Sh.Sharahmetov, A.Naimjonov

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

Sharahmetov Sh., Naimjonov A. Iqtisodchilar uchun matematika
(darslik). – T.: «Fan va texnologiya», 2007. – 304 b.
Mas'ul muharrir: prof. G'anixo'jaev R.N. (UzMU).
Taqrizchilar: dots. Zoxirov M. (UzMU), prof. Roziqov O'.A.
(UzFA Matematika instituti), Qurbonov O.T. (TDIU).

Darslik O'zbekiston Respublikasi Davlat ta`lim standartlari asosida yozilgan bo'lib, unda oliy matematikaning chiziqli algebra, analitik geometriya va matematik tahlil bo'limlari yoritilgