sonini M bilan belgilaymiz. (1) o‘nli kasrni quyidagicha belgilash qabul qilingan: $M,m_{n-1}\ldots m_0$ shunday qilib, $\frac{m}{10^n}$ kasrni yozishda, *m* sonini o‘nli yozuvdagi oxirgi *n* ta raqami vergul bilan ajratiladi. Masalan, $\frac{621}{10^2}=6{,}21$

Ma’lumki, o‘nli kasrlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarish oddiy kasrlarga qaraganda osonroq. Masalan, 0,4563 0,4563<0,4572, chunki sonlarning o‘nli va yuzli ulushlari teng bo‘lgani bilan, birinchi sonning mingli ulushi ikkinchi sonnikidan kichik (6<7).

O‘nli kasrlarni taqqoslash va ular ustida amallar bajarish oson bo‘lgani uchun quyidagi savol kelib chiqadi: $\frac{m}{n}(m,n\in N)$ ko‘rinishdagi har qanday kasrni ham o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkinmi?

Bunga quyidagi teorema javob beradi.

Teorema. $\frac{m}{n}$ qisqarmas kasr chekli o‘nli kasrga teng bo‘lishi uchun bu kasr maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida faqat 2 va 5 sonlari bo‘lishi zarur va yetarlidir. (Biz uni isbotsiz qabul qilamiz.)

Masalan, $\frac{17}{250}$ kasrni o‘nli kasr ko‘rinishida yozish mumkin, chunki u qisqarmas va maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasi 2 va 5 sonlaridangina iborat: $250=2\cdot5^3$ $\frac{7}{15}$ kasrni o‘nli kasr ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi, uning maxrajining tub ko‘paytuvchilarga yoyilmasida 3 soni bor: $15=3\cdot5$.

O‘nli kasrlar orasida 0,01 kasr ajralib turadi va undan ko‘p foydalaniladi, U protsent deb ataladi va 1% deb belgilanadi. Amalda kattaliklarning qismlari protsentlar bilan ifodalanadi. Masalan, tovarning narxi 20% arzonlashtirildi. Agar shakarqamish tarkibida 15% shakar bo‘lsa, 10 t shakarqamishda qancha shakar bor? $0{,}15\cdot10t=1{,}5t$. Demak, 10 t ning 15% i 1,5t ni tashkil qilar ekan.

O‘nli kasrlar ustida amallarini bajarish algoritmlari. O‘nli kasrlar ustida amallarini bajarish algoritmlarini keltiramiz.

Ikkita o‘nli kasrni qo‘shish (ayirish)algoritmi:

1) ikkita o‘nli kasrda verguldan keyingi o‘nli belgilar sonini tenglashtirish kerak, agar o‘nli kasrning bittasida o‘nli belgilar soni kam bo‘lsa, uning o‘ng tomoniga bir qancha nollar yozish bilan tenglashtiriladi;

2) hosil qilingan o‘nli kasrda vergullarni tashlab, hosil bo‘lgan natural sonlar qo‘shiladi (ayiriladi);

3) natijada hosil bo‘lgan yig‘indi (ayirma) sonida qo‘shiluvchilarning (kamayuvchi va ayriluvchida) qaysi birida o‘nli belgilar ko‘p bo‘lsa, shuncha o‘nli belgini vergul bilan ajratish kerak.

Masalan, 3,12 va 2,1536 o‘nli kasrlarni qo‘shing va ayiring.

a) $3{,}12+2{,}1536=3{,}1200+2{,}1536=5{,}2736$.

b) $3{,}12-2{,}1536=3{,}1200-2{,}1536=0{,}9664$.

O‘nli kasrlarni ko‘paytirish algoritmi:

1) ikkita o‘nli kasrdagi vergullar tashlab yuboriladi;

2) hosil bo‘lgan ikkita natural son natural sonlarni ko‘paytirish qoidasiga asosan ko‘paytiriladi;

3) ko‘paytmada hosil bo‘lgan natural sonning o‘ngidan chapiga qarab, ikkita o‘nli kasrda verguldan keyin qancha raqam bo‘lsa, shuncha raqam sanalib vergul qo‘yiladi.

Masalan, $2{,}15 \cdot 3{,}17 = 6{,}8155$.

Ikki o‘nli kasrni bo‘lish algoritmi:

1) ikkita o‘nli kasrning verguldan keyingi raqamlar soni tenglashtiriladi, agar bittasida raqamlar soni kam bo‘lsa, o‘nli kasr oxirgi raqamini ketiga nollar yozib to‘ldiriladi;

2) hosil bo‘lgan o‘nli kasrlarning vergullari tashlab yuboriladi;

3) ikkita natural sonlarni bo‘lish qoidasiga asosan bo‘linadi.

Masalan, $40{,}625:12{,}5=40625:12500=3{,}25$.

Manfiy va turli ishorali ratsional sonlarning ustida arifmetik amallar butun sonlar ustidagi amallar kabi bajariladi. Bunday algoritmlarni ko‘rib chiqish talabalarga mustaqil ish sifatida beriladi.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. O‘nli kasga ta’rif bering.
2. Musbat ratsional sonlarning o‘nli kasr ko‘rinishidagi yozuvini yozib ko‘rsating.
3. Qisqarmas kasrni o‘nli kasrga aylantirishda zaruriy va yetarli shartlar to‘g‘risidagi teoremani aytib isbotlab bering.
4. O‘nli kasrlar ustida amallar bajarishning algoritmlarini aytib bering.

8.7. Ratsional son cheksiz davriy o‘nli kasr sifatida

$\frac{1}{3}$ kasrni olib qaraylik, bu kasrni chekli o‘nli kasr ko‘rinishida yozib bo‘lmaydi. 1 ni 3 ga bo‘lish jarayoni cheksiz davom etadi. Shu sababli $\frac{1}{3}$ kasr cheksiz o‘nli kasr hisoblanadi. Bundan tashqari 1 ni 3 ga bo‘lganda, ya’ni $\frac{1}{3} = 0{,}333$. Bo‘linmada raqamlar takrorlanadi. Agar biz bo'linmada bir qancha raqamlarni tashlab yuborsak, u holda $\frac{1}{3}$ dan kichik songa ega bo'lamiz.

Har qanday chekli o'nli kasrni ham o'nli kasrni o'ng tomoniga nollar yozish bilan cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin.

Masalan $0,16=0,1600...0...$

Bulardan ko'rinadiki, har bir musbat ratsional sonni cheksiz o'nli kasr ko'rinishida yozish mumkin ekan.

Bunda hosil qilingan cheksiz o'nli kasrlarni davriy o'nli kasrlar deyiladi.

Masalan, $\frac{3}{11}$ soni $0,272727...\ 27...$, $\frac{8}{55}$ soni $0,1454545...45...$ cheksiz davriy o'nli kasrlarni ifodalaydi. Bu davriy o'nli kasrlar qisqacha $0,(27)$, $0,1(45)$ ko'rinishida yoziladi, qavs ichidagi sonlar cheksiz davriy o'nli kasrdagi takrorlanuvchi bir xil raqamlar guruhini bildiradi va davr deb ataladi.

Davriy kasrlar ikki xil bo'ladi:

Sof davriy kasrlar – ularda vergul bilan davr orasida boshqa o'nli xonalar yo'q.

Masalan, $0,(3)$, $0,(27)$, $0,(85472)$, ...

Aralash davriy o'nli kasrlar – ularda vergul va davr orasida boshqa o'nli xonalar bor.

$3,15(44)$, $0,1(45)$, ...

Quyidagicha savol tug'iladi. Har qanday qisqarmas $\frac{m}{n}$ kasrni davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalab bo'ladimi?

Teorema. Agar $\frac{m}{n}$ kasr qisqarmas va maxrajining yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub ko'paytuvchi bo'lsa, $\frac{m}{n}$ kasr cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalanadi.

Isbot. Maxraj yoyilmasida 2 va 5 dan farqli boshqa tub ko'paytuvchi bo'lgani uchun m ni n ga bo'lish jarayoni cheksizdir. Bundan tashqari m ni n ga bo'lganda n dan kichik qoldiqlar ya'ni 1, 2, 3,..., n-1 sonlar qoladi. Turli qoldiqlar to'plami chekli bo'lgani uchun, qaysidir qadamdan keyin biror qoldiq takrorlanadi, bu esa bo'linma xonalarining takrorlanishiga olib keladi. Demak, $\frac{m}{n}$ sonini ifodalovchi cheksiz o'nli kasr, albatta, davriy bo'lar ekan.

Isbotlangan teoremadan xulosa kelib chiqadi: ixtiyoriy musbat ratsional sonni chekli o'nli kasr orqali yoki cheksiz davriy o'nli kasr orqali ifodalash mumkin.

Agar chekli o'nli kasrni davri 0 ga teng cheksiz kasr deb hisoblash kelishilsa, buni qisqacha shunday yozish mumkin. Masalan, 7,82=7,82(0). Bunday kelishilish ixtiyoriy musbat ratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida yozishga imkon beradi. Shuningdek, ixtiyoriy musbat cheksiz davriy o'nli kasrni biror musbat ratsional son shaklida ifodalash mumkin.

$\frac{m}{n}$ musbat ratsional sonni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida yozish uchun surat m ni maxraj n ga bo'lish kerak. Cheksiz davriy o'nli kasr oddiy kasr ko'rinishiga quyidagicha keltiriladi.

Cheksiz davriy o'nli kasr 0,(14) berilgan bo'lsin, ya'ni 0,141414... . Unga mos ratsional sonni a orqali belgilaymiz, u holda $a = 0{,}141414 \ldots$. Bu tenglikning ikkala tomonini 100 ga ko'paytiramiz:

$$100a = 14 + 14{,}1414 \ldots yoki = 100a = 14 + 0{,}1414 \ldots$$
$$= 14 + a.$$

$100a = 14 + a$ tenglamani yechamiz: $a = \frac{14}{99}$. Bu kasr qisqarmas.

Umuman, sof davriy cheksiz o'nli kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati davrga teng, maxraji esa kasr davrida nechta raqam bo'lsa, shuncha to'qqizdan iborat.

Aralash davriy kasr 0,5(41), ya'ni 0,54141... berilgan bo'lsin. Unga mos ratsional sonni a orqali belgilaymiz, u holda a =0,514141... . Bu tenglikning ikkala qismini 10 ga ko'paytirib, $10a$ =5,4141... sof davriy kasrni hosil qilamiz. Keyingi o'zgartirishlar yuqoridagidek bajariladi. $x = 5{,}4141\ldots$ deymiz. Bu tenglikni ikkala qismini 100 ga ko'paytiramiz: 100x=541,4141... yoki 100x=541+0,4141... Bu tenglikni ikkala qismiga 5 ni qo'shamiz: 100x+5=541+5,4141...; x=5,4141 bo'lgani uchun 100x+5=541+x tenglamani hosil qilamiz, bundan

$x=\frac{541-5}{99}$, x ning bu qiymatini 10a=5,4141... tenglikka qo'yamiz:

$10a=\frac{541-5}{99}$, a bundan$=\frac{541-5}{990}=\frac{536}{990}$.

Umuman, butun qismi 0 bo'lgan aralash davriy kasr shunday oddiy kasrga tengki, uning surati ikkinchi davrgacha yozilgan sondan birinchi davrgacha yozilgan sonning ayirmasidan, maxraji esa davrda nechta raqam bo'lsa, shuncha to'qqizdan va birinchi davrgacha nechta raqam bo'lsa, shuncha noldan iborat.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Cheksiz davriy o'nli kasrlarni misollar yordamida tushuntiring.
2. Sof va aralash davriy o'nli kaslarni misollar yordamida tushuntiring.
3. Kasrni cheksiz davriy o'nli kasr ko'rinishida ifodalash shartlarini aytib bering.
4. Cheksiz davriy o'nli kasrni oddiy kasrga aylantirishni misollar yordamida tushuntiring.

8.8. Haqiqiy sonlar. Irratsional son tushunchasi. Davriy bo'lmagan cheksiz o'nli kasr

O'lchovdosh bo'lmagan kesmalar. Musbat ratsional sonlar yordamida u yoki bu kattaliklarni istalgan aniqlik darajasida o'lchash mumkin. Ammo bunday aniqlikda o'lchashni hamma vaqt ham bajarib bo'lmaydi.

Masalan, biror OA kesmani $\frac{1}{10^n}$ aniqlikda o'lchash talab qilinsin. Buni biz quyidagicha o'lchaymiz. OA kesmani O nuqtasidan A nuq-tasiga qarab uzunligi $\frac{1}{10^n}$ bilan ifodalanuvchi kesmalarni joylashtirib chiqamiz. Ammo bunda quyidagi hollar bo'lishi mumkin. Boshqacha aytganda, shunday musbat m soni mavjudki, buning uchun $\frac{m}{10^n}$ uzunlik OA kesmadan kam, $\frac{m+1}{10^n}$ uzunlik OA kesmadan ortiq bo'ladi.

Shunday qilib, OA kesma uzunligi $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ sonlari orasida bo'ladi. Xuddi shunday hol jismlarni o'lchashda ham ro'y beradi, ya'ni jism o'lchashda og'irlik $\frac{1}{10^n}$ gacha aniqlikda bo'lishi mumkin.

Bundan ko'rinadiki, $\frac{m}{10^n}$ va $\frac{m+1}{10^n}$ ratsional sonlari OA kesmani uzunligini taqribiy, ya'ni ortig'i yoki kami bilan ifodalaydi. U OA kesmaning uzunligini aniq ifodalaydimi? Bu savolga ayrim hollarda ratsional sonlar bilan chegaralanib javob berib bo'lmaydi.

Shunday kesmalar mavjudki, ularni uzunliklarini ratsional sonlar yordamida ifodalab bo'lmaydi. Bunday kesmalarni mavjud bo'lishini quyidagi teoremada ko'rish mumkin.

Teorema. Kvadratning diagonali uning tomonlari bilan o'lchovdosh emas.

Isbot. Aytaylik, kvadratning tomoni 1 ga teng bo'lsin. Faraz qilaylik ABCD kvadratning AC diagonali uning tomoni bilan o'lchovdosh bo'lsin va uning uzunligi qisqarmas $\frac{p}{q}$ kasr bilan ifodalansin. U holda, Pifagor teoremasiga asosan, $|AB|^2+|BC|^2=|AC|^2$ tenglikga ega bo'lamiz.

Boshqacha aytganda, $1^2+1^2=\frac{p^2}{q^2}$ tenglikga ega bo'lamiz, bundan esa $p^2=2q^2$ tenglik kelib chiqadi. Demak, p^2– juft son, u holda P ham juft (chunki toq sonni kvadrati juft son bo'lmaydi). Shunday qilib, $p = 2p_1$. Bundan esa $4p_1^2 = 2q^2$, bundan esa q^2 ni juft sonligi kelib chiqadi va q - juft son.

Demak, p va q lar juft son bo'lib, bizni $\frac{p}{q}$ kasr qisqarmas kasr degan farazimizga zid. Bu zidlik esa, kvadratning tomonini o'lchov birligi sifatida tanlasak, kvadrat diagonali uzunligini ratsional son orqali ifodalab bo'lmasligini, ya'ni kvadratning diagonali uning tomoni bilan o'lchovdosh emasligini ko'rsatadi.

Shu sababli ixtiyoriy kesmani o'lchash natijasini son bilan ifodalash uchun Q_+ musbat ratsional sonlar to'plamini yangi sonlar bilan to'ldirib kengaytirish kerak.

Bu holda hosil bo'lgan yangi sonlar to'plami musbat haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R_+ bilan belgilanadi.

Bundan ko'rinadiki, har bir musbat ratsional son R_+ ga tegishli bo'ladi, ya'ni $Q_+ \subset R_+$; R_+ da qo'shish va ko'paytirish amallari musbat ratsional sonlar to'plami Q_+dagidek aniqlanib, R_+da kesmalarni o'lchash ham additivlik va multiplikativlik xossalariga ega bo'ladi.

Musbat haqiqiy sonlar va cheksiz o'nli kasrlar. Biz ixtiyoriy kesmani o'lchash natijasini cheksiz o'nli kasrlar bilan ifodalanishini ko'rsatamiz (umuman, davriy bo'lmagan o'nli kasrlar ko'rinishida ifodalanishini). Aytaylik, bizga *a* kesma va *e* birlik kesma berilgan bo'lsin. U holda, *a* kesma birlik e kesmadan kichik yoki shunday bir *n* soni topiladiki $n \cdot e \leq a(n+1)e$tengsizlik o'rinli bo'ladi, bu yerda n– natural son (agar a e dan kichik bo'lsa, n=0 bo'ladi) bo'lib, bunga *a* kesma uzunligining butun qismi deyiladi.

Agar $a \cong ne$ bo'lsa, *a* kesma uzunligi *n* natural son bilan ifodalanadi. Aks holda $a \cong +ne + a_1$, bu yerda $a_1 < e$,U holda 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlardan birisini qabul qiluvchi shundayn₁ soni topiladiki, a_1 kesma uchun $\frac{n_1}{10}e \leq a_1 < \frac{n_1+1}{10}e$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, bundan esa (n+$\frac{n_1}{10}e \leq ne + a_1 < (n + \frac{n_1+1}{10})e$. Demak, (n,$e_1$)$\leq a < (n,1 + 0,1)e$. (Bu yerda$n, n_1$lar o'nli kasr, masalan, 5,4 bo'lishi mumkin).

O'lchashda yuqoridagidek jarayonni davom ettirib, 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9 qiymatlardan birini qabul qiluvchi $n_2, n_3, \dots, n_k$ sonlariga ega bo'lamiz. Bundan esa a kesmaning ixtiyoriy k bo'lagi $(n, n_1, n_2, \dots, n_k)e$ kesmadan katta $(n, n_1, n_2, \dots, n_k + \frac{1}{10_k})e$ kesmadan kichik bo'ladi.

Bundan ko'rinadiki, *a* kesmani o'lchash jarayonini cheksiz o'nli kasrlar shaklida ifodalash mumkin.

Agar cheksiz o'nli kasrda verguldan keyin bir qancha raqamlarni qoldirib, qolganlari tashlab yuborilsa $(n, n_1, \dots, n_k)$ soni hosil bo'ladi va u *a* kesma uzunligini kami bilan ifodalaydi, agar qoldirilgan raqamlarni oxirgisiga 1 qo'shilsa, *a* kesma uzunligi ortig'i bilan olinadi. Shu sababli biz a kesma uzunligi $(n, n_1, n_2 \ldots, n_k)$ kasr bilan ifodalanadi deymiz, ya'ni $m(a) = n, n_1, n_2, \ldots, n_k$.

Misol. $M(a) = 5{,}2753\ldots$

Ixtiyoriy n uchun quyidagi tengsizlik o'rinliligi aniq

$$(n, n_1, n_2 \ldots, n_k \leq m(a) < n, n_1 n_2 \ldots n_k + \frac{1}{10^k}$$

Kesmalarni o'lchashda oxirgi raqamlari faqat cheksiz 9 liklardan iborat kasr hosil bo'lmaydi, masalan, 0,399..9.. chunki istalgan x soni quyidagi tengsizliklarni qanoatlantirmaydi.

$$0{,}3 \leq x < 0{,}4$$
$$0{,}39 \leq x < 0{,}40$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0{,}39\ldots9 \leq x < 0{,}400\ldots0$$

Agar bu tengsizliklarni o'rniga

$$0{,}3 < x \leq 0{,}4$$
$$0{,}39 < x \leq 0{,}40$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$0{,}39\ldots9 < x \leq 0{,}400\ldots0$$

tengsizliklarni yozsak bu tengsizliklarni 0,4 soni qanoatlantiradi. Shu sababli 0,399...9..=0,3(9) o'nli kasr 0,4 sonining boshqacha yozuvi hisoblanadi. Umuman, agar chekli o'nli kasrni oxirgi raqamini 1 ga kamaytirilsa va uning ketiga faqat 9 raqamlar ketma-ketligi yozilsa, u holda berilgan chekli o'nli kasrga teng cheksiz o'nli kasr hosil bo'ladi.

0,323= 0,32299...9...

6,7 = 6,69...9...

Biz har bir kesmaga cheksiz o'nli kasrni mos qo'ydik. Demak, keyingi raqamlari ketma-ket 9 raqamlari bilan tugallangan cheksiz o'nli kasrga uzunligi shu kasr bilan ifodalanuvchi kesma mavjud.

Ta'rif. 0,0...0 dan farqli, keyingi raqamlari ketma-ket 9 raqamlari bilan tugamagan cheksiz o'nli kasrlar to'plami musbat haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R_+ bilan belgilanadi.

Ratsional sonlar cheksiz davriy o'nli kasrlar ko'rinishiga keltirish mumkinligidan, irratsional sonning (irratsional – ratsional bo'lmagan) ta'rifini quyidagicha keltirish mumkin:

Ta'rif. Irratsional son deb, cheksiz davriybo'lmagan o'nli kasrga aytiladi. Ratsional va irratsional sonlar birlashmasi haqiqiy sonlar to'plamini tashkil etadi.

Har bir musbat x haqiqiy soni uchun uning taqribiy qiymatini ko'rsatish mumkin. Agar $x = n, n_1 n_2, \dots, n_k \dots$ cheksiz o'nli kasrda verguldan keyin k ta raqamini qoldirib qolganlarini tashlab yuborsak, ya'ni $x_k = n, n_1 n_2, \dots, n_k$bu son x sonini kami bilan$\frac{1}{10^k}$ aniqlikda olingan taqribiy qiymati bo'ladi. Agar bunga $\frac{1}{10^k}$ ni qo'shsak, u holda $x_k = n, n_1 n_2, \dots, n_k + \frac{1}{10^k}$ soni $x$sonini ortig'i bilan $\frac{1}{10^k}$ aniqlikdagi qiymati bo'ladi. Agar n_k raqami 9 dan farqli bo'lsa, $n_k$ga 1 ni qo'shish bilanx_k^1 hosil bo'ladi.

Masalan, $x = 3{,}82365 \dots$ u holda

$$x = 3{,}823 x_k^1 = 3{,}824$$

bulardan ko'rinadiki, ixtiyoriy musbat haqiqiy $x$soni uchun quyidagi tengsizlik o'rinli $x_k \leq x < x_k^1$.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. O'lchovdosh bo'lmagan kesmalarni o'lchash haqida tushuncha bering.
2. Kvadratning diagonali uning tomonlari bilan o'lchovdosh emasligi to'g'risidagi teoremani isbotlang.
3. Irratsional sonlarga ta'rif bering.
4. Haqiqiy sonlarga ta'rif bering

8.9. Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallar. Qo'shish va ko'paytirish qonunlari

Musbat haqiqiy sonlar ustida amallar. R_+ to'plamdan $x = m, m_1 m_2 \dots m_k \dots$ va $y = n, n_1 n_2 \dots n_k$ sonlari berilgan bo'lsin.

U holda ixtiyoriy k soni uchun $x_k \leq x < x_k^1$, $x_k \leq y < y_k^1$ tengsizliklarga ega bo'lamiz. Tengsizliklardan $x + y$ soni $x_k + y_k$ sonidan kichik emasligi, $x_k^1 + y_k^1$ sonidan katta emasligi ko'rinadi.

1-ta'rif. x va y musbat haqiqiy sonlarni yigindisi ya'ni $x + y$ deb, $\{ x_k + y_k\}$ va $\{ x_k^1 + y_k^1 \}$ to'plamlarni bo'luvchi songa aytiladi. Bunda x_k va y_k lar x va y sonlarini kami bilan, x_k^1 *va* y_k^1 lar esa x va y sonlarining ortigi bilan olingan taqribiy qiymatidir.

R_+ to'plamda qo'shish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Agar $x < y$ bo'lsa, ixtiyoriy $z \in R_+$ uchun $x + z < y + z$ o'rinli, R_+ dagi ixtiyoriy x va y lar uchun $x = x + y$ tenglik bajarilmaydi.

R_+ da ko'paytirish amali ham yuqoridagiga o'xshash aniqlanadi.

2-ta'rif. Musbat haqiqiy x va y sonlarning ko'paytmasi deb, $\{x_k \cdot y_k\}$ va $\{x_k^1 \cdot y_k^1\}$ to'plamlarni bo'luvchi songa aytiladi.

R_+ a ko'paytirish amali kommutativ, assotsiativ va qisqaruvchan. Ko'paytirish amali qo'shish amaliga nisbatan distributiv. 1 soni ko'paytirish amaliga nisbatan neytral, ya'ni $a \in R_+$ bo'lsa, u holda $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$.

3-ta'rif. R_+ da ixtiyoriy ikkita a va b sonlari uchun $a > b$ shartda, shunday $c \in R_+$ topiladiki, $a = b + c$ bajariladi. Bunda c soniga a va b sonlarining ayirmasi deyiladi va $a - b$ ko'rinishda yoziladi.

R_+ to'plamda ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal ekanligi o'z-o'zidan ravshan. Agar $x > y$ bo'lsa,

$$(x + y) - y = x$$
$$(x - y) + y = x$$

4-ta'rif. R_+ dagi ixtiyoriy ikkita x va y sonlari uchun, shunday $z \in R_+$ topiladiki, $x = yz$ o'rinli bo'ladi. Bu holda z soniga x ni y ga bo'linmasi deyiladi va $x{:}y$ ko'rinishida belgilanadi. R_+ da bo'lish amali ko'paytirish amaliga teskari amal bo'lgani uchun quyidagi tengliklar bajariladi:

$$(xy){:}y = x$$
$$(x{:}y) \cdot y = x$$

Musbat va manfiy sonlar. Musbat haqiqiy sonlar yordamida o'lchash natijasi bo'lgan ixtiyoriy skalyar miqdorlarni ifodalash mumkin: uzunlik, yuza, hajm, massa va x.k. Ammo amaliyotda bu kattaliklarni o'lchash natijasinigina emas, bu kattaliklar qanchaga o'zgarishini ko'rsatishga to'g'ri keladi. Kattaliklar esa o'z navbatida o'sishi yoki kamayishi yoki o'zgarmasdan qolishi mumkin. Shu sababli kattaliklarni o'zgarishini ko'rsatish uchun musbat haqiqiy sonlar to'plamini kengaytirishga, ya'ni boshqa sonlarni qo'shishga zaruriyat tug'ilgan. R_+ sonlar to'plamiga 0 (nol) va manfiy sonlar qo'shilib kengaytirilgan. Buning uchun R_+ to'plam olinib, bu to'plamning har bir x soniga $-x$ (minus x) deb ataluvchi yangi son mos qo'yilgan. Masalan, 3 soniga – 3, 7 va 8 sonlariga –7 va –8 va x.k.

– ko'rinishidagi (bunda $z \in R_+$) songa manfiy son deyilib, ularning to'plami R_- deb belgilangan.

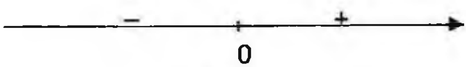
R_+, R_-va $\{0\}$ to'plamlari birlashtirilib haqiqiy sonlar to'plami deyiladi va R bilan belgilanadi.

Shunday qilib, R=$R_+ \cup R_- \cup$

Bunda R_+, R_- va $\{0\}$ to'plamlari o'zaro jufti-jufti bilan kesishmaydi, boshqacha aytganda bitta son ham musbat, ham manfiy, yoki musbat va nol bo'la olmaydi.

Agar kattalik dastlab qiymatni qabul qilsa va (bunda $x.y \in R$) $x < y$ bo'lganda, kattalikni o'zgarishi musbat $y - x$ son bo'ladi.

Agar $x > y$ bo'lsa, kattalik o'zgarishi manfiy$-(x - y)$ soni bo'ladi. Musbat va manfiy sonlar qarama-qarshi yo'nalgan nurlar bilan tasvirlanadi, 0 soni esa ikkita nurni boshi hisoblanadi. x va $-x$ sonlari koordinata to'g'ri chiziqida sanoq boshi hisoblangan 0 nuqtaga nisbatan simmetrik joylashadi (8.5-rasm).



8.5-rasm

Koordinata to'g'ri chizig'ida sanoq boshidan x sonini ifodalovchi nuqtagacha bo'lgan masofa $x$sonining moduli deyiladi va $|x|$ bilan belgilanadi.

Shunday qilib,

$$|x|=\begin{cases} x \; agar \; x > 0 \; bo'lsa, \\ -x \; agar < 0 \; bo'lsa, \\ 0 \; agar \; x = 0 \; bo'lsa. \end{cases}$$

Misol. $|8|=8$; $|7|=7$; $|0|=0$.

Aytaylik, $x \in R_+$ soni $a \in R$ soniga o‘zgarganda $y \in R_+$soniga o‘tsin. U holda $a$haqiqiy songa musbat haqiqiy sonlar juftligi $(x;y)$mos keladi. Masalan, 2 soniga (7;9) juftligi mos keladi, chunki 7 soni 9 soniga o‘tadi. (9;7) juftligiga –2 soni mos keladi, chunki 9 soni 7 soniga o‘tadi.

Bitta haqiqiy songa cheksiz juftliklar mos keladi. Masalan, 3 soniga (1;4), (3;6), $(\sqrt{2}; 3+\sqrt{2})$, ... va x.k. – 3 soniga esa (4;1), (6;3), $(3+\sqrt{2};\sqrt{2})$, va x.k.

$(x_1;y_1)$ va $(x_2;y_2)$ juftliklari bitta a soniga mos kelishi uchun faqat va faqat $x_1+y_2=x_2+y_1$ munosabat o‘rinli bo‘lishi zarur. $x_1+y_2=x_2+y_1$ munosabat bajarilsa, $x_1;y_1$ va $(x_2;y_2)$ juftliklar ekvivalent deyiladi. Bu munosabat refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega. Shu sababli R_+ to‘plam ekvivalent juftliklar sinflariga bo‘linadi.

Har bir $(x;y)$ juftlikni sonlar nurida boshi x va oxiri $y$bo‘lgan yo‘naltirilgan kesmalar bilan tasvirlash mumkin.

Ekvivalent juftliklarga bir xil uzunlik va bir xil yo‘nalishga ega bo‘lgan kesmalar mos keladi va ular ekvivalent kesmalar deyiladi. Bundan esa haqiqiy sonlar ekvivalent yo‘naltirilgan kesmalar sinfini tavsirlaydi deyish mumkin.

Haqiqiy sonlarni qo‘shish va ayirish. Aytaylik, biror $x \in R_+$ soni dastlab $a$keyinchalik esa b soniga o‘zgartirilsin. $a$va b haqiqiy sonlarning yig‘indisi deb natijaviy o‘zgarishga aytiladi. Masalan, 15 sonini dastlab 3 keyinchalik 7 ga o‘zgartirsak, 15 soni dastlab 18, keyinchalik esa 25 bo‘ladi. Demak 15 sonini 25 qilish uchun 3+7=10 songa o‘zgartirish kerak.

Qarama-qarshi haqiqiy sonlarning yig‘indisi nolga teng. Umuman olganda haqiqiy sonlarni qo‘shish qoidasi quyidagicha:

Bir xil ishoraga ega bo‘lgan haqiqiy sonlarni qo‘shganda shu ishorali haqiqiy son hosil bo‘ladi va u sonning moduli qo‘shiluvchi sonlar modullarining yig‘indisiga teng. Qarama-qarshi ishorali haqiqiy sonlarni qo‘shganda hosil bo‘lgan sonning moduli, qo‘shiluvchilar moduli kattasidan moduli kichigini ayirmasiga, ishorasi esa qo'shiluvchilardan qaysi birining moduli katta bo'lsa, shu sonning ishorasi bilan bir xil bo'ladi.

Haqiqiy songa nolni qo'shish bilan son o'zgarmaydi.

Haqiqiy sonlarni qo'shish kommutativlik, assotsiativlik va qisqaruvchanlik xossalariga ega. Bu ta'riflardan R to'plamda qo'shishga nisbatan nolning neytral element ekanligi ko'rinadi.

R to'plamda ayirish amali qo'shish amaliga teskari amal sanaladi. R to'plamda har bir b songa qarama-qarshi $-b$ son mavjud bo'lib $b + (-b) = 0$.

Geometrik nuqtai nazardan, ayirma b nuqtadan a nuqtaga boruvchi kesmaning uzunligiga teng, ya'ni $|a - b|$.

R to'plamda tartib munosabati o'rinli. Agar $a - b$ ayirma musbat bo'lsa, $a > b$ bo'ladi.

Tartib munosabati to'plamda asimmetrik va tranzitiv bo'lgani uchun, tartib munosabati qattiq tartiblangan hisoblanadi.

Shu sababli $R$to'plamda $a = b, a > b, b > a$munosabatlardan faqat biri o'rinli.

Haqiqiy sonlar to'plamida ko'paytirish va bo'lish. x va$y$ sonlarni ko'paytmasi deb, shunday z soniga aytiladiki, bu sonning moduli ko'paytuvchilar modullarining ko'paytmasiga teng, ya'ni $|z| = |x| \cdot |y|$, ishorasi esa ko'paytuvchilar ishoralari bir xil bo'lsa, musbat, aks holda manfiy bo'ladi. Ixtiyoriy x soni uchun$x \cdot 0 = 0 \cdot x = 0$.

Ko'paytirish amali R to'plamda kommutativ, assotsiativ va qo'shishga nisbatan distributiv xossalarga ega. Qisqaruvchanlik xossasiga ega emas, chunki $zx = zy$ dan $x = y$ deb xulosa chiqarib bo'lmaydi, agar $z = 0$ bo'lsa, $x \neq y$ bo'lishi mumkin, ammo$z \neq 0$ bo'lsa,$zx = zy$ dan $x = y$ kelib chiqadi.

Shunday qilib, ko'paytirish noldan farqli sonlar uchun qisqaruvchanlik xossasiga ega deyish mumkin.

Agar x soni noldan farqli son bo'lsa, u holda ixtiyoriy $y \in R$ soni uchun shunday$z$ soni topiladiki, $x = yz$ munosabat o'rinli bo'ladi. Bu yerda z soniga $x$sonini y soniga bo'linmasi deyiladi va $x : y$ ko'rinishda belgilanadi. Shunday qilib, R to'plamda noldan boshqa ixtiyoriy songa bo'lish aniqlangan.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Haqiqiy sonlarni qo‘shish va ayrishini tushuntiring.
2. Haqiqiy sonlar to‘plamida ko‘paytirish va bo‘lishni tushuntiring.
3. Haqiqiy sonlar ustidagi amallarning xossalarini aytib bering.

8.10. Haqiqiy sonlar to‘plamining xossalari

R_+ to‘plamda **tartib munosabati berilgan.** Ikkita $x = m, m_1 m_2 \dots m_k \dots$ va $y = n, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ musbat haqiqiy sonlari berilgan bo‘lsin. Agar $m < n$ yoki shunday bir k soni uchun

$m = n$ da $m_1 = n_1 \dots, m_{k-1} = n_{k-1}$ bo‘lib, $m_k < n_k$ bo‘lsa, $x$soni $y$sonidan kichik deyiladi.

R_+ to‘plamda «<» munosabati qattiq chiziqli tartiblangan, ya’ni u asimmetrik, tranzitiv. Shuning uchun $x \neq y$da $x < y$ yoki $y < x$.

$R_+$to‘plami **cheksizdir**, ya’ni R_+ to‘plamda $Q_+$to‘plamdagidek eng kichik va eng katta element yo‘q. Bundan tashqari $R_+$to‘plamdagi ixtiyoriy ikkita son o‘rtasida cheksiz ko‘p haqiqiy son yotadi. R_+ to‘plamdagi tartib munosabatini asosiy xossalaridan biri **uzluksizlik** xossasidir. Bu xossaga Q_+ to‘plam ega emas. R_+ ning ixtiyoriy to‘plam osti to‘plamlari sonli to‘plamlar deyiladi. Masalan, NQ_+.

Agar ixtiyoriy $x \in X$ va $y \in X$ lar uchun $x \leq c \leq y$ o‘rinli bo‘lsa, c soni X va Y sonli to‘plamlarni bo‘ladi deyiladi.

Bunga asosan R_+ to‘plamni uzluksizligi quyidagicha ta’riflanadi.

Ta’rif. Agar X sonli to‘plam Y sonli to‘plamning chap tomoniga joylashgan bo‘lsa, u holda bu to‘plamlarni bo‘luvchi bitta son topiladi.

Masalan, [2;5] va [7;11] kesmalarni olsak, u holda [2;5] kesmasi 6 sonidan chapda, [7;11] kesmasi esa 6 sonidan o‘ngda joylashadi. 6 soni [2;5] va [7;11] kesmalarini bo‘ladi. Doiraning yuzi unga tashqi chizilgan ko‘pburchaklar yuzalarining to‘plami ichki chizilgan ko‘pburchaklar yuzalari to‘plamlarini bo‘ladi.

Musbat haqiqiy sonlar to‘plamining aksiomatikasi. Biz yuqorida musbat haqiqiy sonlarni cheksiz o‘nli kasrlar shaklida ifodalash mumkinligini aytgan edik. Ammo, bu musbat haqiqiy sonlarning yozishning bir ko‘rinishi xalos. Musbat haqiqiy sonlarni uning yozilishi shakliga bog‘lamasdan, hammasini qanoatlantiruvchi aksiomalarni shakllantirish lozim. Shunday aksiomalar sistemasidan biri qo‘shish amali xossalariga asoslangan bo‘lib, unda ta’riflanmaydigan tushuncha qilib 1 va qo‘shish amali hisoblanadi. Bu tushunchalar quyidagi aksiomalar sistemasini qanoatlantirishi lozim:

1. Qo‘shish amali R_+ to‘plamdagi ixtiyoriy $(a; b)$ juftlikga shu to‘plamdagi $a + b$sonini mos qo‘yadi.

2. R_+ to‘plamda ixtiyoriy$a$ va $b$lar uchun R_+da qo‘shish amali kommutativ:

$a + b = b + a$.

3. R_+dagi ixtiyoriy a, b va clar uchunR_+ da qo‘shish amali assotsiativ:

$(a + b) + c = a + (b + c)$.

4. Agar $a, b \in R_+$, u holda $a + b \neq a$.

5. Agar $a, b \in R_+$bo‘lib$a < b$ bo‘lsa, u xolda shunday $c \in R_+$ soni topiladiki $b = a + c$ munosabat o‘rinli bo‘ladi;

6. Ixtiyoriy $a \in R_+$ va ixtiyoriy natural $n$soni uchun, shunday yagona $b \in R_+$ soni topiladiki, a soni uchun

$$a = b + b + \cdots + b \qquad (n\ marta)$$

munosabat o‘rinli bo‘ladi.

1 - 6 aksiomalar $R_+$to‘plamda tartib munosabatini kiritishga yo‘l qo‘yadi. Boshqacha aytganla R_+ to‘plamda shunday bir $c$soni topildiki, buning uchun faqat va faqat $b = a + c$ musbat o‘rinli bo‘lgandagina a<b bo‘ladi. Bundan tashqari uzluksizlik aksiomasi bajarilishi lozim.

7. Agar$X$sonlar to‘plami Y sonlar to‘plamidan chapda yotsa (ya’ni ixtiyoriy $x \in X, y \in Y$lar uchun $x \leq y$), u holda X va Y

to‘plamlarni bo‘luvchi $a \in R_+$ soni mavjud (ya’ni $x \in X$ va $y \in Y$ sonlari uchun $x \leq a \leq y$ tengsizlik o‘rinli).

Bu aksiomalar sistemasi yordamida R_+ to‘plamdagi cheksiz o‘nli kasr ko‘rinishidagi ixtiyoriy son R_+ to‘plamda qo‘shish amalini aniqlashini isbot qilish mumkin.

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Musbat haqiqiy sonlar to‘plamining tartiblanganligini tushuntiring.
2. Musbat haqiqiy sonlar to‘plamida arifmetik amallar bajarishini ta’riflarini keltiring.
3. Musbat haqiqiy sonlar to‘plamining aksiomatikasini keltiring.

Haqiqiy sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishga doir topshiriqlar

1 $$\frac{172\frac{5}{6} - 170\frac{1}{3} + 3\frac{5}{12}}{0{,}8 \cdot 0{,}25}$$

2 $$\left[\frac{(2{,}4 + 1\frac{5}{7}) \cdot 4{,}375}{\frac{2}{3} - \frac{1}{6}} - \frac{(2{,}75 - 1\frac{5}{6}) \cdot 21}{8\frac{3}{20} - 045}\right] \cdot \frac{67}{200}$$

3 $$\frac{215\frac{9}{16} - 208\frac{3}{4} + \frac{1}{2}}{0{,}0001 : 0{,}005}$$

4 $$\left[\frac{(6 - 4\frac{1}{2}) : 0{,}03}{(3\frac{1}{20} - 2{,}65) \cdot 4 + \frac{2}{5}} - \frac{(0{,}3 - \frac{3}{20}) \cdot 1\frac{1}{2}}{(1{,}88 + 2\frac{3}{25}) \cdot \frac{1}{80}}\right] : 2\frac{1}{20}$$

5 $$\left(\frac{0{,}012}{5} + \frac{0{,}04104}{5{,}4}\right) \cdot 4560 - 42\frac{1}{3}$$

6 $$26 : \left[\frac{3 : (0{,}2 - 0{,}1)}{2{,}5 \cdot (0{,}8 + 1{,}2)} + \frac{(34{,}06 - 33{,}81) \cdot 4}{6{,}84 : (28{,}57 - 25{,}15)}\right] + \frac{2}{3} : \frac{4}{21}$$

7 $$\frac{(85\frac{7}{30} - 83\frac{5}{18}) : 2\frac{2}{3}}{0{,}04}$$

8 $$\frac{3 : \frac{2}{5} - 0{,}09 : (0{,}15 : 2\frac{1}{2})}{0{,}32 \cdot 6 + 0{,}03 - (5{,}3 - 3{,}88) + 0{,}67}$$

9 $$\frac{(140\frac{7}{30} - 138\frac{5}{12}) : 18\frac{1}{6}}{0{,}002}$$

10 $$1\frac{7}{20} : 2{,}7 + 2{,}7 : 1{,}35 + (0{,}4 : 2\frac{1}{2}) \cdot (4{,}2 - 1\frac{3}{40})$$

11 $$\frac{(95\frac{7}{30} - 93\frac{5}{18}) \cdot 2\frac{1}{4} + 0{,}373}{0{,}2}$$

12 $$\frac{(49\frac{5}{24} - 46\frac{7}{20}) \cdot 2\frac{1}{3} + 0{,}6}{0{,}2}$$

13 $$\frac{(12\frac{1}{6} - 6\frac{1}{27} - 5\frac{1}{4}) \cdot 13{,}5 + 0{,}111}{0{,}02}$$

14 $$(10 : 2\frac{2}{3} + 7{,}5 : 10) \cdot \left(\frac{3}{40} - \frac{7}{30} \cdot 0{,}25 + \frac{157}{360}\right)$$

15 $$\frac{(1\frac{1}{12} + 2\frac{5}{32} + \frac{1}{24}) \cdot 9\frac{3}{5} + 2{,}13}{0{,}4}$$

16 $$\left(\frac{0{,}216}{0{,}15} + \frac{2}{3} : \frac{4}{15}\right) + \left(\frac{196}{225} - \frac{7{,}7}{24\frac{3}{4}}\right) + 0{,}695 : 1{,}39$$

17 $$\frac{(6\frac{3}{5} - 3\frac{3}{14}) \cdot 5\frac{5}{6}}{(21 - 1{,}25) : 2{,}5}$$

18 $$1{,}7 : \frac{(4{,}5 \cdot 1\frac{2}{3} + 3{,}75) \cdot \frac{7}{135}}{\frac{5}{9}} - \left(0{,}5 + \frac{1}{3} - \frac{5}{12}\right)$$

19 $\frac{1}{3}:\frac{2}{3}+0{,}228\left[\left(1{,}5291-\frac{14{,}53662}{3-0{,}095}\cdot 0{,}305\right):0{,}12\right]$

20 $$\frac{2\frac{5}{8}-\frac{2}{3}\cdot 2\frac{5}{14}}{\left(3\frac{1}{12}+4{,}375\right):19\frac{8}{9}}$$

21 $$\frac{0{,}134+0{,}05}{18\frac{1}{6}-1\frac{11}{14}-\frac{2}{15}\cdot 2\frac{6}{7}}$$

22 $$\left\{\frac{8{,}8077}{20-[28{,}2:(13{,}333\cdot 0{,}3+0{,}0001)]\cdot 2{,}004}+4{,}9\right\}\cdot\frac{5}{32}$$

23 $$\frac{(100\frac{3}{4}-148\frac{3}{8})\cdot 0{,}3}{0{,}2}$$

24 $$\frac{\left[(6{,}2:0{,}31-\frac{5}{6}\cdot 0{,}9)\cdot 0{,}2+0{,}15\right]:0{,}02}{(2+1\frac{4}{11}\cdot 0{,}22:0{,}1)\cdot\frac{1}{33}}$$

25 $$6:\frac{1}{3}-0{,}8:\frac{1{,}5}{\frac{3}{2}\cdot 0{,}4\cdot\frac{50}{1:\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4}+\frac{1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{0{,}25}}{6-\frac{46}{1+2{,}2\cdot 10}}$$

8.11. Sonlarni yaxlitlash qoidalari va taqribiy sonlar ustida amallar. Absolyut va nisbiy xato

Taqribiy hisoblashlar. Har kimning ko‘rish qobiliyati har xil, biror uzunlikni o‘lchaganda o‘lchov lentasining qattiq yoki bo‘sh tortilishiga ko‘ra o‘lchash natijalari turlicha, bular esa miqdorlarning o‘lchov natijalarning doimo taqribiy ekanligini ko‘rsatadi. Sanash yo‘li bilan hisoblash natijasi doimo taqribiy bo‘lmaydi, ba’zan aniq, ba’zan taqribiy bo‘ladi. Masalan, bir ko‘ldagi baliqlar soni 173200 dona deyilsa, baliqlar soni bir donaga aniqlikda sanalmagani aniq ko‘rinib turadi. Demak, baliqlarning soni taqribiy. Agar sinfdagi o‘quvchilar soni 26 desak, bu aniq sanalgan deyiladi. Sonning yuqori xonalarida bir yoki bir necha raqam qoldirib, kichik xonalarini o‘chirib, o‘rniga nollar qo‘yishni yaxlitlash deyiladi. Yuqoridagi ko‘ldagi baliqlar soni yaxlitlashga misol bo‘la oladi. Berilgan sonni berilgan aniqlikda yaxlitlash uchun, berilgan sonda o‘chiriladigan raqamlardan eng katta xona birligi raqami 5 dan katta yoki 5 ga teng bo‘lsa, undan oldingi xona raqamiga bir qo‘shiladi va o‘chirilgan raqamlar o‘rniga nollar yoziladi. Agar u 5 dan kichik bo‘lsa, raqamlar to‘g‘ridan-to‘g‘ri tashlanib, ularning o‘rniga nollar yoziladi.

Misol. Quyidagi sonlarni yuzgacha aniqlikda yozing:

1) $3254\underline{61} \approx 325500$

2) $257240 \approx 257200$

Sonlarni yaxlitlagandan keyin hosil bo‘lgan son berilgan sonning taqribiy qiymati hisoblanadi. Taqribiy natijani yozganda aniqlik sonning ohirgi raqamida ko‘rsatiladi: uning ohirgi raqamidagina kichkina xatolik bo‘lib, boshqa hamma raqamlar ishonchli bo‘lishi kerak. Buning uchun ishonchli va ishonchsiz raqamlar tushunchasini kiritamiz.

Taqribiy sonning qaysi xonadagi raqami yarimdan kam xatolikka ega bo‘lsa, u xona va undan yuqori xonalardagi hamma raqamlar ishonchli deyiladi; agar qaysi xona raqamining xatoligi yarimdan ortiq bo‘lsa, u raqam va undan boshlab o‘ng tomondagi hamma raqamlar ishonchsiz raqamlar deyiladi.

Misol. Tomorqaning perimetrini ruletka bilan 7 marta o‘lchaganimizda quyidagi natijalarni berdi:

$$101{,}22m;\ 101{,}35m;\ 100{,}88m;\ 100{,}56m;\ 101{,}2m;\ 99{,}98m,\ 101{,}31m$$

Bularning arifmetik o‘rtasi:

$$\frac{101{,}22m+101{,}35m+100{,}88m+100{,}56m+101{,}2m+101{,}18m+101{,}31m}{7}=$$

$$=\frac{707{,}7m}{7}=101{,}1m\approx 101m$$

Demak, 101m ning bosh raqami bo‘lgan 10 ishonchli, keyingi raqami 1 esa ishonchsizdir. Bu yerda gap ishonchli va ishonchsiz raqamlar haqida borsa, ya’ni tomorqani necha marta o‘lchasak ham bosh raqamlar esa o‘zgarmaydi. Shu sababli 10 ishonchli raqamlar, undan keyingi ikkita raqam esa ishonchsiz raqamlar bo‘ladi. Masalan, 1 raqamini olib qaraylik. Bu raqamda birmuncha xatolik bor, bu xatolik 1 ga nisbatan 0,5 dan kam bo‘lishi kerak. Ba’zi hollarda oxirgi raqamdagi xatolik 0,5 dan ortib ketsa, bu holda bundan bir xona yuqorigi raqam ham ishonchsiz bo‘ladi.

Taqribiy sonlar ustida amallar quyidagicha bajariladi.

Qo‘shish. Bir necha taqribiy sonlarni qo‘shganda, bu qo‘shiluvchilarning birontasida yo‘q bo‘lgan xonalarga qarab yig'indi natijasining o'ng tomonidan yaxlitlash qoidasiga asosan, mos tartibda xonalar olib tashlanadi va ularning o'rniga nollar yoziladi.

Misol. Shirkat xo'jaligining 3700 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) yeriga paxta, 260 ga (100 gektargacha aniqlik bilan) yeriga pichan ekilgan. 58 ga yeri turar joydan iborat. Shirkat xo'jaligining umumiy yeri qancha?

$$\begin{array}{r} 3700 \\ +\ 260 \\ \underline{58} \\ 4018 \approx 4000 \text{ ga.} \end{array}$$

Demak, bu qo'shiluvchilardan eng ko'p aniqmas xonaga ega bo'lgani 3700, boshqalariniki unikidan kam. Shuning uchun natijaning oxirgi ikki xonasini yaxlitlab, nollar bilan almashtiramiz.

Ayirish. Taqribiy sonlarni ayirish ham taqribiy sonlarni qo'shishdek bajariladi. Masalan, shirkat xo'jaligining 2450 ga yeriga bug'doy ekilgan. Uning 836 gektari bahorda ekilgan, qolgani kuzda ekilgan. Kuzda qancha yeriga bug'doy ekilgan (2450 o'ngacha aniqlikda olingan)?

$$\begin{array}{r} 2450 \\ -\ \underline{836} \\ 1614 \approx 1610 \text{(ga)} \end{array}$$

Ko'paytirish. Taqribiy sonlarni ko'paytirganda ko'paytuvchilarning qaysi biri eng kam aniq raqamga ega bo'lsa, natijada o'shaning raqamlari soni saqlanadi. Natijani aniqroq hisoblash kerak bo'lsa, hisoblash davridagi natijalarda bir xona ortiq olish mumkin. Lekin oxirgi natijada olingan qo'shimcha xona tashlab yuboriladi.

Misol. Maktab sport zalining uzunligi 17 m 74 sm, eni esa 9 m 63 sm ga teng. Maktab sport zalining yuzini toping.

Yechish. 1774 sm×963 sm=1708362 (kv.sm) ≈ 1700000 kv.sm=170 kv.m.

O'lchaganda lenta tarang yoki bo'sh bo'lib, uzunligi va enidagi birlik xonalari ishonchsiz bo'lishi mumkin. Shuning uchun bo‘yidagi 177 raqami ishonchli, enidagi 96 raqami ishonchli deb, natijada ham yaxlitlash yo‘li bilan 17 raqamini qoldirib, boshqa raqamlarni tashlab yuboramiz. Agar hisoblash natijasi bir necha amallar bilan kelib chiqadigan bo‘lsa, uni aniqroq hisoblash uchun oraliqdagi amallar natijasida, yuqoridagi ko‘rsatilgan qoidada aytilganidek bitta raqam ortiq olish kerak. Lekin bu raqam natijalarda hisobga olinmaydi. Masalan, yuqoridagi ko‘rsatilgan zalning balandligi 9 m 26 sm bo‘lsa, uning hajmini topish uchun asosining yuzi 1774 sm×963 sm ≈1710000 kv.sm ni topamiz, bunda bitta raqamni, ya’ni 1 ni qo‘shimcha qilib oldik. Endi uni balandligiga ko‘paytiramiz. U uch raqamli bo‘lib, bir qo‘shimcha raqamni hisobga olmaymiz.

1710000 kv.sm×926sm=1583460000 kub sm≈1600 000 000 kub sm=1600 kub m.

Bo‘lish. Taqribiy sonlarni bo‘lish amali taqribiy sonlarni ko‘paytirishdek bajariladi. Bunda bo‘luvchi va bo‘linuvchilarning qaysi birida aniq raqam soni kam bo‘lsa, bo‘linmada shuncha aniq raqam soni saqlanadi.

Masalan, aytaylik bo‘luvchi va bo‘linuvchilardan birining olti raqami, ikkinchisining uch raqami aniq bo‘lsa, bo‘linma uchta aniq raqamli qilib olinadi. Shuning uchun ham bo‘linmadagi uch raqamdan keyingi qoldiq bo‘luvchining yarmidan ortiq bo‘lsa, u uchinchi raqamga bir qo‘shish kerak, agar yarmidan kam bo‘lsa, uchta raqamni o‘zgarishsiz qoldirish kerak.

Misol. 234564:310≈ 757

```
_234564 | 310
 2170   |------
        | 756,65
 _1756
  1550
  _2064
   1860
   _2040
    1860
    _1800
     1550
      250
```

Masala ishlash vaqtida bo‘lishda ham ko‘paytirishga o‘xshash aniqroq hisoblash maqsadida vaqtincha bo‘linmada bir raqam qo‘shimcha olish kerak. (Qo‘shimcha olingan raqam oxirgi natijada e'tiborga olinmaydi). Taqribiy sonlarni ko'paytirish va bo'lishda komponentlarning biri aniq son, biri taqribiy son bo'lsa, natija taqribiy sonlarning aniq raqamiga qarab aniqlanadi. Aniq sonning raqamiga qaralmaydi. Taqribiy sonlarni ko'paytirish va bo'lishda komponentlardan birining bosh raqamlari 1,2,3; natijaning bosh raqami 9,8,7 bo'lib kelsa, natijani yuqoridagi qoidadan, bir raqam kam olib hisoblash kerak. Shu bilan birga ko'p raqamli sonni kam raqamli songa bo'lish uchun, o'sha bo'luvchining aniq raqami qancha bo'lsa, bo'linuvchini ham shuncha raqamgacha bo'lib, qolganlariga nollar qo'yamiz. Bunda qancha nol qo'yamiz, degan savol tug'iladi. Ma'lumki, bo'linmaning raqamlari soni bo'linuvchi bilan bo'luvchining raqamlari sonlarining ayirmasiga teng yoki undan bitta ortiq bo'ladi. Qaysi vaqtda teng bo'ladi? Qaysi vaqtda bitta ortiq bo'ladi?

Agar bo'lishni boshlashda bo'luvchi qancha raqamli bo'lsa, bo'linuvchining ham shuncha raqami unga yetarli bo'lmasa, unda bo'linmaning raqam soni bo'linuvchi bilan bo'luvchining raqam sonlarining ayirmasidan bitta ortiq bo'ladi. Agar o'sha birinchi bo'lishda bo'luvchining raqami soniga mos (teng) bo'lgan bo'linuvchining bosh raqami soni yetmasa, tag'in bir raqam qo'shiladigan bo'lsa, u holda bo'linmaning raqami soni bo'linuvi bilan bo'luvchining raqami sonlarining ayirmasiga teng bo'ladi.

Taqribiy sonlarning absolyut va nisbiy xatolari.

Ta'rif. Aniq son bilan taqribiy sonning farqini absolyut xato deyiladi. Absolyut xatoning aniq songa bo'lgan nisbatini nisbiy xato deyiladi.

Misol. $90{,}3 \approx 90$; bunda 90,3 - aniq son, 90 - taqribiy son, $90{,}3 - 90 = 0{,}3$ - absolyut xato.

Berilgan misolda nisbiy xato $\frac{0{,}3}{90{,}3}$ ga teng.

Absolyut va nisbiy xatolar quyidagi xossalarga ega.

1-xossa. Bir necha taqribiy sonlar yig'indisining absolyut xatosi qo'shiluvchilar absolyut xatolarining yig'indisiga teng.

2-xossa. Ikki taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi bu sonlarning ikkalasi ham ortig'i bilan yoki ikkalasi ham kami bilan olingan bo‘lsa, shu taqribiy sonlar absolyut xatolari ayirmasiga teng bo‘ladi.

3-xossa. Biri kami bilan, ikkinchisi ortig‘i bilan olingan ikkita taqribiy son ayirmasining absolyut xatosi kamayuvchi va ayriluvchining absolyut xatolari yig‘indisiga teng.

4-xossa. Ikki taqribiy son ko‘paytmasining absolyut xatosi har qaysi son aniq qiymatini ikkinchi sonning absolyut xatosiga ko‘paytirish natijalarining va ikkala son absolyut xatolari ko‘paytmasining yig‘indisiga teng.

5-xossa. Taqribiy sonni biror aniq songa bo‘lishdan chiqqan bo‘linmaning absolyut xatosi bo‘linuvchining absolyut xatosini bo‘luvchiga bo‘lishdan chiqqan bo‘linmaga teng.

6-xossa. Taqribiy sonlarni bo‘lishda bo‘linmaning nisbiy xatosi bo‘linuvchi va bo‘luvchining nisbiy xatolari yig‘indisiga teng.

Xossalardan bittasini isbotini keltiramiz (boshqa xossalarni isbotini talabalarni mustaqil bajarishiga qoldiramiz).

Ikkinchi xossaning isboti:

a va b lar aniq sonlar, A va Blar mos ravishda ularning taqribiy qiymatlari, α va βlar mos ravishda taqribiy sonlarning absolyut xatolari bo‘lsin. Agar a - kamayuvchi, b - ayriluvchi bo‘lib, ikkalasi ham ortig‘i yoki kami bilan olingan bo‘lsa, ikkinchi xossa shartiga ko‘ra

$A - B$ ayirmaning absolyut xatosi, $\alpha - \beta$ ga (ortig‘i bilan olinganda) yoki $\beta - \alpha$ ga teng (kami bilan olinganda) bo‘lishini isbotlash kerak.

I - hol. A va B ortig‘i bilan olingan taqribiy sonlar bo‘lsin, u holda:

$$A = a + \alpha$$
$$B = b + \beta$$

Qo‘shish va ayirish xossalariga ko‘ra:

$$A - B = (a + \alpha) - (b + \beta) = a + \alpha - b - \beta$$
$$= (a - b) + (\alpha - \beta)$$

II-hol. A va B kami bilan olingan taqribiy sonlar bo‘lsin, u holda

$$A = a - \alpha$$
$$B = b - \beta$$

qo'shish va ayirish xossalariga ko'ra:

$$A - B = (a - \alpha) - (b - \beta) = a - \alpha - b + \beta$$
$$= (a - b) + (\beta - \alpha)$$

Taqribiy sonlar ustida amallar bajarilganda xatolikni baholash katta ahamiyatga ega. Xatolik ikki xil bo'ladi: absolyut va nisbiy xato. Absolyut xato sonning aniq va taqribiy qiymatlari orasidagi farqdan iboratdir, ya'ni agar X – biror sonning aniq, $\overline{X}$ esa uning taqribiy qiymati bo'lsa, absolyut xato $\Delta X = |X - \overline{X}|$ bo'ladi. Nisbiy xato sonning absolyut xatosini uning taqribiy qiymatiga, nisbatiga teng, ya'ni $\delta_x = \Delta X/\overline{X}$. Sonlarning aniq qiymati ko'p masalalarni yechishda noma'lum bo'ladi. Shuning uchun pirovard absolyut xato tushunchasi kiritiladi: u absolyut xatolar modullarining yuqori chegarasidir, ya'ni $\Delta\overline{x} \geq |x|$. Sonning aniq qiymati quyidagi oraliqda bo'ladi:

$\overline{x} - \Delta\overline{x} \leq x \leq \overline{x} + \Delta x$. Arifmetik amallar bajarishda absolyut va nisbiy xatolarning o'zgarishini ko'rib chiqaylik.

Yig'indi (ayirma) xatoligi.

Ikkita $X = \overline{x} + \Delta x$, $y = \overline{y} + \Delta y$ son berilgan bo'lsa, ularning yig'indisi

$x + u = \overline{x} + \overline{y} + \Delta x + \Delta y$ bo'ladi. Yig'indining absolyut xatoligi

$$\Delta_{x+u} = \Delta_x - \Delta_u$$

Xuddi shunday, ayirmaning absolyut xatoligi

$$\Delta_{x+u} = \Delta_x - \Delta_u$$

bo'ladi.

Ko'paytma xatoligi.

Berilgan sonlarning ko'paytmasi quyidagicha topiladi:

$$x \cdot y = (\overline{x} + \Delta x)(\overline{y} + \Delta y) = \overline{x} \cdot \overline{y} + x \cdot \Delta y + \overline{y} \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$

Bu ifodada oxirgi ko'paytma boshqa hadlarga nisbatan ikkinchi darajali kichik miqdordir.

Shuning uchun uni e'tiborga olmaymiz. Demak, ko'paytmaning absolyut xatoligi quyidagicha bo'ladi:

$$\Delta_{xy} = \overline{x} \cdot \Delta y + \overline{y} \cdot \Delta x$$

Bo'linma xatoligi.

Nisbatning absolyut xatosini topish uchun ayrim almashtirishlarni bajaramiz:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overline{x} + \Delta x}{\overline{y} + \Delta y} = \frac{\overline{x} + \Delta x}{\overline{y}(1 + \frac{\Delta y}{\overline{y}}}$$

Nisbiy xato $\frac{\Delta y}{\overline{y}} < 1$ ekanligidan foydalanib $\left(1 + \frac{\Delta y}{\overline{y}}\right)^{-1}$ ifodani qatorga yoyamiz:

$$\frac{x}{y} = \frac{\overline{x}+\Delta x}{y}\left[1 - \frac{\Delta y}{\overline{y}} + \frac{\Delta y}{\overline{y}}2 - \ldots\right]$$

Bu yerda ham ikkinchi va undan yuqori darajali kichik miqdorlarni hisobga olmagan holda

$$\frac{x}{y} \approx \frac{\overline{x}}{y} + \frac{\Delta x}{\overline{y}} - \frac{\overline{x}}{y2}\Delta y$$

ga ega bo'lamiz. Demak,

$$\frac{\Delta x}{y} = \frac{\Delta x}{\overline{y}} - \frac{\overline{x}}{\overline{y}2} \cdot \Delta y$$

Arifmetik amallarni bajarishda nisbiy xatolar (b) quyidagicha topiladi: $\delta_{x+y} = \frac{\Delta(x+y)}{\overline{x}+\overline{y}} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}+\overline{y}} \cdot \frac{\Delta \overline{x}}{\overline{x}} + \frac{\overline{y}}{\overline{x}+\overline{y}} \cdot \frac{\Delta y}{\overline{y}} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}+\overline{y}} \cdot \delta_x + \frac{\overline{y}}{\overline{x}+\overline{y}} \cdot \delta_y;$

$$\delta_{x-y} = \frac{\Delta(x-y)}{\overline{x}-\overline{y}} = \frac{\overline{x}}{\overline{x}-\overline{y}} \cdot \delta_x - \frac{\overline{y}}{\overline{x}-\overline{y}} \cdot \delta_y;$$

$$\delta_{xy} = \frac{\Delta xy}{\overline{xy}} = \frac{\overline{x} \cdot \Delta y}{\overline{x} \cdot \overline{y}} + \frac{\overline{y} \cdot \Delta x}{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \delta_x + \delta_y;$$

$$\delta\frac{x}{y} = \frac{\Delta x/y}{\overline{x/y}} = \left(\frac{\Delta x}{\overline{y}} - \frac{\Delta y}{\overline{y}2}x\right)\frac{\overline{y}}{\overline{x}} = \delta_x - \delta_y$$

Yuqorida keltirilgan formulalar arifmetik amallar bajarishda yo'l qo'yiladigan absolyut va nisbiy xatolarni baholash imkoniyatini beradi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Sonlarni yaxlitlashni tushuntiring.
2. Taqribiy sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.

3. Taqribiy sonlarning absolut va nisbiy xatolariga ta'rif bering.

4. Absolyut va nisbiy xatolar xossalarini ayting.

Taqribiy sonlar ustida arifmetik amallarni bajarishga doir topshiriqlar

1. Qiymatni hisoblang va o'ngacha, yuzgacha yaxlitlang.

a) 17+18=	b) 689–17=	d) 9x8=	e) 9999:11=
8720+17541=	751–579=	17x7=	1718:17=

2. Sonlarni berilgan aniqlikda yaxlitlang, absolyut va nisbiy xatolar ni hisoblang.

44,732031	10^{-2}
54,00356	10^{-3}
1718,1629	10^{-1}
641,64264	10^{-3}
7589,4784912	10^{-4}

3. Sonlarni o'ngacha, yuzgacha, minggacha yaxlitlang, amallarni bajaring va natijada nechta aniq raqam borligini yozing.

175+455=	195 × 285=	121314:112=
675–792=	675 × 641=	194175:155=
97566612–8788=		64164260+1275=
17181620–253040=		15161718+252627=

4. Sonlarni 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3} gacha yaxlitlang, amallarni bajaring va natijada nechta aniq raqam borligini yozing.

6,7532 + 7589,42215 b) 72,21048 – 44,73279

d) 27,1586 × 4,7891 e) 54,0573 : 16,491

5. Natijani 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}aniqlikda hisoblang.

a) $\sqrt{3}+\sqrt{2}, \sqrt{3}-\sqrt{2}, \sqrt{3}\cdot\sqrt{2}, \sqrt{3}:\sqrt{2}$

b) $\sqrt{5}+\sqrt{2}, \sqrt{5}-\sqrt{2}, \sqrt{5}\cdot\sqrt{2}, \sqrt{5}:\sqrt{2}$

d) $\sqrt{11}+\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{7}, \sqrt{11}\cdot\sqrt{7}, \sqrt{11}:\sqrt{7}$

e) $\sqrt{7}+\sqrt{3}, \sqrt{7}-\sqrt{3}, \sqrt{7}\cdot\sqrt{3}, \sqrt{7}:\sqrt{3}$

8.12. Kompleks sonlar. Mavhum son tushunchasi. Kompleks son va uning turli shakllari

Kompleks son tushunchasi. Ixtiyoriy ko'rinishdagi algebraik tenglamalarni yechishda haqiqiy sonlar to'plami yetarli emas. Haqiqatan ham, sonlar to'plamida diskriminanti manfiy bo'lgan kvadrat tenglama yechimga ega emas.

Masalan, $x^2+1=0$

Bu qiyinchilikdan qutulish maqsadida kompleks sonlar to'plami kiritiladi. Bu to'plamga haqiqiy sonlar to'plami to'plam osti sifatida kiradi. Kompleks sonlar to'plami C bilan belgilanadi. $D<0$; $x^2+1=0$ tenglama yechimi kompleks sonlar to'plamida bor deb, ya'ni $i=\sqrt{-1}$ bilan belgilanuvchi mavhum birlik kiritamiz. Bu mavhum birlik yuqoridagi tenglamani yechimi bo'ladi, ya'ni $i^2+1=0$; $i^2=-1$. Shunday qilib, biz haqiqiy sonlar to'plamini mavhum sonlar bilan to'ldiramiz. Haqiqiy a sonini mavhum bi soniga qo'shishdan $a+bi$ kompleks sonini hosil qilamiz.

Ta'rif. $z=a+bi$ ifodaga kompleks son deyiladi, bunda a, b haqiqiy sonlar, i - esa mavhum birlik, $i^2=-1$.

a - kompleks sonining haqiqiy, bi - esa mavhum qismlari.

$Re(z)=a$ - kompleks sonining haqiqiy koeffitsiyenti,

$Im(z)=b$ - kompleks sonining mavhum koeffitsiyenti.

Masalan, $2+3i$, $-5+2i$, $8-i$, $-2-14i$ - kompleks sonlar.

$5i$, $-3i$, 0, 5, -3 - sonlar ham kompleks sonlar, chunki

$5i=0+5i$ $5=5+0i$ $0=0+0i$ $-3i=0+(-3)i$ $-3=-3+0i$

Bundan kelib chiqadiki, barcha haqiqiy sonlar kompleks sonlar bo'ladi, ya'ni haqiqiy sonlar to'plami kompleks sonlar to'plamining qism to'plami bo'ladi.

$N\subset Z\subset Q\subset R\subset C$

$5i$, $-3i$ va h.k. mavhum sonlar, $2+3i$, $-5+2i$, $8-i$, $-2-14i$ sonlar esa aralash kompleks sonlar deyiladi.

$z=a+bi$ kompleks sonni haqiqiy va mavhum qismi nolga teng bo'lsa, ya'ni $a=0$ va $b=0$ bo'lsa, u nolga teng bo'ladi.

Agar a_1+b_1i va a_2+b_2i kompleks sonlarida $a_1=a_2$; $b_1=b_2$ bo'lsa, ular teng deyiladi.

Mavhum qismlar bilan farq qiluvchi z=a+bi va $\bar{z}$ =a–bi kompleks sonlar qo'shma deyiladi. Haqiqiy va mavhum qismlarning ishoralari bilan farq qiluvchi ikkita z_1=a+bi va z_1=–a–bi kompleks sonlar qarama-qarshi kompleks sonlar deyiladi.

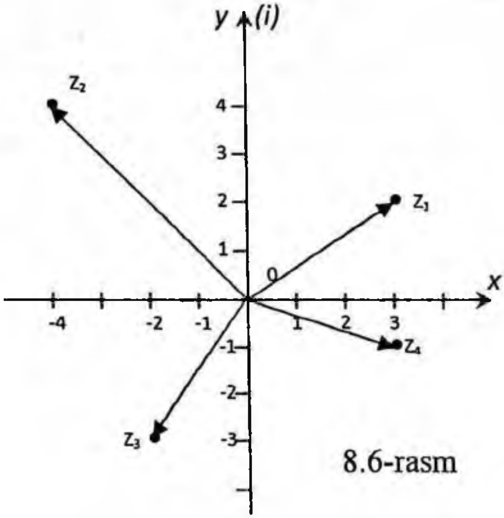
Kompleks sonning geometrik tasviri. Dekart koordinatalar sistemasida abtsissalar o'qiga z=a+bi kompleks sonning haqiqiy koeffitsiyenti *a* ni, ordinatalar o'qiga esa mavhum koeffitsiyenti *b* ni joylashtirsak, tekislikda (*a; b*) nuqtaga ega bo'lamiz. Shu nuqta a+bi kompleks sonni geometrik tasviri deb qabul qilinadi. Odatda bu *z* nuqta deyiladi. Shunday qilib, tekislikning har bir bitta nuqtasi kompleks sonni ifodalaydi va, aksincha, har bir kompleks songa tekislikning yagona nuqtasini mos qo'yish mumkin. Boshqacha aytganda, tekislik nuqtalari bilan kompleks sonlar to'plami o'rtasida o'zaro bir qiymatli moslik o'rnatiladi. Ox o'qida kompleks sonni haqiqiy qismi joylashgani uchun haqiqiy o'q, ordinatalari o'qida mavhum qismga tegishli son joylashgani uchun mavhum o'q, xOy tekisligini o'zi esa kompleks tekislik deyiladi.

Masalan, 8.6-rasmda quyidagi z_1 , z_2 , z_3 , z_4 kompleks sonlar ifodalangan:

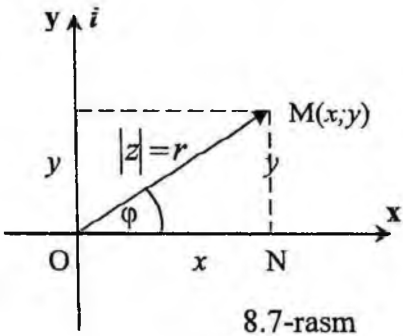
z_1= 3+2i , z_2= – 4+4i , z_3= –2–3i, z_4= 3 – i .

Kompleks sonning trigonometrik shakli. z=x+yi ko'rinishdagi son algebraik ko'rinishdagi kompleks son deyiladi. Bu yerda (x,y) kompleks sonning koordinatalari deyiladi. Kompleks sonni boshqa usul bilan ham berish mumkin: kompleks soni tasvirlaydigan vektorning uzunligi va φ - burchak orqali (8.7-rasm).

Koordinata to'g'ri chizig'ida sanoq boshidan *x* sonini ifodalovchi nuqtagacha bo'lgan masofa *x* haqiqiy sonining moduli deyiladi. Shunga o'xshash, kompleks sonning moduli deb koordinata tekisligida sanoq boshidan z sonini ifodalovchi nuqtagacha bo'lgan masofaga aytiladi.



8.6-rasm



8.7-rasm

8.7-rasmga ko‘ra, ONM uchburchakdan Pifagor teoremasiga asoslanib quyidagi formulani chiqarish mumkin:

$$|z| = r = \sqrt{x^2} + y^2 \qquad (1)$$

ONM uchburchakdan: $x = rco\varphi; y = rcos\varphi;$ y=rsinφ(2)

bunda r – z kompleks sonini tasvirlagan vektorning uzunligini ifodalaydi va unga z sonning moduli, φ - burchakni esa z ning argumenti deyiladi.

Argument bir qiymatli aniqlanmay, balki $2\pi\kappa$ qo'shiluvchi qadar aniqlikda aniqlanadi, bunda k - butun son.

Argumentning barcha qiymatlari orasidan $0 \leq \varphi \leq 2\pi\kappa$ tengsizliklarni qanoatlantiruvchi bittasini tanlaymiz. Bu qiymat bosh qiymat deyiladi va quyidagicha belgilanadi: $\varphi = argz$.

(2) tengliklarni hisobga olib, kompleks sonni quyidagicha ifodalash mumkin:

$z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ (3)

bu yerda $r = \sqrt{x^2} + y^2$

$$\varphi = argz = \begin{cases} arctg\frac{y}{x}, agarx > 0; y > 0\ bo'lsa \\ \pi + arctg\frac{y}{x}, agarx < 0\ bo'lsa \\ 2\pi + arctg\frac{y}{x}, agarx > 0, y < 0\ bo'lsa \end{cases}$$

(3) ga kompleks sonning trigonometrik shakli deyiladi.

1-misol. Kompleks sonning moduli 3 ga argumenti $\varphi = \frac{\pi}{4}$ ga teng bo'lsa, uning haqiqiy va mavhum qismlarini toping.

(2) formuladan $x = rcos\varphi = 3cos\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$

$$y = rsin\varphi = 3\,sin\frac{\pi}{4} = 3\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2-misol. z=i kompleks sonning argumentini toping. x=0; y=1; $r = 1$; $\varphi = \frac{\pi}{2}$;

3-misol. Qo'shma va qarama-qarshi kompleks sonlarni chizmada tasvirlang va izohlang.

Qo'shma kompleks sonlar bir xil modulga ega va absolyut qiymatlari bo'yicha teng argumentlarga ega bo'lib, haqiqiy o'qqa simmetrik bo'lgan nuqtalar bilan tasvirlanadi, qarama-qarshi kompleks sonlar koordinatalar boshiga nisbatan simmetrik nuqtalar bilan tasvirlanadi.

4-misol. z=1–i kompleks sonini trigonometrik shaklda ifodalang

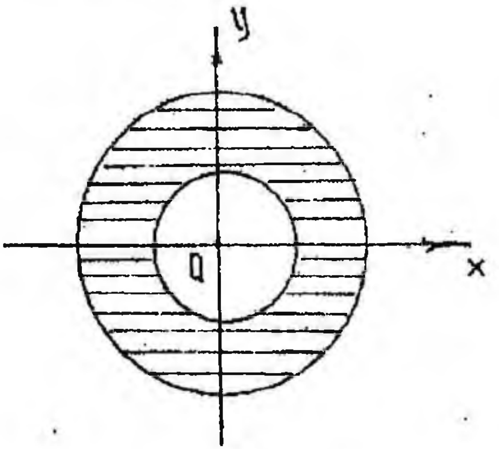
$$x = 1; y = -1; r = \sqrt{2}$$

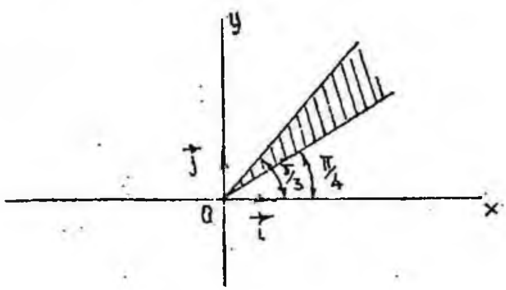
$$tg\varphi = -1;\ \varphi = 2\pi - artg(1) = 2\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

Shunday qilib, $z = \sqrt{2}(cos\frac{7\pi}{4} + isin\frac{7\pi}{4})$. Endi kompleks sonlar to'plamining ba'zi bir to'plam ostilarini ifodalovchi munosabatlarni geometrik nuqtai nazardan ko'rib o'taylik.

a) |z|=2 bu munosabat kompleks tekisligida markazi koordinata boshida radiusi 2 ga teng bo'lgan aylananing nuqtalarini ifodalaydi.

b) 2≤|z|≤ 3 munosabat esa markazi koordinatalar boshida joylashib ichki radiusi 2 va 3 ga teng bo'lgan konsentrik joylashgan aylanalar bilan chegaralangan xalqa ichidagi nuqtalar to'plamini ifodalaydi (8.8-rasm).





d) $arctgz = \frac{\pi}{6}$ munosabatga kompleks tekisligida koordinata boshidan 30^0 burchak ostida chiquvchi nurdagi nuqtalar to'plami mos keladi (8.8-rasm).

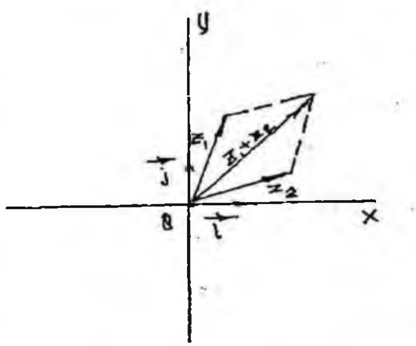
e) $\frac{\pi}{4} \leq arg\,z \leq \frac{\pi}{3}$ munosabatga esa kompleks tekisligidagi koordinata boshidan 45^0 va 60^0 burchak ostida chiquvchi nurlar bilan chegaralangan nuqtalar to'plami hamda nurlar ustida yotuvchi nuqtalar to'plami kiradi (8.9-rasm).

O'z- o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks songa ta'rif bering.
2. Kompleks sonini geometrik shaklida tasvirlang.
3. Kompleks sonini trigonometrik ko'rinishga keltiring (misollar yordamida ko'rsating).

8.13. Kompleks sonlar ustida amallar. Kompleks sonlar to'plamining xossalari

Qo'shish. $z_1 = a_1 + b_1 i$ va $z_2 = a_2 + b_2 i$ kompleks sonlarning yig'indisi deb, $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) i$ tenglik bilan aniqlanuvchi songa aytiladi. Kompleks sonlarni qo'shish vektorlarni qo'shish formulasidan vektorlar bilan ifodalangan kompleks sonlarni qo'shish qoidasi bo'yicha bajarilishi ko'rinadi. (8.10-rasm).



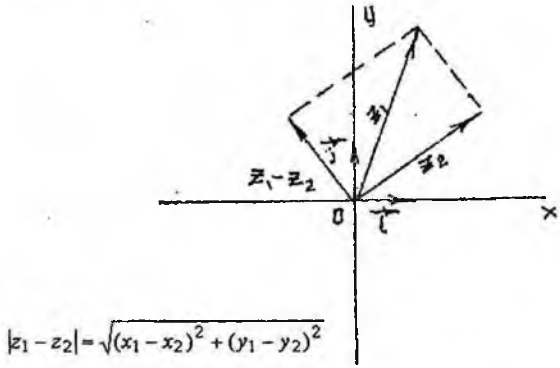
1-misol. $z_1=2+5i$ va $z_2=-1-3i$ kompleks sonlarni yig'indisini toping.

$z_1+z_2=(2+5i)+(-1-3i)=(2-1)+i(5-3)=1+2i$

Ayirish. $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarni ayirmasi deb, shunday kompleks songa aytiladiki, unga ayriluvchi kompleks sonni qo'shganda kamayuvchi kompleks son hosil bo'ladi.

$z_1 - z_2 = (a_1+b_1i)-(a_2+b_2i) = (a_1-a_2)+i(b_1-b_2)$

Ikkita kompleks son ayirmasini moduli shu sonlarni kompleks sonlar tekisligida tasvirlovchi nuqtalar orasidagi masofaga teng (8.11-rasm).



2-misol. $z_1=6+5i$ va $z_2=4-2i$ kompleks sonlarni ayirmasini toping: $z_1=6+5i$ va $z_2=4-2i$;

$z_1-z_2=(6+5i)-(4-2i)=(6-4)+i(5+2)=2+7i$

Kompleks sonlarni ko‘paytirish. $z_1=a_1+b_1i$ va $z_2=a_2+b_2i$ kompleks sonlarning ko‘paytmasi deb, $i^2=-1$ ekanligini hisobga olgan holda kompleks sonlarni ko‘paytmasi ikkita ko‘phad ko‘paytmasi shaklida ko‘paytirishdan hosil bo‘lgan kompleks songa aytiladi.

$z_1 \cdot z_2=(a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2)+(a_1 \cdot b_2 + a_2 \cdot b_1)\, i$

z_1 va z_2 kompleks sonlar trigonometrik ko‘rinishda berilgan bo‘lsa, ya’ni $z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ va $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$ u holda ularning ko‘paytmasi $z_1 \cdot z_1 = r_1 \cdot r_2(cos\varphi_1 + \varphi 2 + isin(\varphi 1 + \varphi 2)$ bo‘ladi.

3-misol. $z_1 = 2(cos\frac{\pi}{3} + isin\frac{\pi}{3})$ va $z_2 = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{6} + isin\frac{\pi}{6})$ kompleks sonlarni ko‘paytmasini toping.

Yechish. $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left[cos\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right) + isin\left(\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}\right)\right] =$
$2\sqrt{2}\left(cos\frac{\pi}{2} + isin\frac{\pi}{2} = 2\sqrt{2}i\right)$

Kompleks sonlarni bo‘lish. Kompleks sonlarni bo‘lish amali ko‘paytirish amaliga teskari amal sifatida aniqlanadi. Boshqacha aytganda $z \cdot z_2 = z_1$ bo‘lsa, z soni $z_1 = x_1 + iy_1$ uning $z_2 = x_2 + iy_2$ kompleks songa bo‘linmasi deyiladi.

$z = \frac{z_1}{z_2}$ bo'linmasini topish uchun kasrning surat va maxrajini z_2 ning qo'shmasi $\overline{z}_2$ ga ko'paytiramiz.

$z = \frac{z_1 \cdot \overline{z}_2}{z_2 \cdot \overline{z}_2}$ bundan $z = \frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2} + i\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}$

Agar kompleks sonlar trigonometrik ko'rinishda berilgan bo'lsa, ya'ni

$z_1 = r_1(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$va $z_2 = r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$, u holda

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1\,(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)}{r_2(cos\varphi_2 + isin\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1\,(cos\varphi_1 + isin\varphi_1)\cdot(cos\varphi_2 - isin\varphi_2)}{r_2(cos^2\varphi_2 + sin^2\varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

Shunday qilib, $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}[cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2)]$ ya'ni kompleks sonlarni bo'lishda bo'linuvchining moduli bo'luvchining moduliga bo'linadi, argumentlari esa ayriladi.

4-misol. z_1=5+4i z_2=2 –3i

Yechilishi. z_1+ z_2=5+4i +2 –3i=7+i

$z_1 - z_2$=5+4i –2 –3i=3+7i $\overline{z_1} = 5 - 4i$ $\overline{z_2} = 2 + 3i$

$$z_1 \cdot z_2 = (5+4i)(2-3i) = 10 - 15i + 8i - 12i^2$$
$$= 10 - 7i + 12 = 22 - 7i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{5+4i}{2-3i} = \frac{(5+4i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10+15i+8i+12i^2}{4+9} = \frac{-2+23i}{13}$$

5-misol. z=1+i

$$|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \qquad \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$1 + i = \sqrt{2}(cos\frac{\pi}{4} + isin\frac{\pi}{4})$$

6-misol. $\mathbf{z_1} = \sqrt{3} + \mathbf{i}$ ni $\mathbf{z_2} = -3 - 3\mathbf{i}$ ga bo'ling.

a) algebraik; b) trigonometrik ko'rinishda bo'ling.

Yechish.

a) $\frac{z_1}{z_2}=\frac{\sqrt{3}+i}{-3-3i}=\frac{(\sqrt{3}+i)\cdot(-3+3i)}{(-3-3i)\cdot(-3+3i)}=$
$\frac{-3\sqrt{3}-3+(\sqrt{3}-3)i}{9+9}=\frac{-3[\sqrt{3}+1(\sqrt{3}-1)i]}{18}=\frac{-\sqrt{3}-1}{6}+\frac{\sqrt{3}-1}{6}i$

b) $z_1=\sqrt{3}+i=2\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)$; $z_2=-3-3i=$ $3\sqrt{2}\left(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4}\right)$;

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{2\left(cos\frac{\pi}{6}+isin\frac{\pi}{6}\right)}{3\sqrt{2}(cos\frac{5\pi}{4}+isin\frac{5\pi}{4})}$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left[cos\,(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4})+isin(\frac{\pi}{6}-\frac{5\pi}{4})\right]$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left[cos\,(-\frac{13\pi}{13})+isin(-\frac{13\pi}{12})\right]$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}(cos\left(\frac{13\pi}{13}\right)-isin\left(\frac{13\pi}{12}\right)$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left[cos\left(\pi+\frac{\pi}{12}\right)-isin(\pi+\frac{\pi}{12})\right]$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left(-cos\frac{\pi}{12}+isin\frac{\pi}{12}\right)$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\cdot\left[-cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)+isin(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4})\right]=\frac{2}{3\sqrt{2}}$$
$$\cdot\left[(-cos\frac{\pi}{3}\cdot cos\frac{\pi}{4}-sin\frac{\pi}{3}\right.$$
$$\left.-\frac{\pi}{4})+i(sin\frac{\pi}{3}\cdot cos\frac{\pi}{4}-cos\frac{\pi}{3}\cdot sin\frac{\pi}{4})\right]$$
$$=\frac{2}{3\sqrt{2}}\left[(-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})+i(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2})\right]$$
$$=-+\frac{\sqrt{3+1}}{6}+i\frac{\sqrt{3-1}}{6}$$

Darajaga ko‘tarish. Kompleks sonlarni ko‘paytirish qoidasidan darajaga ko‘tarish qoidasi kelib chiqadi. $z=$

$r(cos\varphi + isin\varphi)$ kompleks son uchun n – natural bo'lganda $z^n = r^n(cosn\varphi + isinn\varphi)$. Bu formulani Muavr formulasi deyiladi. Muavr formulasini tadbiq qilishda $i^{4k} = 1,\quad i^{4+1} = i,\quad i^{4+2} = -1, i^{4k+3} = -i$ bo'lishini e'tiborga olishimiz kerak.

7-misol.$(-1 + i)^5$ ni hisoblang.

$z = -1 + i = \sqrt{2}(cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4})$

$z^5 = (-1 + i)^5 = (\sqrt{2})^5 \cdot (cos\frac{3\pi}{4} + isin\frac{3\pi}{4})^5 =$

$4\sqrt{2}\left(cos5 \cdot \frac{3\pi}{4} + isin\, 5 \cdot \frac{3\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}(cos675° + isin675^0) =$

$4\sqrt{2}[cos(720^0 - 45^0) + isin(720^0 - 45^0)]=$

$4\sqrt{2[cos\,45^0 -}isin - 45^0) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 4 - 4i =$

$(1 - i)$.

Kompleks sondan ildiz chiqarish. Ildiz chiqarish amali darajaga ko'tarish amaliga teskari amal. Kompleks sonning n – darajali ildiz $\sqrt[n]{z}$ deb, shunday z* - kompleks songa aytiladiki, z* ning n – darajasi z soniga tengdir, ya'ni$(z^*)^n = z$

Aytaylik, $z = r(cos\varphi + isin\varphi)$ va $z^* = p(cos\theta + isin\theta)$ bo'lsin.

Muavr formulasiga asosan $r(cos\varphi + isin\varphi) = p^n(cos\theta + isin\theta)$ bundan $r = p^n, n\theta = \varphi + 2\pi k$p va θ ni topamiz.

Bu yerda k - istalgan butun son, $\sqrt[n]{r}$- arifmetik ildiz. Demak, $\sqrt[n]{r(cos\varphi + isin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$; bu yerda $k = 0,1 \dots n - 1$

8-misol. $\sqrt[5]{1}$ ning ildizlarini toping.

Yechish. Sonni trigonometrik ko'rinishda yozamiz. $z = 1$ bo'lib, $z = 1 = cos0 + isin0$ bo'ladi.

$$\sqrt[5]{1} = \sqrt[5]{cos0 + isin0} = cos\frac{2\pi k}{5} + isin\frac{2\pi k}{5}$$

$$k = 0;\ z_1 = cos0 + isin0 = 1$$

$$k = 1;\ z_2 = cos\frac{2\pi}{5} + isin\frac{2\pi}{5} = cos\ 72° + isin72°$$
$$= 0{,}309 + 0{,}951i$$

$$k = 2;\ z_3 = cos\frac{4\pi}{5} + isin\frac{4\pi}{5} = cos\,144° + isin\,144°$$
$$= -0{,}809 + 0{,}587i$$
$$k_3 = 3;\ z_4 = cos\frac{6\pi}{5} + isin\frac{6\pi}{5} = cos\,216° + isin\,216°$$
$$= -0{,}809 + 0{,}587i$$
$$k = 4;\ z_5 = cos\frac{8\pi}{5} + isin\frac{8\pi}{5} = cos\,288° + isin\,288°$$
$$= -0{,}309 + 0{,}951i$$

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Kompleks sonlar ustida amallar bajarishni misollar yordamida tushuntiring.
2. Kompleks sonni darajaga ko‘tarish va ildiz chiqarish formulalarini keltirib chiqaring.

Kompleks sonlar ustida amallar bajarishga doir topshiriqlar

1. z_1, z_2 kompleks sonlar berilgan bo‘lsa, kompleks sonlar ustida amallarni bajaring:

$$(z_1 + z_2, z_1 - z_2, \overline{z_1}, \overline{z_2}, z_1 \cdot z_2, \frac{z_1}{z_2})$$

1. $z_1=-3+2i$ $z_2=4-i$
2. $z_1=4+5i$ $z_2=4-5i$
3. $z_1=5+2i$ $z_2=-5-2i$
4. $z_1=-3+i$ $z_2=-2-3i$
5. $z_1=1{,}4-3i$ $z_2=2{,}6-4i$
6. $z_1=3+8i$ $z_2=-4-5i$
7. $z_1=5-2i$ $z_2=3+4i$
8. $z_1=-2+3i$ $z_2=5-2i$
9. $z_1=-3+4i$ $z_2=7-4i$
10. $z_1=2-4i$ $z_2=1+3i$
11. $z_1=5-3i$ $z_2=8-4i$
12. $z_1=-5+2i$ $z_2=8-9i$
13. $z_1=4-5i$ $z_2=42-3i$
14. $z_1=14+3i$ $z_2=21+3i$

15. $z_1=2+4i$ $z_2=7+4i$
16. $z_1=-6+2i$ $z_2=4-i$
17. $z_1=-3+2i$ $z_2=5-i$
18. $z_1=4+2i$ $z_2=4-3i$
19. $z_1=7+2i$ $z_2=5+i$
20. $z_1=-3+2i$ $z_2=1-i$

2. Kompleks sonni trigonometrik shaklda yozing.

1. $z = 1 - i$
2. $z = 1 - i$
3. $z = \sqrt{3} + i$
4. $z = -1 + \sqrt{3}i$
5. $z = -2$
6. $z = i$
7. $z = 1$
8. $z = -i$
9. $z = 1 + i$
10. $z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$
11. $z = \frac{\sqrt{33}}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$
12. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$
13. $z = 2i$
14. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$
15. $z = -i$
16. $z = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i$
17. $z = -3 - 4i$
18. $z = 2 + \sqrt{3} + i$
19. $z = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}$
20. $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2}$
21. $z = 3i$
22. $z = 3$
23. $z = \frac{\sqrt{33}}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{2}$
24. $z = -2\sqrt{3}i$
25. $z = -\sqrt{6} - \sqrt{6}i$
26. $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$
27. $z = \sqrt{2} + i$
28. $z = 1 + 2\sqrt{3}i$
29. $z = \sqrt{2} + i$
30. $z = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$

IX BOB. GEOMETRIYA ELEMENTLARI

9.1. Geometriyaning vujudga kelishi haqida qisqacha tarixiy ma'lumot

Geometriya tarixi qadimgi dunyoning uzoq o'tmishidan boshlanadi, lekin u shubhasiz, sharq mamlakatlarida paydo bo'lgan. Geometriyaning taraqqiyotini to'rtta davr bilan xarakterlash mumkin, lekin uning chegarasini biror ma'lum yillar bilan ajratib bo'lmaydi.

Birinchi davr – geometriyaning paydo bo'lish davri eramizdan oldingi V asrgacha bo'lgan davrni o'z ichiga oladi va qadimgi Misr, Vaviloniya va Gretsiyada yer o'lchash ishlarining taraqqiyoti bilan chambarchas bog'liqdir (geometriya so'zi ham grekcha: *γεω* – yer va *μετρεω*– o'lchayman so'zlaridan olingan bo'lib, lug'aviy ma'nosi yer o'lchash demakdir).

Grek tarixchisi Geradotning (tahminan miloddan avvalgi 465-425-y.) yozib qoldirgan ma'lumotlariga ko'ra geometriyaga oid dastlabki ma'lumotlar Misrda tarkib topa boshlagan. Aytishlaricha, shohlar misrliklarga dehqonchilik qilish uchun to'g'ri to'rtburchak shaklidagi yer maydonlarini taqsimlab berar va yer egasidan mos ravishda soliq undirishar ekan. Nil daryosining toshib ketishi oqibatida buzilib ketgan maydonlar qaytadan o'lchanar va unga yarasha soliq miqdori qaytadan belgilanar ekan.

Yerlarni taqsimlash, soliq miqdorini belgilash, yuzlarni o'lchash, sug'orish, inshootlarini qurish kabi bir qator ehtiyojiy zaruriyatlar Misrda geometriyaning shakllanishiga omil bo'lgan.

Antik Misr geometriyasi haqidagi ma'lumotlar Rind va Moskva papiruslarida keltirilgan.

Papirus Misr daryolari bo'yida, bo'yi 3 m gacha yetadigan ko'p yillik o'simlik po'stloqlarini bir-biriga tekis yopishtirishdan hosil qilingan.

Papiruslarning birinchisini ingliz sayyohi va misrshunos Rind 1858 yilda Nil daryosining o'ng qirg'og'ida joylashgan Luqsor qishlog'idan sotib olgan. Papirusning eni 30 sm, bo'yi 20 m bo'lib unda 80 ta masala berilgan. Papirus uni ko'chirib yozgan Axmes nomi bilan ham ataladi. Uni yozib qoldirishicha papirus miloddan avvalgi 2000-1800 yillarga tegishlidir. Papirusda keltirilgan 20 ta geometrik masaladan 8 tasi hajmni, 7 tasi yuzani va 5 tasi qiya piramida hajmini hisoblashga bag'ishlangan. Papirus matnini birinchi marta misrshunos Geydelberg universiteti olimi Avgust Eyzenlar (1805-1880) o'qishga muyassar bo'lgan va nemis tiliga tarjima qilgan va sharhlar keltirgan holda chop qilgan. Papirus bugungi kunda qisman Britaniya va Nyu-York davlat muzeylarida saqlanmoqda. Ikkinchi "Moskva" papirusini rus olimi, sharqshunos V.S.Golenishchev 1893-yilda Peterburg davlat Ermitajida saqlanayotganini aniqlagan. 1930-yilda manba sharqshunos B.A.To'rayev va V.V.Struve tomonidan nemis tiliga tarjima qilingan va nashr ettirilgan. Manbaning eni 8 sm bo'yi 5,44 m ni tashkil etib, u o'z ichiga 18 ta arifmetik, 7 ta geometrik masalani oladi. Papirus Moskva nafis san'at muzeyida saqlanmoqda.

Rind va Moskva papiruslari qadimgi Misr yozuvida bitilgan. Misrliklar yozishda iyerogliflardan foydalanganlar. Iyerogliflar vazifasini hayvonlar. qushlar. hashoratlar. odamlar. anjomlarni ifoda qiluvchi rasmlar bajargan.

Qog'oz vazifasini o'tovchi papirus kashf qilingach iyerogliflar o'rnini ieratik yozuvlar egallagan. Rind va Moskva papiruslari ieratik yozuvda bitilgan, faqat Rind papirusining yakuni iyeroglif yozuvda bayon qilingan.

Papiruslar tahlili shuni ko'rsatadiki misrliklar kvadrat, teng yonli uchburchak, teng yonli trapetsiya, doira yuzasini, asosi kvadrat bo'lgan kesik piramida hajmini hisoblashni bilganlar. Ularni ekin maydonlari yuzini hisoblash, mahsulotlarni taqsimlash, omborlar, idishlar sig'imini o'lchashga tadbiq qila olganlar.

Shuningdek ular bir noma'lumli chiziqli tenglamani yechishni bilganlar. Rind papirusuda shularga doir 15 ta masala, Moskva papirusida esa 3 ta masala keltirilgan.

Antik davr madaniyati o'choqlaridan yana biri ikki Frot va Dajla (Tigr va Efrat) daryo oralig'i madaniyatidir. Bu madaniyat tarixda Shumer - Bobil madaniyati deb nom qozongan. Ikki daryo oralig'ida papirus o'smagani sababli bobilliklar yozuvlarni yumshoq loydan yasalgan taxtachalarga bambuk yoki suyak yordamida yozganlar va ularni oftob, yoki olovda quritganlar.

Quritilgan taxtachalar papiruslarga qaraganda mustahkam bo'lganidan bizgacha "mixxatlar" da yozilgan matnlar papiruslarga qaraganda ko'proq yetib kelgan. Hozirgi kunda dunyoning turli mamlakatlari muzeylarida miloddan avvalgi III mingliklarga taaluqli bo'lgan 560 mingga yaqin sopol matnlar saqlanmoqda.

Bobilliklar shuningdek tenglamalar sistemasi va ikkinchi darajali tenglamalarni yecha olganlar. Bobil matematikasi Misr matematikasi kabi ko'proq amaliy ahamiyat kasb etgan bo'lsada, ular algebraik shakl almashtirishlar bajara olganlar va ularni tenglamalarni yechishga tadbiq qila bilganlar.

Bobil matematikasida abstraktlashtirish jarayoni misrliklarga qaraganda ancha yuqori bo'lgan. Matematikaning keyingi rivoji Yunoniston bilan bog'liqdir. Misr va Bobilliklar bilan o'rnatilgan aloqalar Yunonistonga madaniyat bilan bir qatorda to'plangan matematik tushunchalarni ham olib keladi. Yunonlar ularni o'zlashtiribgina qolmay, balki ularni asoslash, hulosalash va isbotlashga harakat qilganlar.

Eramizdan oldingi VII asrda geometrik ma'lumotlar grek tarixchilarning fikriga qaraganda, Misr va Vaviloniyadan Gretsiyaga o'tgan. Grek faylasuflari Misr va Vaviloniya donishmandlarining ishlari bilan tanisha boshlagan. Ana shu vaqtdan boshlab geometriya taraqqiyotining ikkinchi davri - geometriyani fan sifatida sistemali bayon qilish davri boshlanadi, bunda barcha jumlalar isbot qilinar edi. Ular matematikani dunyoni bilish, borliqni anglash va unda insonning tutgan o'rnini aniqlash maqsadida o'rganganlar va rivojlantirganlar. Shuning uchun bo'lsa kerak, Yunonistonda dastlab shakllangan maktablar falsafiy yo'nalish kasb etgan. Bu maktablarda matematika falsafa bilan uzviy aloqadorlikda rivojlangan. Ana shunday maktablardan dastlabkisi Milet maktabidir. Maktabga grek matematikasining otasi hisoblangan Miletlik savdogar Fales (640-556 e.o.) asos solgan, uning exrom balandligini soyasiga qarab o'lchay olganligi, dengizdagi kemadan qirg'oqqacha bo'lgan masofasini aniqlaganligi, sirkul asbobidan birinchi bo'lib foydalanganligi e'tirof etiladi. Shuningdek eramizdan avvalgi 585 yil 28-mayda bo'lib o'tgan quyosh tutilishini oldindan aytib berganligi tarixiy manbalarda qayd etilgan.

Yunon matematikasining rivojiga Pifagor va uning shogirdlari munosib hissa qo'shgan. Falsafiy yo'nalishdagi Pifagor maktabi yuqori mavqega ega bo'lgan. Pifagor va uning shogirdlari uchburchak ichki burchaklari yig'indisi, dunyoga Pifagor teoremasi nomi bilan mashhur bo'lgan teoremani isbot qilganlar, muntazam ko'pyoqlar soni beshta ekanligi, o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar mavjud ekanligini aniqlaganlar.

Demokrit (330-275 e.o.) "Bo'linmas zarrachalar" metodini yaratadi, u dunyo bo'linmas zarrachalar-atomlardan tashkil topgan degan fikrni ilgari suradi. Uning fikricha har bir geometrik figura bir qancha elementar qismlardan iborat bo'lib, figura hajmi elementar figuralar hajmlarining yig'indisiga teng bo'ladi.

Platon maktabida yasashga doir geometrik masalalar yechilgan. Sirkul va chizg'ich yordamida yechib bo'lmaydigan kub hajmini ikkilantirish masalasini Platon tomonidan yaratilgan asbob yordamida yechganlar. Yasashga doir geometrik masalalarni bosqichlab yechish metodi, geometrik o'rin g'oyasi shu maktabda asoslangan va bir qancha egri chiziqlar yasalgan.

Evdoks (410-355 e.o.) Platon maktabi vakili bo'lib proportsiyalar nazariyasiga asos solgan. Pifagor izdoshlari yaratgan sonli nisbat tushunchasidan farqli o'laroq bu nazariyani u o'lchovdosh bo'lgan kesmalar bilan bir qatorda o'lchovdosh bo'lmagan kesmalar uchun ham qo'llagan, natijada irratsional son tushunchasiga asos solgan. Nisbatlar nazariyasi yordamida piramida, konus hajmini hisoblagan. Evdoksning shogirdi Menexm nomi esa konus kesimlar g'oyasi bilan bog'langandir. Buyuk faylasuf Aristotel mantiq ilmining rivojiga munosib hissa qo'shadi. Faxrli ravishda Aristotel, formalogika fani va deduktiv bayon asoschisi hisoblanadi.

Eramizdan oldingi III asrga kelib Yunonistonda shakllangan falsafiy maktab namoyondalari Misr va Bobilliklar yaratgan matematik tushunchalar va g'oyalarni tanqidiy o'rganish asosida ularni rivojlantirdilar, tushuncha va g'oyani asoslash, ilmiy bayon etish yo'llarini isbotlash usullarini (tahlil, sintez, hulosa chiqarish, hukm chiqarish) yaratishga harakat qildilar va bu metodlarni mujassamlashtirdilarki toki ular mavjud bo'lgan tushunchalarni tizimlashtirish tartibli bayon qilishni taqoza etdi.

Geometriyani deduktiv prinsipda qurishni grek olimi Yevklid o'z zamonasiga nisbatan qoniqarli hal qilib, 13 ta kitobdan iborat "Negizlar" nomli asarini yaratdi. Yevklid hayoti haqida to'la ma'lumotlar bizgacha yetib kelmagan u bizning eramizdan avvalgi 300 yillarda yashagan bo'lib, Ptolomey podshohlik qilgan davrda Aleksandriyada matematikadan dars bergan va shoh tomonidan tashkil qilingan muzeyni matematika bo'limini yaratgan.

Yevklid "Negizlar" kitobiga o'zidan oldin o'tgan olimlarning eng muhim ma'lumotlarini kiritdi va geometriyada unga qanoatlanarli bo'lmagan qoidalarni asosli isbotini berdi. "Negizlar"dagi ba'zi teoremalarni Yevklid o'zi kashf qilganligi shubhasizdir. Lekin "Negizlar" kitobidagi mualifning asosiy xizmati shundaki, u asrlar davomida yig'ilib kelgan geometrik bilimlarni hammasini shunday bir sistemaga soldiki, bu sistema uzoq vaqtlargacha aniqlik va qat'iylik namunasi bo'lib keldi. Hech bir ilmiy kitob Yevklidning "Negizlar" kitobi singari bunchalik ko'p umr ko'rgan emas.

Bu kitob avval juda ko'p marta qo'lda ko'chirilgan, so'ng dunyodagi hamma tillarda qayta-qayta nashr qilingan. Yevklidning bu asari 1482-1880 yillar orasida dunyo tillarida 460 marta nashr qilingan. Shulardan 155 tasi lotin, 142 tasu ingliz, 48 tasi nemis, 38 tasi fransuz, 27 tasu italiya, 14 tasi golland, 5 tasi rus, 2 tasi polyak, qolganlari esa boshqa tillarga tarjima qilingan.

"Negizlar"kitobining qisqacha mazmuni.

1-kitob 34 ta qoida, 48 ta teoremadan iborat bo'lib, uchburchaklarning tenglik shartlari, uchburchak tomonlari bilan burchaklari orasidagi munosabatlari, parallelogramm va uchburchakning yuzlari hamda Pifagor teoremasi haqida so‘z yuritiladi.

2-kitob 2 ta qoida va 14 ta teoremadan iborat bo‘lib, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ va shu kabi ayniyatlar geometrik formada talqin qilinadi.

3-kitob aylanaga bag‘ishlanadi. Bunda asosan aylanaga o‘tkazilgan kesuvchi, urinma, markaziy burchaklar, ichki chizilgan burchaklar qaraladi.

4-kitobda aylanaga ichki va tashqi chizilgan ko‘pburchaklar qaralib, muntazam to‘rtburchak, beshburchak, oltiburchak va o‘nburchaklarni yasash ko‘rsatiladi.

5-kitobda asosan trapetsiyalar nazariyasi qaraladi.

6-kitobda proporsiyalar nazariyasining tadbiqi sifatida uchburchaklar o‘xshashligi nazariyasi va ko‘pburchak yuzlarini topish beriladi.

7-9 kitoblar arifmetika va sonlar nazariyasiga bag‘ishlangan.

10- kitobda irratsional miqdorlar nazariyasi qaraladi.

11-13 kitoblar stereometriyaga bag‘ishlangan bo‘lib, ularda ko‘pyoqlar va muntazam ko‘pyoqlar haqida ma’lumotlar beriladi.

Yevklidning “Negizlar” asari matematika fanining tadrijiy taraqqiyoti uchun o‘ta muhim ahamiyat kasb etadi. Yunon matematikasida o‘lchovdosh bo‘lmagan kesmalar va irratsionallik tushunchalarning vujudga kelishi bilan vujudga kelgan qiyinchiliklarni to‘g‘ri bartaraf qila olmaslik, ya’ni irratsional son tushunchasi, sonli to‘plamlarni kengaytirish va haqiqiy sonlar nazariyasini yaratish muammosini to‘g‘ri yecha olmaslik, ularning yechimini geometriyadan, to‘g‘rirog‘i geometriya yasashlardan izlashga olib keladi.

Qadimgi quldorchilik tuzumining yemirilishi Gretsiyada geometriya taraqqiyotining to‘xtalishiga olib keldi, lekin geometriya arab sharqi mamlakatlari, O‘rta Osiyo va Hindistonda taraqqiy qila bordi.

Al-Xorazmiy matematika taraqqiyotida yana muhim o‘rin tutgan algebraga doir "Al-kitob al-muxtasar fi hisob al-jabr va al-muqobala" nomli asarini yaratadi. U bu asari bilan algebraga asos soladi va algebrani alohida fan darajasiga ko'taradi. Xorazmiyning bu asari asosan uch bo'limdan iborat bo'lib, birinchi bo'limda al-jabr va al-muqobala (tiklash va qarama-qarshi qo'yish) yordamida birinchi va ikkinchi darajali, bir noma'lumli tenglamalarni yechish, ratsional va irratsional ifodalar bilan amallar bajarish hamda tenglama yordamida sonli masalalarni yechish yo'llari beriladi. Ikkinchi bo'lim geometriyaga tegishli bo'lib, unda miqdorlarni o'lchash va o'lchashga doir masalalarga algebraning ba'zi bir tadbiqlari ko'rsatiladi. Uchinchi bo'limida algebraning amaliy tadbiqi, ya'ni meros bo'lishga doir masalalar beriladi.

Beruniy geometrik miqdorlarni son deb qarash bilan bu miqdorlar ustida arifmetik amallarni bajarishda son tushunchasini musbat haqiqiy sonlargacha kengaytiradi.

Beruniy geometriyaning asoschisi Yevklidning asosiy geometrik tushunchalar va geometrik shakllarga bergan ta'riflarining ayrimlarini aniqlash va to'ldirish bilan bu ta'riflarga teng kuchli ta'riflar beradi.

Muxammad Xorazmiydan keyingi davrda Sharq matematiklari algebra va geometriyaning ayrim sohalarini juda tez rivojlantiradilar. Ular astronomiya va geometriyaga oid masalalarni hal qilish kubik tenglamalarni yechimga keltirilishini bildilar. Kubik tenglamani yechish masalasini Umar Xayyom o'zining 1069-1071-yillarda yozgan "Al-jabr va al-muqobila masalalarining isboti haqida" nomli asarida birinchi bo'lib hal qiladi. Kvadrat va kubik tenglamalarni 24 xil kanonik ko'rinishdagi tasnifini beradi.

Xurosonlik matematik Nasriddin Tusiy XIII asrda tekis va sferik trigonometriyani bir tizimga soladi va trigonometriyani alohida fan darajasiga ko'taradi. Nasriddin Tusiy geometriya va trigonometriyaning taraqqiyotida muhim ahamiyatga ega bo'lgan asarlar yozadi. U grek olimi Yevklidning "Negizlar" nomli asarini sharxlab, qo'shimchalar kiritish bilan "Taxrir Uxlidis" nomli asar yozgan. Tusiy bu asarda Yevklidning fikrlarini rivojlantiradi va takomillashtiradi. Tusiyning eng muhim qo'shimchalaridan biri nisbatlar nazariyasidir. Tusiy nisbatlar nazariyasini ishlab chiqib, birinchi bo‘lib, bir xil ismdagi miqdorlardan birining ikkinchisiga nisbati, ismsiz sonlar nisbati degan tushunchani fanga kiritadi va o‘lchovsiz miqdorlarning nisbati son deb hisoblaydi. Tusiy "To‘la to‘rtburchaklar" (shakl ul kit’a) nomli trigonometriyaga doir asar yozib, sistemalashgan to‘g‘ri chiziqli va sfera trigonometriyani yaratadi hamda trigonometriyaning alohida darajasiga o‘tishdagi muhim masalani to‘la-to‘kis hal qiladi.

Jamshid Koshiy Samarqandda Ulug‘bek rasadxonasini qurish ishlariga faol qatnashadi, chuqur ilmiy ishlar olib boradi. "Vatar va sinus haqida risola" asarida bir gradusli burchakning sinusi aniqlanadi. "Aylana uzunligining diametriga nisbati" asari 1424 yilda Samarqandda fors-tojik tilida yozilgan.

Yevropada kapitalizmning paydo bo‘lishi geometriya taraqqiyotining yangi, uchinchi davriga olib keldi; XVII asrning birinchi yarmida Dekart va Fermaning analitik geometriya yaratishi shu davrga mansubdir.

Analitik geometriya koordinatalar metodiga tayanib geometrik shakllar xossalarini ularning algebraik tenglamalariga qarab tekshiradi. Differentsial hisob va geometrik shakllarning lokal xarakterdagi (berilgan nuqta atrofidagi) xossalarini tekshirish, munosabati bilan Eyler va Monj asarlarida XVIII asrda differentsial geometriya yaratildi. XVII asrning birinchi yarmida J.Dezarg va B.Paskal asarlarida proyektiv geometriya paydo bo‘la boshladi, bu geometriya dastlab perspektivalarni tasvirlashni o‘rganishda, undan keyin esa fazoning biror nuqtasidan bir tekislikni ikkinchi tekislikka proeksiyalashda shakllarning o‘zgarmaydigan xossalarini o‘rganishda paydo bo‘ldi va nihoyat J.Ponsele asarlarida takomillashtirildi.

Geometriya taraqqiyotining to‘rtinchi davri noyevklid geometriyalarning yaratilishi bilan nishonlanadi. Bu geometriyalardan birinchisi Lobachevskiy geometriyasi bo‘lib, uni Lobachevskiy geometriyani asoslashni tekshirishda, jumladan parallel to‘g‘ri chiziqlar haqidagi aksiomani tekshirishda yaratgan. O‘z geometriyasining mazmunini N. I. Lobachevskiy birinchi marta 1826-y. da Qozon universiteti fizika-matematika fakulteti majlisida bayon qildi. Uning asari esa 1829-y. da e'lon etildi. Venger matematigi Yanosh Boyai shu masala haqidagi biroz xomroq ishni 1832-y. da e'lon qildi. Lobachevskiy geometriyasining yaratilishidan boshlab matematikada, jumladan geometriyada aksiomatik metodning ahamiyati muhimlashib qoldi. Yevklid geometriyasi (maktabda o'qitiladigan odatdagi elementar geometriya) keyinchalik aksiomatik jihatdan asoslab berildi. Lobachevskiy geometriyasi, proyektiv geometriya, affin geometriya, ko'p o'lchovli (n-o'lchovli) Yevklid geometriyasi va boshqa geometriyalar ham aksiomatik asoslandi.

Hozirgi vaqtda geometriya ko'p xil geometriyalar va nazariyalarni o'z ichiga olgan bo'lib, ular orasida aniq chegara yo'q. Shu bilan birga ayrim geometrik nazariyalar analiz (differentsial geometriya) bilan, to'plamlar nazariyasi (nuqtalar to'plamlari nazariyasi, topologiya) bilan qo'shilib ketgan. Har bir geometriya boshqasidan qanday fazoni tekshirishi bilan (Yevklid, Lobachevskiy geometriyalari), qanday metodlardan foydalanishi bilan masalan, analitik geometriyada 2-tartibli egri chiziqlarning analitik nazariyasi, yoki sintetik geometriyada 2-tartibli egri chiziqlarning sintetik, sof geometrik nazariyasi, qanday obyektlarni (shakllarni) yoki ularning xossalarini tekshirishi bilan (masalan, ko'p yoqlilar va ularniig xossalarini, egri chiziq va sirtlarni va h. k. larni tekshirish bilan) farq qiladi. Metrika masalalari (kesmalar uzunliklari, burchaklar va yuzlarni o'lchash) metrik geometriya tushunchasiga olib keladi. Insidensiya (tegishlilik, joylanishlik) masalalari holat geometriyasi, ya'ni proyektiv geometriya tushunchasiga olib keladi.

Geometriyani asoslash masalalari uning mantiqiy asoslarini, uning aksiomatikasi va tuzilishini o'rganuvchi elementar geometriya bo'limiga keltiradiki, bu ilmiy fan geometriya asoslari deb ataladi.

Geometriyalarning har birini Kleynning taklifiga ko'ra uning o'rganadigan almashtirishlar gruppasi orqali xarakterlash mumkin. Masalan, elementar geometriya Yevklid harakatlari gruppasi bilan, affin geometriya affin almashtirishlar gruppasi bilan, proyektiv geometriya barcha kollineatsiyalar (proyektiv almashtirishlar) gruppasi bilan xarakterlanadi.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Geometriyaning vujudga kelish tarixi necha davrga bo'linadi?
2. Qadimgi Misr yozuvida bitilgan papiruslar haqida nimalarni bilasiz?
3. Geometrik olimlardan kimlarni bilasiz?
4. Eramizdan oldingi va eramizdan keyin giolimlarning qanday geometriyaga oid asarlarini bilasiz?

9.2. Maktabda o'rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi

Boshlang'ich ta'lim umumiy o'rta ta'lim tizimida muhim bo'g'in hisoblanib, u mazmun va mohiyat jihatidan maktabgacha ta'lim jarayoni bilan ta'limning navbatdagi yuqori bosqichi bo'lgan o'rta ta'limni o'zaro bog'laydi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalar egallashi lozim bo'lgan matematik bilim ko'lami o'ziga xos xususiyatlarga ega bo'lib, u ilk matematik tasavvurlar ko'rinishida shakllantiriladi va maktabgacha yoshdagi bolalarning rivojlanishiga qo'yilgan davlat talablari asosida belgilanadi.

Davlat talablarini amaliyotga joriy etish borasida ishlab chiqilgan tayanch dasturlarda ilk matematik tasavvurlarni shakllantirish asosan son va sanoqqa, miqdor, shakl, fazoviy tasavvur va vaqtga oid tasavvurlarni shakllantirish yo'nalishlarida olib borish tavsiya etiladi.

Maktabgacha ta'lim yoshidagi bolalarda harakatli konkret va ko'rgazmali obrazli mantiqiy tafakkur vositasida uchburchak, to'rtburchak, kvadrat, aylana, doira, oval, ko'pburchak, kub, silindr, shar kabi geometrik figuralar ularning ba'zi bir xossa va xususiyatlari haqida tasavvurlar shakllantiriladi.

Boshlang'ich maktab matematika kursi arifmetika, algebra va geometrik materialni o'quvchilarni yosh xususiyatlarini hisobga olgan holda berilgan mavzu negizida mutanosib mujassamlashuvi asosida o'rgatiladi. Maktabgacha ta'lim jarayonida tasavvurlar shaklida egallangan geometrik material boshlang'ich ta'lim jarayonida o'tkir, o'tmas, to'g'ri burchak, uchburchak, to'g'ri to'rtburchak, kvadrat, ko'pburchak, kesma uzunligi, yuza, perimetr, ko'pyoq va uning elementlari, kub hajmiga oid tushunchalar qadar kengaytiriladi.

Boshlang'ich sinflarda tushuncha shaklida egallangan geometriyaga oid bilimlar yuqori sinflarda chuqurlashtiriladi, kengaytiriladi va aniqlashtiriladi. Yuqori sinflarda asosan geometriyaning sistemali kursi o'rgatiladi. Sistemali kurs ikki qismdan iborat bo'lib, ular «Planimetriya» va «Stereometriya» deb yuritiladi.

Planimetriya kursida bir tekislikka tegishli bo'lgan figuralarning xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlar, yuzalarni o'lchash masalalari o'rganiladi.

Barcha nuqtalari bilan bir tekislikka tegishli bo'lmagan figuralar xossa va xususiyatlari, ularning elementlari orasidagi metrik munosabatlarni, hajmlarni o'lchash masalalari stereometriya kursida o'rganiladi.

Planimetriya va stereometriyaning sistemali kurslarini o'rganish asosan boshlang'ich tushunchalar, boshlang'ich munosabatlar, boshlang'ich tushunchalar bilan boshlang'ich munosabatlar orasidagi bog'lanishlarni ifodalovchi aksiomalar sistemasini keltirish orqali boshlanadi.

Geometriyaning bu tariqa bayon qilinishi fanda mazmunli aksiomatik bayon deb yuritilib uning ibtidosi Yevklidga borib taqaladi. Yevklid «Negizlar» asarining har bir kitobini deduktiv bayon asosida yaratgan bo'lib, kitobda dastlab ta'riflar, postulatlar, aksiomalar so'ngra esa ta'rif, postulat va aksiomalar yordamida isbotlanadigan xossa va xususiyatlarni ifodalovchi teoremalar keltirgan. Shu tariqa izchil tizimli asosli mantiqiy bayonning dastlabki namunasini birinchilar qatorida yaratadi. O'z davrining yetuk asari hisoblangan «Negizlar» olimlar tomonidan tanqidiy o'rganilishi natijasida qator kamchiliklar mavjudligi aniqlangan.

Yevklid tomonidan berilgan ta'riflarni o'rganish ularda uchraydigan «uzunlik», «kenglik» kabi tushunchalarning o'zlari ta'rifga muhtoj ekanligi, kitoblarda keltirilgan ta'rif, aksioma va postulatlar tegishli teorema va isbot talab qiluvchi matematik jumlalarni isbotlash uchun yetarli emasligi, hamda ular nuqta, to'g'ri chiziq va tekisliklar orasidagi munosabatlarni asoslash uchun yetarli emasligi aniqlangan.

Yevklid sistemasini tanqidiy o'rgangan David Gilbert, birorta ilmiy nazariyani asoslash uchun dastlab ta'riflanmaydigan boshlang'ich tushunchalar, so'ngra boshlang'ich tushunchalar orasidagi bog'lanishlarni izohlovchi boshlang'ich munosabatlar, boshlang'ich tushunchalar va boshlang'ich munosabatlar orasidagi bog'lanishlarni izohlovchi aksiomalar qabul qilish asosida mazkur ilmiy nazariyaga oid faktlarni isbotlash lozim degan g'oyani ilgari suradi, g'oyaga asoslangan holda fanda aksiomatik metod qabul qilingan. Mazkur g'oyani u 1899 yilda yaratilgan «Geometriya asoslari» kitobida bayon qilgan.

D.Gilbert Ekvlid geometriyasini asoslash uchun boshlang'ich tushunchalar sifatida «nuqta», «to'g'ri chiziq», «tekislik» ni boshlang'ich munosabatlar sifatida, «yotadi», «orasida yotadi», «tegishli» munosabatlarini, aksiomalar sifatida esa 5 guruh aksiomalarni qabul qiladi. Birinchi guruh tegishlilik aksiomalari deb yuritilib, tarkibiga 8 ta aksioma, ikkinchi guruh tartib aksiomalari 4 ta, uchinchi guruh kongruentlik 5 ta, to'rtinchi guruh uzluksizlik 2 ta, beshinchi guruh parallellik 1 ta aksiomadan iborat bo'lib, jami 20 ta aksiomani tashkil qiladi.

Planimetriyaning tizimli kursi ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar «nuqta» va «to'g'ri chiziq»ni, boshlangich munosabat sifatida "yotadi", "tegishli" munosabatlarni, asosiy tushunchalar va asosiy munosabatlar orasidagi munosabatlar mohiyati va xususiyatini ochib beruvchi 2 ta tegishlilik, 2 ta tartib, 3 ta o'lchash, 2 ta kongruentlik, 1 ta parallellik aksiomalari vositasida bayon qilinadi.

Planimetriya kursida burchaklar, uchburchak, to'rtburchaklar, aylana, doira, ularning xossalari, perimetri, yuzlari, geometrik figuralarning xossalari, ularning elementlari orasidagi o'zaro bog'lanishlar teorema sifatida isbotlanadi.

Stereometriya kursida ta'riflanmaydigan asosiy tushunchalar sifatida "nuqta", "to'g'ri chiziq", "tekislik" tushunchalari olinadi. Asosiy tushunchalar qatoriga "tekislik" tushunchasining kiritilishi planimetriyada qabul qilingan aksiomalar sistemasini kengaytirishni talab etadi. Shuning uchun fazoviy figuralar xossa va xususiyatlarini o'rganish, teoremalarni isbot qilish maqsadida stereometriya kursida quyidagi aksiomalar qabul qilinadi. Maktab geometriya kursida bu aksiomalar S gruppa aksiomalar deb yuritiladi.

S_1: tekislik qanday bo'lmasin, shu tekislikka tegishli nuqtalar va unga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud.

S_2: agar ikkita turli tekislik umumiy nuqtaga ega bo'lsa ular to'g'ri chiziq bo'ylab kesishadi.

S_3: agar ikkita turli to'g'ri chiziq umumiy nuqtaga ega bo'lsa ular orqali bitta va faqat bitta tekislik o'tkazish mumkin.

Planimetriya kursi aksiomalari faqat bitta tekislikda joylashgan nuqtalar va to'g'ri chiziqlar orasidagi munosabatlarni izohlagani va stereometriyada esa bunday tekisliklar ko'p sonli ekanligini inobatga olib planimetriya kursi aksiomalari sistemasi stereometriya kursiga moslashtirilgan holda qabul qilinadi. Bu aksiomalar quyidagilardir.

I_1: To'g'ri chiziq qanday bo'lmasin, bu to'g'ri chiziqqa tegishli va tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud;

I_2: Istagan ikki nuqtadan to'g'ri chiziq o'tkazish mumkin va faqat bitta;

II_1: To'g'ri chiziqdagi uchta nuqtadan bittasi va faqat bittasi qolgan ikkitasining orasida yotadi;

II_2: Tekislikka tegishli to'g'ri chiziq tekislikni ikkita yarim tekislikka ajratadi;

III_1: Har bir kesma noldan katta tayin uzunlikka ega. Kesma uzunligi shu kesmaning har qanday nuqtasi ajratgan qismlari uzunliklarining yig'indisiga teng;

III_2: Har bir burchak noldan katta tayin gradus o'lchovga ega. Yoyiq burchak 180^0 ga teng. Burchakning gradus o'lchovi o'zining tomonlari orasidan o'tuvchi har qanday nur yordamida ajratilishidan hosil qilingan burchaklarning gradus o'lchovlari yig'indisiga teng;

III_3: Istalgan yarim to'g'ri chiziqqa uning boshlang'ich nuqtasidan berilgan uzunlikda yagona kesma qo'yish mumkin;

IV_1: Tekislikka tegishli bo'lgan yarim to'g'ri chiziqdan berilgan yarim tekislikka 180^0 dan kichik bo'lgan berilgan gradus o'lchovli burchak qo'yish mumkin va faqat bitta;

IV_2: Qanday bo'lmasin berilgan tekislikda undagi berilgan yarim to'g'ri chiziqqa nisbatan berilgan vaziyatda joylashgan shu uchburchakka teng uchburchak mavjud bo'ladi;

V_1: Tekislikda berilgan to'g'ri chiziqda yotmagan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa bittadan ortiq parallel to'g'ri chiziq o'tkazib bo'lmaydi.

Yuqorida qayd qilingan I-V guruh aksiomalari va S_1, S_2, S_3 aksiomalar birgalikda stereometriya aksiomalar sistemasini tashkil qiladi.

Maktab strcometriya kursida to'g'ri chiziqlar va tekisliklarning parallellik, perpendikulyarligi, to'g'ri chiziq va tekislikning, to'g'ri chiziqlarning o'zaro munosabatlari o'rganiladi.

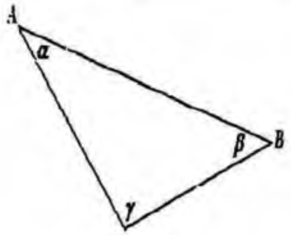
Fazoda Dekart koordinatalar sistemasini kiritish orqali ikki nuqta orasidagi masofa, vektor, koordinatalari bilan berilgan vektorlar ustida amallar, to'g'ri chiziq tenglamalari, to'g'ri chiziqlar va tekisliklar orasidagi burchak shuningdek, ko'pyoqlar, ularning xossalari, yon va to'la sirtlari, hajmlari o'rganiladi.

Mavzu yuzasidan savollar

1. Maktabda o'rganiladigan geometrik tushunchalar sistemasi haqida nimalarni bilasiz?
2. Planimetriya nimani o'rgatadi?
3. Stereometriya nimani o'rgatadi?
4. Planimetriya kursining aksiomalarini ayting.
5. Stereometriya kursining aksiomalarini ayting.

9.3.Geometrik figuralar, ularning ta'rifi, xossalari va alomatlari

Ta'rif. Bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan uchta nuqta va uchlari ularning har ikkalasiga tegishli bo'lgan uchta kesmadan iborat geometrik shakl **uchburchak** deyiladi. A, B, C uchburchak uchlari, AB, BC, AC tomonlari $\angle BAC$, $\angle ABC$, $\angle ACB$ ichki burchaklardir. $\angle BAC=\alpha$, $\angle ABC=\beta$, $\angle ACB=\gamma$ (9.1-rasm).



9.1-rasm

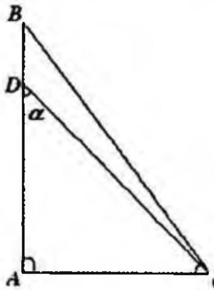
Uchburchaklarni tomonlari va burchaklariga nisbatan klassifikatsiyalash mumkin. Agar uchburchakning uchta tomoni o'zaro teng bo'lsa teng tomonli, ikki tomoni o'zaro teng bo'lsa teng yonli, uch tomoni o'zaro teng bo'lmasa turli tomonli uchburchak hisoblanadi. Agar uchburchakning ichki burchaklari o'tkir burchakdan iborat bo'lsa o'tkir burchakli, bir burchagi o'tmas burchak bo'lsa o'tmas burchakli, bir burchagi to'g'ri burchak bo'lsa to'g'ri burchakli uchburchak deyiladi. (9.1-rasm)

Har qanday uchburchak uchta tomoni, bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi yoki ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi bilan to'la aniqlanadi.

Uchta a, b, c tomonlariga ko'ra berilgan uchburchak mavjud bo'lishi uchun uning ixtiyoriy ikki tomonining yig'indisi uchinchi tomonidan katta bo'lishi shart.

$a+b>c; c+b>a; a+c>b$ tengsizliklar uchburchak tengsizligi deyiladi. Ikki tomoni va ular orasidagi burchagiga ko'ra berilgan uchburchak mavjud bo'lishi uchun $\alpha<180°$

tengsizlik; bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra berilgan
uchburchak mavjud bo'lishi uchun $\alpha+\beta<180°$ tengsizlik bajarilishi zarur va yetarlidir.

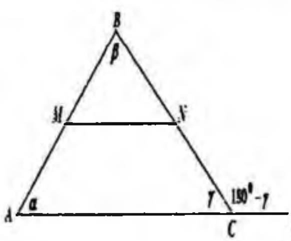


9.2-rasm

To'g'ri burchakli uchburchakda to'g'ri burchak qarshisida yotgan tomon gipotenuza, qolgan tomonlari katetlar deb ataladi. BC gipotenuza, AB va AC katetlar (9.2-rasm).

Ikkala kateti teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakka teng yonli to'g'ri burchakli uchburchak deyiladi va uning o'tkir burchaklari 45^0 ga teng bo'ladi.
$\angle ADC = 45°$, $\angle ACD = 45°$.

Uchburchakda teng tomonlar qarshisida teng burchaklar, teng burchaklar qarshisida teng tomonlar, katta burchak qarshisida katta tomon, kichik tomon qarshisida esa kichik burchak yotadi. Uchburchakning ixtiyoriy ikkita ichki burchaklari yig'indisi uning uchinchi burchagining qo'shni burchagiga tengdir (9.3-rasm).

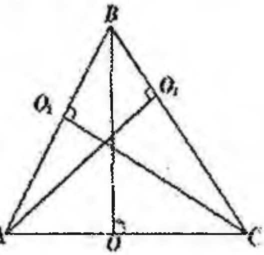


9.3-rasm

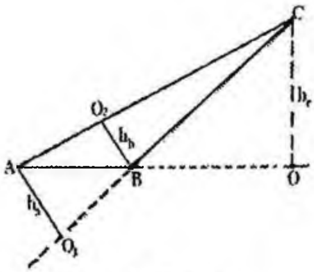
$$\alpha+\beta+\gamma=180°$$
$$\alpha+\beta=180°-\gamma$$

Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomoniga tushirilgan perpendikulyar uchburchakning balandligi deyiladi.

9.4a va 9.4b rasmlarda o'tkir va o'tmas burchakri uchburchak balandliklari ko'rasatilgan.

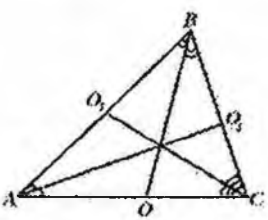


9.4a-rasm

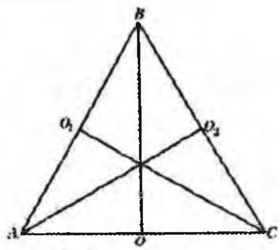


9.4b-rasm

Uchburchakning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomonini teng ikkiga bo'luvchi kesma mediana deyiladi (9.5a-rasm). Uchburchakning bir uchidan chiqib shu burchakni teng ikkiga bo'luvchi kesma bissektrisa deyiladi (9.5b-rasm). Uchburchakning ixtiyoriy ikkita tomoni o'rtalarini tutashtiruvchi kesma uchburchakning o'rta chizig'i deyiladi. Uchburchakning o'rta chizig'i uning uchinchi tomoniga parallel bo'lib, parallel tomon uzunligining yarmiga teng bo'ladi.



9.5a-rasm.



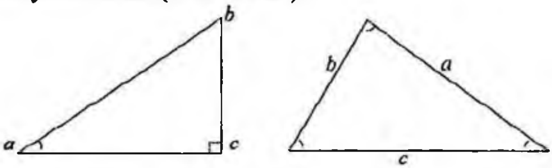
9.5a-rasm

Teng yonli uchburchakda asos qarshisidagi uchdan asosga tushirilgan balandlik mediana va bissektrisa vazifasini bajaradi.

To'g'ri burchakli uchburchak o'tkir burchagi qarshisidagi katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning sinusi, o'tkir burchakka yopishgan katetning gipotenuzaga nisbati shu burchakning kosinusi, o‘tkir burchak qarsishidagi katetning yopishgan katetga nisbati shu burchak tangensi, yopishgan katetning qarshi yotgan katetga nisbati shu burchak katangensi deyiladi.

$\frac{BC}{AB} = sin\alpha, \frac{AC}{AB} = cos\alpha, \frac{BC}{AC} = tg\alpha, \frac{AC}{BC} = ct\alpha.$ 9.6a-rasm.

Uchburchakning tomonlari qarshisidagi burchaklarning sinuslariga proporsional $\frac{sin\alpha}{a} = \frac{sin\beta}{b} = \frac{sin\gamma}{c}$. Bu munosabat sinuslar teoremasi deb yuritiladi. (9.6b-rasm).



To‘g‘ri burchakli uchburchakda gipotenuzaning kvadrati katetlar kvadratlarining yig‘indsiga teng $a^2=b^2+c^2$. Bu munosabat Pifagor teoremasi deb nomlangan. Yuqorida keltirilgan munosabatlar isbotini talabaga havola qilamiz.

Uchburchaklar tengligi va o‘xshashligi alomatlari.

1-alomati. Agar bir uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagi ikkinchi uchburchakning bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar tengdir.

2-alomati. Agar bir uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagi ikkinchi uchburchakning ikki tomoni va ular orasidagi bir burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar tengdir.

3-alomati. Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda teng bo‘lsa, bunday uchburchaklar tengdir.

Agar bir uchburchakning uchta tomoni ikkinchi bir uchburchakning uchta tomoniga mos ravishda proporsional bo‘lsa bunday uchburchaklar o‘xshashdirlar. Agar bir uchburchakning ikki burchagi, ikkinchi bir uchburchakning ikki burchagiga mos ravishda teng bo‘lsa bunday uchburchaklar o‘xshashdirlar.

Agar bir uchburchakning ikki tomoni mos ravishda ikkinchi uchburchakning ikki tomoniga proporsional bo'lib proporsional tomonlar orasidagi burchaklar teng bo'lsa bunday uchburchaklar o'xshashdirlar.

Uchburchakning medianalari uchburchak tomonlari orqali quyidagicha ifodalanadi:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2cb^2 - a^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2},$$

Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali quydigaicha ifodalanadi:

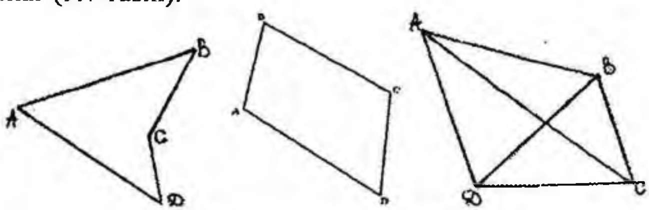
$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)\,(p-b)(p-c)}}{a},$$

$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)\,(p-b)(p-c)}}{b},$$

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)\,(p-b)(p-c)}}{c},$$

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

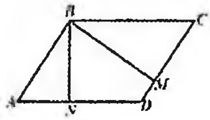
To'rtburchaklar. Tekislikda hech bir uchtasi bir to'g'ri chiziqda yotmaydigan to'rtta nuqta va ularni har ikkalasini tutashtiruvchi, o'zaro kesishmaydigan to'rtta kesmadan tashkil topgan geometrik shakl to'rtburchak deyiladi. A, B, C, D to'rtburchak uchlari, AB, BC, CD, AD tomonlari, AC, BD diagonallar (9.7-rasm).



9.7-rasm

To‘rtburchaklarning quyidagi turlari mavjud:

Parallelogramm. Tomonlari parallel to‘g‘ri chiziqlarda yotuvchi to‘rtburchak parallelogrammdir (9.8-rasm).

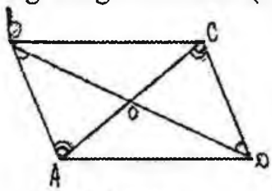


9.8-rasm

AB||CD |AB|=|CD| |AD|=|BC|

Parallellogramning bir uchidan chiqib qarshi yotgan tomonga tushirilgan perpendikulyar uning balandligidir. BN, BM balandliklar.

Teorema. Parallelogramm diagonallari bir nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo‘linadi (9.9-rasm).



9.9-rasm

Isbot. AC va BD diagonallari o‘tkazamiz. Diagonallar bir nuqtada kesishadi.

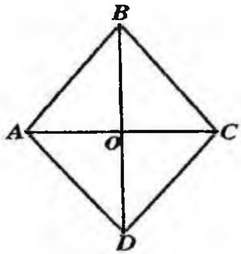
$$(AC) \cap (BD) = \{O\}$$

$$\left.\begin{array}{c} \angle BAO = \angle DCO \\ \angle CDO = \angle ABO \\ |AB| = |CD| \end{array}\right\} \Rightarrow$$

ga ko‘ra $\Delta AOB = \Delta COD$ bundan OB=OD OC=OA.

Xuddi shuningdek $\Delta COB = \Delta AOD$ tengliligini ko‘rsatish mumkin.

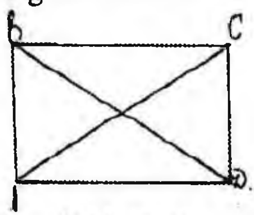
Romb. Hamma tomonlari teng bo‘lgan parallelogramm rombdir (9.10-rasm).



9.10-rasm

AC rombning kichik diagonali, BD rombning katta diagonali. $\Delta ABC = \Delta ADC. \Delta ABC$ teng yonli uchburchak bo‘lganidan $OB \perp AC, AO = OC, \Delta BAD = \Delta BCD.$ ΔBCD teng yonli $BD \perp OC, OB = OD$ bundan esa quyidagi xossani o‘rinli ekanini ko‘rish mumkin. Rombning diagonallari kesishish nuqtasida o‘zaro perpendikulyar bo‘ladi va teng ikkiga bo‘linadi.

To‘g‘ri to‘rtburchak. Hamma burchaklari to‘g‘ri burchak bo‘lgan parallelogramm to‘g‘ri to‘rtburchakdir (9.11-rasm).



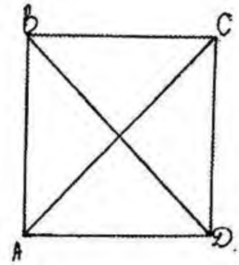
9.11-rasm

To‘g‘ri to‘rtburchakning AC diagonali uni o‘zaro teng ikkita ABC va ADC uchburchaklarga, BD diagonali esa BAD va BCD uchburchaklarga ajratadi.

Bu uchburchaklar ikkita tomoni va ular orasidagi burchagiga ko‘ra tengdirlar.

Bu esa bizga to‘g‘ri to‘rtburchakning diagonallari o‘zaro tengdir degan xulosani chiqarishga asos bo‘ladi.

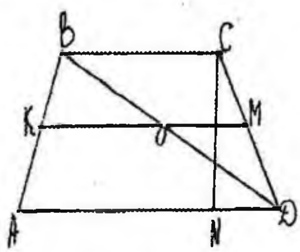
Kvadrat. Hamma tomonlari teng bo‘lgan to‘g‘ri to‘rtburchak kvadratdir. Kvadratning diagonallari ham to‘g‘ri burchak ostida kesishishini xossa sifatida isbotlash mumkin (9.12-rasm).



9.12-rasm

Kvadratni hamma burchaklari teng romb sifatida ham qarash mumkin. Demak, kvadrat parallelogramm, romb, to'g'ri to'rtburchakka xos bo'lgan barcha xossalarga ega bo'ladi.

Trapetsiya. Ikki tomoni parallel qolgan ikki tomoni parallel bo'lmagan to'rtburchak trapetsiya deyiladi (9.13-rasm).



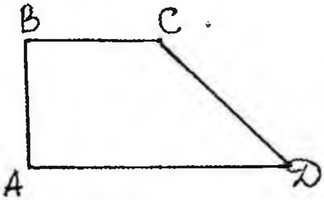
9.13-rasm

Trapetsiyaning parallel tomonlari uning asoslari (AD va BC), qolganlari yon tomonlaridir (AB va CD). Yon tomonlari o'rtalarini tutashtiruvchi kesma trapetsiyaning o'rta chizig'i deyiladi va asoslariga parallel bo'ladi (9.13-rasm). Trapetsiyaning bir asosi uchidan ikkinchi asosiga tushirilgan perpendikulyar trapetsiyaning balandligidir (CN). Trapetsiyaning o'rta chizig'i asoslar yig'indisining yarmiga teng. Haqiqatan ham rasmdan:

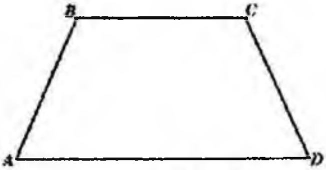
$$KO = \frac{AD}{2},\ OM = \frac{BC}{2},\ KO + OM = KM,$$

$$KM = \frac{AD}{2} + \frac{BC}{2} = \frac{AD + BC}{2}.$$

9.14-rasmda teng yonli va to‘g‘ri burchakli trapetsiyalar tasvirlangan.



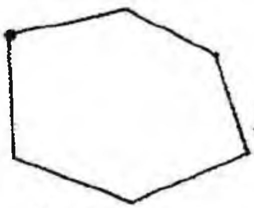
9.14a-rasm

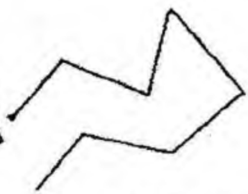


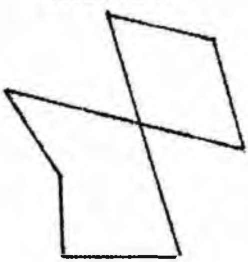
9.14b-rasm

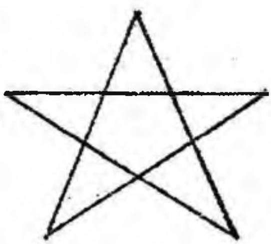
Ko‘pburchak. Birining oxiri bilan ikkinchisining boshi ustma-ust tushuvchi kesmalar birlashmasiga siniq chiziq deyiladi. Siniq chiziqni hosil qilayotgan kesmalar uning bo‘g‘inlari, oxiri va boshi bir nuqtada bo‘lgan bo‘g‘inlar esa qo‘shni bo‘g‘inlar sanaladi. Birinchi bo‘g‘inning boshi va so‘ngi bo‘g‘inning oxiri ustma-ust tushgan siniq chiziq yopiq siniq chiziqdir.

Har ikkila bo‘g‘inni faqatgina bitta umumiy nuqtaga ega bo‘lgan siniq chiziq oddiy siniq chiziq sanaladi. 9.15-a, 9.15-b rasmlarda oddiy siniq chiziqlar, 9.15-a rasmda yopiq siniq chiziq tasvirlangan. 9.14-d va 9.15-e rasmlarda oddiy bo‘lmagan yopiq siniq chiziqlar tasvirlangan.


9.15a-rasm

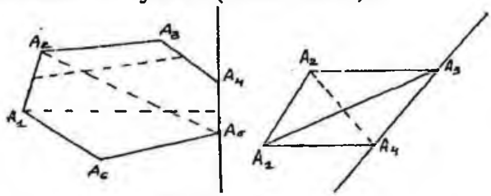

9.15b-rasm


9.15d-rasm

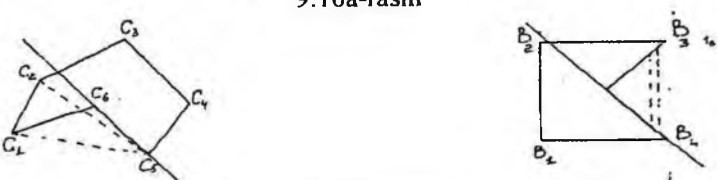

9.15e-rasm

Biz 9.15-a va 9.15-b rasmlarda tasvirlangan oddiy siniq chiziqlarning xossa va xususiyatlarni o‘rganamiz. Oddiy yopiq siniq chiziq o‘zi yotgan tekislikni ikkita ichki va tashqi sohalarga ajratadi. Oddiy yopiq siniq chiziq o‘zining ichki sohasi bilan birgalikda ko‘pburchak deyiladi. Ko‘pburchakni chegaralab turgan siniq chiziqlar uning chegarasidir. Ko‘pburchakni hosil qilayotgan bo‘g‘inlar uning tomonlari, bo‘g‘inlarining kesishish nuqtalari esa uchlari hisoblanadi.

Ko‘pburchakning tomonlari soni bilan uchlari soni teng, umumiy nuqtaga ega bo‘lgan tomonlar qo‘shni tomonlar deyiladi. Ko‘pburchaklar botiq va qabariq ko‘pburchaklarga bo‘linadi. Agar ko‘pburchakning har qanday ikkita nuqtasini tutashtiruvchi kesma to‘laligicha ko‘pburchakka tegishli bo‘lsa yoki ko‘pburchakning ixtiyoriy tomoni orqali o‘tgan to‘g‘ri chiziqdan ko‘pburchakning barcha nuqtalari bir tarafida yotsa ko‘pburchak qabariq ko‘pburchaklar deyiladi (9.16a-rasm).

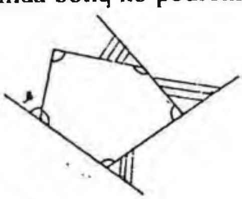


9.16a-rasm

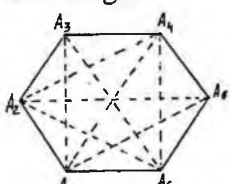


9.16b-rasm

9.16b- rasmda botiq ko‘pburchaklar tasvirlangan.



9.17-rasm



9.18-rasm

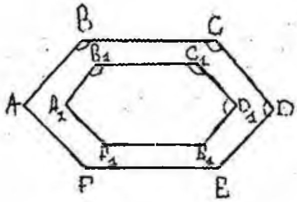
Ko'pburchakning qo'shni tomonlari bilan chegaralangan ichki sohasi uning ichki burchagi ichki burchagiga qo'shni bo'lgan burchak esa tashqi burchakdir (9.17-rasm). $\angle\alpha$ –ichki burchak $\angle\beta$ - tashqi burchak.

Ko'pburchak o'zining burchaklari soni bilan nomlanadi. Agar ko'pburchakda burchaklar soni 3 ta bo'lsa uchburchak, 4 ta bo'lsa to'rtburchak va hokazo. Ko'pburchak ichki burchaklar yig'indisi $180^0(n-2)$ ga teng.

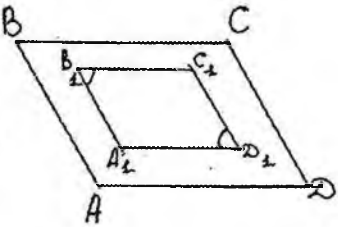
Ko'pburchak tomonlari uzunliklari yig'indisi perimetr deyiladi. Ko'pburchaklarning qo'shni bo'lmagan uchlarini tutashtiriuvchi kesma diagonaldir. Qavariq n-burchakning diagonallari soni $\frac{1}{2}n(n-3)$ ga teng (9.18-rasm). Hamma tomonlari, barcha ichki burchaklari teng bo'lgan ko'pburchak muntazam ko'pburchak deyiladi.

Muntazam ko'pburchak ichki burchagi $\frac{180^\circ(n-2)}{n}$ ga teng, n - ko'pburchak tomonlari soni.

Ko'pburchaklar o'xshashligi va tengligi quyidagicha ta'riflanadi: agar bir ko'pburchakning tomonlari va burchaklari mos ravishda ikkinchi ko'pburchakning tomonlari va burchaklariga teng bo'lsa bu ko'pburchaklar teng deyiladi. Agar bir ko'pburchakning tomonlari ikkinchi bir ko'pburchakning tomonlariga mos ravishda proporsional bo'lsa va proporsional tomonlar orasidagi burchaklar teng bo'lsa bunday ko'pburchaklar o'xshashdirlar (9.19a- 9.19b-rasmlar).



9.19a-rasm



19b-rasm

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Uchburchaklarni turlariga ta'rif berib, xossalarini ayting.
2. Uchburchaklar tengligi va o'xshashligi alomatlarini tushuntiring.
3. To'rtburchaklarga ta'rif bering, xossalarini ayting.
4. To'rtburchaklarning turlari va o'xshash ko'pburchaklar to'g'risida ma'lumot bering.

9.4. KengaytirilganYevklid geometriyasi. Uchburchak geometriyasi. Pifagor teoremasi

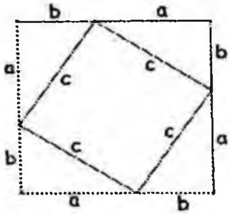
Yevklid geometriyasining natijalari (teoremalari) matematikadan kengaytirilgan o'qitish kurslarida kamdan kam uchraganligi tufayli, oxirgi 50 yil davomida bu bo'limni oliy ta'lim matematikasi o'quv dasturiga kiritilishi shubha qilindi. Biroq, oliy ta'lim talabalarining mantiqiy tafakkurini, deduktiv fikrlash uslubini rivojlantirish muhim deb o'ylasak, Yevklid geometriyasi bu oliy maqsadga erishish samarali vosita hisoblanadi.

Deduktiv fikrlashga katta ahamiyat berish eng kamida qadimgi yunonlardan boshlangan, milotdan oldin 4 asrda Aristotelning bunday fikrlash asoslarini yaratishdan. Tahminan shu paytda yunon geometriyasi rivojlanib, Yevklidning 13 ta kitobi bilan o'z yuqori cho'qqisiga yetdi. Ushbu paytdan boshlab geometriya (va arifmetika) har qanday ta'limning majburiy qismi bo'lib, deduksiya paradigmasi sifatida hizmat qildi.

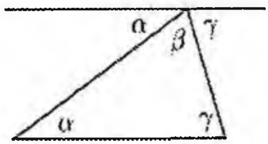
Uchburchak geometriyasi. Asosiy shartli belgilar. Bu yerda biz bir qancha shartli belgilarni keltiramiz va ayrim oddiy natijalar haqida eslatib o'tamiz. Ular quyidagicha:

A, B, C	Nuqta belgilari
[AB]	A va B nuqtalarni tutashtiruvchi kesma
AB	[AB] kesmaning uzunligi
(AB)	A va B nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq
$\hat{A}$	A nuqtadagi burchak
$\widehat{CAB}$	[CA] va [AB] kesmalar orasidagi burchak

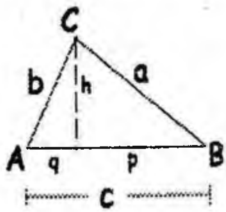
ΔABC	Uchlari A, B va C nuqtalarda bo'lgan uchburchak
ΔABC ≅ ΔA'B'C'	ΔABC va ΔA'B'C' uchburchaklar kongruent (teng)
ΔABC ~ ΔA'B'C'	ΔABCva ΔA'B'C' uchburchaklar o'xshash



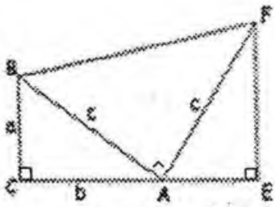
9.20-rasm



9.21-rasm



9.22-rasm


9.23-rasm

Pifagor teoremasi. Hammaga ma'lum bo'lgan **Pifagor teoremasi** – eng muhim fundamental teoremalardan biridir. Katetlari a va b, gipotenuzasi esa c ga teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchakda $a^2 + b^2 = c^2$ bo'ladi.

9-20-rasmda ushbu fundamental teoremaning ko'p mashhur isbotlaridan biri keltirilgan. Haqiqatdan ham, "katta" kvadratning yuzi $(a + b)^2$ kichik kvadratning yuzi va 4 ta teng bo'lgan to'g'ri burchakli uchburchaklar yuzlari yig'indisi ko'rinishda yoyilishi mumkin. Ya'ni, $(a + b)^2 = c^2 + 2ab$, bu esa o'z navbatida $a^2 + b^2 = c^2$ ga teng.

Bu teoremaning eng mashhur bo'lgan natijasini keltiramiz: uchburchakning ichki burchaklar yig'indisi 180° ga teng. Isbotini 9-21-rasmdan osonlik bilan chiqarish mumkin.

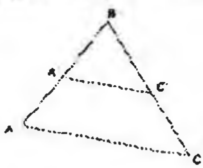
Topshiriqlar

1. Yevklidning proporsional kesmalar haqidagi teoremasini isbotlang, ya'ni berilgan to'g'ri burchakli uchburchak ΔABC 9-22-rasmda ko'rsatilganday bo'lsa, $h^2 = pq$, $a^2 = pc, b^2 = qc$ ni isbotlang.

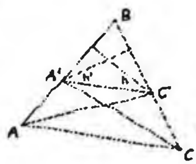
2. ABCD to'rtburchakning ichki burchaklar yig'indisi 360° ga tengligini isbotlang.

3. 9-23-rasmda Pifagor teoremasining AQSh Prezidenti A.D.GArfild tomonidan berilgan isboti keltirilgan. Mustaqil o'rganing

9.5. O'xshashlik. Cheva va Menelay teoremasi



9.24-rasm



9.25-rasm

9.26-rasm

Natijalarning ko'pi – agar aksariyati bo'lmasa – o'xshash uchburchaklarning tomonlari proporsionalligiga tayanishini ko'rishimiz mumkin. Ushbu tasdiq quyidagicha.

O'xshashlik. Berilgan uchburchaklarning o'xshashligidan $\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ quyidagi tenglikga ega bo'lamiz:

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}.$$

Va aksincha, agar

$$\frac{A'B}{AB} = \frac{BC'}{BC} = \frac{A'C'}{AC}$$

bo'lsa, berilgan uchburchaklar o'xshash bo'ladi:

$\Delta ABC \sim \Delta A'BC'$ (9-24-rasm).

Isbot. Birinchidan $\Delta AA'C'$ va $\Delta CA'C'$ uchburchaklar bir xil yuzaga ega, bundan esa $\Delta ABC'$ va $\Delta CA'B$ uchburchaklar ham bir xil yuzaga ega (chunki oldingi uchburchaklar yuziga umumiy bo'lgan $\Delta AB'C$ uchburchak yuzi qo'shildi) (9-25-rasm)..

$$\frac{A'B}{AB}=\frac{\frac{1}{2}h\cdot A'B}{\frac{1}{2}h\cdot AB}=\frac{S\,\Delta A'BC'}{S\,\Delta ABC'}=\frac{S\,\Delta A'BC'}{S\,\Delta CA'B}=\frac{\frac{1}{2}h'\cdot BC'}{\frac{1}{2}h'\cdot BC}=\frac{BC'}{BC}$$

Shunga o'xshash $\frac{A'B}{AB}=\frac{A'C'}{AC}$tenglikni isbotlash mumkin.

Va aksincha,$\frac{A'B}{AB}=\frac{BC'}{BC}$

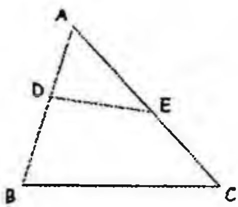
tenglik o'rinli deb faraz qilaylik.

9.26-rasmda C'' nuqtasi shunday joylashgan bo'lsinki, $[A'C'']$ kesma $[AC]$ kesmaga parallel bo'lsin. Unda ΔABC va $\Delta A'BC''$ uchburchaklar o'xshash bo'lib,

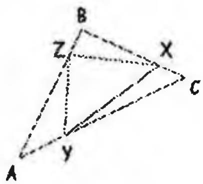
$\frac{BC''}{BC}=\frac{A'B}{AB}=\frac{BC''}{BC}$ bo'ladi,

ya'ni $BC''=BC'$. Bundan $C'=C''$ tenglik aniq ko'rinib turibdi va $[A'C']$ kesma $[AC]$ kesmaga parallelligi kelib chiqadi. Bundan esa ΔABC *va* ΔA'BC' uchburchaklarning o'xshashligi kelib chiqadi.

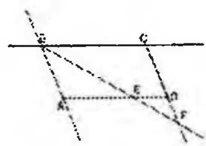
Topshiriqlar



9.27-rasm



9.28-rasm



9.29-rasm

1. Berilgan ΔABC va $\Delta A'B'C'$ uchburchaklarning $\widehat{ABC}=\widehat{A'B'C'}$ va $\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}$ bo'lsa, ΔABC ~ ΔA'BC' uchburchaklarning o'xshashligini isbotlang.

2. 9.27-rasmdagi figurada

$$AD=rAB,\qquad AE=sAC.$$

$\frac{S\,\Delta ADE}{S\,\Delta ABC}=rs$ tenglikni isbotlang.

3. Berilgan ΔABC uchburchakda Y va Z nuqtalari mos ravishda [AC] va [AB] kesmalarining o'rtalari bo'lsin. (YZ) to'g'ri chiziq (BC) to'g'ri chiziqqa parallelligini ko'rsating. (Bu oddiy natija ba'zan uchburchakning o'rta chizig'i haqidagi teorema deyiladi).

4. ΔABC uchburchakda (9.28-rasm).

$\frac{AY}{YC} = \frac{CX}{XB} = \frac{BZ}{ZA} = \frac{1}{x}$ bo'lsin. bu yerda x musbat haqiqiy son.

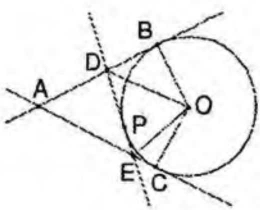
ΔABC uchburchakning yuzi 1 ga teng deb olinsa, ΔXYZ uchburchakning yuzini x o'zgaruvchili funksiya sifatida hisoblang.

5. Ixtiyoriy $ABCD$ to'rtburchak tomonlarining o'rtalari mos ravishda tutashtirilib $EFGH$ to'rtburchak hosil qilingan. $EFGH$ to'rtburchak parallelogrammligini isbotlang.

6. 9.29-rasmdagi figurada $ABCD$ parallelogramm va E nuqta [AD] kesmaning nuqtasi bo'lsin. F nuqta (BE) va (CD) to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasi.

$AB \times FB = CF \times BE$ tenglikni isbotlang.

6. 9.30-rasmdagi figurada aylanaga B va C nuqtalarida o'tkazilgan urinmalar A nuqtada kesishadi. Aylananing kichik yoyi $\overset{\frown}{BC}$ da joylashgan P nuqtadan o'tuvchi urinma (AB) va (AC) to'g'ri chiziqlarni mos ravishda D va E nuqtalarda kesib o'tadi. O nuqta berilgan aylananing markazi bo'lsa, $\widehat{DOE} = \frac{1}{2}\widehat{BOC}$ tenglikni isbotlang.



9.30-rasm

Quyidagi kesma miqdorini "yo'naltirilgan" miqdor sifatida ko'rish qulaydir, ya'ni AB kesma miqdorini uzunligi absolyut qiymati oddiy [AB] kesma uzunligiga teng bo'lgan va AB kesmaning musbat va manfiy qiymqtlariga ega bo‘lgan "yo‘naltirilgan" miqdor hisoblanadi. Bu miqdorlar uchun bitta talab bajarilishi kerak: agar A, B va C nuqtalar kollinear bo‘lsa, unda quyidagi tenglik bajariladi

$$AB \times BC = \begin{cases} > 0, & agar\ \overrightarrow{AB}\ va\ \overrightarrow{BC}\ bir\ xil\ yo'nalishda\ bo'lsa \\ < 0, & agar\ \overrightarrow{AB}\ va\ \overrightarrow{BC}\ qarama-qarshi\ yo'nalishda\ bo'lsa. \end{cases}$$

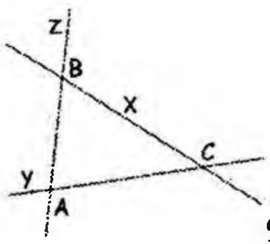
Bundan "yo‘naltirilgan" miqdor uchun quyidagi tenglik bajariladi:

$$\frac{AB}{BA} = -1$$

Davom ettirishdan oldin, kitobxon “balandlik tushirish” ko‘p hollarda yordamchi bosqich sifatida foydalanishiga e’tibor berishi kerak.

Ushbu faslning ikkita teoremasi quyidagi holat bilan bo‘g‘liq:

ABC uchburchak hamda X, Y, Z nuqtalari mos ravishda (BC), (AC) va (AB) to‘g‘ri chiziqlarda berilgan.



9.31-rasm

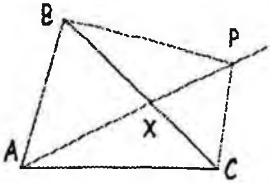
Cheva teoremasi (AX), (BY) va (CZ) to‘g‘ri chiziqlarning bir nuqtada kesishishi bilan bog‘liq. Menelay teoremasi X, Y va Z nuqtalarining kollinearligi bilan bog‘liq. Shuning uchun ushbu ikkita teorema o‘zaro bog‘liq holda ko‘rilishi mumkin.

Har bir holdagi ko‘rinishlar quyidagi nisbatlar ko‘paytmasidan kelib chiqadi:

$$\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA}$$

E'tibor bering, yuqoridagi har bir nisbatning nomanfiyligi aynan X, Y va Z nuqtalari mos ravishda [BC], [AC] va [AB] kesmalarda yotganda bo‘ladi.

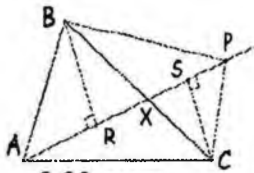
Cheva teoremasining isbotida quyidagi lemma ahamiyatlidir.



9.32-rasm

Lemma. Berilgan ABC uchburchakda X nuqta A uchidan chiqqan to‘g‘ri chiziqning (BC) to‘g‘ri chiziq bilan kesishgan nuqtasi bo‘lsin. P nuqtasi esa (AX) to‘g‘ri chiziqdagi biror nuqta bo‘lsin. Shunda $\frac{S\,\Delta APB}{S\,\Delta APC} = \frac{BX}{CX}$.

Isbot. 9.33-rasmda BR va CS balandliklar tushirilgan.



9.33-rasm

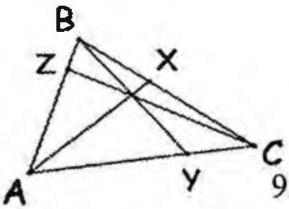
Bundan ko‘rinadiki $\frac{S\,\Delta APB}{S\,\Delta APC} = \frac{\frac{1}{2}AP\cdot BR}{\frac{1}{2}AP\cdot CS} = \frac{BR}{CS} = \frac{BX}{CX}$

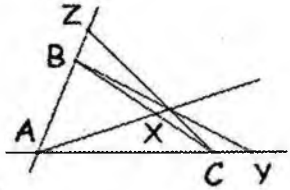
Oxirgi tenglik Δ BRX $\sim\Delta$ CSX uchburchaklarning o‘xshashligidan kelib chiqadi.

Shuni hisobga olish kerakki, yuqoridagi isbot (AP) va (BC) to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi joylashuviga va P nuqtasining (BC) chiziqqa nisbatan joylashuviga bog‘liq emas (P nuqta ikkala tomonda ham joylashish mumkin).

Cheva teoremasi. Berilgan ABC uchburchakda A, B va C uchlardan chiqarilgan to‘g‘ri chiziqlarning (odatda Chevianalar deyiladi) mos ravishda (BC), (AC) va (AB) to‘g‘ri chiziqlar bilan kesishgan nuqtalari X, Y va Z bo‘lsin. (AX), (BY) va (CZ) to‘g‘ri chiziqlarning bir nuqtada kesishishi uchun quyidagi tenglik bajarilishi yetarli va zarur:

$$\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = +1$$





9.34-rasm

Isbot. Faraz qilamiz, teoremadagi to‘g‘ri chiziqlar bir P nuqtada kesishishadi. Oldingi lemmadan uch marta foydalanib, quyidagiga ega bo‘lamiz:

$$1 = \frac{S\,\Delta APC}{S\,\Delta BPC} \cdot \frac{S\,\Delta APB}{S\,\Delta APC} \cdot \frac{S\,\Delta BPC}{S\,\Delta BPA} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA}$$

Teskarisini isbotlash uchun (AX), (BY) va (CZ) to‘g‘ri chiziqlar bir nuqtada kesishishidan quyidagi tenglik kelib chiqadi:

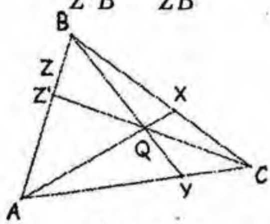
$$\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = +1$$

$Q = (AX) \cap (BY)$; $Z' = (CQ) \cap (AB)$ bo‘lsin. Shunda $(AX), (BY)$ va (CZ') to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishadi va

$$\frac{AZ'}{Z'B} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$

dan quyidagi tenglik kelib chiqadi

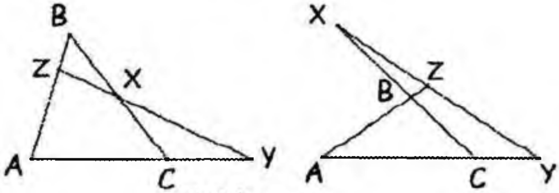
$$\frac{AZ'}{Z'B} = \frac{AZ}{ZB}$$



9.35-rasm

Bundan $Z = Z'$ tengligi kelib chiqib, berilgan (AX), (BY) va (CZ) to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishishini isbotlaydi.

Menelay teoremasi Cheva teoremasining ikki tomonlama varianti bo‘lib, **to‘g‘ri chiziqlar** (Chevianalar) haqida emas, balki uchburchak tomonlari (yoki ularning davomlari) da joylashgan **nuqtalar** haqida. Ushbu uchta nuqta bir to‘g‘ri chiziqda yotsa, hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziq **transversal** deyiladi. Δ ABC uchburchak bilan bog‘liq ikkita holat borligini ko‘rish mumkin:



9.36-rasm

Cheva teoremasiga o‘xshab, holatlar soni quyidagi berilgan nisbatlardan kelib chiqadi:

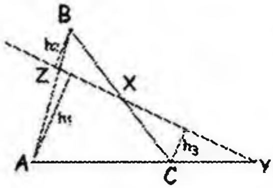
$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA};$$

Biroq, bu holda koeffitsiyentlardan yoki bittasi yoki uchtasi manfiy bo‘lishi kerak, bu esa yuqorida ko‘rsatilgan figuralarga mos keladi.

Menelay teoremasi. ΔABC uchburchakda berilgan X, Y, Z nuqtalar mos ravishda (BC), (AC) va(AB) chiziqlarda joylashgan bo‘lsin. X, Y, Z nuqtalar kollinearligi uchun quyidagi tenlikning bajarilishi zarur va yetarli

$$\frac{AZ}{ZB}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YA} = -1$$

Isbot. Yuqorida aytilganiday, ikki holatni ko‘rib chiqish mumkin. Birinchi holatda X, Y, Z nuqtalari uchburchak tomonlarida joylashgan, ikkinchi holatda X, Y, Z nuqtalaridan birortasi ham uchburchak tomonlarida joylashmagan. Ikkala holat uchun ham isbotlar formal o‘xshash bo‘lsada, yaqqol ko‘rinishi uchun ularni alohida ko‘rib chiqamiz.



9.37-rasm

1-holat. Dastlab, X, Y va Z nuqtalarning kollinearligi hamda h_1, h_2, h_3 balandliklarni 9.37-rasmdagiday tushirilganligini tasavvur qilamiz. O'xshash uchburchaklardan quyidagilarni hosil qilamiz

$$\frac{AZ}{ZB} = +\frac{h_1}{h_2};\ \frac{BX}{XC} = +\frac{h_2}{h_3};\ \frac{CY}{YA} = -\frac{h_3}{h_1},$$

bu holda quyidagi tenglik kelib chiqadi

$$\frac{AZ}{ZB} \times \frac{BX}{XC} \times \frac{CY}{YA} = -1$$

Teskarisini isbotlash uchun, X nuqta [BC] kesmada, Z nuqta [AB] kesmada va Y nuqta (AC) to'g'ri chiziqda yotishini hamda

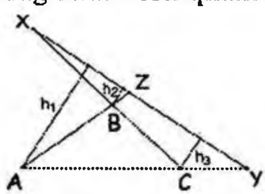
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

tenglik bajarilishini tasavvur qilamiz. X' nuqta (ZY) va $[BC]$ larning kesishish nuqtasi bo'lsa, yuqorida aytilganlardan ushbu tenglikni keltirib chiqarish mumkin

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX'}{X'C} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

Bundan esa $\frac{BX}{XC} = \frac{BX'}{X'C}$ kelib chiqadi va $X = X'$ nuqtalarning tengligi hamda $X,\ Y, Z$ nuqtalarning kollinearligi kelib chiqadi.

2-holat. A, B va C uchlaridan balandliklarni tushirib, o'xshash uchburchaklardan quyidagilarni hosil qilamiz



9.38-rasm

$$\frac{AZ}{ZB} = -\frac{h_1}{h_2}; \frac{BX}{XC} = -\frac{h_2}{h_3}; \frac{AY}{YC} = -\frac{h_1}{h_3}$$

bundan esa quyidagi tenglik kelib chiqadi

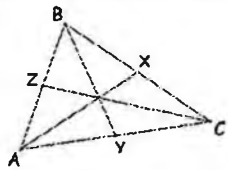
$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = -1$$

Teskari mulohaza yuqoridagiday isbotlanadi.

Cheva va Menelay teoremalarining natijalari. Odatda, uchburchakning "markazi" degan bir nechta tushuncha mavjud. Ularni ko'rib chiqamiz va Cheva teoremasiga aloqasini ko'rsatib o'tamiz.

Sentroid. ΔABC uchburchakda (AX), (BY) va (CZ) chiziqlar shunday chiziladiki, (AX) chizig'i $[BC]$ kesmasini, (BY) chizig'i $[CA]$ kesmasini, (CZ) chizig'i $[AB]$ kesmasini teng ikkiga bo'ladi. (AX), (BY) va (CZ) to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtada kesishishi Cheva teoremasidan kelib chiqadi, chunki $\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1 \times 1 \times 1 = 1$

To'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi uchburchakning **sentroidi** deyiladi. Chevianalar esa bu holda **medianalar** deyiladi.



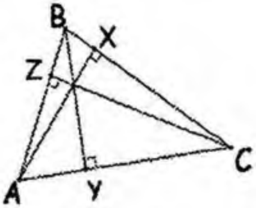
9.39-rasm

Agar ΔACX uchburchagiga (9.39-rasm) Menelay teoremasini qo'llasak, B, Y va sentroid P nuqtalaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi:

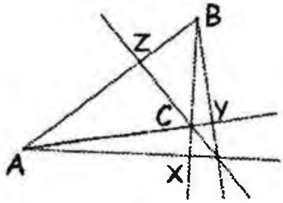
$$1 = \frac{AY}{YC} \cdot \frac{CB}{BX} \cdot \frac{XP}{PA} \Rightarrow 1 \cdot 2 \cdot \frac{XP}{PA} \Rightarrow \frac{XP}{PA} = \frac{1}{2}$$

Shunday qilib, uchburchakning uchidan sentroidgacha bo'lgan masofa mos mediana uzunligining 2 /3 ga tengligi ko'rinib turibdi.

Ortomarkaz. ΔABC uchburchakda $(AX),(BY)$ va (CZ) chiziqlar shunday chiziladiki, $(AX)\perp(BC),(BY)\perp(CA)$ va $(CZ)\perp(AB)$ bo'lsin.



9.40-rasm



9.41-rasm

9.40-rasmdan ko'rinib turibdiki, yoki $\frac{AZ}{ZB},\frac{BX}{XC},\frac{CY}{YA}>0$, yoki bu nisbatlardan aniq bittasi musbatdir.

Bundan $\Delta ABY\sim\Delta ACZ\Rightarrow\frac{AZ}{AY}=\frac{CZ}{BY}$

Shunga o'xshash

$$\Delta ABX\sim\Delta CBZ\Rightarrow\frac{BX}{BZ}=\frac{AX}{CZ}\ va\ \Delta CBY\sim\Delta CAX\Rightarrow\frac{CY}{CX}=\frac{BY}{AX}$$

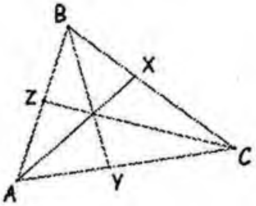
Bundan kelib chiqadiki,

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{BX}{XC}\cdot\frac{CY}{YA}=\frac{AZ}{AY}\cdot\frac{BX}{BZ}\cdot\frac{CY}{CX}=\frac{CZ}{BY}\cdot\frac{AX}{CZ}\cdot\frac{BY}{AX}=1$$

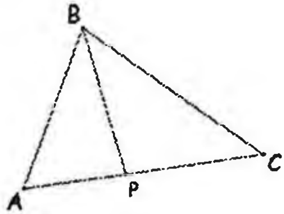
Cheva teoremasiga asosan $(AX),(BY)\ va\ (CZ)$ chiziqlar bitta nuqtada kesishadi va kesishish nuqtasi ΔABC uchburchakning ortomarkazi deyiladi. ($[AX],[BY]\ va\ [CZ]$ kesmalari esa ΔABC uchburchakning balandliklari deyiladi.)

Bissektrisalar kesishish nuqtasi. ΔABC uchburchakda $(AX),(BY)\ va\ (CZ)$ chiziqlar shunday chiziladiki, (AX) to'g'ri chiziq $\widehat{BAC}$ burchakni, (BY) to'g'ri chiziq $\widehat{ABC}$ burchakni va (CZ) to'g'ri chiziq $\widehat{BCA}$ burchakni teng ikkiga bo'ladi. Quyida biz $(AX),(BY)\ va\ (CZ)$ to'g'ri chiziqlarning bitta nuqtada kesishishini ko'rsatamiz; kesishish nuqtasi ΔABC uchburchakning bissektrisalari kesishish nuqtasi deyiladi. Quyida ushbu faktning Cheva teoremasiga asoslangan isbotini keltiramiz.

ΔABC uchburchak bissektrissalari bitta nuqtada kesishishining **isboti.**



9.42-rasm



9.43-rasm

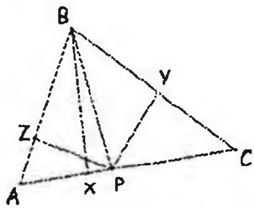
Bundan oldin burchak bissektrissasi haqidagi teoremani isbot qilish kerak.

Burchak bissektrissasi haqidagi **teorema.**

ΔABC uchburchak [BP] kesmasi bilan berilgan bo'lsin (o'ng tomonda ko'rsatilganiday). Shunda,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AP}{PC}\Leftrightarrow A\hat{B}P=P\hat{B}C$$

Isbot $(\Leftarrow)$. P nuqtadan (AB) va (BC) to'g'ri chiziqlarga balandliklarni tushiramiz; balandliklarning asoslarini mos ravishda Z va Y nuqtalari bilan belgilaymiz. B nuqtadan (AC) to'g'ri chiziqqa balandlikni tushirib, uning asosini X nuqtasi bilan belgilaymiz (9.44-rasm).



9.44-rasm

Ko'rinib turibdiki, $PZ = PY$, chunki $\Delta PZB \cong \Delta PYB$. Bundan

$$\Delta ABX \sim \Delta APZ \Rightarrow \frac{AB}{AP}=\frac{BX}{PZ}=\frac{BX}{PY}$$

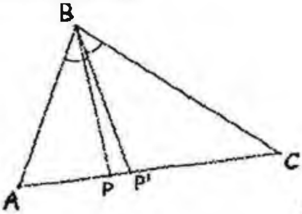
Bundan esa

$$\Delta CBX \sim \Delta CPY \Rightarrow \frac{CB}{CP}=\frac{BX}{PY}$$

Demak,

$$\frac{AB}{BC}=\frac{AP\cdot BX}{PY}\cdot\frac{PY}{CP\cdot BX}=\frac{AP}{CP}$$

($\Longrightarrow$). $\frac{AB}{BC}=\frac{AP}{PC}$ berilgan bo'lib, P' nuqta $\widehat{ABC}$ burchakning bissektrissasi (BP') bilan aniqlangan bo'lsin. Yuqorida isbotlangandan $\frac{AB}{BC}=\frac{AP'}{P'C}$ kelib chiqadi. Bu esa, o'z navbatida, quyidagi tenglikni keltiradi:



9.45-rasm

$$\frac{AP}{PC}=\frac{AP'}{P'C}\Rightarrow P=P'$$

Uchburchak bissektrissalari bitta nuqtada kesishishi haqidagi **isbot**ning yakuniy qismi. Birinchidan, yaqqol ko'rinib turibdiki, barcha mos koeffitsientlar musbat. Burchak bissektrissasi haqidagi teoremadan, $\frac{AB}{BC}=\frac{AY}{YC}$, $\frac{BC}{CA}=\frac{BZ}{ZA}$, $\frac{AB}{AC}\times\frac{BX}{XC}$ kelib chiqadi.

Demak, $\frac{AZ}{BZ}\times\frac{BX}{XC}\times\frac{CY}{YA}=\frac{CA}{BC}\times\frac{AB}{AC}\times\frac{BC}{AB}=1$

Cheva teoremasi bo'yicha isbotlandi.

Topshiriqlar

1. Burchak bissektrissasi haqidagi teoremadan foydalanib, uchburchakning biror ichki burchagining bissektrisasi o'tkazildi. (AC) to'g'ri chiziqda $[AC]$ kesmadan tashqarisida P nuqta olinsin. Agar $\frac{AB}{BC}=\frac{AP}{PC}$ bo'lsa va faqat shundagina (BP) to'g'ri chiziq B uchidagi tashqi burchagining bissektrisasiligini ko'rsating.

2. ΔABC uchburchak berilgan. X nuqta $\widehat{BAC}$ burchakning bissektrisasi va $[BC]$ kesmaning kesishgan nuqtasi, Y nuqta $\widehat{CBA}$ burchakning bissektrisasi va $[AC]$ kesmaning kesishgan nuqtasi

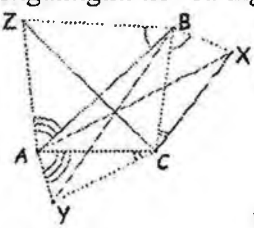
bo‘lsin. Nihoyat, Z nuqta C uchidagi tashqi burchagining bissektrisasi va (AB) to‘g‘ri chiziqning kesishgan nuqtasi bo‘lsin. X, Y va Z nuqtalarining kollinearligini ko‘rsating.[3]

3. Berilgan ΔABC uchburchakda X nuqta (BC) to‘g‘ri chiziqda, Y nuqta (AC) to‘g‘ri chiziqda va Z nuqta (AB) to‘g‘ri chiziqda joylashgan bo‘lsin. Agar $(AX), (BY)$va (CZ) chevianalar bitta P nuqtasida kesishgan bo‘lsa, quyidagi tenglik bajarilishini ko‘rsating: $\frac{PX}{AX} + \frac{PY}{BY} + \frac{PZ}{CZ} = 1$

4. ΔABC uchburchak va bissektrisalari kesishish nuqtasi P nuqta berilgan bo‘lsa, markazi P nuqtadagi ΔABC uchburchakga ichki chizilgan aylananing mavjudligini isbotlang. (Ichki chizilgan aylana ko‘pincha **ichki aylana**, uning r radiusi – **ichki radius** deyiladi.)

5. ΔABC uchburchak tomonlari uzunliklari $a = BC$, $b = AC$ va $c = AB$ bo‘lib, r – uchburchakning ichki radiusi bo‘lsin. ΔABC uchburchakning yuzi $\frac{r(a+b+c)}{2}$ ga tengligini ko‘rsating. (Ko‘rsatma: bissektrisalar kesishish nuqtasi uchburchakni uchta uchburchakka bo‘ladi; har bir uchburchakning yuzini hisoblang.)

6. ΔABC uchburchak berilgan. A uchidagi ichki burchak bissektrisasi, B va C uchlaridagi tashqi burchak bissektrisalari bitta nuqtada kesishganligini ko‘rsating.



9.46-rasm

7. ΔABC uchburchak va uning tekislikdagi shunday X, Y va Z nuqtalari berilganki

[3] Agar C uchidagi tashqi burchagining bissektrisasi va (AB) to’g’ri chiziq parallel bo’lsa, nima bo’ladi?

$$\angle ABZ = \angle CBX,$$
$$\angle BCX = \angle ACY,$$
$$\angle BAZ = \angle CAY$$

$(AX), (BY)\ va\ (CZ)$ to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishganligini ko‘rsating (9.46-rasm).

8. ΔABC uchburchakning yana bir "markazi" tushunchasi mavjud. Xususan, l_1, l_2 va l_3 to‘g‘ri chiziqlar shunday o‘tkazilsinki, [AB], [BC] va [CA] kesmalarning mos ravishda o‘rtalariga perpendikulyar bo‘lsin. Cheva teoremasi bu holatga mos kelmasligi ko‘rsatilib, l_1, l_2 va l_3 to‘g‘ri chiziqlar bitta nuqtada kesishganligini isbotlang. Kesishgan nuqta Δ ABC uchburchakning **aylanma markazi** deyiladi. (Ko‘rsatma: ikkita o‘rta perpendikulyar chiziqlar kesishgan nuqtasi uchburchakning barcha uchlaridan bir xil uzoqlashgan). Agar P aylanma markazi bo‘lsa, AP = BP = CP kesmalarning umumiy qiymati ΔABC uchburchakga tashqi chizilgan aylananing radiusi deyiladi. (A, B va C uchlaridan o‘tuvchi aylana AP radiusga ega bo‘lganligi uchun shunday bo‘ladi).

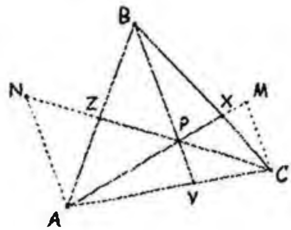
9. ΔABC uchburchakning tomonlari AB = 21, AC = 22 va BC = 20 ga teng bo‘lsin. D va E nuqtalar [AB] va [AC] kesmalarga mos ravishda tegishli bo‘lib, [DE] || [BC] va [DE] Δ ABC uchburchakga ichki chizilgan aylananing markazidan o‘tsin. DE ni hisoblang.

10. Cheva teoremasining yana bir isboti. ΔABC uchburchak va P nuqtada kesishuvchi [AX], [BY] va [CZ] Chevianalar berilgan bo‘lsin. [BY] Chevianaga parallel bo‘lgan [AN] va [CM] kesmalar o‘tkazing. Uchburchaklar o‘xshashligidan foydalanib, quyidagi tengliklarni keltirib chiqaring

$$\frac{AY}{YC} = \frac{AN}{CM}, \frac{CX}{XB} = \frac{CM}{BP}, \frac{BZ}{ZA} = \frac{BP}{AN}$$

Bundan esa quyidagi tenglikni isbotlang

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = 1$$



9.47-rasm

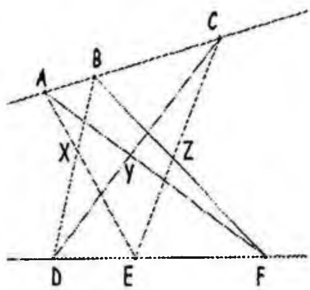
11. ΔABC uchburchak, A' nuqta [BC] ning o‘rtasi, B' nuqta [AC] ning o‘rtasi, C' nuqta [AB] ning o‘rtasi bo‘lsin. Quyidagilarni isbotlang:

(I) $\Delta A'B'C' \sim \Delta ABC$ va mos tomonlarning nisbati $1:2$ ga teng.

(II) $\Delta A'B'C'$ va ΔABC bir xil sentroidga ega.

(III) Δ $A'B'C'$ uchburchak bilan belgilangan Δ ABC uchburchakdagi to‘rtta uchburchak o‘zaro teng.

(IV) ΔABC uchburchakga tashqi chizilgan aylananing markazi $\Delta A'B'C'$ uchburchakning ortomarkazi bo‘ladi.

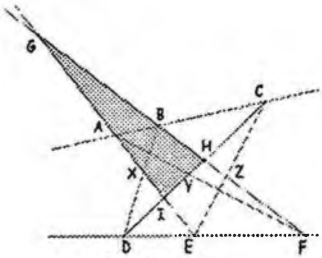


9.48-rasm

Δ $A'B'C'$ uchburchak Δ ABC uchburchakning **medial uchburchagi** deyiladi.

12. 9.48-rasmda ikkita chiziqqa “ichki chizilgan” geksagramma berilgan. Keltirilgan ko‘rsatmalardan foydalanib, X, Y va Z nuqtalarning kollinearligini ko‘rsating. Ushbu natija odatda Papp teoremasi deyiladi.

1-qadam. (AE) va (FB) to‘g‘ri chiziqlarning kesishish nuqtasi G deb belgilaymiz, quyida keltirilgan ΔGHI uchburchakni tahlil qilamiz[4].



9.49-rasm

2-qadam. Menelay teoremasini har biriga qo‘llab, transversallarga qarang:

$$[DXB], \text{chunki } \frac{GX}{XI}\cdot\frac{ID}{DH}\cdot\frac{HB}{BG}=-1$$

$$[AYF], \text{chunki } \frac{GA}{AI}\cdot\frac{IY}{YH}\cdot\frac{HF}{FG}=-1$$

[CZE] shunga o‘xshab

[ABC] shunga o‘xshab

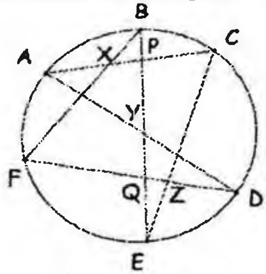
[DEF] shunga o‘xshab

3-qadam. Yuqoridagi beshta nisbatlar ko‘paytirilib o‘xshashlari qisqartirilsa – 1 ga teng bo‘ladi.

13. Bu masalada o‘ng tomondagi rasmda ko‘rsatilganiday geksogramma aylanaga ichki chizilgan bo‘lsin. [AC] va [FD] kesmalarni kesishish R nuqtasigacha davom ettirib, Δ PQR uchburchagiga asoslangan holda Paskal teoremasini isbotlang, ya’ni X, Y, Z nuqtalarni kollinearligini. (Papp teoremasiga

[4] (AE) va (FB) to’g’ri chiziqlar parallel ham bo’lishi mumkin. Haqiqatdan ham, bunday to’g’ri chiziqlarning barcha juftliklari parallel bo’lishi mumkin, bu esa hozirgi holatni mavjud emaslikka olib keladi. Bunga qaramasdan, hozirgi yondashuvda “metrik” g’oyalarga asoslangan Menelay teoremasidan farqli ularoq, Papp teoremasi kollinearlik haqida bo’lib, “proyektiv geometriya”ga tegishli teorema hisoblanadi. Shunday qilib, (AE) va (FB) to’g’ri chiziqlar parallel bo’lganda, ular proyektivlikka asosan “cheksizlikda” uchrashadi, ularga proyektiv shakl almashtirishni qo’llab, X, Y va Z nuqtalarning kollinearligini saqlagan holda “cheksizlikda”gi uchrashish nuqtasini chekli tekislikga o’tkazish mumkin.

o‘xshab davom ettirish kerak: [BXF], [AYD] va [CZE] transversallarni ifodalab, nisbatlarni bir-biriga ko‘paytirish lozim).

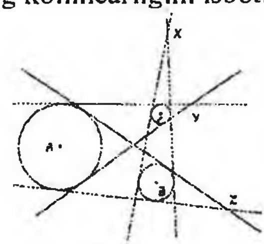


9.50-rasm

14. To‘g‘ri chiziq PQRS to‘rtburchakning [PQ], [QR], [RS] va [SP] tomonlarini mos ravishda U, V, W va X nuqtalarida kesib o‘tadi. Menelay teoremasidan foydalanib, quyidagi tenglikni isbotlang:

$$\frac{PU}{YQ} \times \frac{QV}{VR} \times \frac{RW}{WS} \times \frac{SX}{XP} = 1$$

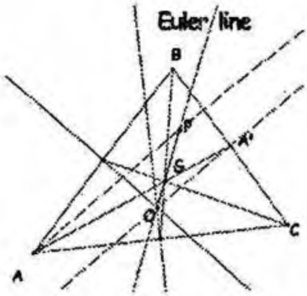
15. 9.51-rasmda markazlari A, B va C nuqtalarida joylashgan turli radiusli aylanalar ko‘rsatilgan. X, Y va Z nuqtalar aylanalarga o‘tkazilgan urinmalarning kesishgan nuqtalari bo‘lsa, X, Y va Z nuqtalarning kollinearligini isbotlang.



9.51-rasm

16. (**Eyler chizig‘i.**) Ushbu topshiriqda Δ ABC uchburchakning sentroidi, tashqi chizilgan aylananing markazi va ortomarkazi kollinearligini isbotlanishi kerak. Hosil bo‘lgan to‘g‘ri chiziq **Eyler chizig‘i** deyiladi. 9.52-rasmda G nuqta ΔABC uchburchakning sentroidi, O nuqta tashqi chizilgan aylananing

markazi bo‘lsin. P nuqtani OG nurda shunday joylashtirish kerakki, GP:OG = 2:1.



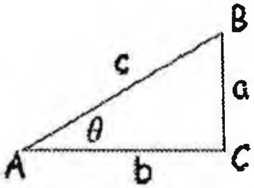
9.52-rasm

(a) A' nuqta (AG) va (BC) larning kesishish nuqtasi bo‘lsa, ΔOGA'~ΔPGA o‘xshashligini ko‘rsating. (Ko‘rsatma GA: GA' = 2: 1.)

(b) (AP) va (OA') to‘g‘ri chiziqlarning parallelligini keltirib chiqaring, bu yerda P nuqta A uchidan tushirilgan balandlikda yotadi.

(c) Analogik tarzda P nuqta B va C uchlaridan tushirilgan balandliklarda yotishini va ΔABC uchburchakning ortomarkazi ekanligini ko‘rsating.

9.6. Algebraik natijalar, sinus va kosinuslar qonunlari, Styuart va Appoloniy teoremasi

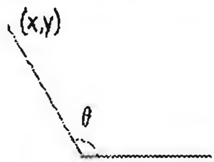


9.53-rasm

Sunus va kosinus qonunlari. ΔABC to‘g‘ri burchakli uchburchakda $\widehat{C}$ to‘g‘ri burchak bo‘lsa, u holda quyidagi trigonometrik munosabatlar ma’lum: θ = $\widehat{A}$ bo‘lsa, $\sin\theta =$

$\frac{a}{c}, \cos\theta = \frac{b}{c}$ ga ega bo'lamiz. Qolgan trigonometrik munosabatlar (*tg θ, ctg θ, secθ, cosecθ*) ma'lum *sinθ* va *cosθ* lardan osonlik bilan ifodalanishi mumkin. Bu yerda hal qiluvchi fakt shundaki, o'xshash uchurchaklar yordamida ushbu munosabatlar faqatgina θ burchagiga bog'liqligi va tomonlarning aniq uzunliklariga bog'liq emasligi kelib chiqadi[5].

Biz tekislikdagi koordinatalardan foydalangan holda trigonometrik funksiyalarga ixtiyoriy burchaklar orqali kengroq tushuncha berishimiz mumkin. Shunday qilib, agar θ *x*- o'qining musbat yo'nalishiga nisbatan ixtiyoriy berilgan burchak bo'lsa, uning o'lchovi -∞ va ∞ graduslari oraliqlarida bo'lishi mumkin hamda agar *(x,y)* nuqta burchakning tomonidagi ixtiyoriy nuqta deb hisoblasak, unda quyidagiga ega bo'lamiz.

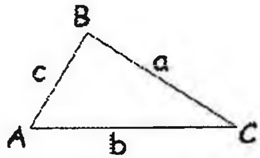


9.54-rasm

$$\sin\theta = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \qquad \cos\theta = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Yuqorida keltirilgan ta'rifga asosan $\sin(180^0 - \theta) = \sin\theta$ va $\cos(180^0 + \theta) = -\cos\theta$ tengliklar o'rinli.

Pifagor tenglamasi Bundan esa kelib chiqadi: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$.

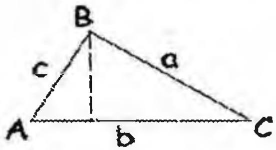


9.55-rasm

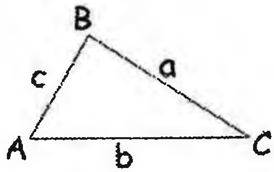
[5] Buni ko'rsatishning eng yaxshi yo'li. trigonometrik funksiyalar o'xshash uchburchaklar yordamida aniq belgilanganligini eslash.

Sinuslar qonuni. Tomonlari a,b,c bo'lgan ΔABC berilgan bo'lsa, u holda biz

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$. ga ega bo'lamiz.



9.56-rasm



9.57-rasm

Isbot. Agar

$$\frac{1}{2}bc\sin A = S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ba\sin C$$

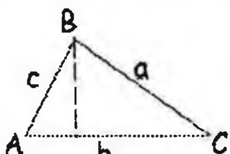
ni hisobga olsak, u holda

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin C}{c}.$$

O'xshash mulohazalar shuni ko'rsatadiki, $\frac{\sin B}{b}$ ham yuqoridagilarga tengdir.

Kosinuslar qonuni. Tomonlari a, b, c bo'lgan ΔABC berilgan bo'lsa, u holda biz

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$ ga ega bo'lamiz.



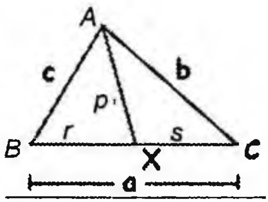
9.58-rasm

Isbot. 9.58-rasmdan va Pifagor teoremasidan foydalangan holda biz quyidagi xulosaga kelamiz:

$c^2=(b-a\cos C)^2+a^2\sin^2 C=b^2-2ab\cos C+a^2\cos^2 C+a^2\sin^2 C=a^2+b^2-2ab\cos C.$

Styuart teoremasi. 9.59-rasmda ko'rsatilgan figurada ΔABC va AX berilgan bo'lsin. Unda

$a(p^2+rs) = b^2r+c^2s.$



9.59-rasm

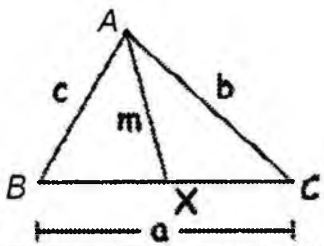
Isbot. $\theta = \widehat{AXB}$ bo‘lsa kosinuslar qonunini qo‘llagan holda ΔAXB uchburchakdan $\cos\theta = \frac{r^2+p^2-c^2}{2pr}$.

ΔAXC ga kosinuslar qonunini qo‘llasak

$\cos\theta = \frac{b^2-s^2-cp^2}{2ps}$ bo‘ladi.

Ikki ifodani bir biriga tenglashtirib $a= r+s$ ni hisobga olsak oxirida ko‘zlangan natijani olishimiz mumkin.

Natija [Appoloniy teoremasi].



9.60-rasm

9.60-rasmdagiday ΔABC uchburchakning a, b, c tomonlari hamda AX medianasi berilgan bo‘lsin.

Shunda $b^2+ c^2= 2m^2+ a^2/2$.

Agar $b= c$ (uchburchakning ikki yoni) bo‘lsa, unda yuqoridagi ma’lumotga ko‘ra

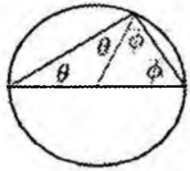
$m^2+ (a/2)^2= b^2$.

Bu esa darhol Styuart teoremasidan kelib chiqadi.

9.7. Doira geometriyasi. Ichki chizilgan burchaklar. Shteyner teoremasi va nuqtaning kuchi. Siklik to‘rtburchak va Ptolomey teoremasi

Lemma. Agar ΔABCuchburchak doiraga ichki chizilgan bo‘lib, $[AB]$-diametr bo‘lsa, unda $A\hat{C}B$ to‘g‘ri burchak bo‘ladi.

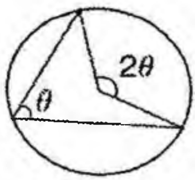
Isbot. 9.61-rasmdagi diagramma oydinlik kiritadi; $2\theta + 2\phi = 180^0$dan $\theta + \emptyset = 90°$ ni hosil qilamiz



9.61-rasm

Ichki chizilgan burchak haqidagi teorema.

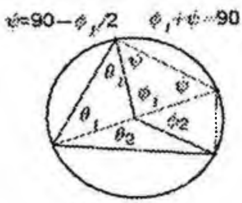
Doiraga ichki chizilgan burchakning o‘lchovi mos yoyning yarmiga teng.



9.62-rasm

Isbot. Ko‘rsatilganidek diametr chizamiz, yuqoridagi lemmadan $\theta_1 + \varphi = 90°$ ni ko‘rishimiz mumkin.

Bu esa $\emptyset = 2\theta_1$ ga olib keladi.

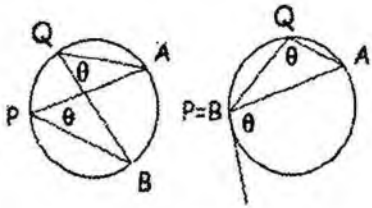


9.63-rasm

Huddi shunday $\phi_2 = 2\theta_2$ ga teng va teorema isbot qilindi.

Davom ettirishdan oldin, quyidagi foydali tushunchani kiritishimiz kerak. 9.64-rasmda korsatilganidek bizga doira, A, B va P berilgan bo'lsin. Biz aytishimiz kerakki, $A\hat{P}B$ burchak $\widehat{AB}$ yoyni ochadi.

Agar B va P nuqtalar ustma-ust tushsa, burchakning shu tomoni urinmaga aylanadi.



9.64-rasm

Bu holatda ham biz berilgan burchak $\widehat{AB}$ yoyni ochadi deb aytishimiz mumkin.

Ichki chizilgan burchak haqidagi teoremasining natijasi sifatida biz quyidagilarni qabul qilamiz.

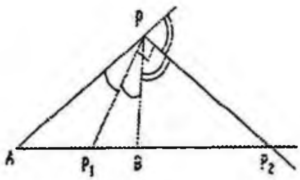
Natija. Bir xil yoyni ochadigan burchaklar tengdir.

Appoloniys Doirasi. Faraz qiling, $c \neq 1$ doimiy va A va B berilgan nuqalar bo'lsin.

$\left\{P \middle| \frac{PA}{PB} = c\right\}$ Nuqtalarning geometrik o'rni aylana bo'ladi.

Isbot. Bu odatda burchak bisektrissasi haqidagi teoremasidan kelib chiqadi. P_1 va P_2 (AB) chiziq'ida yotgan bo'lib, quyidagi tenglik bajarilsin .

$$\frac{AP_1}{P_1B} = c = \frac{AP_2}{BP_2}$$



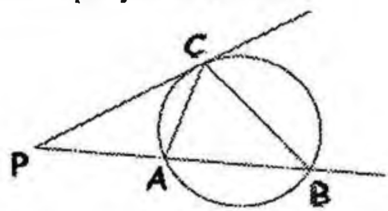
9.65-rasm

Agar biz P nuqtani ixtiyoriy nuqta deb oladigan bo‘lsak bu ham huddi shu jarayonga misol bo‘la oladi, va burchak bisektrissasi haqidagi teoremasidan biz

$A\hat{P}P_1 = P_1\hat{P}B$ va $B\hat{P}P_2 = 180° - A\hat{P}B$ ni xulosa qilishimiz mumkin. Bundan darxol

$\widehat{P_1PP_2}$ burchak to‘g‘ri burchakligi kelib chiqadi, bundan esa P nuqta $[P_1\ P_2]$ diametrli doiraga tegishli ekanligi bilan teorema isbotlandi.

Kesuvchi va urinma teoremasi. Bizga aylana urinmasi *(PC)* va kesuvchisi *(PA)* berilgan. Bu yerda C urinish nuqtasi va $[AB]$ kesuvchi bilan bir chiziqda yotuvchi vatar.



9.66-rasm

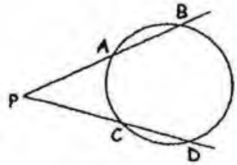
Shunda, $PC^2 = PA \times PB$

Isbot. Bu unchalik qiyin emas; shunchaki P$\hat{C}$A va A$\hat{B}$C yoylar bir xil burchak ochadi. Shuning uchun ΔPCA ~ ΔPBC. Shundan xulosa qilish mumkin.

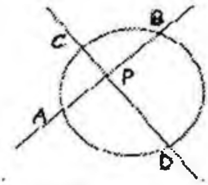
Shuningdek buning algebraik isboti ham berilgan.

Xulosa. (Shteyner teoremasi). Bizga aylana, *(PA)* va *(PC)* kesuvchilari berilgan bo‘lib, *(PA)* aylanani B nuqtada va *(PC)* aylanani D nuqtada ham kesib o‘tadi.

$PA \times PB = PC \times PD$

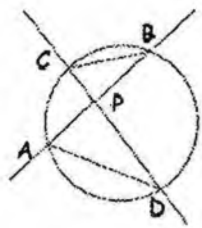


9.67-rasm



9.68-rasm

Isbot. Faqatgina P aylana ichkarisida bo'lgan holatnigina isbotlash zarur. Shunday qilib, $C\hat{B}P$ va P $\hat{D}$ A bir xil yoy ochilganligi uchun, ular tengdir. Shu sababli $\Delta PDA \sim \Delta PBC$ deyish mumkin va bundan yuqoridagi natija kelib chiqadi (9.69-rasm).



9.69-rasm

PAxPB ya'ni P nuqtadan o'tuvchi chiziqning aylana bilan kesishish nuqtalari va P orasidagi masofalar ko'paytmasi chiziqqa bog'liq emas; u bu aylanaga oid nuqtaning kuchi deyiladi. Bu yerda o'lchov belgisini qo'llash odat bo'lib qolgan, shunda qachonki P aylana ichida bo'lsa aylana kuchi manfiy bo'ladi. Shuni ham esda tutish kerakki, P nuqtaning C aylanadagi kuchi faqatgina C aylana markazidan P gacha masofaning funksiyasidir.

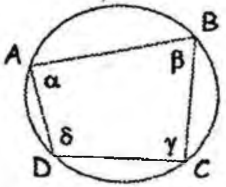
Shteyner teoremasining ikkinchi holati ba'zan "Kesishuvchi Vatarlar Teoremasi" deb ham ataladi.

Siklik to'rtburchak va Ptolomey teoremasi.

Biz ko'rib turganimizdek, har qanday uchburchak aylana ichiga chizilishi mumkin; bu aylana berilgan uchburchakka tashqi chizilgan bo'ladi. Tashqi chiziqdan aylana to'rburchaklar uchun har doim ham mavjud bo'lmaydi. Aylana ichiga chizish mumkin bo'lgan to'rtburchaklar **siklik to'rtburchak** deb ataladi.

Teorema. *ABCD* to‘rtbrchak aylanaga ichki chizilgan bo‘lishi uchun

$A\hat{B}C+C\hat{D}A = D\hat{A}B + B\hat{C}D = 180°$ tenglik bajarilishi zarur va yetarlidir. Boshqacha aytganda, qarama-qarshi burchaklarning yig‘indisi 180^0 ga teng.



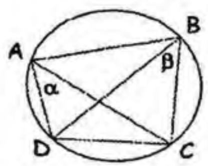
$\alpha+\gamma=180=\beta+\delta$

9.70-rasm

Isbot. Agar to‘rtburchak aylanaga ichki chizilgan bo‘lsa, natija osonlik bilan ichki chizilgan burchak haqidagi teorema orqali kelib chiqadi. Aksincha, holatni to‘g‘ri deb faraz qilaylik. *C* aylana ΔABC ga tashqi chizilgan aylana bo‘lsin. Agar *D* nuqta aylana ichida bo‘lsa, $A\hat{B}C + C\hat{D}A > 180°$. Agar *D* aylana tashqarisida bo‘lsa $A\hat{B}C + C\hat{D}A < 180°$. Bu esa o‘z navbatda lemmani isbotlaydi.

Teorema. *ABCD* to‘rtburchak aylanaga ichki chizilgan bo‘lishi uchun $D\hat{A}C=D\hat{B}C$ bo‘lishi zarur va yetarli.

Isbot. Ko‘rsatilgan burchaklar bir xil yoyni ochadi. Teskarisini isbotlash talabalarga qoldiramiz.



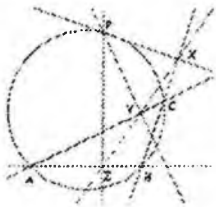
$\alpha=\beta$

9.71-rasm

Simson chiziq‘i (Wallacening chiziq‘i). Berilgan uchburchak ΔABC bilan yana bir uyg‘unlashadigan Simson chiziq‘i bor.

Berilgan ΔABC uchburchakka tashqi chizilgan, aylanada ixtiyoriy P nuqta tanlanadi. P nuqtadan BC, AC va AB chiziqlarga perpendikulyar chiziladi. Bu kesishgan nuqtalar X, Y, Z deb belgilab olinadi.

Teorema. Yuqoridagi X, Y va Z nuqtalar kollinear nuqtalar hisoblanadi. Bu chiziq ΔABC uchburchakning **Simson chiziq'i** deb ataladi. (Wallacening chiziq'i)

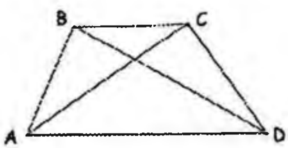


9.72-rasm

Isbot. Yuqoridagi diagrammani hisobga olganda burchak P$\hat{Z}$B va burchak P$\hat{X}$B ikkalasi ham to'g'ri burchaklardir. Bu degani $X\hat{P}Z+Z\hat{B}X=180°$ va $PXBZ$ siklik to'rtburchakdir. Xulosa qilib, natija $P\hat{X}Z = P\hat{B}Z$. Shuningdek, $PXZY$ ham siklik to'rtburchak va shuning uchun burchaklar $P\hat{C}A = P\hat{C}Y = P\hat{X}Y$. Shuning uchun, $P\hat{X}Z = P\hat{B}Z$, $P\hat{X}Z = P\hat{B}A$, $P\hat{X}Z = P\hat{C}A$, $P\hat{X}Z = P\hat{C}Y$, $P\hat{X}Z = PXY$ burchaklar bir xil yoyni ochadi.

Bundan X, Y va Z nuqtalar kollinearligi kelib chiqadi.

Ptolomey teoremasi. Agar $ABCD$ siklik to'rtburchak bo'lsa, trapetsiyaning ikkala dioganallari ko'paytmasi trapetsiyaning qarama-qarshi tomonlar uzunligi ko'paytmalarining yig'indisiga teng.



9.73-rasm

$AC \cdot BD = AB \cdot CD + AD \cdot BC.$

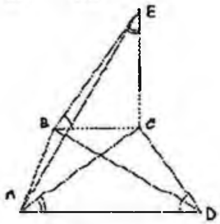
Qachonki to'rtburchak siklik bo'lmaganda,

$AC \cdot BD < AB \cdot CD + AD \cdot BC.$

Isbot. To'rtburchak siklik bo'lish bo'lmasligiga qaramasdan uchburchak ΔCAD va uchburchak ΔCEB teng bo'lishi uchun biz E nuqtani belgilab olamiz. Bundan $\frac{CE}{CA}=\frac{CB}{CD}=\frac{BE}{DA}$, bundan esa $BE=\frac{CB\cdot DA}{CD}$ (1.2) tenglik kelib chiqadi.

Shuningdek, burchaklar $E\hat{C}A = B\hat{C}D$;

Demak $\frac{CD}{CA}=\frac{CB}{CE}$



9.74-rasm

Biz $\Delta ECA \sim \Delta BCD$ deb xulosa qilishimiz mumkin. Shuning uchun,

$$\frac{EA}{BD}=\frac{CA}{CD}$$

Soddalashtirishga, $EA=\frac{CA\cdot DB}{CD}$ (1.3)

Faraz qilamiz, to'rtburchak $ABCD$ siklik bo'lmasa,

$$C\hat{B}E + A\hat{B}C = C\hat{D}A + A\hat{B}C = 180^0$$

Bu degani A, B va E nuqtalar collinear va $EA = AB + BE$, yuqoridagi formuladan foydalangan holda quyidagi formulani hosil qilamiz:

$\frac{CA\cdot DB}{CD}=AB+\frac{CB\cdot DA}{CD}$, bunda Ptolomey teoremasining birinchi qismi isbotlandi.

Agar $ABCD$ siklik emas deb faraz qilsak, u holda quyidagi munosabat hosil bo'ladi:

$$C\hat{B}E + A\hat{B}C = C\hat{D}A + A\hat{B}C \neq 180^0$$

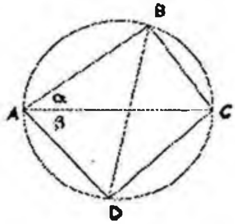
Bundan $EA < AB + BE$ munosabatdan A, B, E nuqtalar uchburchakni hosil qiladi va yuqoridagi (1.2) va(1.3) ni qo'llagan holda biz quyidagiga ega bo'lamiz $\frac{CA\cdot DB}{CD} < AB + \frac{CB\cdot DA}{CD}$ va undan teskarisini isbotlaymiz.

$$CA \cdot DB < AB \cdot CD + CB \cdot DA,$$

Natija. Bizda α va β burchaklari bor edi.

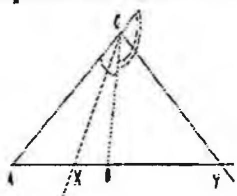
$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha \cos\beta + \sin\beta \cos\alpha$; $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta$.

Isbot. Biz diametri $AC=1$ bo‘lgan aylana ichiga siklik to‘rtburchak chizamiz va talabalarga qolgan isbotni tashlab ketamiz.



9.75-rasm

9.8. Ichki va tashqi nisbatda bo‘lish, Garmonik proporsiya. Aylananing 9 ta nuqtasi. Massalar markazi geometriyasi



9.76-rasm

Kesmani ichki va **tashqi** nisbatda bo‘lish tushunchasi uchburchakka ichki va tashqi chizilgan bissektrissalar orqali yoritilishi mumkin. 9.76-rasmni hisobga olgan holda, X nuqtasi AB kesmani ichki nisbatda bo‘ladi va Y nuqtasi AB kesmani tashqi nisbatda bo‘ladi. Umuman olganda, A, B va X nuqtalari collinear hisoblanadi va $A; X; B = AX/BX$. Agar $A; X; B > 0$ bo‘lsa, bu AB kesmani **ichki nisbatga** bo‘lish hisoblanadi. Agar $A; X; B < 0$ bo‘lsa, bu AB kesmani **tashqi nisbatga** bo‘lish hisoblanadi. Natijada, kolinear nuqtalar A, B, X va Y **garmonik nisbatda** bo‘linadi deyiladi, $A; X; B = -A; Y; B$ bo‘lsa.

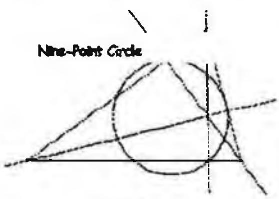
Ya’ni, $\frac{AX}{XB} = -\frac{AY}{YB}$.

Bu uchburchakning bisgektrisalari haqidagi teoremasidan kelib chiqadiki, *(CX)* ichkaridan *C* burchakning bisgektrisasi va *(CY)* tashqi burchakni bisgektrisa bo'lganda, *A, B, X* va *Y* nuqtalar garmonik nisbatda bo'ladi.

Aylananing 9 ta nuqtasi. Geometriyaning eng muhim sirlaridan biri bu "to'qqiz-nuqtali aylana". Ya'ni, to'qqizta oldindan belgilangan nuqtadan yagona aylana o'tadi.

Bu mo'jiza shundan iboratki, birinchi ko'rinishda, bu uch nokollinear nuqtadan o'tadigan aylana yasash oson: uchburchakka tashqi chizilgan aylana bu nuqtalar bilan belgilanadi va uchburchakning markaziga ega bo'ladi (aylananing markazi). Lekin, yuqorida ko'rilganidek to'rtta nuqtadan o'tadigan aylana mavjud bo'lmasligi mumkin.

Hamma holatlarni takrorlashimiz shart emas. Ko'rib turganimizdek, agar to'qqizta nuqtalar aniqlik bilan tahlil qilinsa, bunday aylana mavjud ekanligini ko'rishimiz mumkin.



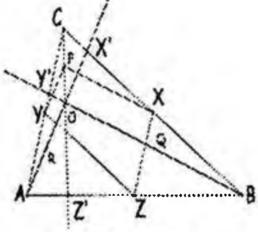
9.77-rasm

Teorema: Berilgan *ABC* uchburchakning quyidagi *9* ta nuqtasi orqali yagona aylana o'tadi:

(I) uchta balandliklarning asoslari;

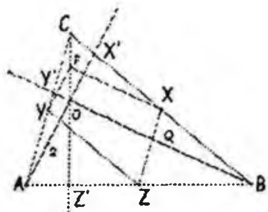
(II) uchta tomonning o'rtalari nuqtasi;

(III) uchburchak uchlarini ortomarkaz markaz bilan tutashtiruvchi kesmalarning o'rtalari.



9.78-rasm

Isbotlash: 9.78-rasmda, *A, B* va *C* nuqtalar uchburchak uchlari va *X, Y* hamda *Z* tomonlarining o'rtalari o'rta chizig'i teoremasiga ko'ra (*ΔACO, (Y P)* chiziq parallel *(AX')*. Xuddi shunday, *(YZ)* chiziq parallel *(BC)* chiziqqa. Bu *∠PYZ* to'g'ri burchak degani. Xuddi shunday, *ΔABC, ΔCBO* lar uchun va *(XZ) (AC) hamda (PX)* va *(BY)* parallel ekanligini nazarda tutiladi. Shuning uchun, *∠PXZ* to'g'ri burchak siklik to'rtburchaklar haqidi teoremaga ko'ra, to'rtburchak *YPXZ* siklik bo'ladi va shu sababli tegishli nuqtalar barchasi umumiy doirada yotadi. Xuddi shu tarzda, to'rtburchak *PXZZ′* siklik bo'ladi va uning uchlari majbur aylanada yotadi.



9.79-rasm

Shunday qilib, *P, X, Y, Z* va *Z'* hammasi umumiy aylanada yotadi. Shunga o'xshash to'rtburchaklar YXQZ va *YXZR* lar siklik bo'ladi va *P, Q, R, X, Y, Z* va *Z'* nuqtalar hammasi umumiy aylanada yotadi. Yana tahlil qiladigan bo'lsak, shu aylanaga *Y'* va *X'* nuqtalar ham tegishli bo'ladi.

9.9. Geometrik masalalar yechish metodlari haqida. Geometrik masalalarning turlari, o'lchash bilan bog'liq amaliy, hisoblashga oid hamda isbotlashga doir masalalar

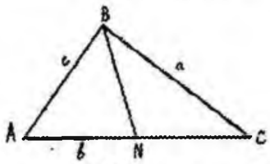
Masalada qo'yilgan shartning xususiyati yoki mohiyatiga qarab geometrik masalalarni hisoblashga oid, isbotlashga oid va yasashga oid geometrik masalalarga ajratish mumkin.

Yasashga oid geometrik masalalarga alohida to'xtalamiz.

Geometrik masalalar ham har qanday masala kabi olingan nazariy bilimlarni mustahkamlash, ularni amaliyotga tadbiq eta bilish, geometrik figuralarning xossa va xususiyatlaridan o'rinli va maqsadli foydalana olishga oid malaka va ko'nikmalarni hosil qilishni maqsad qilib qo'yadi. Malaka va ko'nikmalar amaliy mashqlar bajarish jarayonida shakllantiriladi.

Hisoblashga oid masalalar geometriyaning har bir bo'limida mavjud bo'lib ular asosan egallangan nazariy bilimlar, ularni o'rganish jarayonida chiqarilgan xulosalar, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog'lanishlarni ifodalovchi xossa va xususiyatlardan foydalangan holda burchak, uzunlik, yuza, hajm kabi kattaliklarni topishni maqsad qilib qo'yadi. Masalan, uchburchakning tomonlari va burchagiga, tomon uzunliklari, asosi va balandligiga ko'ra yuzasini hisoblash, asosining yuzi va balandligiga ko'ra hajmini topish kabi masalalarni hisoblashga oid masalalar tarkibiga kiritish mumkin.

Hisoblashga oid quyidagi masalani ko'raylik.



9.89-rasm

Masala. Uchburchakning asosi 26 ga, yon tomonlari 13 va 19 ga teng. Asosiga tushirilgan medianasini toping.

Ber.

AB=13

BC=19

AC=26

T.k: BN=?

Uchburchak medianasini uning tomonlari orqali ifodalash formulasiga asosan

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2 \cdot 19^2 + 2 \cdot 13^2 - 26^2},$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{384} = \frac{8\sqrt{6}}{2} = 4\sqrt{6}.$$

Isbotlashga oid geometrik masalalar tarkibiga geometrik figuralarni xossa va xususiyatlarini, geometrik figuralar elementlari orasidagi bog'lanishlarni nazariy jihatdan asoslashga bag'ishlangan masalalarni kiritish mumkun.

Isbotlashga oid geometrik masalalarni yechishda masalada berilgan va topilishi so'ralganlarni, ya'ni masalaning sharti va xulosasini aniq ajratish, mustahkam nazariy bilimga ega bo'lish, tafakkur amallaridan, tahlil va sintez metodlarini to'g'ri qo'llay bilish lozim bo'ladi.

Umuman matematika kursida isbotlashga oid masalalarni, teoremalarni isbotlash, ayniyatlarni isbotlash va tengsizlikni isbotlashga oid masalalarga ajratish mumkin.

O'rta maktab matematika kursidan ma'lumki deyarli barcha teoremalar isbotlaniladi.

Tushunchalarning asosiy bo'lmagan va ta'riflarga kiritilmagan xossalari odatda isbotlanadi.

O'rta maktab geometriya kursida bunday masalalar tarkibiga quyidagilarni kiritish mumkin bo'ladi:

Sinuslar teoremasini isbotlash: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

Kosinuslar teoremasini isbotlash:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha,\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta,$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Uchburchak yuzini hisoblash formulalarini isbotlash:

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ - Geron formulasi (bu yerda p– yarim perimetr);

$S = \frac{3}{4}\sqrt{m(m-m_a)(m-m_b)(m-m_c)}$ - medianalar orqali;

$S = \frac{a\cdot h_a}{2} = \frac{b\cdot h_b}{2} = \frac{c\cdot h_c}{2}$ - tomonlari va balandliklari orqali.

Uchburchak medianasini hisoblash, formulalarini keltirib chiqarish

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}\ ,$$

$$m_b = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}\ ,$$

$m_c = \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$

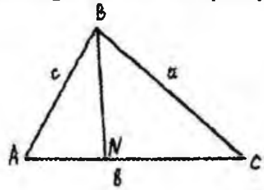
Uchburchak balandligini hisoblash formulalarini keltirib chiqarish.

$$h_a = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{a}$$

$$h_b = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{b}$$

$$h_c = \frac{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{c} \qquad (1)$$

Isbotlashga doir quyidagi masalani qaraymiz.



9.90-rasm

Masala. Uchburchak balandligi uning tomonlari orqali (1) formulalar bilan ifodalanishini isbotlang.

Isbot. Faraz qilaylik bizga ABC uchburchak berilgan bo'lib, uning tomonlari uzunliklari

$AB = c,\ BC = a,\ AC = b$ bo'lsin. B uchdan b tomonga tushirilgan balandligi $BN = h_b$ bo'lsin. Agar $AN = x$ deb belgilasak $NC = b - x$ bo'ladi.

$$\Delta BNC \Rightarrow h_b^2 = a^2 - (b-x)^2 \qquad (2)$$

$$\Delta BNA \Rightarrow h_b^2 = c^2 - x^2 \qquad (3)$$

$$(2), (3) \Rightarrow c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) \Rightarrow$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - (b^2 - 2bx + x^2) \Rightarrow$$

$$c^2 - x^2 = a^2 - b^2 + 2bx - x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2 - b^2 + 2bx - c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$2bx = c^2 - a^2 + b^2 \Rightarrow$$

$$2bc - c^2 + a^2 - b^2 = a^2 - (b^2 - 2bc + c^2) = a^2 - (b-c)^2$$

$$= (a - b + c)(a + b - c)$$

$$2bc + c^2 - a^2 + b^2 = (b+c)^2 - a^2 = (b + c - a)(b + c + a)$$

$$x^2 = \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} \Rightarrow x = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2b} \Rightarrow$$

$$h_b^2 = c^2 - \frac{(c^2 - a^2 + b^2)^2}{4b^2} = \frac{4b^2c^2 - (c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2}$$

$$= \frac{(2bc - c^2 + a^2 - b^2)(2bc + c^2 - a^2 + b^2)}{4b^2}$$

$a - b + c = 2p - 2b = 2(p - b);$ $\quad a + b + c = 2\text{p};$

$b + c - a = 2(p - a);$ $\quad a + c - b = 2(p - b)$

$$h_b^2 = \frac{2p \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c) \cdot 2(p-a),}{4b^2}$$

$$h_b = \frac{1}{2b}\sqrt{2p \cdot 2(p-a) \cdot 2(p-b) \cdot 2(p-c)},$$

$$h_b = \frac{2}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Tekisliklarda yechishga oid masalalarni yechishda geometrik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib, geometrik o‘rinlar, simmetriya, parallel ko‘chirish, o‘xshashlik yoki gomotetiya, inversiya hamda algebraik tushuncha, xossa va xususiyatlarga tayanib ish ko‘ruvchi algebraik metodlardan foydalaniladi.

9.10. Yasashga doir geometrik masalalar haqida tushuncha. Geometrik figuralarni sirkul va chizg‘ich yordamida yasash bosqichlari

Geometriyada har qanday figura nuqtaviy obraz yoki nuqtalar to‘plami sifatida qaraladi. Barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo‘lgan figura tekis, barcha nuqtalari bir tekislikka tegishli bo‘lmagan figuralar fazoviy figuralar deyiladi.

Bir yoki bir nechta yasash qurollari vositasida ma’lum shartlarga javob beruvchi geometrik figura yasashni talab qiluvchi masalalar yasashga oid geometrik masalalar deb yuritiladi.

Geometriyaning figuralar yasash hamda yasashga oid masalalar yechish metodlarini o‘rganuvchi bo‘limi konstruktiv geometriya deb ataladi.

Biz asosan tekislikda bajariladigan yasashga oid geometrik masalalar haqida so‘z yuritamiz. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalar antik Misr, Bobil, Yunon matematikasida alohida o‘rin egallagan. Tekislikda yasashga oid geometrik masalalarni bir qancha yasash asboblari vositasida yasash mumkin. Biz esa faqat chizg'ich va sirkul vositasida yasaladigan masalalarni ko'rib chiqamiz.

Shuning uchun geometriyaning bu qismi konstruktiv geometriya yoki sirkul va chizg'ich geometriyasi deb ham ataladi.

Tekislikda yasashga doir geometrik masalalarni yechish jarayonida yasashga oid quyidagi umumiy aksiomalardan foydalaniladi.

YaA_1. Har bir $F_1, F_2, F_3, \ldots, F_n$ figura yasalgandir.

YaA_2. Agar F_1va F_2figura yasalgan bo'lsa $F_1 \cup F_2$ yasalgandir.

YaA_3. Agar $F_1 \cap F_2$ bo'lib, F_1 va F_2 figuralar yasalgan bo'lsa $F_1 \cap F_2$ figura yasalgandir.

YaA_4. Agar F_1 va F_2 figura yasalgan bo'lib $F_2 \subset F_1$, $F_1 \neq F_2$bo'lsa, u holda $F_1 \backslash F_2$ yasalgandir.

YaA_5. Agar F_1 figura yasalgan bo'lsa unga tegishli nuqta yasalgandir.

YaA_6. Agar F figura yasalgan bo'lsa $(F \neq E)$ F ga tegishli bo'lmagan nuqtani yasash mumkin (E Yevklid fazosi nazarda tutiladi).

YaA_7. Agar A va B $(A \neq B)$ nuqtalar yasalgan bo'lsa [AB) nurni yasash mumkin.

YaA_3 va YaA_7 ga asosan $[AB]$ kesmani yasash mumkin. $[AB) \cap [BA) = [AB]$

YaA_8. Agar O nuqta va $[AB]$ kesma yasalgan bo'lsa markazi O nuqtada va radiusi AB kesmaga teng aylanani yasash mumkin.

$$\{YaA_1, YaA_2, YaA_3, YaA_4, YaA_5, YaA_6, YaA_7, YaA_8\}$$

yasash aksiomalari sirkul va chizg'ich yordamida yasash aksiomalari deb ataladi.

Mazkur yasash aksiomalari bizga sirkul va chizg'ich vositasida quyidagi oddiy yasashlarni bajarish imkoniyatini beradi.

OyA_1. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo'lsa $[AB)$ nurni yasash mumkin.

OyA_2. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo'lsa $[AB]$ kesmani yasash mumkin.

OyA_3. Agar A va B nuqtalar yasalgan bo'lsa (AB) to'g'ri chiziqni yasash mumkin.

OyA_4. Agar O nuqta va aylana radiusiga teng $[AB]=r$ yasalgan bo'lsa $S(O, AB)$ aylanani yasash mumkin.

OyA_5. O'zaro parallel bo'lmagan ikkita to'g'ri chiziqning kesishish nuqtasini yasash mumkin.

OyA_6. Yasalgan $S(O, r)$ aylana va (AB) to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA_7. Yasalgan ikkita $S(O, r)$ va $S(O, r_1)$ aylanalarning kesishish nuqtalarini topish mumkin (agar ular kesishsa).

OyA_8. Yasalgan F figuraga tegishli A nuqtani $A \in F$ yasash mumkin.

OyA_9. Yasalgan F figuraga tegishli bo'lmagan A nuqtani yasash mumkin $A \notin F$ (bizga bu erda F figuraning figura yasalgan tekislikka teng bo'lmasligi talab qilinadi).

Tekislikda birorta F figurani yasash uchun chekli sondagi oddiy yasashlarni chizg'ich va sirkul yordamida bajarish lozim bo'ladi. Agar figurani yasash uchun qo'llaniladigan oddiy yasashlar soni chekli bo'lsa, bunday yasashlarni so'zsiz bajarish mumkin, agar talab qilingan oddiy yasashlar katta sonni tashkil qilsa bu yasashlarni bajarish ko'p vaqtni olishi bilan bir qatorda zerikarli ham bo'ladi.

Shuning uchun talab qilingan figurani yasashni oddiy yasashlarga emas balki, bir qancha oddiy yasashlar yordamida bajariladigan asosiy yasashlar deb nomlanadigan yasashlarga keltirish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Tekislikda yasashga oid masalalarni yechishda quyidagi asosiy yasashlardan foydalaniladi.

AyA_1. Berilgan uch tomoniga ko'ra uchburchak yasash.

AyA_2. Berilgan kesmani teng ikkiga bo'lish.

AyA_3. Berilgan burchakka kongruent bo'lgan burchak yasash.

AyA_4. Berilgan burchakni teng ikkiga bo'lish.

AyA_5. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa perpendikulyar o'tkazish.

AyA_6. Berilgan bir tomoni va unga yopishgan ikki burchagiga ko'ra uchburchak yasash.

AyA_7. Berilgan ikki tomoni va ular orasidagi bir burchakka ko'ra uchburchak yasash.

AyA_8. Berilgan nuqtadan berilgan to'g'ri chiziqqa parallel chiziq o'tkazish.

AyA_9. Berilgan gipotenuzasi va o'tkir burchagiga ko'ra to'g'ri burchakli uchburchak yasash.

AyA_{10}. Berilgan bir kateti va gipotenuzasiga ko'ra to'g'ri burchakli uchburchak yasash.

AyA_{11}. Aylana tashqarisida olingan nuqtadan aylanaga urinma o'tkazish.

Yasashga oid geometrik masalalarni yechish jarayoni qaysi metod bilan amalga oshirilishidan qat'iy nazar, u bir qancha bosqichlarda bajariladi va ular tekislikda yasashga oid masalalarni yechish bosqichlari deb yuritiladi. Bular tahlil, yasash, isbot va tekshirish bosqichlari bo'lib, har bir bosqich masala yechish jarayonida ma'lum bir maqsadni amalga oshirishni nazarda tutadi.

Tahlil bosqichi: Masala yechishning eng muhim, ijodiy bosqichi bo'lib, bunda yasalishi lozim bo'lgan F figura, masala talablariga mumkin qadar to'la javob beradigan darajada taxminan chizib olinadi. Tahlil rasmida masala shartida berilganlar bor-yoqligi aniqlanadi, agar ular rasmda aks etmagan bo'lsa, qo'shimcha chizib olinadi. Natijada asosiy, ya'ni yasalishi lozim bo'lgan figura bilan hamjihatlikda bo'lgan bir qancha yordamchi figuralar hosil bo'ladi. Yordamchi figuralarda masala shartida berilganlar bilan bir qatorda, izlangan ya'ni yasalishi lozim bo'lgan asosiy figuraning nuqtalari ham joylashadi. Shu tariqa berilganlar va izlanganlar orasidagi bog'lanishlarni o'rnatish natijasida asosiy figurani yasash imkoniyatlari axtariladi va aniqlanadi. Yasash mumkin bo'lgan yordamchi figura orqali izlangan figurani yasashga o'tiladi.

Yasash bosqichi: Tahlil bosqichida aniqlanganlarni amaliy jihatdan bajarilishini nazarda tutadi.

Bunda yasalishi mumkin bo'lgan yordamchi figuralar yasash vositalari yordamida yasaladi va ular orqali yasalishi lozim bo'lgan asosiy figuraning nuqtalari va elementlari yasab olinadi.

Isbot bosqichi: Masala yechimining sinash bosqichi bo'lib, tahlil bosqichida taxminan chizib olingan asosiy figura bilan yasash bosqichida yasalgan figuraning masala shartlariga javob berishi isbotlanadi.

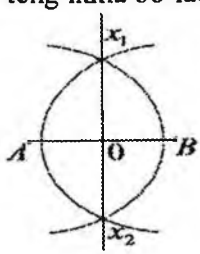
Tekshirish bosqichi: Masala yechishning yakunlash bosqichi hisoblanib, unda masala shartida berilganlarga asosan figurani yasash mumkinmi, agar mumkin bo'lmasa berilganlarni qanday tanlash lozim qanday hollarda yechim mavjud, berilganlarga asoslanib nechta figura yasash mumkin, masala nechta yechimga ega ekanligi aniqlanadi.

Yuqorida qayd qilinganlarga asoslangan holda quyidagi yasashga doir masalalarni ko'rib chiqamiz:

1) Berilgan kesmani teng ikkiga bo'lish masalasi. Faraz qilaylik, bizga $[AB]$kesma berilsin. $[AB]$ kesmani o'rtasini topish kerak. Buning uchun OyA_4 dan foydalanamiz. Kesmani A uchini markaz qilib taxminan kesma o'rtasidan katta bo'lgan kesmani radius qilib $S(A,r)$ aylanani, so'ngra esa $S(B,r)$ aylanani chizamiz. Aylanalar kesishish nuqtalari orqali OyA_4 ga asosan kesma o'tkazamiz. O'tkazilgan kesma bilan berilgan $[AB]$ kesmani kesishish nuqtasi, $[AB]$ kesmani o'rtasi bo'ladi.

1. $[AB]$ yasaladi.
2. $S(A,r), r > \frac{[AB]}{2}$.
3. $S_1(B,r), r > \frac{[AB]}{2}$.
4. $S \cap S_1 = \{X_1, X_2\}$.
5. $[X_1, X_2]$.
6. $[X_1, X_2] \cap [AB] = \{O\}$.
7. $AO = OB$.

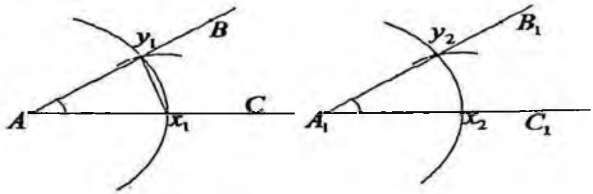
O nuqta AB kesmani teng ikkia bo'ladi.



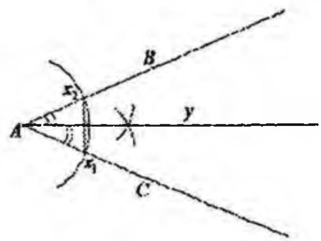
9.91-rasm

2) Berilgan burchakka kongruent bo‘lgan burchak yasash masalasi.

1. $\angle BAC$ berilgan bo‘lsin.
2. $[A_1C_1)$ yasaymiz.
3. $S(A,r)$, ni yasaymiz, bunda $r = AX_1$.
4. $S(A,r) \cap \angle BAC = \{X_1, Y_1\}$.
5. $S_1(A_1,r)$ ni yasaymiz bunda $r = AX_1$.
6. $S_1 \cap [A_1C_1) = \{X_2\}$ bunda $AX_2 = AX_1$.
7. $S_2(X_1,r_1)$ ni yasaymiz bunda $S_1 = [X_1Y_1]$.
8. $S_3(X_2,r_1)$ ni yasaymiz.
9. $S_3 \cap S_1 = \{Y_2\}$.
10. $\angle Y_2A_1X_2 = \angle BAC$.



9.92-rasm



9.93-rasm

3) Berilgan burchakni teng ikkiga bo‘lish masalasi.

1. $\angle BAC$ berilgan bo‘lsin.
2. $\angle BAC$ yasaladi.
3. $S(A,r)$ aylana yasaladi, bunda $r < [AC]$.
4. $S(A;r) \cap \angle BAC = \{X_1X_2\}$.
5. $S_1(X_1,r_1) va\ S_2(X_2,r_1)$aylanalar o‘tkaziladi.

6. $S_1 \cap S_2 = \{y\}$.
7. $[Ay)$.
8. $\angle YAC = \angle YAB$.

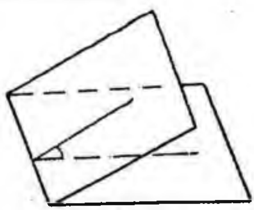
O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Matematik masalalarni tushuntirib, klassifikatsiyalab bering.
2. Sirkul va chizg‘ich aksiomalarini aytib bering.
3. Yuqorida keltirilgan 3 ta masalani yasash bosqichlari ko‘rsatilgan. Ushbu masalalarning 4 ta bosqichini topib keltiring.
4. Uchburchakning uchta tomoniga ko‘ra qanday yasash mumkinligini tushuntiring.

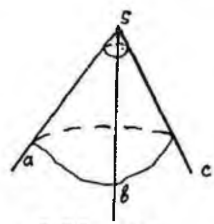
9.11. Ko‘pyoqlar. Ko‘pyoqlar haqida Eyler teoremasi. Prizma, to‘g‘ri burchakli parallelepiped, piramida

Ikkita yarim tekislikdan va ularni chegaralab turgan umumiy to‘g‘ri chiziqdan tashkil topgan figura ikki yoqli burchak deyiladi. Yarim tekisliklar ikki yoqli burchakning yoqlari, ularni chegaralovchi to‘g‘ri chiziq esa ikki yoqli burchakning qirrasi deyiladi. Ikki yoqli burchakning qirrasiga perpendikulyar tekislik o‘tkazilsa, u yoqlarni ikkita yarim to‘g‘ri chiziqlar bo‘yicha kesib o‘tadi. Bu yarim to‘g‘ri chiziqlar tashkil qilgan burchak ikki yoqli burchakning chiziqli burchagi deyiladi.

Uchta yassi burchakdan tashkil topgan figura uch yoqli burchak deyiladi. (ab), (bc) va (ac) lar yassi burchaklar, (abc) esa uch yoqli burchak.



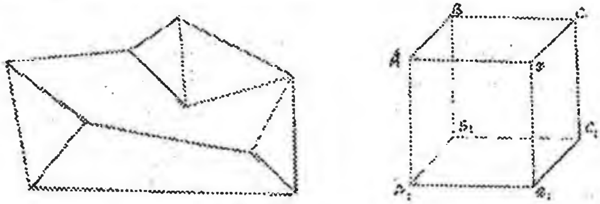
9.94-rasm



9.95-rasm

Yassi burchaklar uch yoqli burchakning yoqlari, ularning tomonlari esa uch yoqli burchakning qirralari, umumiy uchi esa uch yoqli burchakning uchi deyiladi.

Uch yoqli burchak, uchta ikki yoqli burchakdan tashkil topgan. Shunga o'xshash ko'p yoqli burchak ham yassi burchaklardan tuzilganligini qayd qilish mumkin.



9.96-rasm

Ko'pyoqlar. Sirti chekli miqdordagi yassi tekisliklardan iborat jism ko'pyoq deyiladi. Agar ko'pyoqning o'zi uning sirtidagi har bir ko'pburchak tekisligining bir tomonida yotsa, bunday ko'pyoq qavariq ko'pyoq deyiladi. Qavariq ko'pyoqning sirti bilan bunday tekislikning umumiy qismi yoq deyiladi. Qavariq ko'pyoqning yoqlari qavariq ko'pburchaklardan iborat. Ko'pyoq yoqlarining tomonlari uning qirralari, uchlari esa ko'pyoqning uchlari deyiladi.

Bu ta'rifni biz kub misolida tushuntiramiz. Kub qavariq ko'pyoqdir. Uning sirti oltita kvadratdan tashkil topgan: $ABCD$, BB_1C_1C,... Bu kvadratlar kubning yoqlaridir. Bu kvadratlarning AB, BC, BB_1 ... tomonlari kubning qirralari bo'ladi. Kvadratlarning A, B, C, D, A_1, ... uchlari kubning uchlari bo'ladi.

Ko'pyoqlar haqida Eyler teoremasi.

Ko'pyoqlarning uchlari - U, yoqlari - Y_o, qirralari - Q orasidagi bog'lanishni quyidagi Eyler teoremasi ifodalaydi.

Teorema. Qavariq ko'pyoq uchun quyidagi munosabat o'rinli: $U + Y_o - Q = 2$

Bunga qavariq ko'pyoq uchun Eyler xarakteristikasi deyiladi. (Eyler xarakteristikasi 2 ga teng).

Biz bu teorema isbotini xususiy holda muntazam ko'pyoqlarda ko'ramiz.

Muntazam ko'pyoqlarning 5 ta turi mavjud. Bular: tetraedr, kub, oktaedr, ikosaedr, dodekaedr.

Hamma yoqlari teng muntazam ko'pburchaklardan tashkil topgan ko'pyoqlarga muntazam ko'pyoqlar deyiladi.

Muntazan tetraedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo'lib, har bir uchida uchtadan qirra birlashadi. Tetraedr hamma qirralari teng bo'lgan uchburchakli piramidadan iborat. U *4* ta yoq, *6* ta qirra, *4* ta uchga ega (9.97-rasm).

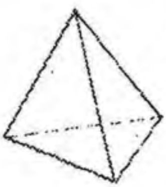
Kubning hamma yoqlari kvadratlardan iborat, har bir uchida uchta qirra birlashadi. Kub qirralari teng bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped. U *6* ta yoq, *12* ta qirra, *8* ta uchga ega (9.98-rasm).

Oktaedrning yoqlari muntazam uchburchaklar bo'lib, tetraedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida to'rtta qirra birlashadi. U *8* ta yoq, *12* ta qirra, 6 ta uchga ega (9.99-rasm).

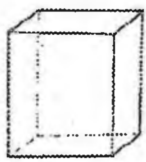
Dodekaedrning yoqlari muntazam beshburchaklardan iborat. Uning har bir uchida uchtadan qirra birlashadi. U *12* ta yoq, *30* ta qirra, *20* ta uchga ega (9.100-rasm).

Ikosaedrning yoqlari muntazam uchburchaklardan iborat bo'lib, tetraedr va oktaedrdan farqi shundaki, uning har bir uchida beshtadan qirra birlashadi. U *20* ta yoq, *30* ta qirra *12* ta uchga ega (9.101-rasm).

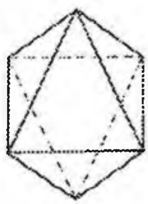
Eyler teoremasi yuqoridagi barcha muntazam ko'pyoqlar uchun o'rinli.



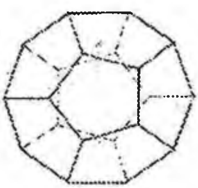
9.97-rasm



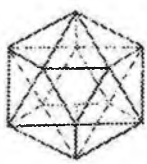
9.98-rasm



9.99-rasm



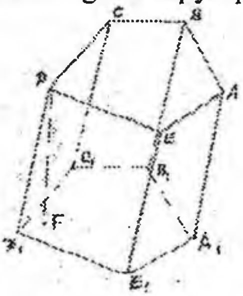
9.100-rasm



9.101-rasm

Bizga ma'lum bo'lgan ko'pyoqlar: prizma, parallelepiped, piramidalardir.

Prizma. Ikki yog'ining mos tomonlari bir-biriga parallel bo'lgan teng ko'pburchakdan iborat bo'lib, boshqa yoqlari esa parallelogrammdan iborat bo'lgan ko'pyoq prizma deyiladi.



9.102-rasm

Prizma deb, ikkita parallel tekislik orasiga joylashgan barcha parallel to'g'ri chiziqlar kesmalaridan tuzilgan ko'pyoqqa aytiladi.

Prizmaning asoslari ikki teng ko'pburchakdan iborat bo'lib, ularning mos tomonlari paralleldir.

Prizmaning yon yoqlari parallelogrammdan iboratdir.

Yon qirralari asos tekisligiga og'ma bo'lgan prizma og'ma prizma deyiladi. Yon qirralari asosga perpendikulyar bo'lgan prizma to'g'ri prizma deb ataladi.

Asoslari muntazam n-burchaklar bo'lgan to'g'ri prizma muntazam deyiladi. Parallel tekisliklardagi uchlarning biridan ikkinchi tekislikka tushirilgan perpendikulyar prizmaning balandligi deyiladi.

$ABCDE$ va $A_1B_1C_1D_1E_1$-asoslar, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1-yon qirralar, DF- balandlik.

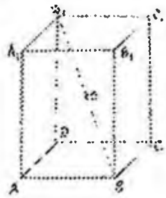
1) Prizma hajmi $V=S_{as}\cdot H$, S_{as} - asos yuzasi, H - prizma balandligi, to'g'ri prizmaning hajmi $V=S_{yon}\,\ell$, ℓ -AA_1 yon qirra uzunligi.

2) Prizma yon sirti $S_{yon}=P_1\cdot\ell$, P_1 – perpendikulyar kesim perimetri, ℓ -yon qirrasi.

To'g'ri prizmaning yon sirti, $S_{yon}=P_{as}\cdot\ell$, P_{as}- asos perimetri.

3) Prizmaning to‘la sirti $S_{to'la}=S_{yon}+2S_{as}$, S_{as}- asos yuzasi.

Parallelepiped. Asosi parallelogramm bo‘lgan prizma parallelepiped deyiladi. Yon qirralari asosga perpendikulyar bo‘lgan parallelepiped to‘g‘ri deyiladi.



9.103-rasm

Asosi to‘g‘ri to‘rtburchak bo‘lgan to‘g‘ri parallelepiped to‘g‘ri burchakli deyiladi.

Kub – barcha qirralari teng bo‘lgan to‘g‘ri burchakli parallelepiped.

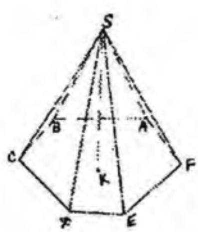
Parallelepipedning xossalari:

1) Parallelepiped diagonalining o‘rtasi uning simmetriya markazidir.

2) Parallelepipedning qarama-qarshi yoqlari juft-juft kongruent va paralleldir.

3) Parallelepipedning barcha diagonallari bir nuqtada kesishadi va bu nuqtada teng ikkiga bo‘linadi. Parallelepipedning to‘la sirti yuzi yon sirtining yuzi bilan ikki asosi yuzlarining yig‘indisiga teng.

To‘g‘ri burchakli parallelepipedning yon sirtining yuzi asos perimetri bilan balandligining ko‘paytmasiga tengdir. To‘g‘ri burchakli parallelepipedning barcha diagonallari teng uzunlikda bo‘ladi.



9.104-rasm

Piramida. Asosi ixtiyoriy ko'pburchak, yon yoqlari esa umumiy uchiga ega uchburchaklardan iborat bo'lgan ko'pyoq piramida deyiladi.

Kesuvchi tekislikning ko'p yoqli burchak yoqlari orasidagi bo'lagi piramidaning asosi deyiladi.

ABCDEF-asos, *SAB, SBC*, ...- yon yoqlari, *S*-umumiy uch.

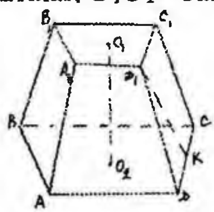
SA, SB, ... – yon qirralar; *SK* –balandlik (asosga tushirilgan perpendikulyar).

Piramidaning hajmi $V=\frac{1}{3}\ S_{as}\cdot H$, S_{as} – asos yuzasi, *H*-balandlik. Muntazam piramida yon sirti

$S_{yon}=\frac{1}{2}p\ h$, *p*-asos perimetri, *h*-apofema.

Asosga parallel tekislik piramidani ikki qismga ajratadi. U holda qismlardan biri yana piramida bo'ladi, ikkinchi qism esa kesik piramida deyiladi.

Kesik piramidada *ABCD* va $A_1B_1C_1D_1$-asoslar, $AA_1.BB_1.CC_1.DD_1$-yon qirralar. O_1O_2 –balandlik. D_1K - apofema.



9.105-rasm

Kesik piramida hajmi $V=\frac{1}{3}H\ (S_1+S_2+\sqrt{SS_2}\ )$ *H*-balandlik, S_1 va S_2 asoslarning yuzalari. Muntazam kesik piramida yon sirti $S_{yon}=\frac{1}{2}h\ (p_1+p_2)$, *h*-apofema, p_1 va p_2 asoslarning perimetrlari.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Ko'p yoqli burchaklarga ta'rif bering.
2. Ko'pyoq deb qanday jismga aytiladi? Qavariq ko'pyoqqa ta'rif bering.

3. Prizma deb qanday ko‘pyoqqa aytiladi?

4. Piramida deb qanday ko‘pyoqqa aytiladi?

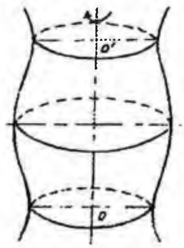
5. Muntazam ko‘pyoqqa ta’rif bering va uning turlarini aytib, tushuntiring.

9.12. Aylanma jismlar. Silindr, konus, shar

Biror to‘g‘ri chiziqni yoki egri chiziqni bir to‘g‘ri chiziq atrofida aylantirishdan aylanma sirt hosil bo‘ladi.

Agar aylanma sirtni o‘q deb ataluvchi to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar bo‘lgan parallel ikkita tekislik bilan kessak aylanma sirt va doira bilan chegaralangan aylanma jism hosil bo‘ladi.

OO_1- aylanma jismning o‘qi, jismning egri sirti aylanma sirt deyiladi.

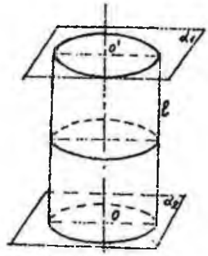


9.106-rasm

Aylanma sirt parallel tekisliklar bilan kesilsa, kesim doiralardan iborat bo‘ladi.

Silindr. O‘q atrofida unga parallel bo‘lgan to‘g‘ri chiziq aylantirilsa, silindrik sirt hosil bo‘ladi. U o‘qqa perpendikulyar ikkita parallel tekislik bilan kesilsa, ular orasida silindrik jism hosil bo‘ladi.

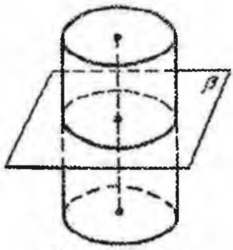
Doiralar silindrning asoslari deyiladi, doira aylanalari mos nuqtalarini tutashtiruvchi kesmalar silindrning yasovchilari deyiladi. Silindrning sirti asoslaridan va yon sirtidan tashkil topadi. Yon sirt yasovchilardan tuzilgan.



9.107-rasm

Silindrning yasovchilari asos tekisliklariga perpendikulyar bo'lsa, bunday silindr to'g'ri silindr deyiladi. To'g'ri silindrni to'g'ri to'rtburchakni uning biror tomoni atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin.

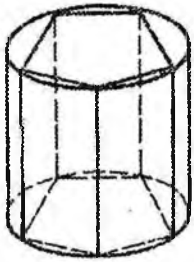
Silindr asosining radiusi silindrning radiusi deyiladi. Silindr asosining tekisliklari orasidagi masofa silindrning balandligi deyiladi. Asoslarining markazlaridan o'tuvchi to'g'ri chiziq silindrning o'qi deyiladi. Bu o'q yasovchilarga parallel bo'ladi. Silindrning o'qi orqali o'tuvchi kesim o'q kesim deyiladi. Silindrning yasovchisi orqali o'tib, bu yasovchi orqali o'tadigan o'q kesimga perpendikulyar tekislik silindrning urinma tekisligi deyiladi.

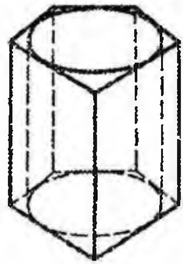


9.108-rasm

Teorema. Silindr o'qiga perpendikulyar tekislik uning yon sirtini asos aylanasiga teng aylana bo'yicha kesadi (9.108-rasm).

Silindrga ichki chizilgan prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga ichki chizilgan teng ko'pburchaklardan iborat. Uning yon qirralari silindrning yasovchilari bo'ladi(9.109-rasm).

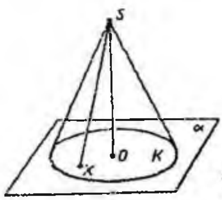


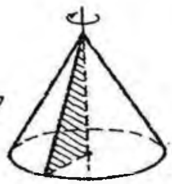


9.109-rasm 9.110-rasm

Silindrga tashqi chizilgan prizma deb shunday prizmaga aytiladiki, uning asoslari silindrning asoslariga tashqi chizilgan teng ko‘pburchaklardan iborat. Uning yon yoqlari tekisliklari silindrning yon sirtiga urinadi(9.110-rasm).

Konus. Konus (doiraviy konus) deb shunday jismga aytiladiki, u doira – konus asosidan, shu doira tekisligidagi yotmaydi nuqta-konusning uchidan va konusning uchini asosining hamma nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalardan iborat bo‘ladi. Konus uchini asos aylanasi nuqtalari bilan tutashtiruvchi kesmalar konusning yasovchilari bo‘ladi. Konusning sirti asosidan va yon sirtidan iborat.





9.111-rasm 9.112-rasm

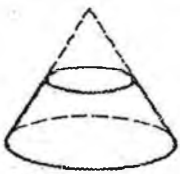
Konusning uchi bilan asos aylanasining markazini tutashtiruvchi to‘g‘ri chiziq asos tekisligiga perpendikulyar bo‘lsa, bunday konus to‘g‘ri konus deyiladi.

To‘g‘ri konusni to‘g‘ri burchakli uchburchakni kateti atrofida aylantirishdan hosil qilingan jism deb qarash mumkin.

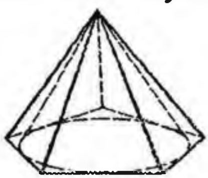
Konusning uchidan uning asosiga tushirilgan perpendikulyar konusning balandligi deyiladi. To‘g‘ri konus balandligining asosi asos markazi bilan ustma-ust tushadi. To‘g‘ri konusning balandligidan o‘tuvchi to‘g‘ri chiziq uning o‘qi deyiladi. Konusning o‘qi orqali o‘tuvchi tekislik bilan kesimi o‘q kesim deyiladi. konusning yasovchisi orqali o‘tuvchi va bu yasovchi orqali o‘tkazilgan o‘q kesimga perpendikulyar tekislik konusning urinma tekisligi deyiladi.

Teorema. Konusning o‘qiga perpendikulyar tekislik konusni doira bo‘yicha kesadi, yon sirtini esa markazi konusning o‘qida joylashgan aylana bo‘yicha kesib o‘tadi (teoremani isbot qilish talabalarga mustaqil ish sifatida topshiriladi).

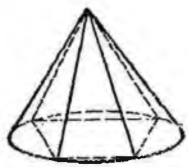
Konusning o‘qiga perpendikulyar tekislik undan kichik konus ajratadi. Qolgan qismi kesik konus deyiladi.



9.115-rasm



9.113-rasm



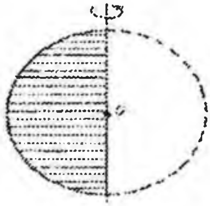
9.114-rasm

Asosi konus asosidagi aylanaga ichki chizilgan ko‘pburchak bo‘lib, uchi esa konusning uchida bo‘lgan piramida konusga ichki chizilgan piramida deyiladi. Konusga ichki chizilgan piramidaning yon qirrasi konusning yasovchilari bo‘ladi. Asosi konusning asosiga tahqi chizilgan ko‘pbubrchak bo‘lib, uchi esa konusning uchi bilan ustma-ust tushgan piramida konusga tashqi chizilgan piramida deyiladi. Tashqi chizilgan piramida yon yoqlarining tekisliklari konusning urinma tekisliklari bo‘ladi.

Shar

Ta’rif. Fazoning berilgan nuqtasidan berilgan masofadan katta bo‘lmagan uzoqlikda yotgan hamma nuqtalaridan iborat jism shar deyiladi. Berilgan nuqta sharning markazi, berilgan masofa esa sharning radiusi deyiladi. Sharning chegarasi shar sirti yoki sfera deb ataladi. Shunday qilib sharning markazidan radiusga teng masofa qadar uzoqlashgan hamma nuqtalari shar sirti yoki sfera deb ataladi.

Shar sirtining ikki nuqtasini tutashtiruvchi va sharning markazidan o‘tuvchi kesma diametr deyiladi. Istalgan diametrning uchlari (oxirlari) sharning diametral qarama-qarshi nuqtalari deyiladi.

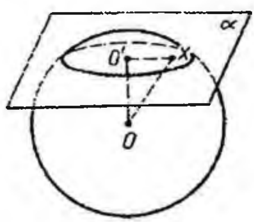


9.116-rasm

Shar ham aylanma jism bo‘lgani uchun uni yarim doirani o‘zining diametri atrofida aylantirishdan ham hosil qilish mumkin.

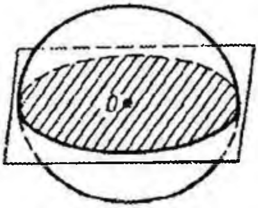
1-teorema. Sharning har qanday tekislik bilan kesimi doiradir. Bu doiraning markazi sharning markazidan kesuvchi tekislikka tushirilgan perpendikulyarning asosidir.

Isbot. Aytaylik α - kesuvchi tekislik va O – sharning markazi bo‘lsin. Sharning markazidan α tekislikka OO' perpendikulyar tushiramiz. O'bilan perpendikulyarning asosini belgilaymiz. X – sharning α tekislikka tegishli ixtiyoriy nuqtasi bo‘lsin. Pifagor teoremasiga ko‘ra



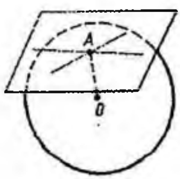
9.117-rasm

$OX^2 = OO^{12} + O'O^2$. Ammo OX kesma sharning R radiusidan katta bo‘lmagani uchun $O'X \le \sqrt{R^2}$. Demak, X nuqta markazi O' nuqtada va radiusi $R = \sqrt{R^2 - OO'^2}$ ga teng doiraga tegishli. Aksincha, bu doiraning istalgan X nuqtasi sharga tegishli. Bu esa sharning α tekislik bilan kesimi markazi O' nuqtada bo'lgan doira demakdir.



9.118-rasm

Teoremaning isbotidan sharning tekislik bilan kesimida hosil qilingan doiraning radiusini $R = \sqrt{R^2 - OO^2}$ formula bo'yicha hisoblash mumkin degan xulosa chiqadi. Bu esa shar markazidan bir xil uzoqlikdagi tekisliklar bilan kesilsa, teng doiralar hosil bo'lishini ko'rsatadi. α tekislik sharning markaziga qancha yaqin bo'lsa α tekislik kesimidagi doira shuncha katta bo'ladi. Sharning markazidan o'tgan tekislik kesimida eng katta doira hosil bo'ladi. Bu doiraning radiusi shar radiusiga teng (9.119-rasm).



9.119-rasm

Sharning markazidan o'tadigan tekislik diametral tekislik deyiladi.

2-teorema. Sharning istalgan diametral tekisligi uning simmetriya tekisligi bo'ladi. Sharning markazi uning simmetriya markazidir.

Shar sirtidagi A nuqtadan o‘tib shu nuqtaga o‘tkazilgan radiusga perpendikulyar tekislik urinma tekislik deyiladi. A nuqta urinish nuqtasi deyiladi (9.120-rasm)

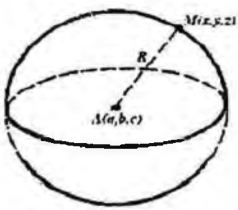
3-teorema. Urinma tekislik shar bilan faqat bitta umumiy nuqtaga – urinish nuqtasiga ega.

4-teorema. Shar sirtidagi istalgan nuqtadan cheksiz ko‘p urinma o‘tadi, ularning hammasi sharning urinma tekisligida yotadi.

(2-4 teoremalarni isboti talabalarga mustaqil ish qilib beriladi).

Sfera tenglamasi. Sfera deb, fazoning berilgan nuqtasidan baravar uzoqlikda joylashgan nuqtalar to‘plamiga aytiladi. Sfera tenglamasini tuzamiz. S feraning markazi A (a, b, c) nuqtada, radiusi esa R bo‘lsin (9.120-rasm). Sferaning nuqtalari fazoning shunday nuqtalaridan, bu nuqtadan A nuqtagacha masofa R ga teng. Sferaning ixtiyoriy (x, y, z) nuqtasidan A nuqtagacha masofaning kvadrati $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2$ ga teng. Shuning uchun sferaning tenglamasi
$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ ko‘rinishga ega. Sferaning markazi koordinatalar boshi bo‘lsa, sferaning tenglamasi quyidagi ko‘rinishda bo‘ladi.

$$x^2+y^2+z^2=R^2$$



9.120-rasm

Ikkita sferaning kesishgan chiziq‘i aylanadan iborat bo‘ladi. Buni isbot qilish ham mumkin

O‘z-o‘zini nazorat qilish uchun savollar

1. Aylanma sirtga ta’rif bering.
2. Silindr va konusga ta’rif bering.

3. Sharga ta'rif bering.
4. Sfera tenglamasini keltirib chiqaring.

Geometriya elementlariga doir testlar

1. Qo'shni burchaklarning yigindisi necha gradusga teng?
a) 270 b) 180 d) 110 e) 360
2. Qanday burchak o'tmas burchakli uchburchak deyiladi?
a) bitta burchagi o'tmas bo'lgan;
b) ikkita burchagi o'tmas bo'lgan;
d) uchta burchagi o'tmas bo'lgan.
3. Burchak bissektrissasi nima?
a) Burchakni teng ikkiga bo'luvchi nur;
b) Burchakni 1:3 nisbatda bo'luvchi nur;
d) Burchakni 1:4 nisbatda bo'luvchi nur.
4. Uchinchi to'gri chiziqqa parallel bo'lgan 2 to'gri chiziq o'zaro ... bo'ladi.
a) parallel;
b) perpendikulyar;
d) ayqash.
5. Uchburchak ichki burchaklarining yig'indisi necha gradusga teng?
a) 290° b) 90° d) 180° e) 100°
6. Uchburchakning tashqi burchagi ... ga teng.
a) o'ziga qo'shni bo'lmagan ichki burchaklar yig'indisiga teng;
b) o'ziga qo'shni burchakka;
d) 360° ga teng.
6. Agar to'rtburchakning diagonallari kesishsa va kesishish nuqtasida teng ikkiga bo'linsa, bu to'rtburchak ... bo'ladi.
a) ko'pburchak;
b) parallelogram;
d) trapetsiya;
e) teng yonli trapetsiya.
7. Ikkita qarama –qarshi tomonlarigina parallel bo'lgan to'rtburchak ... deyiladi.
a) kvadrat;

b) to‘g‘ri to‘rtburchak;
d) parallelogramm;
e) trapetsiya.

8. Aylana uzunligi ... ga teng.
a) πR;
b) $2\pi R$;
d) $2R$;
e) πR.

9. Kubning barcha qirralari yig‘indisi 96 sm ga teng.Uning hajmini toping.
a) 256 b) 216 d) 384 e) 512

10. Bitta tekislikka perpendikulyar ikki to‘gri chiziq o‘zaro ... bo‘ladi.
a) perpendikulyar;
b) parallel;
d) ayqash.

11. Paralellopipedning qarama-qarshi tomonlari ... .
a) paralel va teng;
b) perpendikulyar va teng;
d) teng va ayqash.

12. R (-3: 0) nuqtaning koordinata boshi atrofida 90° ga burganda hosil bo‘ladigan nuqtaning koordinatalarini toping.
a) (3:0) b) (0:-3) d) (3:3) e) (0:3) f) (3: -3)

13. Har bir ichki burchagi 135° bo‘lgan qavariq ko‘pburchakning nechta tomoni bor ?
a) 5 b) 6 d) 8 e) 10 f) 12

14. To‘rtburchakli muntazam piramida asosining tomoni 4 marta kattalashtirildi. Balandligi esa 4 marta kichiklashtirildi. Hosil bo‘lgan piramida hajmininig dastlabki piramida hajmiga nisbatini toping.
a) 1: 16 b) 16:1 d) 1:1 e) 1:4 f) 4:1

15. Kub uchun nechta simmetriya tekisligi mavjud?
a) 8 b) 9 d) 7 e) 10 f) 6

16. Kvadratning yuzi ... .
a) uning tomoni uzunligining kvadratiga teng;

b) uning tomoni uzunligining kubiga teng;

d) uning tomoni uzunliklari yigindisining yarmiga teng.

17. Agar to‘gri to‘rtburchakning yuzi 48 sm asosi 8 sm bo‘lsa, uning bo‘yini toping.

a) 9 b) 10 d) 6 e) 8

18. Agar uchburchakning asosi 9 sm balandligi 15 sm bo‘lsa, yuzini toping.

a) 67 b) 67,5 d) 70 e) 70,5

19. Parallelogramning asosi 6 m va mos balandligi 7 sm bo‘lsa uning yuzini toping.

a) 40 b) 45 d) 42 e) 36

20. Trapetsiyaning balandligi 5 m kichik asosi 6 sm va katta asosi kichik asosidan ikki yarim marta katta bo‘lsa trapetsiyaning yuzini toping.

a) 37,2 b) 42 d) 35 e) 38

21. 3 ta tomoniga ko‘ra uchburchakning yuzini toping.

a=5, b=5, c=6

a) 9 b) 11 d) 10 e) 12

22. Og‘ma deb… .

a) R to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar kesmaga aytiladi;

b) R to‘g‘ri chiziqqa paralel bo‘lgan kesmaga aytiladi;

d) R to‘g‘ri chiziqqa perpendikulyar har qanday chiziqqa aytiladi;

e) perpendikulyarning asosi bilan og‘maning asosini tutashtiruvchi kesmaga aytiladi.

23. ABS uchburchakda A uchidagi tashqi burchagi 120° ga, S uchidagi ichki burchak 80° ga teng. B uchidagi tashqi burchakni toping.

a)160° b) 150° d) 130° e) 120° f) 140°

24. Uchburchakning birligi tomoni k (x >7) sm, ikkinchi tomoni undan 4 sm qisqa, uchinchi tomoni esa birinchisidan 3 sm uzun. Shu uchburchakning perimetrini toping.

a) 3x-1 b) 3x+4 d) 3x-3 e) 3x+7 f) 3x-4

25. Ikkita to‘gri chiziqning kesishishidan hosil bo‘lgan qo‘shni burchaklar 6:7 nisbatda bo‘lsa, shu burchaklarni toping.

a) 36°: 144° b) 75°: 105° d) 42°:138° e) 38° : 142°
f) 85° : 95°

26. Bitta nuqtadan tekislikka og‘ma va perpendikulyarniki 4 sm, og‘maning tekislikdagi proyeksiyasi necha sm?

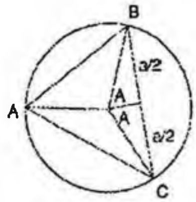
a) 2 b) 3 d) 2,5 e) 1 f) 3,5

Topshiriqlar

1. Kompleks tekislikda

$|z+16| = 4|z+1|$ tenglamaning grafigini chizing. Bu masala qaysi jihatiga ko‘ra yuqoridagilardan biriga aloqador?

2. “Sinuslar teoremasining natijasi”ni isbotlang. Agar bizga tomonlari *a, b, c* bo‘lgan *ΔABC* berilgan bo‘lsa va *R* tashqi chizilgan aylana radiusi bo‘lsa, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ni isbotlang.



9.121-rasm

Uchburchakning perimetri

$a + b + c = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$ ga tengligini ko‘rsating.

3. *C* aylana va *p* haqiqiy son berilgan, *C* ga nisbatan *p* kuchga ega bo‘lgan barcha *P* nuqtalarning o‘rnini tasvirlang.

4. *P* nuqta, *C* aylana. *AA* (aylananing diametri *C* aylanaga doir *P* ning kuchi $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PA'}$. orqali berilishini ko‘rsating. (Eslatma: Agar *O* nuqta *C* aylananing markazi bo‘lsa,

$\overrightarrow{PA} = \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{OA}$ va $\overrightarrow{PA'} = \overrightarrow{PO} - \overrightarrow{OA}$ ekanligini isbotlang.

5. *[AB]* va *[AC]* chiziqlar *O* markazli aylananing vatarlari. *X* va *Y* lar esa *[AB]* va *[AC]* chiziqlarining markazlaridir. *O, X, Y* va *A* nuqtalarni bitta aylanada bo‘lishini isbotlang.

6. Sinus uchun qo'shimcha formuladan foydalaning agar *ABCD* siklik to'rtburchak bo'lsa, keyin $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.

7. Agar *ABCD* siklik to'rtburchak bo'lsa a, b, c va d tomonlari bilan birga, yuzasi K quyidagi formla bilan topilishini isbotlang.

$K = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)}$, bu yerda $s = (a + b + c + d)/2$

8. A, B va C nuqtalar kollinear bo'lsin va $(A; B; C)(B; A; C) = -1$. Yuqoridagi tenglikdan Oltin nisbatni chap tomonda musbat bo'lishini ko'rsating.

9. A, B va C nuqtalari kollinear va $\lambda = A; B; C$ bo'lsin. $6=3!$ asosida A, B, C o'rin almashtirishlarning mumkin bo'lgan qiymatlari $A; B; C$ lar quyidagilarga tengligini ko'rsating:

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, -(1+\lambda), -\frac{1}{1+\lambda}, -\frac{1+\lambda}{\lambda}, -\frac{\lambda}{1+\lambda}$$

10. A, B, X va Y nuqtalari kollinear bo'lsin va kesishuvchi nisbat quyidagi formula orqali hisoblanishni ko'rsating

$$[A, B, X, Y] = \frac{AX}{AY} \cdot \frac{YB}{XB}$$

Agar garmonik nisbat $[A, B, X, Y] = -1$ bo'lsa, u holda A. B. X va Y kollinear nuqtalar ekanligini ko'rsating.

11. A, B, X va Y kolinear nuqtalar uchun quyidagilarni ko'rsating

$[A, B; X, Y] = [X, Y; A, B] = [B, A; Y, X] = [Y, X; B, A]$.

Xulosa qiling $4!=24$ asosida A, B, X va Y larni o'rin almashtirishlari kesishuvchi nisbatida

6 xil qiymatlariga ega.

12. A, B, X va Y kollinear nuqtalar va $\lambda=[A, B, X, Y]$ bo'lsin. 4 factorial ostida A, B, X va Y o'rin almashtirishlar kesishuvchi munosabatlarning tasodifiy qiymatlari quyidagichaligini ko'rsating

$$\lambda, \frac{1}{\lambda}, 1-\lambda, \frac{1}{1-\lambda}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda}{\lambda-1}, \frac{\lambda-1}{\lambda}.$$

13. Agar A, B, X va Y nuqtalar garmonik nisbatda bo'lsa, o'rin almashtirishlar ostida kesishuvchi munosabatlarning tasodifiy qiymatlari nechta bo'lishi mumkin?

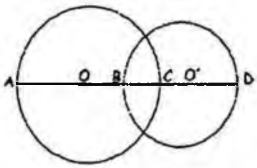
14. A va B berilgan nuqtalar bo‘lsin.

(a) $\{M \mid MP = 3\ MQ\}$ nuqtalarning geometrik o‘rni aylana ekanligini ko‘rsating.

(b) (a) da ko‘rsatilganday (AB)ni bo‘luvchi X va Y nuqtalar berilgan bo‘lsin. A, B, X va Y nuqtalar garmonik nisbatda bo‘lishini ko‘rsating.

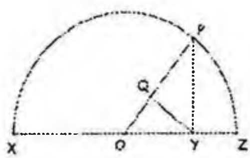
15. Agar $[A, B; X, \quad Y]=1$ bo‘lsa, $A=B$ yoki $X=Y$ bo‘lishini ko‘rsating.

16. Ikkita haqiqiy a va b sonlar uchun o‘rta garmonik soni $\frac{2ab}{a+b}$ bo‘yicha topiladi. A, B, X va Y nuqtalar garmonik nisbatda bo‘lishini tasavvur qilamiz. AX va AY larni o‘rta garmonik soni AB ga tengligini ko‘rsating.



9.122-rasm

17. Quyida diagrammada O markazli va XZ diametrli yarimaylana ko‘rsatilgan. $[PY]$ kesma $[XZ]$ kesmaga perpendikulyar va $[QY]$ kesma $[OP]$ kesmaga perpendikulyar bo‘lsin. $PQXY$ va YZ larning o‘rta garmonik soni bo‘lishini ko‘rsating.



9.123-rasm

18. ΔXYZ ning to‘qqiz-nuqta aylananing markazi ekanligini isbotlash.

19. Yuqoridagi diagrammada to‘qqiz nuqta aylananing markazi o‘rta nuqtasida yotadi $[NO]$, N nuqta ΔABC o‘rta markazining qayerida joylashgan.

20. Uchburchak ABC, D bu $[BC]$ markaziy nuqtasi va E $[AC]$ yoqilgan $AE: EC = 1: 2$. G bu $[BE]$ va $[AD]$ keshishgan nuqtasini toping $AG:GD$ va $BG:GE$.

21. Uchburchak ABC, D nuqtasi AD chizig'ida, AD= 3 va DB = 2. E nuqtasi [BC] chizig'ida $BE=3$, $EC=4$. $EF:FA$ nisbatini hisoblab bering.

22. To'rtburchak $ABCD$. E, F, G va H triseksiya nuqtalari shu :$[AB]$, $[BC]$, $[CD]$, chizilar uchun. DA chizig'i A,C, C va A yaqinroq. $EFGH$ parallelogramligi ko'rsatib bering. (Diagonallar bir-birga bisektrisaligi ko'rsatib bering)

23. $[AD]$ ABC uchburchakning bir balandligi, $\angle B=45°$ va $\angle C=60°$ bo'lsin. F nuqtasi $[AC]$ chizig'ida shunday joylashgan, $[BF]$ $\angle$ Bning bisektrissasidir. E nuqtasi $[AD]$ va $[BF]$ chiziqlarni keshishdan nuqtasida joylashgan bo'lsa, $AE:ED$ va $BE:EF$ hisoblab bering.

24. Uchburchak ABC da D $[BC]$ chizig'idagi nuqta, $CD=2$ va $DB= 5$; E nuqta $[AC]$ chizig'ida, $CE=1$ va $EA=3$, $AB=8$ va $[AD]$ bilan $[BE]$ P nuqtasida keshisadi. Q va R nuqtalar $[AB]$ chisigida joylashgan, shundayki, $[PQ]$ parallel $[CA]$ va $[PR]$ parallel $[CB]$. PQR uchburchak yuzini ABC uchburchak yuziga nisbatini toping.

25. Uchburchak ABCda, E nuqtasi $[AC]$ chizig'ida va $AE:EC=1:2$, F nuqtasi $[BC]$ chizig'ida va $BF:FC=2:1$, G nuqtasi $[EF]$ chizig'ida va $EG:GF=1:2$. Nihoyat, faras qilingki D nuqtasi AB chizig'ida va C,D,G collinear. $CG:GD$ va $AD:DB$ ni toping

26. Berilgan a, b, c tomonlari bo'yicha uchburchak yasang
   a) $a = 2\ sm, b = 3\ sm, c = 4\ sm$
   b) $a = 3\ sm, b = 4\ sm, c = 5\ sm$
   c) $a = 4\ sm, b = 5\ sm, c = 6\ sm$
   d) $a = 2\ sm, b = 4\ sm, c = 5\ sm$

27. Berilgan radiusi bo'yicha berilgan ikki nuqtadan o'tuvchi aylana yasang.

28. ABC uchburchak berilgan. Unga teng boshqa bir ABD uchburchak yasang.

29. Ikki tomoni va tashqi chizilgan aylananing radiusi bo'yicha uchburchak yasang.

30. Quyidagi ma`lumotlarga ko'ra ABC uchburchakni yasang:

1) Ikki tomoni va ular orasidagi burchakka ko'ra:

a) $AB = 5\ sm, AC = 6\ sm, \angle A = 40°$

b) $AB = 3\ sm, AC = 5\ sm, \angle A = 70°$

2) Bir tomoni va unga yopishgan burchaklari bo'yicha:

a) $AB = 6\ sm, \angle A = 30°, \angle B = 50°$

b) $AB = 4\ sm, \angle A = 45°, \angle B = 60°$

31. Ikki tomoni va bu tomonlardan kattasi qarshisida yotuvchi burchagi bo'yicha uchburchak yasang:

a) $a = 6\ sm, b = 4\ sm, \angle\alpha = 70°$

b) $a = 4\ sm, b = 5\ sm, \angle\beta = 100°$

X BOB. MIQDORLAR VA ULARNI O‘LCHASH

10.1. Miqdor tushunchasi va uning turlari. Skalyar miqdorlarning asosiy xossalari. Miqdorlarni o‘lchash tushunchasi

Matematikaning turmushga tadbiqi ko‘pchilik hollarda ikkita masalaga olib keladi: chekli to‘plam elementlarni sanash, miqdorlarni o‘lchash. Biz miqdorlarni o‘lchashga to‘xtalamiz. Bizga ma'lumki miqdorlar bilan o‘quvchilarni boshlang‘ich sinflarda tanishtiriladi va ular uzunlik, yuz, tezlik, narx, hajm kabi miqdorlar to‘g‘risida tassavvurlarga ega.

Miqdorlar aniq obyekt yoki hodisalarning mahsus xossalaridir.

Masalan, narsalarning oraliqqa ega bo‘lish xossasi uzunlik deyiladi. Narsa, buyumlar oraliqlari to‘g‘risida so‘z ketganda uzunlik so‘zini ishlatamiz va bu miqdorlarni bir jinsli deymiz. Bir jinsli miqdorlar biror to‘plam elementlarini ayni bir xossasini ifodalaydi. Turli jinsli miqdorlar esa obyektlarning turli xossalarini ifodalaydi.

Masalan, uzunlik, yuz, massa – turli jins miqdorlar.

Miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1. Har qanday bir jinsli ikki miqdor taqqoslangach, bir jinsli miqdorlar uchun «katta», «kichik» va «teng» munosabatlari o‘rinli. Bir jinsli a va b miqdorlar uchun quyidagi munosabatlardan biri o‘rinli $a > b$, $a < b$, $a = b$;

Masalan, uchburchak ikki tomoni uzunligining yig‘indisi, uchunchi tomoni uzunligidan katta; to‘g‘ri burchakli uchburchak istalgan katetining uzunligi gipotenuzasi uzunligidan kichik; parallelogramm qarama-qarshi tomonlari uzunliklari teng.

2. Bir jinsli miqdorlarni qo‘shish mumkin, qo‘shish natijasida yana bir jinsli miqdor hosil bo‘ladi. Boshqacha aytganda a va b bir jinsli miqdorlar uchun $a + b$ miqdor bir jinsli aniqlanadi va u a va b miqdorlarning yig‘indisi deyiladi. Masalan, $a -$ AB kesmaning, $b - BC$ kesmaning uzunligi bo‘lsa, u holda AC

kesmaning uzunligi AB *va* BC kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng bo'ladi (10.1-rasm).

10.1-rasm

3. Miqdor haqiqiy songa ko'paytiriladi, natijada shu jinsli miqdor hosil bo'ladi. Boshqacha aytganda, har qanday a miqdor va har qanday nomanfiy haqiqiy son uchun yagona $b = x \cdot a$ miqdor mavjud: b miqdor a miqdorni x songa ko'paytirish deyiladi. Masalan, AB kesmani a uzunligini $x=3$ ko'paytirilsa, yangi AC kesmaning $3a$ uzunligi hosil bo'ladi (10.2-rasm).

10.2-rasm

4. Bir jinsli miqdorlar ayiriladi, bu yerda miqdorlar ayirmasi miqdorlar yig'indisi orqali aniqlanadi: a va b miqdorlarning ayirmasi deb, shunday c miqdorga aytiladiki, uning uchun $a = b + c$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Masalan, $a - AC$ kesmaning, $b - AB$ kesmaning uzunligi bo'lsa, BC kesmaning uzunligi AC va AB kesmalar uzunliklarining ayirmasiga teng bo'ladi (10.3-rasm).

10.3-rasm

5. Bir jinsli miqdorlar bo'linadi, bunda bo'linma bir jinsli miqdorlarni songa ko'paytmasi orqali aniqlanadi. Bir jinsli a va b miqdorlarning bo'linmasi deb, shunday x nomanfiy haqiqiy songa aytiladiki, uning uchun $a = x \cdot b$ tenglik o'rinli bo'ladi. x son a va b miqdorlarning nisbati deyiladi va $\frac{a}{b} = x$ ko'rinishida yoziladi.

Masalan, AC kesma uzunligining AB kesma uzunligiga nisbati 3 ga teng (10.4-rasm)

10.4-rasm

Skalyar miqdorlarning asosiy xossalari. Miqdorlarni o'lchash tushunchasi. Miqdorlarni taqqoslash bilan ularni teng emasligini aniqlashimiz mumkin. Ammo taqqoslash yo'li bilan aniq natijaga ega bo'linmaydi, shuning uchun miqdorlarni o'lchash zarur. Miqdorlarni o'lchash natijasida ma'lum sonli qiymatga ega bo'linadi.

1-ta'rif. Agar a miqdor berilgan va e miqdor birligi tanlab olingan bo'lsa, u holda a miqdorni o'lchash natijasida shunday x haqiqiy son topildiki, uning uchun $a = x \cdot e$ bo'ladi. Bu x soni a miqdorning e miqdor birligida sonli qiymati deyiladi. Bu ta'rif simvolik ravishda quyidagicha yoziladi:

$$x = m_e(a)$$

Ta'rifga asosan istalgan miqdorni biror son bilan shu miqdor birligining ko'paytmasi shaklida tasvirlash mumkin.

Masalan, $15\,sm = 15 \cdot 1sm, 25\,kg = 25 \cdot 1\,kg$. Miqdor va miqdorni songa ko'paytirish ta'rifidan foydalanib miqdorning bir birligidan boshqasiga o'tishni ko'rsatish mumkin.

Masalan, $\frac{2}{3}$ kg ni grammlarda ifodalash mumkin. $\frac{2}{3}kg = \frac{2}{3} \cdot 1kg$ va $1kg = 1000g$ bo'lgani uchun $\frac{2}{3}kg = \frac{2}{3} \cdot 1000g = \frac{2000}{3} = 666\frac{2}{3}g$. Shuning bilan birga miqdorlar ham ikki xil bo'lishini eslatib o'tish kifoya.

2-ta'rif. Bitta sonli qiymat bilan to'la aniqlanadigan miqdorlar skalyar miqdorlar deyiladi.

Bunga uzunlik, yuz, hajm, massa misol bo'la oladi.

3-ta'rif. Son qiymati va yo'nalishi bilan to'la aniqlanadigan miqdorlar vektor miqdorlar deyiladi.

Bunga tezlik, kuch, tezlanish, maydon kuchlanganligi kabilarni ko'rsatish mumkin.

Biz musbat skalyar miqdorlarni qaraymiz. Skalyar miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1) Agar a va b miqdorlar e miqdor birligida o'lchangan bo'lsa, a va b miqdorlar orasidagi munosabat ularni sonli qiymatlari orasidagi munosobat kabi bo'ladi.

$$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$$
$$a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$$
$$a < b \Leftrightarrow m_e(a) < m_e(b)$$

Masalan, agar ikki kesma uzunligi $AB = 8\, sm, CD = 5\, sm$ bo'lsa, u holda AB kesma uzunligini CD kesma uzunligidan katta deymiz, chunki $8 > 5$:

2) Agar a va b miqdorlar e miqdor birligida o'lchangan bo'lsa, u holda $a + b$ yig'indining sonli qiymatini topish uchun a va b miqdorlarning sonli qiymatlarini qo'shish yetarli.

$$a + b = c \Leftrightarrow m_e(a + b) = m_e(a) + m_e(b)$$

Masalan, $a = 15\, m,\ b = 8\, m$ bo'lsa, $a + b = 15\, m + 8\, m = (8 + 15)\, m = 23\, m$

3) Agar a va b miqdorlar uchun $b = xa$ tenglik o'rinli bo'lsa (a kattalik e kattalik birligida o'lchangan, x - musbat haqiqiy son), u holda b miqdorning sonli qiymatini e birligida topish uchun x sonini $me(a)$ soniga ko'paytirish yetarlik.

Masalan, agar b ning massasi a ning massasidan 5 marta katta, ya'ni $b = 5\ a$ va $a = 2$ kg bo'lsa, u holda $b = 5 \cdot a = 5(2\, kg) = (5 \cdot 2) kg = 10\, kg$ bo'ladi.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Miqdorlar deganda nimani tushunasiz?
2. Miqdorlar qanday xossalarga ega?
3. Bir jinsli, turli jinsli miqdorlarni tushuntiring.
4. Miqdorning sonli qiymatiga ta'rif bering.
5. Skalyar va vektor miqdorlarga ta'rif bering.
6. Miqdorlar yig'indisiga va miqdorni songa ko'paytirishga ta'rif berib, misollar yordamida tushuntiring.

10.2. Kesma uzunligi va uning asosiy xossalari

Ta'rif. Kesma uzunligi deb, ixtiyoriy kesma uchun quyidagicha aniqlangan musbat miqdorga aytiladi:

a) teng kesmalar teng uzunlikka ega:

b) agar kesma chekli sondagi kesmalardan iborat bo'lsa, uning uzunligi bu kesmalar uzunliklarining yig'indisiga teng.

Kesma uzunligi quyidagi xossalarga ega:

1) Tanlab olingan uzunlik birligida har qanday kesmaning uzunligi musbat haqiqiy son bilan ifodalanadi va har bir musbat haqiqiy son uchun uzunligi shu son bilan ifodalangan kesma mavjud.

Haqiqatan bu xossani to'g'riligini isbotlash uchun kesmalar to'plamidan birorta e kesma tanlab olamiz va uni uzunlik birligi uchun qabul qilamiz. a kesmada uning oxirlaridan biridan birin-ketin e ga teng kesmalar qo'yamiz. Agar e ga teng kesmalar n marta qo'yilgan bo'lsa va oxirgisining uchi a kesma uchi bilan ustma-ust tushsa, a kesma uzunligining qiymati n natural songa teng deyiladi va bunday yoziladi: $a = ne$. Agar e ga teng kesmalar n marta qo'yilganda yana e kesmadan kichik kesma ortib qolgan bo'lsa, bu kesmaga $e_1 = \frac{1}{10}e$ ga teng kesmalar qo'yamiz.

Agar ular to'laligicha n marta joylashsa, $a = n, n_1 e$ bo'ladi va a kesma uzunligining qiymati chekli o'nli kasr bo'ladi. Agar e_1 kesma n_1 marta qo'yilib, yana e_1 dan kichik kesma ortib qolsa, unga $e_2 = \frac{1}{100}e$ ga teng kesmalar qo'yiladi.

Agar bu jarayonni cheksiz marta davom ettirsak, a kesma uzunligining qiymati cheksiz o'nli kasr bo'ladi. Shunday qilib, tanlab olingan birlikda har qanday kesmaning uzunligi musbat haqiqiy son bilan ifodalanadi. Teskarisi ham to'g'ri: agar musbat haqiqiy son $n, n_1, n_2, \ldots$ berilgan bo'lsa, uning taqribiy qiymatini ma'lum aniqlikda olib va bu son yozuvidagi yasashlarni bajarsak, uzunligining son qiymati $n, n_1, n_2 \ldots$ kasr bo'lgan kesma hosil qilamiz.

Bu bilan biz kesmalar uzunliklarining asosiy xossalaridan birini isbotladik. (Keyingi xossalarni isbotlashda kesmalar uzunliklari bir xil uzunlik birligi bilan o'lchanadi deb hisoblaymiz).

2) Agar ikkita kesma teng bo'lsa ular uzunliklarining son qiymatlari ham teng bo'ladi, va aksincha: agar ikkita kesma uzunligining son qiymatlari teng bo'lsa, kesmalarning o'zlari ham teng bo'ladi:$a = b \Leftrightarrow m_e(a) = m_e(b)$ haqiqatan, agar kesmalar teng bo'lsa, ular uzunliklarini o'lchashda e ga teng birlik kesmani va uning ulushini bir xil son marta qo'yamiz, demak, teng kesmalar uzunliklarining qiymati bir xil bo'ladi.

Aksincha: agar ikkita kesma uzunliklarining son qiymatlari teng bo'lsa, ular teng kesmalarni yasash jarayonini ifodalaydi.

3) Agar berilgan kesma bir nechta kesmaning yig'indisi bo'lsa, uning uzunligini son qiymati bu kesmalar uzunliklari son qiymatlarining yig'indisiga teng bo'ladi: agar kesma uzunligining son qiymati bir nechta kesma uzunliklarining son qiymatlari yig'indisiga teng bo'lsa, kesmaning o'zi bu kesmalar yig'indisiga teng bo'ladi:

$c = a + b \leftrightarrow m_e(c) + m_e(a) + m_e(b)$ a va b kesmalar uzunliklari,

$\frac{p}{n}$ va $\frac{q}{n}$ - lar mos ravishda ularning son qiymatlari ya'ni $a = \frac{p}{n}e$, $b = \frac{p}{n}e$ bo'lsin.

$a + b$ yig'indining qiymatini hosil qilish uchun $\frac{1}{n}e$ ga teng p ta kesma qo'yamiz, keyin yana shunday kesmalardan q tasini qo'yamiz. Natijada berilgan kesmalar yig'indisining uzunligi $\frac{p}{n} + \frac{q}{n}$ son bilan ifodalanishini topamiz.

$a + b = p\frac{1}{n}e + q\frac{1}{n}e = \frac{p}{n}e + \frac{q}{n}e = \left(\frac{p}{n} + \frac{q}{n}\right)e$. Aksincha, $\frac{p}{n} + \frac{q}{n}$ yig'indi $\frac{1}{n}e$ qismni p+q marta qo'shishni bildiradi, ya'ni

$(p + q)\frac{1}{n}e = p\frac{1}{n}e + q\frac{1}{n}e = \frac{p}{n}e + \frac{q}{n}e = a + b$ kesmani hosil qilamiz.

Demak, agar kesmalar uzunliklarini son qiymatlari qo'shilsa, ularga mos kesmalar ham qo'shilar ekan.

4) Agar a va b kesmalar uzunliklari $b = xa$ munosabatni qanoatlantirsa (bunda x - musbat haqiqiy son), b kesmaning e birlikdagi uzunligini topish uchun x sonni e birlikda o'lchangan

a kesmaning son qiymatiga ko'paytirish yetarli.

$b = xa \Leftrightarrow m_e(b) = x \cdot m_e(a)$ $b = xa$ va $a = \frac{p}{n}e$ bo'lsin.

U holda, $b = x \cdot \frac{p}{n}e = \left(x \cdot \frac{p}{n}\right)e$, ya'ni $m_e(b) = x \cdot m_e(a)$. $x \cdot \frac{p}{n}$ ko'paytma e kesmani $x \cdot \frac{p}{n}$ marta qo'shish kerakligini bildiradi, ya'ni $(x \cdot \frac{p}{n})e = x \cdot \frac{p}{n}e = xa = b$.

5) Uzunlik birligini almashtirganda yangi uzunlik birligi eski uzunlik birligidan necha marta kichik (katta) bo'lsa, uzunlikning son qiymati shuncha marta ortadi (kamayadi). Ikkita uzunlik birligi e va e_1 mavjud bo'lsin va $e_1 = ke$, ya'ni yangi uzunlik e birlikda $\frac{p}{n}$ qiymatiga ega bo'lsa, ya'ni $a = \frac{p}{n}e$ bo'lsa, shu a kesma uzunligi e_1 birlikdagi son qiymati $k$marta kamayadi: $a = \frac{p}{n}e = \frac{p}{n} \cdot \frac{1}{k}e_1 = \frac{p}{nk}e_1$, $\frac{p}{nk}$ son esa $\frac{p}{n}$ sondan k marta kichik. Kesmalar uzunliklarining isbotlangan xossalaridan yana quyidagilar kelib chiqadi:

a) $a > b \Leftrightarrow m_e(a) > m_e(b)$

b) $c = a - b \Leftrightarrow m_e(c) = m_e(a) - m_e(b)$

v) $x = a : b \Leftrightarrow = x = m_e(a) : m_e(b)$

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Kesma uzunligi deb qanday miqdorga aytiladi?
2. Kesma uzunligi qanday xossalarga ega?
3. Uzunlik birligini almashtirganda kesma uzunligi son qiymatini o'zgarishini tushuntirib bering.

10.3. Figuralarning yuzi. Figuralar yuzini o'lchash usullari

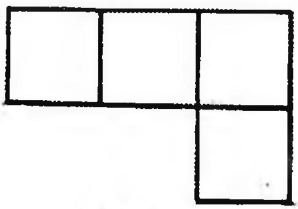
Har bir talaba maktabgacha ta'lim muassasasidan boshlab, figuraning yuzi haqida tushunchaga ega. Ular xonaning yuzi, yer uchastkasining yuzi, bo'yash lozim bo'lgan pol sirt yuzi kabilar boshqalar haqida eshitganlar va biladilar. Biz yer uchastkalari bir xil bo'lsa, ularning yuzalari tengligini; katta uchastkaning yuzi katta bo'lishini; uyning yuzi undagi xonalar yuzalarining yigindisiga tengligini bilamiz.

Geometrik figuralar turlicha tuzilganligi uchun yuz haqida gapirganda figuralaning alohida sinflari farq qilinadi.

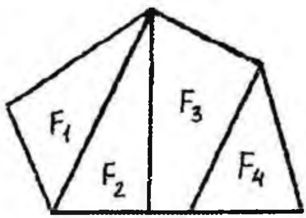
Masalan, ko'pburchak va chegaralangan qavariq figuralar yuzi, doira yuzi yoki aylanma jismlarining sirtlari sinflarini qarash mumkin. Biz faqat ko'pburchak va chegaralangan yassi qavariq figuralar yuzlari boshqa figuralardan tuzilgan bo'lishi mumkin.

10.5-rasmda tasivrlangan F figura F_1, F_2, F_3 va F_4 figuralardan tuzilgan, bu figura F_1, F_2, F_3, F_4 figuraning birlashmasidan iborat va berilgan har qanday ikkita figura umumiy ichki nuqtaga ega emas.

Ta'rif. Figuraning yuzi deb har bir figura uchun quyidagicha aniqlangan nomanfiy miqdorga aytiladi:



10.5-rasm



10.6-rasm

1) teng figuralar teng yuzalarga ega;

2) agar figura chekli sondagi figuralardan tuzilgan bo'lsa, uning yuzi bu figuralar yuzalarining yig'indisiga teng.

Ta'rifdan ko'rinadiki, yuza ta'rifi kesma uzunligining ta'rifiga o'xshash. Yuz ham uzunlik tavsiflangan xossalar bilan tavsiflanganini, ammo ular turli to'plamlarda: uzunlik-kesmalar to'plamida, yuz-yassi figuralar to'plamida berilganini ko'ramiz. F figuraning yuzini $S(F)$ bilan belgilashni shartlashib olamiz.

Figuraning yuzini o'lchash uchun yuz birligiga ega bo'lish kerak. Odatda yuz birligi uchun tomoni birlik kesma e ga, ya'ni uzunlik birligi uchun tanlanib olingan kesmaga teng bo'lgan kvadrat yuzi olinadi. Tomoni e bo'lgan kvadratning yuzi e^2 bilan belgilanadi.

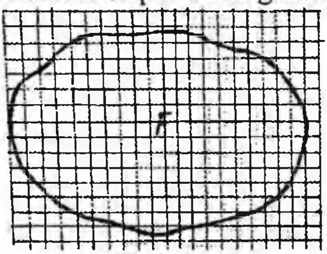
Masalan, birlik kvadrat tomonining uzunligi sm bo'lsa, uning yuzi sm^2 bo'ladi. Yuzni o'lchash berilgan figura yuzini birlik kvadrat yuzi e^2 bilan taqqoslashdan iborat. Bu taqqoslashning natijasi $S(F) = xe^2$ ni qanoatlantiruvchi x sondan iborat. x son tanlab olingan birlikda yuzning son qiymati deyiladi. Masalan, agar yuz birligi sm^2 bo'lsa, u holda 10.6-rasmda keltirilgan figuraning yuzi 4 sm^2 ga teng bo'ladi.

Figuralarning yuzlarini o'lchashning quyidagi usullarini ko'rib o'tamiz.

1. Yuzni paletka yordamida o'lchash (paletka – shaffof materialga chizilgan kvadratlar to'ri). Yuzi o'lchanayotgan F figura ustiga tomoni e bo'lgan kvadratlar to'ri tashlangan bo'lsin (10.7-rasm). U holda bu figuraga nisbatan kvadratlarning ikki turini ko'rsatish mumkin:

a) butunlay F figura ichida yotadigan kvadratlar;

b) bir qismi F figura ichida, bir qismi uning tashqarisida yotadigan va figura konturi orqali o'tadigan kvadratlar.



10.7-rasm

Birinchi tur kvadratlar m ta, ikkinchi tur kvadratlar n ta bo'lsin. U holda, F figuraning yuzi $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ shartni qanoatlantiradi. $m - S(F)$ ning kami bilan olingan, $m + n$ ortig'i bilan olingan taqribiy qiymati. Bundan ko'rinadiki, paletka yordamida F figuraning yuzini katta aniqlikda o'lchay olmaymiz. Aniqroq natija olish uchun paletka kvadratlarini maydaroq qilish kerak, buning uchun dastlabki kvadratlarni maydaroq kvadratlarga bo'lish kerak.

Masalan, tomoni $e_1 = \frac{1}{10}e$ bo'lgan kvadratlar to'rini yasash mumkin. Natijada F figura yuzining kattaroq aniqlikdagi boshqa taqribiy qiymatini hosil qilamiz. Bu jarayonni davom ettirish mumkin. Quyidagicha savol tug'iladi: o'lchashning kami bilan olingan har qanday taqribiy qiymatidan katta va ortig'i bilan olingan har qanday taqribiy qiymatidan kichik bo'lgan hamda o'lchanayotgan yuzning aniq son qiymati bo'la oladigan haqiqiy son mavjudmi? Matematikada yuzning tanlab olingan birligida har qanday yuz uchun bunday sonning mavjudligi va uning yagonaligi, yuz ta'rifida ko'rsatilgan birinchi hamda ikkinchi xossalarini qanoatlantirishi isbotlangan.

Paletka yordamida figuralarning yuzini o'lchash usulini qo'llash ancha noqulay, chunki, u juda ko'p vaqt talab qiladi, shuning uchun uncha katta bo'lmagan figuralarning yuzigina paletka yordamida topiladi.

Figuralarning yuzi figuralarga tegishli bo'lgan tomonlar, balandliklar va boshqa kesmalarni o'lchash bilan topila boshlandi.

Masalan, to'g'ri to'rtburchak yuzining son qiymatini topish uchun uning tomonlari uzunliklarining son qiymatlari ko'paytiriladi. Bu yuz ta'rifi va uni o'lchash mohiyatidan yuzlarni taqqoslashning hamda ular ustida amallar bajarishning ma'lum qoidalari kelib chiqadi. Ulardan ba'zilarini ko'rib chiqamiz.

a) Agar figuralar teng bo'lsa, u holda ular yuzlarining son qiymatlari teng bo'ladi (bir xil yuz birligida). Yuzlari teng bo'lgan figuralar teng yuzli (tengdosh) figuralar deyiladi.

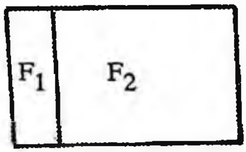
Masalan, 10.8-rasmdagi to'g'ri to'rtburchak va uchburchak teng yuzli figuralardir.

10.8-rasm

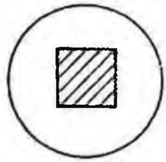
b) Agar F figura $F_1, F_2, \dots, F_n$ figuralardan tuzilgan bo'lsa, F figura yuzining son qiymati $F_1, F_2, \dots, F_n$ figuralar yuzlari son qiymatlari yig'indisiga teng bo'ladi (bir xil yuz birligida).

Masalan, 10.9-rasmda tasvirlangan F figuraning yuzini topaylik. Bu figurani ikkita F_1 *va* F_2 to'g'ri to'rtburchakdan tuzilgan deb qarash mumkin (ℓ to'g'ri chiziq F figurani bunday shaklga ajratgan). U holda $S(F) = S(F_1) + S(F_2) = 3sm \cdot 1sm + 3sm \cdot 4sm = 3sm^2 + 12sm^2 = (3 + 12)sm^2 = 15sm^2$.

v) Yuz birligini almashtirganda yangi birlik eski birliklardan qancha kichik (katta) bo‘lsa, yuzining son qiymati shuncha marta ortadi (kamayadi).



10.9-rasm



10.10-rasm

Masalan, 5 sm^2 ni kvadrat detsimetrlarda ifodalaylik. Ma’lumki, $1sm^2 = 0{,}01dm^2$ demak, $5sm^2 = 5 \cdot 1sm^2 = 5 \cdot (0{,}01dm^2) = (5 \cdot 0{,}01)dm^2 = 0{,}05\, dm^2$.

Boshlang‘ich sinflarda o‘quvchilar figuralarning yuzlari haqidagi dastlabki tushunchalar bilan tanishadilar. Figuraning yuzi haqidagi tasavvur figuralarni taqqoslash asosida vujudga keladi: kvadrat doira ichida yotgani uchun uning yuzi doiraning yuzidan kichik, doiraning yuzi kvadratning yuzidan katta (10.10-rasm).

O‘quvchilar figuralar yuzlarini paletka yordamida o‘lchash bilan tanishadilar. Aytaylik, $m - F$ figura ichida butunlay yotgan kvadratlar soni, $n - F$ figura konturi o‘tadigan kvadratlar soni bo‘lsin. U holda $me^2 < S(F) < (m+n)e^2$ F figura yuzining taqribiy qiymatini topish uchun yuzning qiymatlarini qo‘shish va bu yig‘indini teng 2 ga bo‘lish yetarli: $S(F) \approx \frac{m+(m+n)}{2} e^2$.

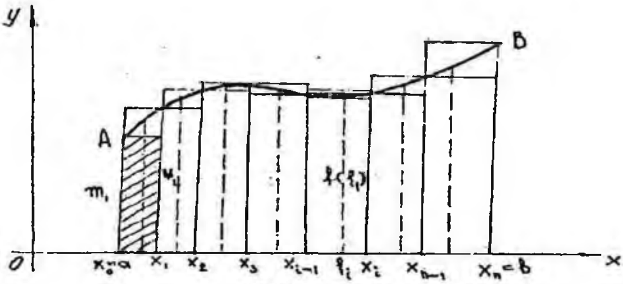
Shakl almashtirishdan keyin topamiz:

$$S(F) \approx \frac{m+(m+n)}{2} e^2 = \frac{2m+n}{2} e^2 = (m + \frac{n}{2})e^2.$$

Oxirgi ifoda F figura yuzining taqribiy qiymati F figuraning ichida butunlay yotadigan kvadratlar soni bilan shu figura konturi o‘tadigan kvadratlar soni yarmining yig‘indisiga tengligini bildiradi.

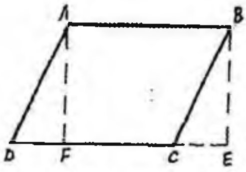
2. Figuraning yuzlari aniq integral yordamida ham topiladi (bu usul boshlang‘ich sinflarda qo‘llanilmaydi).

Masalan, yuqoridan $y = f(x)$ funksiya grafigi, chapdan $x = a$ o'ngdan $x = b$ ordinatalar, pastdan (ox) abssissa o'qi bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi $S = \int_a^b f(x)dx$ aniq integral bilan hisoblanadi (bunda $y = f(x)$ funksiya musbat $[a, b]$ kesmada uzluksiz, 10.11-rasm).

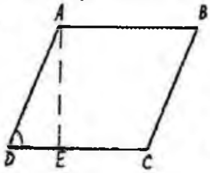


10.11-rasm

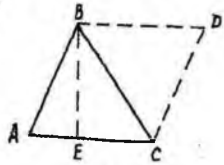
To'g'ri to'rtburchak va boshqa figuralarning yuzini topish. Yuzalarni o'lchash mavzusida to'g'ri to'rtburchakning yuzi $S = ab$ formula bilan hisoblanishini ko'rsatgan edik. Endi ba'zi sodda figuralarning yuzlarini topishni ko'ramiz.



10.12-rasm



10.13-rasm



10.14-rasm

Parallelogrammning yuzi. *ABCD* berilgan parallelogramm bo'lsin (10.12-rasm). Parallelogramm to'g'ri to'rtburchak bo'lmaganidan, uning burchaklaridan bir o'tkir burchak bo'ladi, Masalan, *A* yoki *B* o'tkir burchak bo'lsin. Aytaylik *B* o'tkir burchak bo'lsin. B uchidan *DC* to'g'ri chiziqqa *BE* perpendikulyar o'tkazamiz. U holda ABED trapetsiyaning yuzi *ABCD* paralellogramm bilan *BCE* uchburchak yuzining yig'indisiga teng bo'ladi. *A* uchidan *DC* to'g'ri chiziqqa *AF* perpendikulyar tushiramiz. U holda $ABED$ trapetsiyaning yuzi $ABEF$ to'g'ri to'rtburchakning yuzi bilan ADF uchburchak yuzining yig'indisiga teng bo'ladi. To'g'ri burchakli ADF va BCE uchburchaklar teng, demak, ularning yuzlari teng. Bundan esa $ABCD$ parallelogrammning yuzi ABEF to'rtburchakning yuziga, ya'ni $AB * AF$ ga teng degan natija chiqadi. AF esa parallelogrammning balandligi. $S_{ABCD} = AB * AF$.

Demak, parallelogrammning yuzi uning tomonini shu tomonga tushirilgan balandligiga ko'paytirilganiga teng.

1-masala. Agar parallelogrammning tomonlari *2m* va *3m*, burchaklaridan biri esa 70^0 ga teng bo'lsa, uning yuzini toping (10.13-rasm).

Ber: $AB = CD = 3m$

$AD = BC = 2m$

$\angle ADC = \angle ABC = 70^0$

T.k. S_{ABCD}=?

Yechish: ΔADE dan: $\frac{AE}{AD} = sin70°$;

$AE = 2 \sin 70^0$;

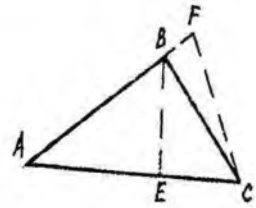
$$S_{ABCD} = DC \cdot AE = 3 \cdot 2 \cdot sin70° = 6 \cdot sin70° \approx 6 \cdot 0{,}9397 \approx 5{,}64m^2$$

Uchburchakning yuzi. ABC uchburchak berilgan bo'lsin. Bu uchburchakni rasmda ko'rsatilganidek $ABCD$ parallelogramga to'ldiramiz. Parallelogramning yuzi ABC va BDC uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. Bu uchburchaklar teng bo'lgani uchun parallelogramning yuzi ABC uchburchak yuzining ikkilanganiga teng (10.15-rasm).

Parallelogrammning AC tomoniga mos balandligi ABC uchburchakning AC tomoniga o'tkazilgan balandligiga teng. Demak, uchburchakning yuzi uning tomoni bilan shu tomonga tushirilgan balandligi ko'paytmasining yarmiga teng:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE$$

2-masala. Tomonlari *8 sm* va *4 sm* bo'lgan uchburchakning shu tomonlariga balandliklar o'tkazilgan. *8 sm* li tomonga o'tkazilgan balandlik *3 sm* ga teng. *4 sm* li tomonga o'tkazilgan balandlik qanchaga teng? (10.15-rasm)



10.15-rasm

Ber: $AC = 8sm$

$AB = 4sm$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BE$ (1)

$BE = 3sm$

$S = \frac{1}{2} AB \cdot CF$ (2)

T.K.: CF=?

Yechish:

(1), (2) $\Rightarrow \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{AB \cdot CF}{2}$

$$CF = \frac{AC \cdot BE}{AB} = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6(sm)$$

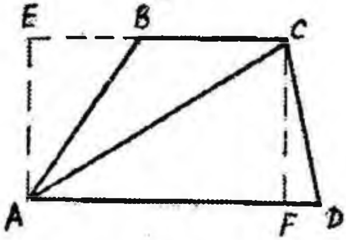
Uchburchak yuzini hisoblashning bu formulasidan tashqari quyidagi formulalari ham mavjud:

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} bc\, sin\alpha$ (bunda α - b va c tomonlar orasidagi burchak).

$S_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$ (bunda a, b va c tomonlar, p-yarim perimetr)

Trapetsiyaning yuzi. *ABCD* berilgan trapetsiya bo'lsin *AC* diagonalni o'tkazamiz (10.16-rasm). *AC* diagonal *ABCD* trapetsiyani ikkita *ABC* va *ACD* uchburchakka ajratadi. Trapetsiyaning yuzi shu uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. Uchburchaklarni mos ravishda AE va CF balandliklarini o'tkazamiz. U holda

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} BC \cdot AE$$

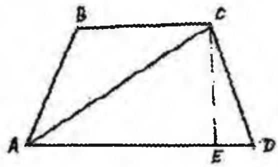


10.16-rasm

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} AD \cdot CF + \frac{1}{2} AD \cdot CF = \frac{(AD+BC)}{2} \cdot CF$$

Demak, trapetsiyaning yuzi, uning asoslari yig'indisi yarmi bilan balandligi ko'paytmasiga teng.

3- masala. Teng yonli trapetsiyaning katta asosi *44 m* yon tomoni *17 m* va diagonali *39 m*. Shu trapetsiyaning yuzini toping? (10.17-rasm)



10.17-rasm

Ber: $AD = 44\, m$

$AB = CD = 17\, m$

$AC = 39\, m$

T.K.: S_{ABCD}=?

Yechish: Belgilashlar kiritamiz.

$$ED = x;\ AE = 44 - x;\ CE = h$$

1) x ni topamiz: ΔACE va ΔCDE lardan: $AC^2 = AE^2 + CE^2$; $CD^2 = ED^2 + CE^2$

$$39^2 = (44 - x)^2 + h^2) \Rightarrow 39^2 - (44 - x)^2 = 17^2 - x^2 \Rightarrow 88x = 704 \Rightarrow x = 8(m)$$

$$17^2 = x^2 + h^2$$

2) h ni topamiz: $h^2 = 17^2 - x^2 = 225 \Rightarrow h = 15(m)$

3) BC ni topamiz: BC=AD-2ED=44-16=28(m)

4) $S_{ABCD} = \frac{AD+BC}{2} \cdot h = \frac{44+28}{2} \cdot 15 = 540(m^2)$;

Trapetsiyaning yuzini quyidagi formula bilan ham topish mumkin

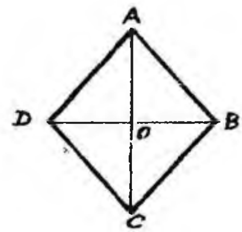
$S = EF \cdot h$ (bunda EF - trapetsiyaning o'rta chizig'i, h-balandlik.

Rombning yuzi. *ABCD* berilgan romb bo'lsin. (10.18-rasm). *AC* va *DB* diagonallarini o'tkazamiz. *ABCD* rombni *ADB* va *DBC* uchburchaklarga ajratamiz. *ABCD* rombning yuzi *ADB* va *DBC* uchburchaklar yuzlarining yig'indisiga teng. *AO* va *OC* bu uchburchaklarning balandliklari. U holda

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} DB \cdot AO;$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} DB \cdot OC;$

$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} DB \cdot AO + \frac{1}{2} DB \cdot OC = \frac{1}{2} DB(AO + OC) = \frac{1}{2} DB \cdot AC.$



10.18-rasm

DB, AC rombning diagonallari. Demak, rombning yuzi uning diagonallari ko'paytmasining yarmiga teng ekan.

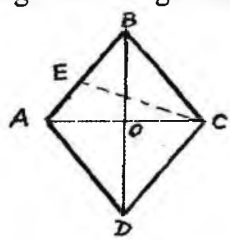
4-masala. Balandligi *10 sm*, o'tkir burchagi esa *30⁰* ga teng bo'lgan rombning yuzini toping (10.19-rasm).

Berilgan: .

$\angle ABC = 30^0$

$\underline{CE = h = 10sm}$

T.k. $S_{\Delta ABC}$=?



10.19-rasm

Yechish:

1) ΔBECdan $\frac{EC}{BC} = \sin 30^\circ$ $BC = \frac{EC}{\sin 30^\circ} = \frac{10}{\frac{1}{2}} = 20sm$

Demak, AB=BC=CD=DA=20 sm

2) $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot EC = \frac{1}{2} 20 \cdot 10 = 100sm^2$

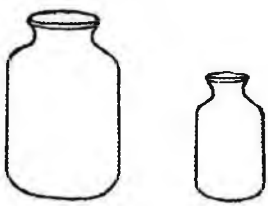
3) $S_{ABCD} = 2 \cdot S_{ABC} = 2 \cdot 100 = 200sm^2$

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Qanday miqdorga figuraning yuzi deyiladi?
2. Figuraning yuzini o‘lchashning usullarini tushuntiring.
3. Figura yuzini paletka yordamida o‘lchaganda yuzani hisoblash formulasini keltirib chiqaring.

10.4. Jismning hajmi va uni o‘lchash

Biz turmushda shofyor mashinaga *65 kg* suyuq gaz yoki *50 l* benzin quygan yoki idishning hajmi *28* kub dm ga teng ekan degan gaplarni eshitamiz. Bu birliklar esa idishning hajmini bildiradi. Ikkita idish suyuqlik bilan to‘ldirilgan bo‘lsin (10.20-rasm). Ularning birinchisini $m$kg, ikkinchisini esa $n$kg suyuqlik bilan to‘ldirish mumkin.



10.20-rasm

Bunda $\frac{m}{n}$ soni birinchi idish ikkinchi idishdan necha marta katta ekanini ko‘rsatadi. Mana shu songa birinchi idishning hajmi deyiladi. Bunda ikkinchi idish o‘lchov birligi hisoblanadi.

Hajm tushunchasining bu ta’rifdan uning quyidagi xossalari kelib chiqadi:

1) har bir idish ma'lum musbat hajmga ega;

2) teng idishlarni hajmlari teng;

3) agar bir idish ikki qismga ajralsa, u idishning hajmi qismlar hajmlari yig'indisiga teng.

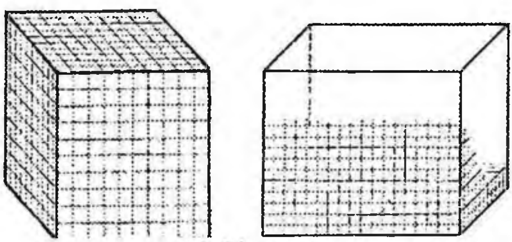
Bu ta'rifga ko'ra jismni hajmini bilish uchun uni suyuqlik bilan to'ldirish kerak bo'ladi. Amaliyotda esa buni teskarisini qilishga to'g'ri keladi. Boshqacha aytganda, idishni suyuqlik bilan to'ldirmasdan, uni to'ldirish uchun zarur bo'lgan suyuqlik miqdorini bilish talab qilinadi. Agar idish hajmi ma'lum bo'lsa, idish hajmini birlik hajmini to'ldirish uchun zarur bo'lgan suyuqlik miqdoriga ko'paytirib, suyuqlik miqdorini topgan bo'lar edik. Berilgan jismning hajmi qanday topiladi? Agar jismni chekli miqdordagi tetroedrlarga, ya'ni uch burchakli muntazam piramidalarga ajratish mumkin bo'lsa, bu jismni oddiy jism deb ataladi. Oddiy jismlarning hajmini hisoblashda, hajmning yuqoridagi xossalariga asoslaniladi, ya'ni:

1) har bir oddiy jism berilgan o'lchov birligida ma'lum hajmga ega;

2) teng jismlarning hajmlari teng;

3) agar oddiy jism bir nechta oddiy jismga ajratilsa, bu jismning hajmi uning qismlari hajmlrining yig'indisiga teng.

Oddiy jismlarni hajmlarini hisoblashni jumladan, to'g'ri burchakli parallelepipedning hajmini hisoblashdan boshlaymiz.



10.21-rasm

10.21-rasmda hajm o'lchovi birligi bo'lgan kub va hajmi o'lchanishi lozim bo'lgan to'g'ri burchakli parallelepiped tasvirlangan. Kubning qirrasi uzunlik birligi bo'lib hizmat qiladi.

Avval parallelepipedning a, b, c qirralarining uzunliklari chekli o'nli kasrlar bilan ifodalangan hamda verguldan keyingi xonalar soni n dan oshmagan holni qarab chiqamiz. Kubning bitta uchidan chiqqan qirralarini 10^n ta teng bo'lakka ajratamiz va bo'linish nuqtalaridan bu qirralarga perpendikular tekisliklar o'tkazamiz.

Bunda kub qirralari $\frac{1}{10^n}$ ga teng bo'lgan $10^n \cdot 10^n \cdot 10^n = 10^{3n}$ ta kichik kubga ajraladi. Kichik kubning hajmini topamiz. Hajmning xossasiga ko'ra katta kubning hajmi kichik kublar hajmlarning yig'indisiga teng. Katta kubning hajmi birga tengligi, kichik kublar soni esa 10^{3n} ga tengligi uchun kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga teng. $\frac{a}{\frac{1}{10^n}} = a \cdot 10^n$ $\frac{b}{\frac{1}{10^n}} = b \cdot 10^n$ $\frac{c}{\frac{1}{10^n}} = c \cdot 10^n$

sonlar butun sonlar bo'lgani uchun parallelepipedning qirralarini $\frac{1}{10^n}$ ga teng bo'lgan butun sondagi qismlarga ajratamiz. a qirrada ular $a \cdot 10^n$ ta, b qirrada $b \cdot 10^n$ ta, c qirrada $c \cdot 10^n$ ta bo'ladi. Qirralarga perpendikular tekisliklar o'tkazamiz. Bunda biz parallelepipedning tomoni $\frac{1}{10^n}$ bo'lgan kichik kublarga ajratamiz.

Ularning soni $a10^n \cdot b10^n \cdot c10^n = \alpha bc10^{3n}$ ga teng.

Parallelepipedning hajmi undagi kichik kublar hajmlarining yig'indisiga teng. Kichik kubning hajmi $\frac{1}{10^{3n}}$ ga, ularning soni esa $\alpha bc \cdot 10^{3n}$ ga tengligi uchun parallelepipedning hajmi $abc \cdot 10^{3n} \cdot \frac{1}{10^{3n} = abc}$ ga teng.

Endi a,b,c qirralardan kamida bittasi cheksiz o'nli kasr bilan ifodalanadigan holni qarab chiqamiz. A sonining n ta o'nli raqamiga kami bilan va ortig'i bilan olingan taqribiy qiymatlarini a_1 ba a_2 bilan belgilaymiz, b va c sonlarning shunday aniqlikdagi taqribiy qiymatlarini mos ravishda b_1 va b_2, c_1 va c_2 bilan belgilaymiz.

Qirralari a_1, b_1, c_1 bo'lgan parallelepipedning hajmi berilgan parallelepipednikidan kichik, chunki uni berilgan parallelepipedning ichiga joylashtirish mumkin. Isbotga ko'ra qirralari a_1, b_1, c_1 bo'lgan parallelepipedning hajmi esa a_1. b_1. c_1

ga teng, qirralari a_2. b_2, c_2 bo‘lgan parallelepipedning hajmi a_2. b_2. c_2 ga teng. Shunday qilib, berilgan parallelepipedning hajmi a_1. b_1. c_1 va a_2. b_2. c_2 orasida yotadi. a_1. b_1. c_1 va a_2. b_2. c_2 miqdorlar esa a b c sonining oldindan berilgan aniqlikdagi taqribiy qiymati bo‘lgani uchun, n yetarlicha katta bo‘lganda $V=abc$ bo‘ladi. Shunday qilib, to‘g‘ri burchakli parallelepipedning hajmi $V=abc$ formula bo‘yicha hisoblanadi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Jismning hajmi deganda nimani tushunasiz?
2. Hajm tushunchasining xossalarini aytib bering.
3. To‘g‘ri burchakli parallelepiped hajmini o‘lchashni tushuntirib bering.

10.5. Jismning massasi va uni o‘lchash

Massa-asosiy fizik kattaliklardan biridir. Jismning massasi tushunchasi og‘irlik-kuch tushunchasi bilan chambarchas bog‘langan.

Og‘irlik kuchi ta’sirida jism Yerga tortiladi. Jismning og‘irligi jismning o‘zigagina bog‘liq emas. Shuning uchun u turli kengliklarda turlicha: masalan, qutbda jism ekvatordagiga qaraganda 0,5% og‘ir. Og‘irlik kuchi bunday o‘zgaruvchanligiga qaramay quyidagi xususiyatga ega: har qanday sharoitda ham ikki jism og‘irligining nisbati bir xildir.

Jismning og‘irligini boshqa jism og‘irligi bilan taqqoslab o‘lchashda jismning yangi xossasi kelib chiqadi, bu xossa massa deb ataladi.

Faraz qilaylik, richagli tarozining bir pallasiga birorta a jism, ikkinchi pallasiga b jism qo‘yilgan bo‘lsin. Bunda quyidagi hollar bo‘lishi mumkin:

1) tarozining ikkinchi pallasi tushib, birinchisi shunday ko‘tariladiki, ular barobar bo‘lib qoladilar, bu holda tarozi muvozanatda, a va b jismlar bir xil massaga ega deyiladi:

2) tarozining ikkinchi pallasi birinchi pallasidan balandligicha qoladi: bu holda a jismning massasi b jismning massasidan katta deyiladi:

3) tarozining ikkinchi pallasi tushdi, birinchi pallasi ko‘tarildi va ikkinchidan baland bo‘ladi: bu holda a jismning massasi b jismning massasidan kichik deyiladi.

Shuni eslatamizki, agar jism ekvatorda richagli tarozida o‘lchansa, keyin jism va tarozi toshlari qutbga olib borib o‘lchansa, o‘sha natijani beradi, chunki jism ham, tarozi toshlari ham o‘z og‘irliklarini bir xil o‘zgartiradi. Shunday qilib, jismning massasi o‘zgarmaydi,u qayerda bo‘lmasin, uning massasi doim bir xil bo‘ladi.

Matematik nuqtai nazardan massa-quyidagi xossalarga ega bo‘lgan musbat miqdor:

1) tarozida bir-birini muvozanatlovchi jismlarning massasi bir xil;

2) jismlar bir-birlari bilan birlashtirilsa, massalar qo‘shiladi: birgalikda olingan bir nechta jismning massasi ular massalarining yigindisiga teng.

Bu ta’rifni uzunlik va yuz uchun berilgan ta’riflar bilan solishtirsak, massa ham uzunlik va yuz ega bo‘lgan xossalarga ega bo‘lishini, biroq u fizik jismlar to‘plamida berilganligini ko‘ramiz. Massalar tarozilar yordamida quyidagicha o‘lchanadi: massasi birlik sifatida qabul qilinadigan e jism tanlab olinadi (bunda massaning ulushlarini ham olish mumkin). Tarozining bir pallasiga massasi o‘lchanayotgan jism qo‘yiladi, ikkinchi pallasiga massa birligi qilib olingan jismlar, ya’ni tarozi toshlari qo‘yiladi. Bu toshlar tarozi pallalari muvozanatga kelguncha qo‘yiladi. O‘lchash natijasida berilgan jismning massasining qabul qilingan birligidagi son qiymatini jism massasining taqribiy qiymati deb qarash kerak (masalan, *3kg 125 g* bo‘lsa, *3125* soni).

Uzunlikdagiga o‘xshash massalarni taqqoslash, ular ustida amallar bajarish massalarning son qiymatlarini taqqoslashga va ular ustida amallar bajarishga keltiriladi.

Massaning asosiy birligi-kilogramm. Bu asosiy birlikdan massaning boshqa birliklari: gramm, tonna va boshqalar hosil bo‘ladi.

10.6. Vaqt oraliqlari va ularni o'lchash

Vaqt tushunchasi uzunlik va massa tushunchalariga nisbatan ancha murakkabdir. Kundalik hayotda vaqt bir voqeani ikkinchi voqeadan ajratib turadi. Matematika va fizikada vaqt skalyar kattalik (miqdor) sifatida qaraladi, chunki vaqt oraliqlari uzunlik, yuz, massalar xossalariga o'xshash xossalarga ega.

Vaqt oraliqlarini taqqoslash mumkin.

Masalan, bir xil yo'lga velosipedchi yengil avtamobilga qaraganda ko'proq vaqt sarflaydi.

Vaqt oraliqlarini qo'shish mumkin.

Masalan, oliygohlarda bitta ma'ruza o'qish uchun ketgan vaqt maktabdagi ikki darsga ketgan vaqtga teng. Vaqt oraliqlarini ayirish, musbat haqiqiy songa ko'paytirish mumkin. Vaqt oraliqlari o'lchanadi. Vaqt oralig'ini o'lchash uchun vaqt birligi qabul qilingan.

Xalqaro sistemada vaqt birligi qilib sekund olingan. Sekund bilan bir qatorda vaqtning boshqa birliklari; minut, soat, sutka, yil, hafta, oy, asr ishlatiladi. Yil va sutka birliklari tabiatdan olingan, soat, minut, sekund birliklarini kishilar o'ylab topgan. Yil-Yerning Quyosh atrofida aylanish vaqti. Sutka Yerning o'z o'qi atrofida aylanish vaqti.

Yil taxminan $365\frac{1}{4}$ sutkaga teng. Lekin, kishilarning bir yilgi hayoti sutkalarning butun sonlaridan tuzilgan. Shuning uchun har yilga 6 soatdan qo'shish o'rniga har to'rtinchi yilga butun sutka qo'shiladi. Bu yil 366 kundan iborat bo'lib, kabisa yili deyiladi.

Birliklar sistemasining rivojlanish tarixi. Birliklarning xalqaro sistemasi. Kishilik jamiyatni rivojlantirish bosqichida har xil miqdorlarni o'lchash va o'lchash ishlarini aniqroq bajarish kerakligini bilganlar. Aniq o'lchashlarning asosi bo'lib esa birliklarning aniq namunalari (etalonlari) xizmat qiladi. Namunalarning aniqligi esa mamlakat fan texnika va sanoati rivojlanishini ko'rsatib, uning ilmiy-texnik potensialini belgilaydi.

Miqdorlar o'lchov birliklarining rivojlanishi tarixi ham bir qancha davrni o'z ichiga oladi. Eng qadimgi davrda uzunlik birligi bo'lib, kishi tanasining qismlari olingan. Masalan, uzunlik o'lchovi birligi sifatida kaft (bosh bormoqsiz to'rtta barmoq kengligi), tirsak (tirsak uzunligi), fut (oyoq tagi kafti uzunligi), duym (katta barmoqning bir bo'lagi uzunligi,

1 duym=2sm 5,4 mm) va boshqalar.

Shu davrlarda yuz birligi sifatida quduq (bir quduq suvi bilan sug'oriladigan maydon), qo'sh yoki plug (qo'sh yoki plug bilan bir kunda ishlov berilgan o'rtacha maydon) va boshqalar olingan.

XIV-XVI asrlarda savdo-sotiqning rivojlanishi bilan miqdorlarning o'lchashning obyektiv birliklari vujudga kela boshladi. Masalan, Angliyada duym (uchta arpa donachasining uzunligi), fut (yonma-yon qo'yilgan *64* ta arpa donachasining kengligi).

Massa birligi sifatida grant (boshoq massasi) va karat (dukkaklii o'simlik turlaridan biri urug'ining massasi) qabul qilingan. Miqdorlar o'lchov birliklari rivojlanishining keyingi tarixida bir-biri bilan o'zaro bog'langan birliklar kiritildi.

Masalan, Rossiyada uzunlik birligi qilib milya, chaqirim (versta), sarjin va gaz (arshin) kiritildi. 3 gaz 1 sarjinga, *500 sarjin 1 chaqirimga, 7 chaqirim 1 milyaga* teng (*1dengiz milyasi 1852 m ga teng, 1geografik milya 7420 m*). Ammo miqdorlar birliklari orasidagi bog'lanish ixtiyoriy bo'lib, turli mamlakatlarda turlicha, hatto mamlakat ichidagi oblastlar ham o'zlarining uzunlik, yuz, massa birliklariga ega bo'lgan.

Bu esa sanoat va qishloq-xo'jaligining rivojlanishiga to'siq bo'lgan, ilm-fan va savdo-sotiq rivojlanishiga halaqit bergan. XVIII asrga kelib Fransiyada birliklarning yangi sistemasi-Xalqaro sistemaning asosi bo'lgan sistema vujudga keldi.

Bu sistemada uzunlikning asosiy birligi qilib metr («metr» so'zi grekcha «metro» so'zidan olingan bo'lib, «o'lchov» ni bildiradi)

Parijdan o'tadigan Er meridiani uzunligining *40* milliondan bir qismi qabul qilingan. Bundan tashqari yuz, hajm, massa birliklari qabul qilingan. Tomonining uzunligi *10 m* bo'lgan kvadratning yuzi *1 ar*, qirrasining uzunligi *0,1 m* bo'lgan kub hajmiga teng suyuqlik yoki sachrovchi jismlar hajmi 1 litr: qirrasining uzunligi

0,01 m bo'lgan kub ichidagi toza suv massasi-*1 gramm* deb qabul qilingan.

Shuning bilan qo'shimcha yordamida hosil bo'ladigan o'lcham karralari va ulushli birliklar: mega *(10^6), kilo (10^3), gekto (10^2), deka (10^1), detsi (10^{-1}), santi (10^{-2}), milli (10^{-3})* kiritildi.

Massa birligi uchun 1^0S haroratdagi 1 dm^3 suvning massasi 1 kilogramm deb qabul qilindi. Yuqoridagi miqdorlarning hamma birliklari uzunlik birligi metr bilan bog'langani uchun miqdorlarning yangi sistemasi o'lchovlarning metrik sistemasi nomini oldi. Shu davrda metr va kilogrammning platina etaloni tayyorlandi: metrni oxirlarida shtrixlar qo'yilgan chizg'ich, kilogrammni esa silindrik tarozi toshi ifodalaydi. Bu etalonlar Fransiyaning milliy arxiviga saqlash uchun berilgan. Ammo tez orada bu sistemaga ham o'zgartirishlar kiritishga to'g'ri keldi. Bunga sabab meridian uzunligining etarlicha aniq hisoblanmagani sabab bo'ldi. O'lchovlarning metrik sistemasi darrov tan olinmadi. Rossiyada bu sistema *1899* yilda ishlatila boshladi.

XX asrning 50 yillariga kelib o'lchovlarning metrik sistemasini to'ldiruvchi va rivojlantiruvchi turli xil birliklar sistemasi vujudga keldi. Shu sababli yagona universal birlik sistemasini barpo qilish muammosi tug'ildi.

1960 yilda o'lchov va og'irliqlarning XI bosh konferensiyasi xalqaro birliklar sistemasi (SI) (ruscha talqini SI, "Xalqaro", "ES-I" deb o'qiladi) ni kiritishi bilan, bu muammo hal qilindi.

Butun dunyo uchun yagona hisoblangan bunday sistemaga bo'lgan talab yuqori bo'lgani uchun u qisqa vaqt ichida keng xalq ommasi orasida tan olindi va butun dunyoga tarqaldi. SI sistemada ettita asosiy birlik (*metr, kilogramm, sekund, amper, kelven, mol va kandela*) va 2 ta qo'shimcha birlik (radian va steradian) bor.

Ma'lumki, uzunlik birligi metr va massa birligi kilogramm o'lchovlarning metrik sistemasida ham bor edi. Ular yangi sistemaga qanday o'zgarishlar bilan kiritilgan? Metrning yangi ta'rifi kiritildi – u yassi elektromagnit to'lqinining vakuumda (havosiz bo'shliqda) sekundning $\frac{1}{299792458}$ qismida o'tgan yo'li sifatida qaraladi. Metrning bunday ta'riflanishiga o'lchashlarning aniqligiga bo'lgan talabning oshganligi va har qanday sharoitda ham o'zgarishsiz qoladigan miqdor birligiga ega bo'lishiga erishishdir.

Massa birligi kilogrammning ta'rifi o'zgarmadi, kilogramm – 1889 yilda platina va iridiy aralashmasidan tayyorlangan silindr massasi. Bu etalon Fransiyaning Sevre shaharida o'lchov va og'irliklarning xalqaro byurosida saqlanadi. Xalqaro sistemaning uchinchi asosiy birligi vaqt birligi – sekunddir. 1960 yilgacha sekund Quyosh sutkasining $\frac{1}{6400}$ qismiga teng deb olingan, ya'ni sekund yerning o'z o'qi atrofida aylanishi bo'yicha hisoblangan. Bunday hisoblashda bir sutkada 86400 sekund bo'ladi, bu 1440 minut yoki 24 soatni tashkil qiladi. 1960 yilda o'lchov va og'irliklarning Bosh konferensiyasi yerning Quyosh atrofida orbita bo'ylab harakatiga asoslanib, vaqtning yangi birligiga o'tish haqida qaror qabul qildi. Sekund yilning $\frac{1}{31556925{,}9747}$ qismi sifatida olindi.

Ammo bu ham olimlarni qanoatlantirmadi. 1967 yilda sekundni boshqacha hisoblash taklif qilindi. "Sekund seziy-133 atomi asosiy holatining ikki o'ta nozik sathlar orasidagi o'tishga mos bo'lgan nurlanish davridan 9192631770 marta katta vaqtga teng" deb olindi.

Umuman olganda fan va texnikaning rivojlanishi muntazam ravishda miqdorlar birliklarining ta'riflariga tuzatishlar kiritib turadi.Amalda hamma uzunliklarni metr bilan, massalarni kilogramm bilan, vaqtni sekund bilan o'lchashga to'g'ri kelavermaydi.

Shuning uchun asosiy birliklardan ularga karrali va ulushli bo'lgan yangi birliklar hosil qilinadi. Karrali birliklar asosiy birliklardan 10, 10^2, 10^3, 10^6, 10^9, 10^{12}, 10^{15},10^{18} marta katta, ulushli birliklar asosiy birliklarning 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-6}, 10^{-9},10^{-12},10^{-15}, 10^{-18}, qismiga teng. Birliklarning yangi nomlari "metr", "gramm", "sekund" lar va jadvalda ko'rsatilgan old qo'shimchalarni qo'shish yordamida hosil qilinadi:

Old qo'shim-chalar	Old qo'shim-chalarning belgilanishi	Ko'paytuvchi	Old qo'shimchalar	Old qo'shimchalarning belgilanishi	Ko'pay-tuvchi
Mega	M	10^6	Santi	s	10^{-2}
Kilo	k	10^3	Milli	m	10^{-3}
Gekto	g	10^2	Mikro	mk	10^{-6}
Deka	da	10	Nano	n	10^{-9}
Detsi	d	10^{-1}			

Masalan, kilometr-karrali birlik, $1km = 10^3 \cdot 1m = 1000m$; millimetr-ulushli birlik, $1mm = 10^{-3} \cdot 1m = 0{,}0001m$. Umuman, uzunlik uchun karrali birlik kilometr (*km*), ulushli birliklar-santimetr (*sm*), millimetr (*mm*), mikrometr (*mkm*), nanometr (*nm*), massa uchun karrali birlik megogramm (*mg*), ulushli birliklar-gramm (*g*), milligram (*mg*), miqrogramm (*mkg*), vaqt uchun karrali birlik kilosekund (*ks*), ulushli birliklar-millisekund (*ms*), mikrosekund (*mks*), nanosekund (*ns*). Uzunlik, massa va vaqt orqali aniqlanadigan miqdorlar hosilaviy miqdor deyiladi. Ularning birliklari asosiysi bilan mos tushishi kerak. Ba'zi bir hosilaviy miqdorlarni va ularning birliklarini aytib o'tamiz:

1. Yuz. Yuzning birliklari-kvadrat metr (m^2), kvadrat kilometr (km^2), kvadrat detsimetr (dm^2), kvadrat santimetr (sm^2), kvadrat millimetr (mm^2).

2. Hajm, sig'im. Hajm birliklari-kub metr (m^3), kub millimetr (mm^3), litr (*l*), gektolitr (*gl*), millilitr (ml). SI da litr kub detsimetrning o'ziga xos boshqacha nomi sifatida qaraladi, ya'ni $1l = 1dm^3$.

3. Tezlik. Tezlik birliklari-sekundiga metr (m/s), soatiga kilometr (km/soat), sekundiga santimetr (sm/s).

Mamlakatimizda ishlatiladigan miqdorlar birliklari, ular nomlari (atalishi), belgilanishi va qo'llanish qoidalari Davlat standarti tomonidan tayinlanadi. Bu standart esa birliklarning Halqaro sistemasiga asoslangan. Shuningdek, SI dagi birliklardan tashqari birliklar gruppasi mavjud. Xususan, massa uchun tonna (*t)* birligini; vaqt uchun minut (*min*), soat, sutka, hafta, oy, yil, asr; yuz uchun gektar (*ga*); temperatura uchun selsiy gradus (^{0}C) kabi birliklarini ishlatishga ruxsat berilgan. Ammo massa uchun sentner, yuz uchun ar birliklar Davlat standartiga binoan qo'llanilmaydi. Miqdorlarning birliklari bilan bog'liq bo'lgan terminlarning to'g'ri qo'llanilishi qoidalari ham Davlat standartida tasdiqlangan.

Shuning bilan birga ayrim adabiyotlarda uchraydigan ba'zi bir o'lchov birliklarini talabalar bilib qo'ysa, maqsadga muvofiq bo'lar edi:

Miskol – 4,1 – 4,4 gr.
Qadoq – 400 gr.
Nimcha – 2 kg.
Dinor - 4,8 kg.
Pud – 16 kg
Botmon – 20 kg.
Tutam – 8 sm.
Qarich – 20 sm.
Arshin – 71,1 sm.
Gaz – 70 – 90 sm.
Chaqrim - 1,5 km.
Tosh – 7-8 km.
Farsax – 8,5 – 9,5 km.

O'z-o'zini tekshirish uchun savollar

1. Jismning massasi deganda nimani tushunasiz?
2. Jismning massasi va og'irligi orasidagi farq nimada?
3. Jism massasi xossalarini aytib bering?
4. Massa qanday o'lchanadi?
5. Vaqt oraliqlari va ularni o'lchashni tushuntirib bering.
6. Qadimgi o'lchov birliklari to'g'risida (kaft, tirsak, fut. duym) gapirib bering.
7. XVIII asrda Fransiyada Xalqaro birliklar sistemasining vujudga kelishini so'zlab bering.
8. 1960 yilda birliklar sistemasi SI ni qabul qilinishi va bu sistemada ettita asosiy birliklar haqida ma'lumotlar bering.
9. Asosiy va karrali birliklar qanday hosil qilinadi.
10. Hosilaviy miqdorlar va ularning birliklari to'g'risida nimalarni bilasiz?

XI BOB. MATNLI MASALALAR

11.1. Matnli masala tushunchasi. Matnli masalalar turlari, matnli masalalar yechish jarayonini modellashtirish

Matnli masala tushunchasi. Boshlang'ich ta'limda matnli masalalarni yechishga katta e'tibor beriladi. Chunki bunday masalalar matematikaning hayot bilan bog'liqligini ta'minlaydi, o'quvchilarning fanga bo'lgan qiziqishini orttiradi va hayotiy vaziyatlarning matematik modelini tuzishga o'rgatadi.

Boshlang'ich sinf o'qituvchisi matnli masalalarning tuzilishi, turlari va yechish usullari haqida aniq tasavvurga ega bo'lmog'i lozim.

Matnli masala deb, hayotiy vaziyatga oid sonli ma'lumotlar asosida noma'lum bo'lgan kattalikni topishga oid topshiriqqa aytiladi.

Matnli masala ikki qismdan iborat, sharti va talabli. Masala shartida ob'ektlar, ularni xarakterlovchi sonli ma'lumotlar va ular orasidagi munosabatlar ifodalanadi. Masalaning talabi nimani topish kerakligini ko'rsatadi. Masalaning talabi savol yoki buyruq ko'rinishida bo'ladi.

Matematik masalalar sodda va tarkibli masalalarga ajratiladi. Bitta amal bilan yechish mumkin bo'lgan masalalar sodda masalalar jumlasiga kiritiladi. Bir nechta sodda masaladan tuzilgan va shu sababli ikki yoki undan ortiq amal yordamida yechiladigan masalalar tarkibli masalalar deyiladi.

Har qanday sodda masalaga doir ikkita teskari masala tuzish mumkinki, ularning har biriga o'sha syujet bo'yicha izlanayotgan son ma'lum deb hisoblanib, izlanayotgan son sifatida esa to'g'ri masala shartida ma'lum bo'lgan son qatnashadi. Masalan: hovlida 5 ta qiz o'ynayotgan edi. Ularning 2 tasi uyga ketdi. Hovlida nechta qiz qoldi? Masalaga 2 ta teskari masala tuzish mumkin. Birinchisi «Hovlida bir nechta qiz o'ynayotgan edi. 2 ta qiz uyiga ketgandan so'ng, hovlida 3 ta qiz qoldi. Oldin hovlida nechta qiz bo'lgan?» Ikkinchisi «Hovlida 5 qiz. Bir nechta qiz uyiga ketgandan so'ng hovlida 3 ta qiz qoldi. Nechta qiz uyiga ketgan?» Bu masala berilgan 1-masalaga nisbatan, shuningdek 2-masalaga nisbatan ham teskari masala sifatida qarash mumkin.

Boshlang'ich sinflarda matematikadan masalalarning turli ko'rinishlari beriladi: nostandart masalalar, muammoli masalalar, ortiqcha ma'lumotli masalalar, ma'lumotlari yetishmaydigan masalalar, ko'p yechimli masalalar, mantiqiy masalalar va hokazo.

Boshlangich sinf o'qituvchisi

1. Har bir masalada qanday maqsad ko'zda tutilganligini;
2. Bu masalaning masalalar tizimidagi o'rni qandayligini;
3. Boshlang'ich sinflarning matematika kursida matnli masalalar tuzilishini;
4. Boshlang'ich sinflarda matematika kursida o'tiladigan masala turlarni;
5. Boshlang'ich sinflarda matnli masalalarni yechish bosqichlarini;
6. Masalani tahlil etishni;
7. Masala yechishning turli usullarini bilishi;
8. Masala yechimini tekshirishning turli usullaridan foydalana olishi;
9. Masalalar yechimidan xulosa chiqarishni bilishi kerak.

Matnli masalalar turlari. Sodda masalalarning asosiy turlarini quyidagicha taqsimlash boshlang'ich maktablarda qo'llanish uchun qulay:

Arifmetik amallar mazmunini ochishga doir masalalar: yig'indini, qoldiqni topishga doir masalalar, bir xil qo'shiluvchilar yig'indisini topishga doir masalalar, bo'lishga (mazmuniga ko'ra bo'lishga va teng qismlarga bo'lishga) doir masalalar.

Amalning noma'lum komponentlarini (qo'shiluvchi, kamayuvchi, ayriluvchi, ko'paytuvchi, bo'linuvchi, bo'luvchi) topishga doir masalalar.

Bir necha birlik (yoki bir necha marta) ortiq (yoki kam) munosabati bilan bog'liq masalalar sonni bir nechta birlik (yoki bir nechta marta) orttirish, yoki kamaytirishga doir bevosita (yoki bilvosita) ifodalangan masalalar, sonlarni ayirmali (yoki karrali) taqqoslashga doir masalalar.

Miqdorlarning proportsional bog'lanishlariga doir masalalar.

Hamma turdagi sodda masalalar o'quvchi uchun quyidagi maqsadlarda kerak bo'ladi:

1) matematik masalalning strukturasi (tarkibi) bilan tanishish, ya'ni uning sharti – berilganlari, savoli – izlanayotgan miqdorlari, masalaning yechimi, javobi, va h.k. atamalari bilan (bular matematik munosabatlarni ifodalaydi) tanishish.

2) masala savoliga javob berish uchun bajarish kerak bo'lgan amallarni ongli tanlashni o'rganish (masalalar, amallar mazmunini ochishga yordam beradi).

3) shatrga kirgan kattaliklar orasidagi elementar funksional munosabatlarni, amallarning komponentlari va natijalari orasidagi bog'lanishlarni tushunish.

Sodda masala matnini o'zgartirish ustida ishlash o'quvchiga ko'proq abstrakt matematik tushunchalarni egallashga yordam beradi. Masalan, ushbu «Malika 7 ta daftar sotib oldi. Daftar 200 so'm turadi. Malika qancha pul to'lagan?» Masalaning shartini, masalan, daftarning bahosi 200 so'm, 7 ta daftar qancha turishini biling. kabi talab bilan o'zgartirish mumkin.

O'quvchini tarkibli masalalar yechishga tayyorlash.

Birinchi bosqichda o'qituvchi ko'rilayotgan turdagi masalalarni yechishga tayyorgarlik ishini olib boradi. Bu bosqichda o'quvchilar mazkur masalalarni yechishda tegishli amallarni tanlash uchun asos bo'ladigan bog'lanishlarni o'zlashtirishlari lozim.

Ikkinchi bosqichda o'qituvchi ko'rilayotgan turdagi masalalarni yechilishi bilan o'quvchilarni tanishtiradi. Bunda o'quvchilar berilgan sonlar va noma'lum son orasidagi bog'lanishni aniqlash, buning asosida arifmetik amallarni tanlashni o'rganadilar, ya'ni masalada ifodalangan konkret, vaziyatdan tegishli arifmetik amalni tanlashga o'tishni o'rganadilar. Bunday ishlarni olib borish natijasida o'quvchilar ko'rilayotgan turdagi masalalarni yechish usuli bilan tanishadilar.

Uchinchi bosqichda o'qituvchi ko'rilayotgan turdagi masalalarni yechish uquvini shakllantiradi. O'quvchilar bu bosqichda ko'rilayotgan turdagi istalgan masalani uning konkret mazmunidan qat'iy nazar yechishni o'rganishlari kerak, ya'ni bu turdagi masalalarni yechish usullarini umumlashtirishlari lozim.

U yoki bu turdagi masalalarni yechishga tayyorgarlik ko'rishi arifmetik amallarni tanlashda berilgan sonlar va izlanayotgan son orasidagi qanday bog'lanishning tayanishga bog'liq. Shunga muvofiq ravishda maxsus mashqlar o'tkaziladi.

1. Ko'p hollarda – masalalar yechishga qadar to'plamlar ustida amallar bajaradi. Masalan, ko'p sodda masalalarni yechilishi bilan tanishtirish oldidan to'plamlar ustida amallarga doir mashqlar berish lozim. Bunda to'plamlarning elementlari konkret predmetlar bo'lishi kerak (cho'plar, qog'ozlar, qiyilgan geometrik figuralar, rasmlar va hokazolar). Masalan, yig'indini topishga doir masalalarni yechishda to'plamlarni birlashtirishga oid mashqlar taklif qilinadi. Ayirishga doir masalalarni yechishda to'plamning bir qismini ajratish, ko'paytirishda teng quvvatli to'plamlarini birlashtirish, bo'lishda to'plamni teng quvvatli to'plam ostilariga ajratish kabi tayyorgarlik ishlari bo'ladi. To'plamlar ustida amallar yordamida «... ta katta, ortiq» , «... ta kichik» , «... marta katta» , «... marta kichik» ifodalarning ma'nosi ochib beriladi, bu ayirmali va karrali munosabat bilan bog'langan masalalarni kiritishga tayyorgarlik bo'ladi.

2. Arifmetik masalalar miqdorlar (uzunlik, massa, hajm, vaqt va boshqalar) bilan bog'langan. Bunday masala yangi miqdor bilan tanishtiradi.

3. Ko'p masalalarni yechishda amallar berilgan kattaliklar orasidagi mavjud bog'lanishlarga asoslanib tanlanadi. Amallarni tanlashda o'quvchilar bu bog'lanishlarni idrok qila olishlari va foydalana bilishlari uchun kattaliklar orasidagi bog'lanishlarni ochib berishi kerak.

4. Murakkab masalalarni yechish qator sodda masalalarni yechishga keltiriladi, shuning uchun murakkab masalalarni

yechishga tayyorgarlik tegishli sodda masalalarni yechishga o'rgatish bo'ladi.

Matnli masalalar yechish jarayonini modellashtirish.

Yuqorida matnli masala deb, hayotiy vaziyatga oid sonli ma'lumotlar asosida noma'lum bo'lgan kattalikni topishga oid topshiriqqa aytilgan edi. Bunday masalani yechish uchun uni matematik amallar tiliga o'girish, ya'ni uning matematik modelini tuzish kerak.

Matnli masalaning matematik modeli bu uning yechimining sonli ifodasi (amallar ketma-ketligi) yoki tenglamadir. Bu esa masalaning arifmetik yoki algebraik usul bilan yechilishiga bog'liq.

Masalani yechishni modellashtirishning uch bosqichi bor:

1. Masala shartini matematika tiliga o'girish: bunda berilgan va izlanayotgan kattaliklar orasidagi bog'lanish matematik usulda ifodalanadi;

2. Tuzilgan ifoda yoki tenglamani yechish;

3. Interpretatsiya: javobni berilgan masala tiliga o'girish.

Masalani yechishni modellashtirishning 1-bosqichi eng qiyini hisoblanadi. Bu bosqichni osonlashtirish uchun turli shartli belgilar, sxema, chizma, jadvallardan foydalaniladi.

Masala modellari umuman olganda sxemali va belgili bo'ladi.

Sxemali modellar predmetli va grafik modellarga bo'linadi.

Predmetli modellarda masala sharti predmetlar yordamida yoki jonli ravishda ko'rsatib beriladi (rol o'ynash orqali).

Grafik modellarga rasmlar, shartli rasmlar, chizma yoki sxemalar kiradi.

Belgili modellar so'zlar va matematik belgilar yordamida tuziladi. So'zlar yordamida tuzilgan model masalaning qisqa yozuvidir. Bu yozuv jadval korinishida bolishi ham mumkin.

Matematik belgilar yordamida tuzilgan modellar bu masalaning ifodasi va yechimidir.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Matnli masala tushunchasi.
2. Matnli masalalar turlarini sanab o'ting.

3. Matnli masalalar yechish jarayonini modellashtirish deganda nimani tushunasiz?

11.2. Matnli masalalarni yechish metodlari

Matnli masalalarni yechish metodlari. Masalalar yechish boshlang'ich matematika kursining muhim tarkibiy qismlaridan biridir. Masalalar yechish orqali o'quvchilar arifmetik amallar komponentlari va natijalari orasidagi bog'lanish, sonlar o'rtasidagi turli munosabatlar geometrik tushunchalar mazmuni, miqdorlar, ularning o'lchovlari, miqdorlar orasidagi bog'lanishlar bilan tanishadilar.

Masalani yechish uchun masalani tinglash va mustaqil o'qib tushinish kerak.

Masalani o'qish maboynida u dastlabki analiz qilish amalga oshadi: nimalar ma'lum va nima noma'lum, ma'lum sonlar nimani bildiradi va ular o'zaro qanday bog'langan, ma'lum sonlar bilan izlanayotgan kattalik qanday bog'lanishga ega?, degan savollarga javob izlanadi.

Ayrim turdagi masalalarni yechishda yechish usulini umumlashtirish ustida ishlashni eslab qolish ishi bilan almashtirish kerak emas, chunki bu holda o'quvchi tanish turdagi masalani taniy biladi va uni yechishdagi amallarni bajarish tartibini eslaydi, avval qo'shaman so'ngra bo'laman... va hokazo. O'quvchining butun harakati berilgan sonlar va izlanayotgan son orasidagi tegishli bog'lanishlarni ochib berishga qaratilgan bo'lishi kerak, uning asosida u tegishli arifmetik amalni tanlaydi. Bolalarga umumlashtirish uchun yordam beradigan usullarni ochib beramiz.

Ma'lum turdagi masalalarni yechish usullarini to'g'ri umumlashtirish uchun, masalalarni tanlash va joylashtirish sistemasi katta ahamiyatga ega. Sistema ma'lum talablarni qanoatlantirishi lozim. Eng avvalo masalalar asta-sekin murakkablashib borishi kerak. Murakkablashtirish masala yechiladigan amallarning sonini orttirish yo'li bilan berilgan son va izlanayotgan son orasida yangi, bog'lanishlarni kiritish yo'li bilan olib borishi mumkin.

Masalan, baho, narx, miqdor kabi kattaliklar bilan 4-proporsionalni topishga doir masala bilan tanishgandan so'ng ikkitadan ortiq amal bilan yechiladigan masalalar kiritiladi.

Ma'lum turdagi masalalarni yechish usullarini to'g'ri umumlashtirishda harfiy ma'lumotli masalalar yordam beradi.

Yangi turdagi masalani yechish uquvini hosil qilishda shu turdagi masalalarning yechilishlarini ilgari qaralgan, yangi turdagi masalaga ma'lum darajada o'xshash masalalarning yechilishlari bilan taqqoslash yordam beradi. Bunday mashqlar bir turdagi masalalarning yechilish usullarini aralashtirib yuborishning oldini oladi. Masalan, sonni bir necha birlik orttirish yoki kamaytirish bevosita yoki bilvosita bayon qilingan masalalarni taqqoslash lozim, shu maqsadda masalalrni jufti bilan kiritish kerak:

1. Noma'lum son 15 dan 8 ta ortiq. Noma'lum sonni toping.
2. 12 noma'lum sondan 7 ta ortiq. Noma'lum sonni toping.

Bu masalalar yechilgandan so'ng, nima uchun ularning har birida ham, ... dan ... ta ortiq deyilsa ham har bir amal bilan yechilishi oydinlashtiriladi. O'quvchilar ikkinchi masalada 12 soni noma'lum sondan 7 ta ortiq, demak noma'lum son 12 dan 7 ta kam va masalani ayirish amali bilan yechish lozim deb javob berishlari kerak. Bu 3-bosqichda bo'ladi.

Bunda masalalar shunday maqsad bilan olinadiki, yengil masalani har bir o'quvchi yecha olishi kerak, bu esa qiyinroq masalani mustaqi yechishga tayyorgarlik bo'ladi. Masalan, quyidagi bir juft masala taklif qilinadi.

1. Uch tup olma daraxtidan 310 kg olma terib olindi. Birinchi tupdan 120 kg , ikkinchi tupdan 90 kg olma terib olindi. Uchinchi tup olma daraxtidan necha kilogramm olma terib olindi?

2. Uch tup olma daraxtidan 280 kg olma terib olindi. Birinchi tupdan 96 kg, ikkinchi tupdan birinchi tupdan terib olingan olmaning $\frac{3}{4}$ qismi terib olindi. Uchinchi tup olma daraxtidan necha kg olma terilgan?

2-masala, 1-masalaga qaraganda qiyinroq, lekin avval birinchi so'ngra, ikkinchi masalani yechilsa, 2-masalani ham yechish oson bo'ladi.

Masalaning yechilish usulini umumlashtirish uchun vaqti-vaqti bilan harfiy ma'lumotli, shuningdek, son ma'lumotli masalalarning yechilishlarini elementar tadbiq qilib o'takazib turish foydali. Bu masala yechimga ega bo'ladigan yoki yechimga ega bo'lmaydigan bitta yoki bir nechta yechimga ega bo'ladigan shartlarni, shuningdek bir kattallik qiymatining o'zgarishiga bog'liq ravishda ikkinchi kattalilk qiymatining o'zgarish shartlarini aniqlash demakdir. Quyidagi masalani yechish talab qilinsin: "Singlisi bir oyda x bet kitob o'qidi, akasi esa yndan y bet kam o'qidi. Akasi qancha bet kitob o'qidi?". Masala bo'yicha o'quvchilar x-y ifodani yozadilar. Qanday ifoda hosil qilindi? (Ayirma). x harfiga qanday qiymatlar berish mumkin? y harfidan katta yoki teng qiymatlarni, chunki kamayuvchi ayriluvchidan katta yoki teng bo'lishi kerak. Hayotda bo'ladigan qiymatlarni olish kerak, bir oyda 1000 yoki undan kam bet kitob o'qish mumkin. Bolalar harflarga turli qiymatlar bera turib, faqat sonli ma'lumotlari bilan farq qiluvchi barcha masalalar bitta amal bilan yechilishiga ishonch hosil qiladilar. Masala yechilishini umumlashtirish shundan iborat. Bundan tashqari hosil qilingan sonli ma'lumotlarni taqqoslab o'quvchilar qaysi hollarda akasi o'qigan kitoblar soni ortishini va qaysi hollarda kamayishini kuzatish mumkin.

Ko'p masalalar turli usullar bilan yechilishi mumkin. To'g'ri yechish yo'llarini izlash bolalarni berilgan sonlar va izlanayotgan son orasidagi yangi bog'lanishlar ochishga shuningdek endilikda bolalarga ma'lum bog'lanishlardan yangi sharoitlarda foydalanishga olib keladi, bu esa yechish usulini umumlashtirishga keltiradi.

Masalalarni analiz va sintez metodlaridan foydalanib yechish.

Boshlang'ich sinflarda masalalarni analiz va sintezdan foydalanib yechiladi.

Shu o'rinda analiz va sintez metodlariga to'xtalib o'tsak. Analiz va sintez bilish jarayonlari bo'lib, aqliy faoliyat turlari hisoblanadi.

Mana shu jihatdan ular psixologiyaning obyektlaridir. Analiz va sintez fanda yangi bilimlarni hosil qilishning mantiqiy yo'llaridir.

Maktab o'quvchilarining bu yo'llarni egallashlari o'quv materiallarini faol o'zlashtirish, mantiqiy, ijodiy fikrlashni rivojlantirishning zaruriy shartidir. O'quvchilarni analiz va sintezga o'rgatish vazifasini ko'p darajada boshlang'ich sinflarda matematikani o'qitishda hal etishi mumkin va hal etilishi lozim.

Matematikada analiz deyilganda, asosan isbotlanayotgan da'vodan rostligi ilgari isbotlangan yoki qabul qilingan da'volarga olib kelinadigan fikrlar ketma-ketligi tushuniladi. Analiz isbotning tuzilishiga emas, balki faqat uning g'oyasiga olib keladi.

Sintez – bu topilgan isbotlash g'oyasi asosida rost da'volar shartida berilgan ma'lumotlardan qanday qilib isbotlanayotgan da'vo hosil bo'lishini ko'rsatuvchi yo'ldir.

Masala mazmuni og'zaki analiz qilingandan so'ng uning qisqa yozuvi tuziladi, ya'ni masala matni matematik belgilar tiliga o'giriladi. Shuni nazarda tutish kerakki, qisqa yozuvni bajarish vaqtida ham masala shartining analizi davom etadi: qisqa yozuv masaladagi sonli ma'lumotlarni o'zaro bog'liqligini va noma'lum kattaliklar qaysilar, ular nimaga bog'liq holda topilishini ko'rsatadi.

Shundan so'ng aniqlangan bog'lanishlarga ko'ra sodda masalani yechish amali tanlanadi va asoslanadi, murakkab masala esa bir necha sodda masalalarga ajratiladi.

Masalaning sintetik tahlili deganda mulohazalarning shunday rivoji tushiniladiki, bunda ikkita sonli ma'lumotni birlashtirish orqali bu ma'lumotlardan nimalarni bilish mumkinligi aniqlanadi, shundan keyin yangi topilgan ma'lumot bilan boshqa ma'lumot birlashmasiga o'tiladi va masala savoliga javob topilguncha shu ish davom ettrilaveradi.

Masalalar tahlilining analitik usuli shunday mulohazalar zanjiridan iboratki, bu zanjir boshida masalada berilgan savol turadi. Masala savoliga javob topish uchun zarur kattaliklar aniqlanadi, bu kattaliklar esa, masalada berilgan kattaliklar orqali topiladi.

Umuman olganda, analiz sintez bilan uzluksiz bog'liq. Murakkab masalani sodda masalalarga ajratish mumkin bo'lgan faqat bitta operatsiya mavjud va bu operatsiya ikki yo'nalishda bajarilishi mumkin, ya'ni berilganlardan noma'lumga yoki noma'lumdan berilganlarga. Shunday qilib, masala tahlili analitik-sintetik metod bilan amalga oshiriladi, chunki masala yechuvchining fikri hamma vaqt berilganlardan izlanayotganlarga va izlanayotganlardan berilganlarga borishi kerak. Masala tahlilini uning savolidan ham va berilganlaridan ham boshlash mumkin.

Shunisi muhimki, yechish yo'llarini izlash maqsadga yo'naltirilgan mazmunda bo'lishi kerak, berilgan ma'lumotlar bo'yicha topish mumkin bo'lgan kattaliklar yechimga yordam beradimi va aksincha, masala savoliga javob berish uchun nimani bilish kerak degan savollar berilib boradi.

Quyidagi masala tahlilini ko'raylik:

"Ustaxonada ko'ylaklar va ko'ylaklar qancha bo'lsa, shuncha kostyum tikildi. Har bir ko'ylakka 3 metr, har bir kostyumga bo'lsa, 4 metr material ketdi. Ko'ylaklar uchun 24 metr material ketgan bo'lsa, kostyumlar uchun qancha material ketgan?"

Masala qisqa yozuvi jadvalga yozilishi mumkin:

	1 ta kiyim uchun	Kiyimlar soni	Material jami
Ko'ylak	3 m	Bir xil	24 m
Kostyum	4 m		?

– Masalaning analitik tahlili masala savolidan sonli ma'lumotlarga qarab boradi.

– Masalada nimani bilish talab qilinadi?

– Kostyumlarga qancha material ketgani.

– Buni birdaniga bilib bo'ladimi?

– Yo'q.

– Nima uchun?

– Kostyumlar sonini bilmaymiz.

– Kostyumlar ko'ylaklar nechta bo'lsa, shuncha. Ko'ylaklar sonini bilish mumkin. Chunki bitta ko'ylakka 3 metr, hammasiga 24 metr material ketgan.

– Ko'ylaklar soni qanday topiladi?

– 24 ni 3 ga bo'lamiz: 24 :3 =8 (ta) kostyumlar soni.

– Endi nimani topamiz?

– Hamma kostyumga ketgan materialni 8 ni 4 ga ko'paytirib topamiz: 8·4 =32(m) –hamma kostyumga ketgan material miqdori.

–Masala yechimining umumiy ifodasi qanday bo'ladi?

– 4 · (24:3)

Ko'rinib turibdiki, masala tahlili, yechish rejasi va yechim bir vaqtda amalga oshirilmoqda.

Xuddi shu masalaning sintetik tahlili, ya'ni sonli ma'lumotlardan masala savoliga boradigan yo'li quyidagicha bo'ladi:

– Jadvalga qaraymiz va berilgan ma'lumotlarga ko'ra nimani topish mumkinligini aniqlaymiz. Jadvalning birinchi qatoridan nimani topish mumkin?

– Bitta ko'ylak uchun 3 metr va hamma ko'ylak uchun 24 metr material sarflanadigan ko'ylaklar sonini topish mumkin.

– Buni qanday topamiz?

– 24 ni 3 ga bo'lib.

– Shuni topish masala yechimi uchun keraklimi?

– Kerak, chunki kostyumlar soni ko'ylaklar soniga teng. Kostyumlar soni topilsa, hamma kostyumga qancha material sarflanganini topish mumkin bo'ladi.

– Kostyumlar uchun qancha material ketganini qanday bilamiz?

– 4 ni birinchi amal natijasida chiqqan songa ko'paytiramiz.

– Shu bilan masala savoliga javob beriladimi?

– Ha.

Yechish rejasi aniqlangandan so'ng yechimni yozish, javobini aytish va javobni tekshirish kabi bosqichlarga o'tiladi.

Masalalarni tuzish va o'zgartirish. Masalalarni tuzish va o'zgartirishga doir mashqlarning ba'zi bir turlarini qarab chiqamiz.

1. Masalaning berilgan shartiga savol qo'yish va berilgan savolni o'zgartirish. Bunday mashqlar berilgan sonlar va izlanayotgan son orasidagi bog'lanishlar haqidagi bilimlarni umum-

lashtirishga yordam beradi, chunki bunda bolalar ma'lum berilgan sonlar bo'yicha nimalarni bilish mumkinligini o'zlashtiradilar. Masalan: "Bitta qutida 48 ta qalam, 2-qutida esa 12 ta qalam bor". O'quvchlar quyidagi savollarni qo'yishlari mumkin: Bir qutida ikkinchi qutiga qaraganda nechta ko'p (kam) qalam bor? Ikkala qutida nechta qalam bor? Ikkala qutida baravar qalam bo'lishi uchun biridan ikkinchisiga nechta qalamni olib solish kerak? Va hokazo. Tezlik, baho haqida va hokazo so'ralsin, yoki masalada ko'rsatilgan amal bilan yechilsin. Ba'zi masalarni yechib bo'fgandan so'ng, bolalarga masala savolini o'zgartirishni taklif qilish foydalidir.

2. Berilgan savol bo'yicha masala shartini tuzish. Bunday mashqlarni bajarayotganda o'quvchilar izlanayotgan sonni topish uchun qanday berilgan sonlarga ega bo'lish kerakligini aniqlaydilar. Bu ham berilgan son va izlanayotgan son orasidagi bog'lanishlar haqidagi bilimlarni umumlashtirishga olib keladi. Masalaning savoli quyidagicha bo'lgan masala shartini tuzish haqida topshiriq berilsin: 2ta bochkada necha chelak suv bor? Bolalar masala shartida har bir bochkada necha chelak suv borligi yoki bochkalarning birida chelaklar soni va birinchi hamda ikkinchi bochkadagi suv chelaklar sonining ayirmasi yoki nisbati berilishi mumkinligini aniqlaydilar. Tuzilgan masalalarning har birini bolalar mustaqil yechadilar.

3. Sonli ma'lumotlarni tanlash yoki ularni o'zgartirish. Bunday mashqlar asosan o'quvchilarni real miqdorli munosabatlar bilan tanishtirish maqsadiga hizmat qiladi. Masalan, bolalarga berilgan sonlari umuman tushurib qoldirilgan masala matni to'liq beriladi: "Bir xil ... ta ko'ylakka ... metr material ketdi. ... metr shunday materialdan nechta shunday ko'ylak tikish mumkin?" O'quvchilar qanday sonli ma'lumotlarni birdaniga qo'yish mumkinligini aniqlaydilar. Ko'ylaklar sonini birdaniga berish mumkin, sarf qilingan material metrlari soni esa, hisoblash yo'li bilan topiladi. Bu masalaga kiritilmagan yana 1son bitta ko'ylakka sarf qilingan material metrlari sonidir. Ba'zi sonli ma'lumotlarni boshqalari

bilan almashtirishga doir mashqlar alohida qiziqish tug'diradi, bunda masala qandaydir boshqa usul bilan yechilishi kerak.

4. O'xshash masala tuzish. Bir xil matematik strukturaga ega bo'lgan masalalar o'xshash masalalar deyiladi. O'xshash masalalarni o'quvchilar tomonidan tuzilishi turli hayotiy vaziyatlarda berilgan sonlar va izlanayotgan son orasidagi umumiy bog'lanishlarni aniqlashga yordam beradi. O'xshash masalalarni berilgan tayyor masalani yechib bo'lgandan so'ng tuzish kerak, shu bilan birga bunda iloji bo'lganda masalaning faqat syujeti va sonlarini emas, balki kattaliklarni ham o'zgartirishni taklif etish lozim. Masalan, agar 3-sinf o'quvchilari baho, miqdor, narx kabi kattaliklarga doir masalani yechishgan bo'lsa, endi unga o'xshash masalani lekin, boshqa kattaliklar - tezlik, vaqt, masofa bilan berish kerak.

5. Teskari masalalar tuzish. Teskari masalalar tuzish va yechishga doir topshiriqlar miqdorlar orasidagi bog'lanishlarni o'zlashtirishga yordam beradi. Teskari masalalarni berilgan sodda masalaga nisbatan ham tuzish mumkin. Biroq, o'qituvchi bu teskari masalaga bolalarning kuchi yetish-yetmasligini har doim tekshirib turishi lozim. Teskari masalalarni tuzishni masalalarni tekshirish bilan birga olib borish kerak.

6. Illyustratsiyaga qarab masala tuzish. Berilgan rasm, chizma yoki qisqa yozuvga qarab masalalar tuzishga doir mashqlar foydalidir. Ular masalani bolalar konkret vaziyatda ko'rishga yordam beradi. Masalan: berilgan rasmga qarab bolalar bir nechta masala tuzishlari mumkin: «somsa 500 so'm, 1 stakan choy esa 300 so'm turadi. Bir stakan choy va 1 ta somsa necha pul turadi?»

Bolalarga u yoki bu illyustratsiya bo'yicha masala tuzishni taklif qilishdan avval bu illyustratsiyani analiz qilish, ya'ni suhbat o'tkazish va ilyustratsiyada nima tasvirlanganini, sonlar nimani ifodalanishini, nimani bilish kerakligini aniqlash kerak.

7. Berilgan yechimga qarab masala tuzish. Buni masala yechilishiga nisbatan teskari deb atash mumkin. Faqat raqamlar bo'lgan mashqlar yordam beradi – bu masalani uning yechilishiga qarab tiklashdir.

Masalaning yechilishi ixtiyoriy shaklda berilishi mumkin: aolhida amallar, ifoda yoki tenglama bilan, tushuntirish yozuvlari bilan va ularsiz. Bunda masalaning yechilishi bitta yoki bir nechta amalni ham o'z ichiga olishi mumkin. Faqat raqamlar yordamida emas, balki harflar bilan ham yozilishi mumkin. Masala tuzishni taklif qilishdan avval masalani berilgan yechmini analiz qilish kerak.

Ayrim hollarda bolalarga masala syujetini yoki kattalikning nomini aytib berish maqsadga muvofiqdir. Masalan o'qituvchi 3-sinf o'quvchilariga berilgan ushbu ifoda bo'yicha, tezlik, vaqt, masofa kattaliklari qatnashgan masala tuzishni taklif qiladi. $(12:3)\cdot 2$. Bu yerda qaysi amal birinchi berilgan (bo'lish), so'ngra-chi? (ko'paytirish), Bu ifodaga ko'ra tezlik, vaqt, masofa kattaliklari qatnashgan masala tuzish kerak. Ko'paytirish amali bajarilgandan so'ng nimani bilamiz? (masofani). Demak 2 soni nimani bildiradi. (harakat vaqtini). 12:3 ifoda nimani bildiradi? (tezlikni). Agar bu ifoda tezlikni bildirsa, unda har bir son nimani ko'rsatadi? (12 o'tilgan masofani, 3 esa harakat vaqtini). Masala tuzing. Bolalar masalan quyidagi masalani tuzishlari mumkin: "Yo'lovchi bir xil tezlik bilan yurib 3 soatda 12 km yo'lni bosdi. Shunday tezlik bilan yursa, yo'lovchi 2 soatda qancha yo'lni bosadi?"

Ko'rsatilgan amallar bo'yicha masalalar tuzishni taklif qilish ham mumkin. Masalan, o'qituvchi yechilishida avval ko'paytirish amali bajarilishi lozim bo'lgan masala, yoki yechilishida avval qo'shish amali, so'ngra bo'lish amali bajarish zarur bo'lgan masala tuzishni taklif qilishi mumkin.

8. Berilgan masalalarni ularga yaqin bo'lgan turdagi masalalarga almashtirish. Bir-biriga yaqin turdagi masalalar jumlasiga miqdorlar bir xil bog'liqlik bilan bog'langan masalalar kiradi.

Masalan to'rtinchi proportsionalni topishga doir, proportsional bo'lishga va ikki ayirmaga ko'ra noma'lum sonlarni topishga doir masalalar bo'ladi, chunki ularda miqdorlar proportsional bog'liqlik bilan bog'langan.

Bir masalani unga yaqin bo'lgan masalaga kattaliklarning sonli qiymatlari ustida arifmetik amallarni bajarish natijasida almashtirish mumkin.

Bir-biriga yaqin turdagi masalalarning yechish usullarini bunday almashtirish va taqqoslash natijasida bolalarni bunday masalalarni yechish usullarini umumlashtirishga olib keladi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Matnli masalalarni yechish metodlarini sanab bering.
2. Masalalarni analiz va sintezdan foydalanib yechishni tushuntiring.
3. Masalalarni tuzish va o'zgartirish tuurlarini sanab o'ting.
4. Masalalarni tuzish va o'zgartirishga doir misollar keltiring.

11.3. Nostandart masalalar. Mantiqiy masalalar

Muammoli mazmundagi masalalar. Muammoli o'qitishning eng asosiy xususiyati – muammoli vaziyat hosil qilishdir.

Didaktika tilida muammoli vaziyat hosil qilish shuni bildiradiki, bunda o'qituvchi o'quvchilar oldiga shunday savol qo'yadiki, ular bu savolga bilimlari yetarli bo'lmagani uchun to'la javob bera olmaydilar.

Har qanday matematik masalaning savoli uning asosiy elementlaridan biri hisoblanadi. Har qanday matematik masala o'quvchilar uchun muammoli xarakterga ega bo'ladimi yoki boshqacha aytganda, masaladagi har qanday savol masalaning asosiy elementlaridan biri bo'la turib, muammoli vaziyat hosil qiladimi?

Agar masala matni o'quvchini ma'lum yechimga olib keladigan fikrlash jarayonlarini bajarishda aqliy zo'riqishni talab qiladigan qiyinchiliklarga duch keltirsa, bunday masalani muammoli deyiladi.

Muammoli masalalarni quyidagi turlarini ajratish mumkin:

1) muammoli savollarga oid masalalar;

2) turli usullarda yechish mumkin bo'lgan masalalar;

3) mazmuni bir xil, ammo yechilishi har xil bo‘lgan masalalar;
4) sharti yetarli bo‘lmagan masalalar;
5) ortiqcha ma’lumotlarga ega bo‘lgan masalalar;
6) butunlay noto‘g‘ri ma’lumotga ega bo‘lgan masalalar;
7) turli xil faoliyatni umumlashtirishga oid bo‘lgan masalalar;
8) fanlararo aloqaga doir masalalar.

Muammoli masalalarning ba’zilarida “nechta?”, “sig‘adimi?”, “yetadimi?”, “joylashadimi?”, “o‘rnashadimi?”, “uchrashadimi?” savollari uchraydi.

Muammoli mazmundagi masala yechilishining yozilishi odatdagi masala yechilishi yozilishidan birmuncha farq qiladi. Bunday masalalarda hisoblashlarnigina bajarish talab qilinmay, balki masaladagi son ma’lumotlarni yoki miqdorlar orasidagi munosabatlarni taqqoslash, umumlashtirish, isbotlash, haqiqatligini aniqlash, qonuniyatni o‘rnatish, imkoniyatni, yetarlilikni aniqlash talab qilinadi.

Muammoli masalalar yechish, mustaqil masala tuzishga oid topshiriqlarni bajarish, keyinroq masalalarni yechish ham bolalarning tafakkuri va bilimlarini rivojlantirish vositasi bo‘ladi va bunday masalalarni yechilishi analiz va sintez kabi mushohada usuli orqali amalga oshadi va bolaning bilim doirasini kengaytiradi.

Krutetskiyning ilmiy izlanishlarida o‘quvchilarning masalalar orqali tafakkurini oshirishda quyidagi masalalar turini keltiradi:

- savoli ifodalanmagan masalalar;
- ortiqcha ma’lumotlari bor masalalar;
- bir necha yechimi bor masalalar;
- mazmuni o‘zgaruvchan masalalar;
- isbotga mo‘ljallangan masalalar;
- mazmuni mantiqiy fikrlashga qaratilgan masalalar.

Ushbu masalalar tizimi amaliy ahamiyatga egadir. Ushbu masalalar mustaqil fikrlashni tashkil qilish metodlarini tanlashga yordam beradi.

Ko‘p yechimli masalalar. Boshlang‘ich sinf o‘quvchilarini ko‘p yechimli masalalarni yechishga o‘rgatish orqali ularning mantiqiy tafakkuri o'sadi, mustaqil fikr yuritish ko'nikmasi tarkib topadi, matematika faniga bo'lgan qiziqishi oshadi va atrof-muhitda sodir bo'layotgan o'zgarishlarga teran nazar bilan boqa oladi.

Shu o'rinda "Ko'p yechimli masala nima?", yoki "Qanday masala?", - degan savol tug'iladi. Talabalarga shu savolni berganda, ulardan aksariyat qismi ikki va undan ortiq usul bilan yechiladigan masalalarni misol keltirishdi.

Misol qilib quyidagi masalani olsak.

1-masala: Tomonlari 6 sm va 8 sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchakning perimetrini toping.

R=2·(a+b) formulasidan foydalanib, to'rtburchakning perimetri topiladi. R=28 sm ekanligini o'quvchilar juda oson topadi. Endi masalaga boshqacha yondoshsak. Perimetri 28 sm bo'lgan to'g'ri to'rtburchaklarning tomonlarini toping. Bunda o'qituvchi bergan savol o'quvchini o'ylashga majbur qiladi.

a =8sm, b =6sm ligidan a ni 1 sm ga kamaytirib, b ga 1 sm ni qo'shish natijasida bir necha javoblarni topamiz.

Shunga o'xshash, a =7 sm, b =7 sm; a =6 sm, b =8 sm; a =5 sm, b =9 sm;a =4 sm, b =10 sm; a =3 sm, b =11 sm; a =2 sm, b =12 sm; a =1 sm, b =13 sm.

Endi b ni 1 sm ga kamaytirib, a ga 1 sm ni qo'shish natijasida bir necha javoblarni topamiz: a=9sm, b=5sm ni hosil qilamiz. Olingan natijalariga 1 ni qo'shish va ayrish orqali a=10sm, b =4sm; a =11sm, b =3sm; a =12sm, b =2sm; a =13sm, b =1 sm larga ega bo'lamiz.

Bu yerda o'quvchilar yig'indisi 14 ni tashkil qiluvchi ikki natural sonning yig'indisidan foydalanishadi. Qisqacha aytganda masalani jadval shaklida yechsa ancha tushunarli va sodda ko'rinishga keladi.

a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
b	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a+b	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14	14

Jadvaldan to'rtburchak tomonlari oson aniqlanadi.

Masalaga boshqacha yondoshsak, berilgan to'rtburchakni yuzini topish kerak bo'lsin. To'g'ri to'rtburchakning yuzini topish formulasini esga olamiz.

$S = a \cdot b$ dan foydalanamiz.

Natija $S=48$ sm^2 ni tashkil qiladi. Natijadan foydalanib boshqa masala tuzsak:

Yuzasi $S=48$ sm^2 ga teng to'g'ri to'rtburchaklar tomonlarini toping degan savol qo'yiladi. Bunda o'quvchilar ko'paytmasi 48 ga teng ikkita natural sonlar qidira boshlaydi. Ular:

– a =8sm, b =6sm,

– a =16 sm, b =3sm,

– a =12sm, b =4sm;

–a =24sm,b =2sm;

–a =48sm, b =1sm; va hokozo

Ushbu masalani ham yuqoridagi masalaga o'xshatib jadval asosida ishlasak, maqsadga muvofiq bo'ladi.

2-masala: Feruzaning oyisi 3500 so'mga ertak kitob olib berdi. U to'lovni 2 ta 1000 so'mlik, qolganlarini 500 so'mlik, 200 so'mlik va 100 so'mliklarda to'ladi. Feruzaning oyisi ertak kitobini sotib olishda qanday pullar ishlatgan?

1000 so'm	2	2	2	2	2	2
500 so'm	2	2	1	1	1	1
200 so'm	2	1	4	3	2	1
100 so'm	1	3	2	4	6	8

Jadvaldan ko'rinib turibdiki, masalaning yechimlari ko'p. Shuning uchun bunday yechim o'quvchilar uchun ancha tushunarli va oson bo'ladi. Jadval ko'rinishida masalalarni yechishda o'quvchilarga ancha tushunarli bo'ladi.

2-masalada ming so'mliklarni chegaralab qo'yilgan, ming so'mliklarni sonini aytmasdan masala berilsa, masalaning yechimi bundan ham ko'proq bo'ladi va yangi tuzilgan masalani uyga vazifa qilib berib yuborish mumkin.

2-masala(1): Feruzaning oyisi 3500 so'mga ertak kitob olib berdi. U to'lovni 1000 so'mlik, 500 so'mlik, 200 so'mlik va 100 so'mliklarda to'ladi. Feruzaning oyisi ertak kitobini sotib olishda qanday pullar ishlatgan?

Yechilgan muayyan masala shartlarini o'zgartirish asosida, yangi masala tuzish unchalik mehnat talab qilmaydi. Albatta buning uchun masalani o'zgartirishning eng asosiy vositalari: umumlashtirish, ixtisoslashtirish, analogiya, bo'laklash va yangi kombinatsiyalar tuzish bo'yicha yetarli ko'nikmaga ega bo'lishi kerak. Berilgan masalani yechish jarayonida, masala shartini o'zgartirish asosida yangi masalalarni hosil qilamiz. Bu yangi masalalardan, o'z navbatida, sara masalalarni tanlab olamiz. Ya'ni bir masaladan ikkinchisi, unday foydalanib uchinchisini tuzish, yechish va h.k.

Shu sababli o'qituvchi dastlabki yechilgan masaladan qanday qilib yangilarini hosil qilish mumkinligini ko'rsatib berishi zarur. Bu bilan u o'quvchilarda qiziquvchanlikni uyg'otadi. O'quvchilarning yangi masalani bunday usulda ixtiro qilishda ishtirok etishi muhim.

Shartiga o'zgartirish kiritilgan masalalar. Masala shaklini yoki jumlasini turli yo'nalishlarda quyidagi usullardan foydalanilgan holda o'zgartirsh mumkin.

1. Masala matnini o'zgartirish: terminni mazmunli tavsif bilan almashtirish, ayrim so'zlarni sinonimlari bilan almashtirish, matnning yechimga ta'sir qilmaydigan bir qismnini chiqarib tashlash, ayrim so'z, terminlarni nisbatan umumiy yoki xususiy tushuncha ifodalaydiganiga almashtirish, so'z va gap tartibini o'zgartirish, raqamli ma'lumotlarni boshqa «ko'rgazmali»rog'iga almashtirish, raqamli ma'lumotlarni harflilariga almashtirish, harfli ma'lumotlarni raqamlilariga almashtirish.

2. Masala matnini tasavvur qilish, shaklini o'zgartirish – modellar qurish: predmetli (masalani aniq predmetlarda namoyish qilish, «rollarda» ko'rsatish), geometrik (masalani geometrik shakllarda va modellarda shakllar xossalari va ularning munosa-

batlaridan foydalanib ko'rsatish), grafik (chizma, rasm), shartli predmetli (rasm), grafik (qisqa sxematik yozuv), jadvalli (jadval).

3. Ixtiyoriy birliklarni kiritish va matnni tegishlicha qayta izohlash.

Masala matni ustida ishlash uni izohlansa, qayta tuzilsa, yanada samarali bo'ladi. Uning maqsadi – jiddiy bo'lmagan predmetlarni olib tashlash, masalaning jiddiy elementlari ma'nosini aniqlashtirish va ochib berish. Masala matnini qayta tuzish masalada berilgan qandaydir vaziyat tasvirini barcha munosabatlar, aloqalar, sifat mazmunini saqlab qolgan, biroq ularni yanada yorqinroq ifodalagan boshqa tasvir bilan almashtirishdan iborat. Ortiqcha, jiddiy bo'lmagan axborotning barchasi olib tashlanadi, masala matni uning yechimini izlash yo'lini osonlashtiradigan shaklga o'zgartiriladi. Qayta tuzish davomida masalada gap boradigan asosiy vaziyatlar ajratiladi, zaruratga ko'ra masalaning yordamchi modeli quriladi: qisqa yozuv, jadval, rasm, chizma va h.k. O'quvchilarni bu usulga dastlab standart masalalarda o'rgatish zarur. Ushbu usuldan foydalanishni masala misolida ko'rib chiqamiz:

1-masala: Kibora 10 ta qalam uchun 1000 so'm to'ladi. Agar ruchka qalamdan 50 so'm qimmat bo'lsa, 18 ta ruchka uchun necha so'm to'lash kerak bo'ladi?

Bu masala matnini o'zgartirish narx, miqdor, qiymat terminlarini kiritishdan iborat bo'lishi mumkin. natijada, matn quyidagi ko'rinishga keladi:

Barcha qalamlarning qiymati 1000 so'm. Qalamlar miqdori 10 ta. Narxi noma'lum. (1- qism).

Ruchkalar miqdori 18 ta. Narxi noma'lum. Xarid qilinganlarning umumiy qiymati noma'lum, uni topish kerak (2-qism).

Ruchkaning narxi qalamnikidan 50 so'm ortiq (3- qism).

Yechish rejasini topish va bajarish uchun uchta kattalik: narx, miqdor va qiymat o'rtasidagi bog'liqlikni bilish, berilgandan 18 taga ko'p sonni topa bilish yetarli. Qayta tuzish natijasi qisqa yozuvda aks ettirilishi mumkin. Hosil qilingan matnni og'zaki qayta yaratish bilan cheklanish ham mumkin. Maqsadli qayta tuzishga o‘rgatish – masala yechishga o‘rgatishning muhim jihatlaridan biri. Undan foydalanishning dastlabki tajribasiga bolalar oddiy masalalarni qayta tuzish ko‘nikmasiga ega bo‘lishi kerak. Buning uchun o‘qituvchi o‘quvchilarga masalani idrok etgandan keyin masala sharti va savolini ular uchun eng asosiysini ajratib ko‘rsatgan holda takrorlashni taklif qiladi, bunga yordamlashadi. Bolalarga masala mazmunini uning savoliga javob topish uchun qulay shaklda ifodalashni taklif qilish zarur. Ularni muhokama qilish va eng yaxshi usulni tanlash maqsadga muvofiq. Masalani izohlashning alohida turi masalada so‘z yuritilgan kattaliklarni o‘lchashning qulay birliklarini kiritish sanaladi. Quyidagi masalani ko‘rib chiqamiz:

2-masala: O‘quvchi 1 ta kundalik daftar va 1 ta daftar uchun 1700 so‘m to‘ladi. Agar kundalik daftar daftardan 16 marta qimmat bo‘lsa, kundalik daftar va daftar necha so‘m turadi?

Ushbu masala o‘qitishning an’anaviy tizimi bo‘yicha odatiy metodlar bilan yechilishi mumkin. O‘quvchilar uni sxematik modellashtirish metodidan foydalanib, bitta kesmani bitta daftar deb bilib, yecha oladilar.

1700:17=100 (so‘m)–daftar narxi

100·16=1600 (so‘m)–kundalik daftar narxi.

An’anaviy sinflarda bu masalani qiymatning yangi birligini kiritish va masala matnini qayta tuzish yo‘li bilan yechish mumkin. O‘qituvchi quyidagicha fikr yuritadi. Qiymat va narx– kattaliklar. Masaladi faqat narx qiymat kattaligi tilga olingan. Biroq qiymat har qanday kattalik kabi boshqa ko‘plab birliklarga ega bo‘lishi mumkin. O‘lchov sifatida shu kattalik bilan tavsiflanadigan istalgan obyektni olishga va unga birlikka teng qiymat berishga, ya’ni bu obyektdagi «kattalik miqdorini» birlik deb qabul qilishga haqlimiz. Masalada kundalik daftar va daftar narxi bilan tavsiflanadigan ikki xil predmetgina tasvirlangani uchun, o‘lchov sifatida ulardan birini tanlash va uning narx qiymatini birlik sifatida qabul qilish qulay. Tanlov uchun ikkita imkoniyat mavjud bo‘lgani sababli, ko‘rilayotgan masalani qayta tuzishning ehtimoliy yo‘li ham ikkita. O‘lchov sifatida nisbatan arzon predmet - daftarni olamiz. Uning narxini birlik sifatida qabul qilamiz va bu birlik nomini beramiz. Nom turlicha bo‘lishi mumkin. Yangi terminlar o‘ylab topmaslik uchun narxning “yangi” birligiga pretmet nomini beramiz–“daftar”. Endi biz yangi qiymat birligiga egamiz–bitta daftar. Masalada tasvirlangan predmetlar narxini yangi birliklarda keltiramiz, daftar narxi–bitta daftar. Kundalik daftar narxi shartga ko‘ra daftar narxidan 4 marta ortiq. Yangi birlikni hisobga olib, masalaning yangi talqinini olamiz.

2.1-masala: O‘quvchi 2 ta kundalik daftar va 3 ta daftar uchun 3500 so‘m to‘ladi. Agar kundalik daftari daftardan 16 marta qimmat bo‘lsa, kundalik daftar va daftar necha so‘m turadi?

2-masalaning berilganlaridan foydalanib masalani yechamiz.

Narxni daftarlarda o‘lchasak, 1 ta daftar narxi 1 daftarga teng, kundalik daftar esa 16 marta qimmat. Kundalik daftar va daftar narxini so‘mlarda aniqlang.

Yechish:

1) $1\cdot3=3$ (daf)–3 ta daftarning qiymati;

2) $1\cdot16=16$ (daf)–kundalik daftar narxi;

3) $16\cdot2=32$ (daf) –ikkita kundalik daftar narxi;

4) $32+3=35$ (daf)–xaridning umumiy qiymati;

5) $3500:35=100$ (so‘m)–daftar narxi;

6) $100\cdot16=1600$ (so‘m)–kundalik daftar narxi.

Masalani tahlil qilishning keyingi usuli – qisqa yozuv. Qisqa yozuv tuzishga o‘rgatish boshqa metodlardan foydalanishdagi kabi namunalarni ko‘rsatish orqali olib boriladi. O‘quvchi uning vazifasini tushunganida, qaysi masalalarga qisqa yozuv bajarishni aniqlay olganda, uni tuzish bo‘yicha barcha qadamlarni (matnni qismlarga bo‘lish va qayta tuzish, sxema tanlash, so‘zlar, raqamlar, rasmlarni sonlar, kattaliklar o‘rtasidagi munosabatlar va aloqalarga muvofiq joylashtirish, yozuv shaklini tanlash, qisqa yozuvning masala mazmuniga muvofiqligini aniqlash va boshqalar.) bilgani va bajara olganidagina ta’sirli bo‘ladi, ya’ni qisqa yozuv tuzishga tegishli o‘quv amallarini tashkil qilish orqali maxsus o‘rgatish kerak.

Qiziqarli va mantiqiy masalalar. Matematika fanining salohiyati – o'quvchilar aqliy qobiliyatini rivojlantirish bilan belgilanadi. Shu bois matematika o'qitishning muhim vositasi masalalardir.

Ko'rib turibmizki, boshlang'ich matematika kursida masalaning mazmuni juda kattadir. Mantiqiy masalani yechish orqali xotira, tafakkur, diqqat, ijodiy tasavvur rivojlanadi. O'qituvchi matematika darslarida bolalarning mantiqiy tafakkurlarini rivojlantirishning ma'lum imkoniyatlariga ega, ana shu imkoniyatdan to'la foydalanish kerak. Shu maqsadda mantiqiy masalalar yechishga ham alohida e'tibor qaratiladi.

Mantiqiy masala ustida ishlash o'qituvchidan alohida e'tibor talab qiladi. Mantiqiy masalaning oddiy arifmetik masaladan farqi, butunlay yoki qisman arifmetik amallarsiz fikr – mulohaza yuritish bilan yechilishi o'quvchilardan dastlab qiyinchilik tug'diradi. Shuning uchun mantiqiy masalani soddadan murakkabga qarab asta – sekinlik bilan darsga kiritib boriladi. Avval faqat mantiqiy savollar berish maqsadga muvofiq bo'ladi.

Masalan: "1 kg temir og'irmi, yoki 1kg paxta og'irmi?",

"Uchta ot qo'shilgan arava 30 km yurdi, har bir ot necha km yurgan?", "Xo'roz bir oyoqda 2 kg, ikki oyoqda tursa necha kg?",

"Bir oyda 5 ta yakshanba bo'lishi mumkinmi? 6 tachi?"

Bunday savollar bir qiymatli javob talab qilgani uchun o'quvchilar arifmetik amal bajarishga intilmaydi. Shundan so'ng matnli mantiqiy masalalar kiritib boshlanadi:

1-masala: "Uch aka – uka Ali, Vali va G'ani. Ali Validan katta, Vali G'anidan katta. Kim katta: G'animi yoki Ali?"

2-masala: "Uchta qiz shaharga ketayotib, 5 ta qizni uchratdi. Shaharga nechta qiz ketyapti?"

Mantiqiy masala odatda qo'shimcha tahlilsiz yechiladi. Ya'ni o'quvchiga fikrlash, o'ylab olish imkoniyati beriladi. "Kim topqirroq?" degan musobaqa ketadi. Lekin masalani javobini topish qiyinlik qilsa, o'qituvchi yordamchi savollar beradi va masala javobini topishga o'quvchi fikrini yo'naltiradi. Aslida yordamchi savollar berish maqsadga muvofiq emas.

Masalan:

<u>1-masala:</u> "Yettita sham yonib turibdi. Ularning ikkitasi o'chirildi. Nechta sham qoldi?"

Mulohaza yuritish quyidagicha olib borilishi kerak:

1) Ikkita sham o'chirilsa nechta sham yoniq qoladi?

– " 5" ta

2) Yonib turgan sham nima qiladi?

– "eriydi"

3) Biroz vaqtdan keyin nima bo'ladi?

– "erib tugaydi"

4) Unda nechta sham qoladi?

–" ikkita"

<u>2-masala:</u> "Bu qizning otasi – mening otamning o'g'li. Lekin mening onam ham, ukam ham, singlim ham, opam ham yo'q. Qizning otasi kim?"

Yordamchi savollar:

1) Masaladagi qizga so'zlovchining qarindoshlik joyi bormi?

2) So'zlovchining onasi ham, opasi ham, singlisi ham yo'q. Unda kim bo'lishi mumkin?

3) Ukasining qizi desak uning ukasi ham yo'q.

4) Unda qizning otasi kim?

Xulosa qilib aytganda, nostandart va mantiqiy masalalarni yechish orqali boshlang'ich sinf o'quvchilarini matematik tafakkurini shakllantiriladi.

O'z-o'zini nazorat qilish uchun savollar

1. Muammoli mazmundagi masalalar.
2. Ko'p yechimli masalalar.
3. Shartiga o'zgartirish kiritilgan masalalar.
4. Qiziqarli va mantiqiy masalar.

11.4. Boshlang'ich sinflardagi iqtisodiy va statistik masalalar

Iqtisodiy-statistik mazmundagi masala deb, ma'lum bir iqtisodiy yoki statistik tushunchani yoki uni yoritib beruvchi axborotni o'z ichiga olgan masalaga aytiladi.

Boshlang'ich matematika kursida o'rganilishi mumkin bo'lgan eng sodda iqtisodiy tushunchalar quyidagilar: tejamkorlik, ish unumi, mahsulotning narxi, bahosi, sifati, foyda, iqtisod kabilar bo'lib, statistikaga oid dastlabki tushunchalar: kuzatuv va ma'lumot to'plash, to'plangan ma'lumotlarni tartiblash, variatsion qator, o'rta arifmetik qiymat, chastota, nisbiy chastota, moda, jadval va diagrammalardan iborat.

Bunday mazmundagi masalalarni boshlang'ich sinf matematika darsliklarida uchratish mumkin, lekin ularning tarbiyaviy ahamiyatini kuchaytirish va o'quvchilarning iqtisodiy ongini shakllantirishga yo'naltirish muhim ahamiyat kasb etadi.

Iqtisodiy tarbiyaning muhim vazifalaridan biri o'quvchilarni tejamkorlikka o'rgatishdir. Atrofimizdagi barcha predmetlar: jonli va jonsiz tabiat, uy-ro'zg'or buyumlari, maktab jihozlari, shaxsiy buyumlar va boshqalarni avaylab-asrash, buzmaslik, sindirmaslik, yirtmaslik, atrof muhitni ozoda saqlash, ehtiyotlik bilan munosabatda bo'lish kerakligini bolalar ongiga singdirib borish kerak. Bu vazifa matematika darslarida iqtisodiy-statistik mazmundagi masalalarni yechish orqali amalga oshiriladi.

Quyidagi masalani ko'raylik:

Maktab oshxonasidagi 1 kunlik non qoldiqlari 1 kg ni tashkil etdi. Agar har kuni shunchadan non qoldiqlari qolsa, maktabdagi 210 o'qish kunida qancha non isrof bo'ladi? Shuncha nonni o'rtacha oila necha kun iste'mol qilishi mumkin?

Bu masalani yechish uchun o'rtacha oila tushunchasini oydinlashtirish va bunday oila bir kunda qancha non iste'mol qilishini aniqlash kerak bo'ladi.

Yechish:

1. $1kg \cdot 210 = 210kg$

2. O‘rtacha oila tushunchasini oydinlashtirish uchun har bir o‘quvchining oila a’zolari sonini aniqlaymiz. Olingan natijalarni ketma-ket yozib olamiz:

3, 10, 4, 3, 2, 5, 4, 5, 4, 4, 4, 8, 5, 5, 4, 3, 6, 4, 4, 5, 6, 4.

Variatsion qator tuzamiz:

Oila a’zolari soni	2	3	4	5	6	8	10
Oilalar soni	1	3	9	5	4	1	1

Variatsion qatordan shuni xulosa qilish mumkin-ki, 4 kishilik oilalar ko‘pchilikni tashkil etar ekan. Ular 9 ta. Demak, 4 kishilik oila bu sinfda moda bo‘ladi. Endi o‘rtacha qiymatni topaylik.

Jami oilalar soni:

$1+3+9+5+4+1+1=24$(ta)

Jami odamlar soni:

$2\cdot 1+3\cdot 3+4\cdot 9+5\cdot 5+6\cdot 4+8\cdot 1+10\cdot 1=122$(ta)

O‘rtacha oila a’zolari soni:

$122:24=5$(2 qoldiq)

Demak o‘rtacha oila a’zolari soni 5 ga teng. Agar bu oilada har kuni o‘rtacha 2kg non iste’mol qilinsa,

$210:2=105$(kun)

210 kg nonni bu oila 105 kun, ya’ni uch yarim oy iste’mol qilishi mumkin ekan.

Bu masalani yechishda tejamkorlik, isrof, ma’lumot to‘plash, to‘plangan ma’lumotlarni tartiblash, variatsion qator, o‘rta arifmetik qiymat, moda, jadval kabi tushunchalar ma’nosi ochib berildi.

Ish unumi deganda, vaqt birligida bajarilgan ish hajmi tushuniladi. Ish unumdorligi tushunchasi o‘quvchining mehnati bilan bog‘lanadi. O‘quvchining ish unumi uning bilimi, tezkorligi, ya’ni, tez o‘qishi, tez yozishi, tez misol ishlashi kabilarga bog‘liq. Agar u vazifani tez va xatosiz bajarsa, ishi unumli bo‘ladi. Shunga ko‘ra 1 minutda o‘quvchi bajarishi mumkin bo‘lgan ish hajmi aniqlanib, taqqoslansa, juda foydali va ko‘rgazmali bo‘ladi.

Masalalar.

1. 2-sinf o‘quvchilarining o‘qish tezligi tekshirilganda quyidagi natijalar olindi: 60, 71, 55, 54, 49, 72, 69, 80, 62, 66, 75,

65, 69, 57, 72, 67, 76, 70, 85, 78. Bu ma'lumotlarni 10 tadan so'z oralig'ida guruhlab, variatsion jadvalga joylashtiring. O'rtacha o'qish tezligini va eng tez, eng sekin o'qigan o'quvchini, ko'pchilikning tezligini aniqlang.

2. Ikki duradgor stollar yasab, sotuvga qo'yishdi. Birinchi duradgorning stollari sifatli va chiroyli bo'lgani uchun 150 ming qimmatroq sotildi. Agar ular 8 tadan stol sotgan bo'lsa, birinchi duradgor qancha qo'shimcha foyda olgan?

3. Sinfda 20 ta o'quvchilar stoli bor. Stolning bo'yi 110, eni 50 sm. Agar $1m^2$ yuzani bo'yashga 100gr bo'yoq sarflansa, hamma stellar yuzasini bo'yashga qancha bo'yoq kerak bo'ladi? Agar stollarni yaxshi saqlab, 2 yil mobaynida bo'yalmasa, qancha bo'yoq tejalishi mumkin?

4. Ikki bichiqchi, usta va shogird, matodan bir xil ko'ylak bichishdi. Shogird 60m matodan 15 ta, usta esa undan 5 ta ortiq ko'ylak bichdi. Har bir ko'ylakdan usta qancha matoni tejagan? Har bir ko'ylak 350 ming so'mdan sotilsa, usta qancha qo'shimcha foyda olgan?

5. Darsdan keyin sinf xonasida 500 gr qog'oz chiqindilari qolgani ma'lum bo'ldi, Agar har kuni shunchadan qog'oz isrof bo'lsa, 210 o'qish kunida qancha qog'oz isrof bo'ladi? Agar 1ta daraxtdan 50kg qog'oz olinsa, bu tashlangan qog'ozlar qancha daraxtni kesilishdan asrab qolishi mumkin edi?

6. Brigada ishchilarining ish unumi haqida quyidagi ma'lumotlar olingan (ish unumi deganda 1 soatda ishlab chiqarilgan detallar soni ko'zda tutilgan):

26, 25, 24, 25, 28, 39, 28, 32, 24, 37, 20, 22, 30, 31, 35, 26, 23, 27, 28.

Ma'lumotlarni 5 tadan detal oralig'ida tartiblang, o'rtacha ish unumini toping. Variatsion qatorning modasini aniqlang.

7. Matematikadan yozma ish natijasida o'quvchilar quyidagi baholarni oldilar: 4, 5, 3, 3, 5, 4. 2, 3, 4, 3, 2, 3, 4, 5, 2, 4, 4, 3, 4, 5, 3, 2, 3, 4. Har bir bahoning chastotasi va nisbiy chastotasini toping. Variatsion qatorni to'ldiring. Ma'lumotlar asosida diagramma tuzing.

12.1. Sonli va o‘zgaruvchili ifodalar, ayniyat va ayniy shakl almashtirish

Sonli ifodalar. Ayrim masalalarni yechishda sonli ifodalarga duch kelamiz. Quyidagi masalani qaraylik.

Masala: *A* va *B* punktlar orasidagi masofa 1760 km. *A* punktdan *B* punktga qarab soatiga 80 km/s tezlik bilan yuk avtomashinasi chiqdi. 2 soat o‘tgandan keyin esa *B* punktdan soatiga 120 km/s tezlik bilan yengil avtomashina *A* punkt tomon jo‘nadi. Yengil avtomashina yo‘lga chiqqandan necha soatdan keyin yuk avtomashinasi bilan uchrashishdi.

Masalani yechish uchun dastlab yuk avtomashinasini 2 soatda bosib o‘tgan yo‘lini hisoblaymiz. Buning uchun 80 ni 2 ga ko‘paytiramiz. Bu amalni bajarmasdan uni $80 \cdot 2$ deb belgilaymiz.

Shundan keyin yuk avtomashinasi *B* punktdan qancha masofada ekanligini aniqlaymiz. $1760-80 \cdot 2$.

Keyinchalik yuk va yengil avtomashinalarning birgalikdagi tezligini topamiz. $80+120$.

Eng oxirida ikkita avtomobilning uchrashishi uchun ketgan vaqtni hisoblaymiz.

$(1760-80 \cdot 2):(80+120)$

Masalani yechish jarayonida biz yuqoridagi ko‘rinishdagi sonli ifoda qiymatini sonli ifodada amallarni bajarish dasturiga asosan topamiz, ya’ni

$(1760-80 \cdot 2):(80+120)=(1760-160):200=1600:200=8$

Demak, ikkita avtomashina 8 soatdan keyin uchrashadi. Bunda biz faqat sonlar bilan ish ko‘rdik.

1-ta’rif. Sonlar, arifmetik amallar va qavslar ishtirok etuvchi yozuv sonli ifoda deyiladi.

Umumiy holda sonli ifoda quyidagicha aniqlanadi:

1. Har bir son sonli ifodadir;

2. agar A va B lar sonli ifodalar bo‘lsa, u holda $(A)+(B), (A)-(B), (A)\cdot(B), (A):(B)$ lar ham sonli ifodalar bo‘ladi.

Sonli ifodada ko‘rsatilgan har bir amalni ketma-ket bajarish natijasida hosil bo‘lgan son sonli ifodaning qiymati deyiladi.

Agar yuqoridagi qoidaga amal qilsak, qavslar soni ko‘payib ketadi. Shuning uchun har bir sonni qavsga olmaslikka kelishib olinadi.

Shuningdek, bir qancha ifodalar qo‘shilsa, ayirilsa, ko‘paytirilsa yoki bo‘linsa qavslar qo‘yilmasdan amallar chapdan o‘ngga qarab bajariladi. Masalan,

35-4+56-12-34 yoki 80:2·5·8:5.

Amallarni bajarishda avvalo ikkinchi bosqich (ko‘paytirish va bo‘lish), keyinchalik birinchi bosqich (qo‘shish va ayirish) amallar bajariladi.

Shuni hisobga olsak, sonli ifodalar qiymatlarini hisoblashda quyidagi qoidalarga amal qilinadi:

1) agar sonli ifoda qavslarsiz berilgan bo‘lsa, sonli ifoda qo‘shish amallarini va ayirish amallarini o‘zida saqlovchi bo‘laklarga ajratiladi. Bu bo‘laklarni har birida ko‘paytirish va bo‘lish amallari chapdan o‘ngga qarab bajarilib, bo‘laklar qiymatlari hisoblanadi, keyinchalik hisoblangan qiymatlar o‘rniga qo‘yilib, sonli ifoda qiymati qo‘shish va ayirish amallarini chapdan o‘ngga bajarib topiladi;

2) agar sonli ifoda o‘zida qavsni saqlasa, u holda chap va o‘ng qavs ichidagi ifoda 1-qoidaga asosan hisoblanadi va qavslarning o‘rniga hisoblangan qiymat qo‘yiladi, keyingi hisoblashlar 1-qoida asosida bajariladi, aks holda, yana 2- qoida qo‘llaniladi.

Masalan,

1) $32\cdot2-7\cdot5+4:2-5\cdot3+8:2$ ifoda berilgan bo‘lsin,

$32\cdot2-7\cdot5+4:2-5\cdot3+8:2=32\cdot2+4:2+8:2-7\cdot 5-5\cdot3=64+2+4935-15=70-50=20;$

2) $(24:2+12\cdot3)-(44:11+5)+12=(12+36)-(4+5)+12=48-9+12=48+12-9=60-9=51$

Shuning bilan birga barcha sonli ifodalar qiymatga ega bo‘lavermasligini qayd etamiz. Masalan, 9: (3-3) va (8-8): (3-3) ifodalar qiymatga ega emas, chunki nolga bo‘lish mumkin emas.

2-ta'rif. Sonlar va harflardan tuzilib, amal ishoralari bilan birlashtirilgan ifoda harfiy ifoda deyiladi. Masalan, $\frac{2b}{a+c}-\frac{b-a}{2a+b}$; ... $7a+\frac{3}{4}b$ va hokazo.

Harfiy ifodada harflarning o‘rniga qo‘yish mumkin bo‘lgan sonlar to‘plami harfiy ifodaning aniqlanish sohasi deyiladi.

Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligi

3-ta'rif. «Teng» (=) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tenglik deyiladi (agar ifoda sonlardan iborat bo‘lsa sonli tenglik deyiladi).

Ikkita A va B sonli ifoda berilgan bo‘lsin. Biz bu ifodalardan $A = B$ tenglikni hosil qilishimiz mumkin. Bular mulohazalar bo‘lib, rost yoki yolg‘on bo‘lishi mumkin. $A = B$ tenglik faqat va faqat A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo‘lib, bu qiymatlar teng bo‘lsagina rost bo‘ladi.

Masalan, 3+8=4+7 rost; 7:(3-3)=6 yolg‘on, chunki 7: (3-3) son qiymatga ega emas.

Shuningdek, natural sonlar to‘plamida 2-5+11=2·4 yolg‘on, chunki N to‘plamda 2-5 ifoda aniqlangan emas.

Ammo sonlar to‘plami kengaytirilgandan keyin, ya'ni manfiy sonlar kiritilgandan keyin yuqoridagi tenglik o‘rinli, chunki tenglikning ikkala tomoni ham 8 ga teng qiymatga ega bo‘ladi.

Sonli ifodalarning tenglik munosabati refleksivlik, simmetriklik va tranzitivlik xossalariga ega, shu sababli ekvivalentlik munosabatidir.

Shuning uchun bir xil qiymatlarga ega bo‘lgan sonli ifodalar to‘plami ekvivalentlik sinflariga bo‘linadi.

Masalan, 7+2, 6+3, 11-2, 18:2, 3·3 va hokazo – bularni barchasi 9 qiymatiga ega. Yuqoridagi ta'riflardan, agar A, B, C, D lar sonli ifodalar bo‘lib, $A = B$ va $C = D$ tengliklar rost bo‘lsa, u holda quyidagi tengliklar ham rost bo‘ladi.

$$(A) + (C) = (B) + (D); \qquad (A) - (C) = (B) - (D)$$
$$(A) \cdot (C) = (B) \cdot (D); \qquad (A):(C) = (B):(D)$$

4-ta'rif. «Katta» (>), «kichik» (<), «katta yoki teng» ($\geq$), «kichik yoki teng»($\leq$) belgisi bilan birlashtirilgan ikki ifoda tengsizlik deb ataladi. Agar A va B lar sonli ifodalar bo'lsa, $A < B$ tengsizlik. A va B ifodalar son qiymatlarga ega bo'lib, A ifodaning sonli qiymati B ifodaning sonli qiymatidan kichik bo'lganda rost bo'ladi.

Masalan: $(16-4):3 < 2+5$ tengsizlik rost, chunki $(16-4):3$ ning qiymati 4, $2+5$ ning qiymati 7, shu sababli $4 < 7$.

$A = B, C < D$ $(A, B, C, D) - sonli\ ifodalar$ ko'rinishidagi yozuvlarni mulohazalar deganimiz uchun ularning ustida kon'yunksiya, diz'yunksiya, implikatsiya va boshqa mantiqiy amallarni bajarish mumkin.

Masalan, $A \leq B = (A < B) \vee (A = B)$ Bu munosabat $A < B; A = B$ mulohazalardan biri rost bo'lganda rost.

Masalan, $(12:3+5) \cdot 2 \leq 25+13$ rost, chunki $(12:3+5) \cdot 2$ ifoda qiymati 18, 25+13 ifoda qiymati 38, 18<38 tengsizlik esa rost.

$A < B < C$ qo'sh tengsizlik esa $A < B$ va $B < C$ tengsizliklar kon'yunksiyasini ifodalaydi. Bu kon'yunksiya ikkita tengsizlik rost bo'lganda rost.

Masalan, $5 + 12 < 441:21 < 2 \cdot 17$ rost, chunki $5+12$ ning qiymati $17, 441:21$ ning qiymati $21, 2 \cdot 17$ ning qiymati 34. Shunday qilib $17 < 21$ va $21 < 34$ bo'lgani uchun qo'sh tengsizlik rost. Biz endi tengsizlik tushunchasiga tartib munosabati orqali kelamiz.

Bizga ma'lumki, haqiqiy sonlar to'plamidagi kichik munosabati tartib munosabatiga misol bo'la oladi. Kichik munosabati «<» belgi bilan ifodalanadi. Bu munosabat qat'iy chiziqli tartiblangan munosabat, boshqacha aytganda, u asimmetrik va tranzitiv. Haqiqiy sonlar to'plamidagi ixtiyoriy x va y sonlari uchun x<y yoki y>x munosabatlardan faqat bittasi bajariladi.

Shuningdek, x<y munosabat faqat va faqat y-x>0 bo'lganda o'rinli bo'lishini ko'rsatish mumkin. Shu sababli a>0 va b>0 bo'lganda, $a+b>0$ va $ab>0$ tengsizliklar o'rinli bo'lishi kelib chiqadi.

Tengsizlikni shu xossasidan qolgan xossalarini ham keltirib chiqarish mumkin.

1. Tengsizlikni ikkala tomoniga bir xil sonni qo'shsa, x<y munosabati saqlanadi bu munosabatga qo'shishga nisbatan tartib munosabatining monotonligi deyiladi. Boshqacha aytganda, agar $x<y$ bo'lsa, u holda ixtiyoriy a soni uchun $x+a<y+a$ tengsizlik bajariladi. Haqiqatan ham, $x<y$ tengsizlikdan $y-x>0$ kelib chiqadi. Ammo $(y+a)-(x+a)=y-x>0$ bo'lganidan $x+a<y+a$ kelib chiqadi.

2. Agar $x<y$ va $a<b$ bo'lsa, u holda $x+a<y+b$ bo'ladi. Haqiqatan ham, bu holda $y-x>0$ va $b-a>0$ bo'lganidan $(y+b)-(x+a)=(y-x)+(b-a)>0$ bo'ladi.

3. Tengsizlikni ikkala tomoni bir xil musbat songa ko'paytrilsa $x<y$ munosabat saqlanadi, ya'ni $x<y$ va $a>0$ munosabatdan $ax<ay$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham $x<y$ tengsizlikdan $y-x>0$ kelib chiqadi. Ikkita musbat son ko'paytmasi musbat son bo'lishidan $a(y-x)>0$ bo'lishi ravshan.

$a(y-x)=ay-ax$ bo'lishidan $ax<ay$ kelib chiqadi.

4. Agar x,y,a,b - sonlari musbat sonlar bo'lsa, $x<y$ va $a<b$ tengsizliklardan $ax<by$ tengsizlik kelib chiqadi.

Haqiqatan ham, $x<y$ va a sonining musbatligidan $ax<by$ ga ega bo'lamiz. Tengsizlik munosabatining tranzitivlik xossasidan esa $ax<ay$ va $ay<by$, bu tengsizliklardan $ax<by$ ga ega bo'lamiz.

$y>x$ va $x<y$ tengsizliklar ekvivalent bo'lganligidan bu ikkala tengsizlik bir vaqtda rost yoki bir vaqtda yolg'on. Shu sababli «>» va «<» tengsizlik belgilari o'zaro teskari belgilar.

5. Tengsizlikda sonlarning ishoralarini o‘zgartirsak, tengsizlik belgisi teskarisiga o‘zgaradi, ya’ni $x < y$ bo‘lsa, $-x > -y$ bo‘ladi. Haqiqatan ham, $x < y$ bo‘lishi $y - x > 0$ bo‘lishini bildiradi. Ammo $y - x = (-x) - (-y)$. Shu sababli $(-x) - (-y) > 0$, ya’ni $-y < -x$.

6. Tengsizlikning ikkala tomoni manfiy songa ko‘paytirilsa, tengsizlik belgisi teskarisiga o‘zgaradi, ya’ni $x < y$ va a manfiy son bo‘lsa , u holda $ax > ay$ bo‘ladi.

7. Agar $0 < x < y$ yoki $x < y < 0$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$ bo‘ladi.

Buni isbotlash uchun $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{y-x}{xy}$ munosabatdan foydalanamiz. Shartga ko‘ra x va y sonlari bir xil ishoralarga ega, shuning uchun xy - ham musbat son, shu sababli $\frac{1}{x} - \frac{1}{y}$ ham musbat, bundan esa $\frac{1}{y} < \frac{1}{x}$

$x > y$ va $x < y$ munosabatlar bilan birgalikda $x \leq y, x \geq y$ munosabatlar ham qo‘llaniladi $x \leq y$ tengsizlik $x < y$ tengsizlik va $x = y$ tenglik diz’yunksiyasini ifodalaydi. Ularni bittasi rost bo‘lsa, diz’yunktsiya rost bo‘ladi.

$x \leq y = (x < y) \vee (x = y)$. Masalan, $5 \leq 9$ rost, chunki $5 < 9$ rost.

$x < y < z$ tengsizlik $x < y$ va $y < z$ tengsizliklar kon’yunksiyasi bo‘lib, u ikkala tengsizlik rost bo‘lganda rost bo‘ladi. Masalan, $5 < 7 < 9$ rost, chunki $5 < 7$ va $7 < 9$ tengsizliklar rost, $3 < 7 < 6$ bu yolg‘on, chunki $3 < 7$ tengsizlik rost bo‘lsa ham, $7 < 6$ tengsizlik yolg‘on.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Sonli, harfiy ifodalarga ta’rif bering, ularni aniqlanish sohasiga misollar keltiring.
2. Sonli ifodalarning tengligi va tengsizligiga ta’rif bering.
3. Sonli tengsizlik xossalarini aytib, tushuntiring.

12.2. Sonli tenglik va tengsizlik, ularning xossalari, bir o'zgaruvchili tenglama va tengsizliklar

O'zgaruvchili ifoda tushunchasi ham sonli ifoda tushunchasi kabi aniqlanadi va unda sonlar bilan birga harflar ham ishlatiladi.

Agar x va y o'zgaruvchilarga ega bo'lgan ifoda berilgan bo'lsa, u holda har bir sonli (a,b) kortejga sonli ifoda mos keladi. U ifoda x ni a ga y ni $b$ga almashtirish natijasida hosil bo'ladi. Hosil bo'lgan ifoda qiymatga ega bo'lsa, u holda bu qiymat $x=a$ va $y=b$ bo'lganda ifodaning qiymati deyiladi. O'zgaruvchili ifoda $A(x), B(x;y)$ va hokazo ko'rinishda belgilanadi. Agar o'zgaruvchili ifoda $B(x;y)$ da $x=16$, $y=5$ sonlariga almashtirilsa, $B(16;5)$ sonli ifoda hosil bo'ladi.

O'zgaruvchili ifoda predikat hisoblanmaydi, chunki harflarni o'rniga son qo'yganda mulohaza hosil bo'lmasdan, sonli ifoda hosil bo'ladi. Bu ifodaning qiymati rost yoki yolg'on bo'lmasdan, son kelib chiqadi.

x o'zgaruvchini o'zida saqlovchi ifodada x ning o'rniga qo'yganda ifoda aniq qiymatga ega bo'luvchi sonlar to'plami mavjud. Bu sonlar to'plamiga berilgan ifodani aniqlanish sohasi deyiladi. Masalan, $7:(x-5)$ ifodani aniqlanish sohasi 5 sonidan boshqa barcha sonlardan iborat. Ayrim hollarda x faqat natural sonlar to'plamidan qiymatlar qabul qilishi mumkin, Masalan, x - guruhdagi talabalar to'plami. Shuningdek, o'zgaruvchili ifoda o'zida bir qancha o'zgaruvchini saqlasa, aytaylik, ifoda x va y o'zgaruvchini o'zida saqlasin, u holda ifodaning aniqlanish sohasi $(a;b)$ juft sonlar to'plamidan iborat bo'lishi mumkin. Masalan: $8:(x-y)$ buni aniqlanish sohasi barcha sonlarning ($a;b$) juftliklardan iborat bo'lib, bunda faqat $a \neq b$.

O'zgaruvchili ifodada o'zgaruvchini faqat sonlar bilan emas, balki boshqa harfiy ifodalar bilan ham almashtirish mumkin. Masalan, $2x+3y$ ifodada x ni $3a+2b$ y ni $2a-4b$ bilan almashtirsak $2(3a+2b)+3(2a-4b)$ ko'rinishdagi ifodaga ega bo'lamiz.

Agar $A(x)$ va $B(x)$ o'zgaruvchili ifoda ifodaga kiruvchi harflarning qabul qiliishi mumkin bo'lgan qiymatlarida bir xil qiymatlar qabul qilsa, $A(x)$ va $B(x)$ lar aynan teng deyiladi.

Ta'rif. Agar o'zgaruvchilarning aniqlanish sohasidan olingan ixtiyoriy qiymatida ikki ifodaning mos qiymatlari teng bo'lsa, bu ikki ifoda aynan teng deyiladi.

Masalan, $(x+5)^2$ va x^2+10^x+25 aynan teng.

$\frac{x}{3}$ va $\frac{x^2}{3x}$ aynan teng emas, chunki $x=0$ da birinchi ifoda 0 qiymatga ega, ikkinchisi esa, son qiymatga ega bo'lmaydi. Ammo noldan farqli sonlar to'plamida ular aynan teng. O'zgaruvchili ikkita ifodaning aynan tengligi tasdig'i mulohoza hisoblanadi, Yuqoridagi $(x+5)^2$ va $x^2+10x+25$ ifodalarning aynan tengligini $(\forall x)((x+5)^2=x^2+10x+25)$ ko'rinishida yozish mumkin. Odatda qisqalik uchun $\forall x$ ni tashlab quyidagicha yoziladi: $(x+5)^2 = x^2+10x+25$.

O'zgaruvchining ixtiyoriy qiymatida to'g'ri bo'lgan tenglik ayniyat deyiladi. Barcha haqiqiy sonlarning ko'paytirish va qo'shish qonunlari, yig'indidan sonni ayirish, sondan yig'indini ayirish qoidalari, yig'indini songa bo'lish va boshqalar ayniyat hisoblanadi. Shuningdek, 0 va 1 lar bilan bajariladigan amallar qoidalari ham ayniyat hisoblanadi. Ifodani ayniy shakl almashtirish deganda, umumiy qoidalarga tayanib, berilgan ifodadan unga aynan teng bo'lgan boshqa ifodaga ketma-ket o'tish tushuniladi.

Masalan, $\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)$ ifodani soddalashtiring.

$$\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right) = \frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x(x+y)+x^2+y^2-x(x-y)}{y^2-x^2}\right) = \frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot$$

$$\frac{x^2+xy+x^2+y^2-x^2+xy}{x^2-y^2} = \frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\frac{x^2+2xy+y^2}{x^2-y^2} = \frac{(x-y)(x+y)^2}{(x+y)^2(x-y)(x+y)} = \frac{1}{x+y};$$

Demak, $\frac{x-y}{(x+y)^2}\cdot\left(\frac{x}{x-y}-\frac{x^2+y^2}{y^2-x^2}-\frac{x}{x+y}\right)=\frac{1}{x+y}$

Bir o'zgaruvchili tenglamalar. Bizga x o'zgaruvchini o'zida saqlovchi, aniqlanish sohasi X to'plamdan iborat $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ifodalar berilgan bo'lsin.

1-ta'rif. $f_1(x) = f_2(x)$ bir o'rinli predikatga bir o'zgaruvchili tenglama deyiladi, bunda $x \in X$. Tenglamani yechish deganda, x o'zgaruvchining tenglamani rost tenglikga aylantiruvchi qiymatlarini yoki boshqacha aytganda, berilgan predikatning rostlik to'plami T ni topish tushuniladi. Demak, $f_1(x) = f_2(x)$ $x \in X$ predikatning rostlik to'plamiga tenglamaning yechimi, to'plamga kiruvchi sonlarga esa tenglamaning ildizlari deyiladi.

Misol. $(x-2)(x+3) = 0$ tenglama ikkita 2 va –3 ildizlarga ega. Bu tenglamani yechimlar to'plami $T = \{2; -3\}$.

Cheksiz ko'p yechimlar to'plamiga ega bo'lgan tenglamalar ham mavjud.

Masalan, $x = |x|$ tenglamaning yechimlar to'plami barcha nomanfiy sonlardan iborat.

X to'plamdan olingan biror δ qiymatda $f_1(x)$ va $f_2(x)$ ma'noga ega bo'lmasligi mumkin. Bu holda $f_1(x)$=$f_2(x)$ tenglik yolgon hisoblanadi va δ $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamani ildizi bo'la olmaydi.

Masalan, $\frac{1}{x-3} + 5 = \frac{1}{x-7} + 6$ tenglama uchun 3 va 7 sonlari ildiz bo'la olmaydi, chunki $x = 3$ da $\frac{1}{x-3}$ kasr, $x = 7$ da $\frac{1}{x-7}$ kasr ma'noga ega emas.

Shuning uchun $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamani yechishdan oldin $f_1(x)$ va $f_2(x)$ aniq qiymatlarga ega bo'lgan A to'plamni topish kerak. Bu A to'plamga x o'zgaruvchining qabul qilishi mumkin bo'lgan qiymatlari to'plami yoki tenglamaning aniqlanish sohasi deyiladi. Yuqoridagi tenglama uchun bunday soha 3 va 7 sonlaridan tashqari barcha haqiqiy sonlar to'plami hisoblanadi va u quyidagicha yoziladi. $A =]-\infty; 3[\cup]3; 7[\cup]7; +\infty[$.

$f_1(x) = f_2(x)$ predikatning aniqlanish sohasi X to'plam chekli bo'lsa, u holda tenglama ildizini topish uchun X to'plamdagi sonlarni birin-ketin qo'yish yordamida tenglama ildizlarini topish mumkin. Agar X to'plam cheksiz bo'lsa, u holda tenglamalar teng kuchliligidan foydalanamiz.

2-ta'rif. Agar ikkita $f_1(x) = f_2(x)$ va $g_1(x) = g_2(x)$ tenglamalarning yechimlar to'plami teng bo'lsa, bu ikki tenglama teng kuchli deyiladi.

Masalan, $(x-1)^2 = 9$ va $(x-2)(x+4) = 0$ tenglamalar haqiqiy sonlar to'plamida teng kuchli, chunki birinchi va ikkinchi tenglamaning yechimlar to'plami $\{-4; 2\}$. Bunda ikki tenglama ham bir xil aniqlanish sohasiga ega.

Boshqacha aytganda, $f_1(x) = f_2(x)$, $g_1(x) = g_2(x)$ predikatlar ekvivalent bo'lsa, ikkita tenglama teng kuchli bo'ladi.

Agar $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning yechimlar to'plami $g_1(x) = g_2(x)$ tenglama yechimlar to'plamining to'plam ostisi bo'lsa, $g_1(x) = g_2(x)$ tenglama $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamaning natijasi deyiladi. Ikkita tenglama faqat va faqat biri-birining natijasi bo'lgan holdagina teng kuchli bo'ladi.

Agar $g_1(x) = g_2(x)$ tenglama $f_1(x) = f_2(x)$ tenglamani qanoatlantirmaydigan ildizlarga ega bo'lsa, bu ildizlar $f_1(x) = f_2(x)$ tenglama uchun chet ildizlar bo'ladi.

Umuman olganda, agar tenglamani yechishda uni natija bilan almashtirilsa, (teng kuchli tenglama bilan emas), u holda natija tenglamaning barcha ildizlarini topish kerak va ularni berilgan tenglamaga qo'yib tekshirish va chet ildizlarni tashlab yuborish kerak.

12.3. Teng kuchli tenglamalar va tengsizliklar haqida teoremalar

1-teorema. $f_1(x)=f_2(x)$ (1) tenglama X to'plamda berilgan va F (x) esa shu to'plamda aniqlangan ifoda bo'lsin. U holda $f_1(x)=f_2(x)$ (1) va $f_1(x)+F(x)=f_2(x)+F(x)$ (2) tenglamalar X to'plamda teng kuchli bo'ladi.

Bu teoremani boshqacha ta'riflash mumkin, ya'ni, aniqlanish sohasi X bo'lgan tenglamaning ikkala qismiga shu X to'plamda aniqlangan o'zgaruvchili bir xil ifoda qo'shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli bo'lgan yangi tenglama hosil bo'ladi.

Isbot. (1) tenglamaning yechimlari to'plamini T_1 bilan (2) tenglamaning yechimlar to'plamini T_2 bilan belgilaymiz.

Agar $T_1=T_2$ bo'lsa, (1) va (2) tenglamalar teng kuchli bo'ladi. Ammo bunga ishonch hosil qilish uchun T_1 dagi istalgan ildiz (2) tenglamaning ham ildizi bo'lishini va aksincha, T_2 dagi istalgan ildiz (1) tenglama ildizi bo'lishini ko'rsatish lozim.

Aytaylik, a soni (1) tenglamaning ildizi bo'lsin. U holda $a \in T_1$ va u(1) tenglamaga qo'yilganda uni $f_1(a)=f_2(a)$ to'g'ri sonli tenglikka, F(x) ifodani sonli ifoda F(a) ga aylantiradi. $f_1(a)=f_2(a)$ to'g'ri tenglikning ikkala qismiga F(a) sonli ifodani qo'shamiz. Natijada sonli tenglikning xossasiga ko'ra to'g'ri sonli tenglik hosil bo'ldi: $f_1(a)+F(a)=f_2(a)+F(a)$

Bu tenglikdan ko'rinib turibdiki, a soni (2) tenglamaning ham ildizi ekan.

Shunday qilib, (1) tenglamaning har bir ildizi (2) tenglamaning ham ildizi bo'lishi isbotlandi, ya'ni $T_1=T_2$.

Tenglamalarni yechishda ko'pincha bu teoremaning o'zi emas, balki undan kelib chiqqadigan natijalar qo'llaniladi:

1. Agar tenglamaning ikkala qismiga ayni bir xil son qo'shilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

2. Agar tenglamaning birorta qo'shiluvchisini bir qismidan ikkinchi qismiga ishorasini qarama-qarshisiga o'zgartirib o'tkazilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

2- teorema. $f_1(x)=f_2(x)$ tenglama X to'plamda berilgan hamda F (x) shu to'plamda aniqlangan va X to'plamdagi x ning hech bir qiymatida nolga aylanmaydigan ifoda bo'lsin. U holda $f_1(x)=f_2(x)$ va $f_1(x)F(x)=f_2(x)F(x)$ tenglamalar X to'plamida teng kuchli bo'ladi (teorema isboti mustaqil ish sifatida qoldiriladi).

2-teoremadan tenglamalarni yechishda ko'p qo'llaniladigan natija kelib chiqadi.

Natija. Agar tenglamaning ikkala qismi noldan farqli ayni bir songa ko'paytirilsa, berilgan tenglamaga teng kuchli tenglama hosil bo'ladi.

Bizga x o‘zgaruvchini o‘zida saqlovchi aniqlanish sohasi X to‘plamdan iborat $f_1(x)$va$f_2(x)$ ifodalar berilgan bo‘lsin.

Ta’rif. $f_1(x) < f_2(x)$, $x \in X$ yoki $f_1(x) > f_2(x)$, $x \in X$ bir o‘rinli predikatlarga bir o‘zgaruvchili tengsizlik deyiladi.

Bunday tengsizliklarni yechish deganda, x ning o‘rniga qo‘yganda tengsizlikni rost sonli tengsizlikka aylantiruvchi sonlar to‘plami T ni topish tushuniladi. Bu sonlar to‘plami tengsizlikni yechimlar to‘plami deyiladi. Bir tengsizlikni har bir yechimi ikkinchi tengsizlikning yechimi bo‘lishi mumkin. U holda ikkinchi tengsizlik birinchi tengsizlikning natijasi deyiladi. Masalan, $x > 3$ va $x > 6$ tengsizliklarni olaylik. Bunda 6 dan katta son 3 sonidan ham katta bo‘ladi. Shuning uchun $x > 3$ tengsizlik $x > 6$ tengsizlikning natijasi. Shu sababli berilgan tengsizlik natijasi bo‘lgan tengsizlikning yechimlar to‘plami Q berilgan tengsizlik yechimlar to‘plami T ni o‘z ichiga oladi ya’ni $T \subset Q$. Agar ikkita tengsizlik bir xil yechimlar to‘plamiga ega bo‘lsa, u tengsizliklar teng kuchli deyiladi. U holda bu tengsizliklar bir-birining natijasi bo‘ladi.

Masalan, biror a soni 7 dan katta deyish bilan $a + 1$ soni 8 dan katta deyish teng kuchli. Shuning uchun $x > 7$ $x + 1 > 8$ tengsizliklar teng kuchli. x ni o‘zida saqlovchi tengsizliklar predikatlar bo‘lgani uchun, ularning kon’yunksiyasi va diz’yunksiyasi to‘g‘risida gapirish mumkin.

Masalan, a soni $3x - 8 > 1$ va $2x + 5 < 15$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, bu son tengsizliklarning $(3x - 8 > 1) \wedge (2x + 5 < 15)$ kon’yunksiyasini ham qanoatlantiradi. Bu a soni esa 4 sonidan iborat. Maktab kursida kon’yunksiya deb aytmasdan, uni quyidagi sistema ko‘rinishida yozish qabul qilingan:

$$\begin{cases} 3x - 8 > 1 \\ 2x + 5 < 15 \end{cases}$$

Agar biror a sonida ikki va undan ortiq tengsizliklardan kamida bitta tengsizlik rost qiymatga ega bo‘lsa, u holda tengsizliklar diz’yunksiyasi shu a sonida rost qiymatga ega bo‘ladi.

Masalan, -2 soni $(2x > 8) \lor (3x < -3)$ (1) tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to'plamiga tegishli. Haqiqatan ham bu sonni birinchi tengsizlikga qo'ysak, $2 \cdot (-2) > 8$ degan yolg'on tengsizlik kelib chiqadi. Ikkinchi tengsizlikga qo'ysak, $3(-2) < -3$ degan rost tengsizlik hosil bo'ladi. Demak, -2 soni (1) tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to'plamiga tegishli.

Agar 0 sonini olsak, bu son tengsizliklar diz'yunksiyasi yechimlar to'plamiga tegishli emas, chunki 0 sonini (1) ga kiruvchi tengsizliklarga qo'ysak, $2 \cdot 0 > 8$ va $3 \cdot 0 < -3$ degan yolg'on tengsizliklarga ega bo'lamiz. Qoidaga ko'ra tengsizliklar yechimlar to'plami cheksiz, buni koordinatalar o'qida ko'rgazmali tasvirlaydilar. Bunda yechimlar to'plami bir qancha juft-jufti bilan kesishmaydigan nuqtalar, kesmalar, oraliqlar va nurlar orqali ifodalanadi.

Teng kuchli tengsizliklar uchun quyidagi teoremalar o'rinli (teoremalar isbotsiz keltiriladi).

1-teorema. Agar $F(x)$ ifoda ixtiyoriy $x \in X$ qiymatlarda aniqlangan bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$va $f_1(x) + F(x) < f_2 + F(x)$ tengsizliklar teng kuchli.

2-teorema. Agar $F(x)$ ifoda barcha $x \in X$ larda aniqlangan hamda X sohada musbat bo'lsa u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $f_1(x)F(x) < f_2(x)F(x)$ tengsizliklar teng kuchli.

Boshqacha aytganda, $F(x)$ manfiy bo'lmasa, u holda $f_1(x) \leq f_2(x)$ va $f_1(x)F(x) \leq f_2(x)F(x)$ tengsizliklar ham teng kuchli.

Bu teoremadan quyidagi natijalar kelib chiqadi:

1-natija. Agar a soni musbat, ya'ni $a > 0$ bo'lsa, u holda $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) < af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchlidir.

2-natija. Agar $a < 0$ bo'lsa, $f_1(x) < f_2(x)$ va $af_1(x) < af_2(x)$ tengsizliklar teng kuchli. Demak, tengsizlik manfiy songa ko'paytirilsa, tengsizlik belgisi teskarisiga almashadi.

3-teorema. $0 < f_1(x) < f_2(x)$ va $0 < \frac{1}{f_2(x)} < \frac{1}{f_1(x)}$ tengsizliklar bir-biriga teng kuchli.

1-misol. $3x - 4 > x + 6$ tengsizlik yechilsin.

Yechish:1-teoremaga asosan $3x - x > 6 + 4$ yoki $2x > 10$

2-teorema natijalariga ko‘ra $x > 5$.

Demak, tengsizlik yechimlar to‘plami $]5; +\infty[$ nurdan iborat.

2-misol. $(2x - 3 < 5) \wedge (3x - 5 > 1)$ tengsizliklar kon’yunksiyasi yechilsin.

Yechish: Dastlab birinchi, keyin ikkinchi tengsizlikni yechamiz.

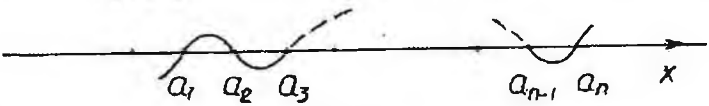
$$2x - 3 < 5 \Leftrightarrow 2x < 8 \Leftrightarrow x < 4$$
$$3x - 5 > 1 \Leftrightarrow 3x > 6 \Leftrightarrow x > 2$$

Bu tengsizlik kon’yunksiyasini qanoatlantiruvchi sonlar ikkita tengsizlikni ham qanoatlantirishi kerak. Shu sababli kon’yunksiya yechimlari to‘plami topilgan yechimlar to‘plamining kesishmasidan iborat bo‘ladi, ya’ni $x < 4$ va $x > 2$ nurlarning kesishmasidan iborat bo‘ladi. Demak, yechimlar to‘plami $2<x<4$ sonlar intervalidan iborat.

$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) > 0$ ko‘rinishdagi tengsizliklarni yechish quyidagicha olib boriladi.

$(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) > 0$ ko‘paytma o‘z ishorasini ko‘paytuvchilardan biri ishorasini o‘zgartirganda o‘zgartiradi, boshqacha aytganda $a_1, a_2, \dots a_n$ nuqtalardan o‘tishda o‘zgartiradi. Bu nuqtalar sonlar o‘qini

$]-\infty; a_1[,]a_1; a_2[, \dots]a_n; +\infty[$ oraliqlarga bo‘ladi (57-rasm)



12.1-rasm

Har bir oraliqda ko‘paytma o‘zgarmas ishoraga ega. Shu sababli ko‘paytmaning har bir oraliqdagi bitta nuqtada ishorasini bilish yetarli. Shunday qilib, barcha ko‘paytuvchilarning barcha oraliqlardagi ishoralarini aniqlaymiz. Ko‘paytma musbat bo‘lgan oraliqlarni birlashtiramiz. Bu birlashma $(x - a_1)(x - a_2) \dots (x - a_n) > 0$ tengsizlikning yechimlar to‘plami bo‘ladi.

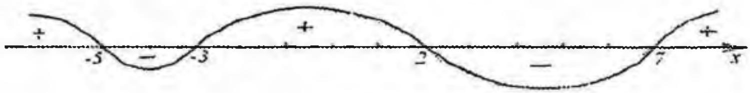
3-misol. $(x - 2)(x + 3)(x - 7)(x + 5) > 0$ tengsizlikning yechimlar to‘plami topilsin.

Yechish: 2, -3, 7, -5 nuqtalar sonlar o‘qini

$]-\infty;-5[,]-5;-3[,]-3;2[,]2;7[,]7+\infty[$ oraliqlarga bo‘ladi.

Oraliqlarda ko‘paytma ishorasini aniqlaymiz. $]-\infty;-5[$ oraliqdagi ishorani aniqlash uchun shu oraliqdan -10 sonini olib, ko‘paytmadagi x o‘rniga qo‘yamiz, ya’ni

$(-10-2)(-10+3)(-10-7)(-10+5)>0$ – musbat, qolgan oraliqlardagi ishoralarni ham aniqlab, sonlar o‘qiga joylashtiramiz (58- rasm).



12.2- rasm

Musbat oraliqlar: $]-\infty;-5[,]-3;2[,]7;+\infty[$ Bu oraliqlarni birlashtirsak, u tengsizlikni yechimlar to‘plami bo‘ladi: T= $]-\infty;-5[\cup]-3;2_1[\cup]7;+\infty[$. Rasmdagi chiziqqa ishoralar egrisi deyiladi.

O‘z-o‘zini tekshirish uchun savollar

1. Tenglamaga ta’rif bering. Tenglamani yechimi deganda nimani tushinasiz?
2. Teng kuchli tenglamalarni misollar yordamida tushuntiring.
3. Teng kuchli tenglamalar haqidagi teoremalarni ayting va isbotlang.
4. Bir o‘zgaruvchili tengsizlikni ta’riflang.
5. Tengsizliklar kon’yuksiyasi va diz’yunksiyasini misollar yordamida ko‘rsating.
6. Teng kuchli tengsizliklar haqidagi teoremalarni aytib bering.
7. Bir o‘zgaruvchili tengsizliklarni intervallar usuli bilan yechishni misol yordamida tushuntiring.

MUNDARIJA

I BOB. DISKRET MATEMATIKA ASOSLARI

II BOB. MATEMATIK MANTIQ ELEMENTLARI

III BOB. ALGEBRAIK SISTEMALAR

IV BOB. ELEMENTAR GRAFLAR NAZARIYASI

V BOB. NOMANFIY BUTUN SONLAR TO'PLAMI

VI BOB SANOQ SISTEMALARI

VII BOB. SONLARNING BO'LINISHI

VIII BOB. SON TUSHUNCHASINI KEHGAYTIRISH MASALASI

IX BOB. GEOMETRIYA ELEMENTLARI

X BOB. MIQDORLAR VA ULARNI O'LCHASH

XI BOB. MATNLI MASALALAR

XII BOB. TENGLIK, TENGSIZLIK VA TENGLAMALAR

B.S.Abdullayeva, A.V.Sadikova, N.A.Xamedova,
N.M.Muxitdinova, M.I.Toshpulatova

BOSHLANG'ICH MATEMATIKA KURSI NAZARIYASI

"Excellent Polygraphy" nashriyoti

Muharrir: A.Abdujalilov
Musahhih: A.Abdujalilov
Sahifalovchi: V.Sanoyev
Dizayner: N.Ablayev

2020-yil 01-noyabrda chop etishga ruxsat berildi.
Bichimi 60x84 $^1/_{16}$. «Times New Roman» garniturasi.
Bosma tabog'i 28,5. Adadi 100 dona. Buyurtma № 8/5.

«Excellent Polygraphy» MChJ bosmaxonasida chop etildi.
100190, Toshkent shahri, Shayxontoxur tumani, Jangox
ko'chasi 12 uy,13 xonadon.

978-9943-993-50-1

9 789943 993501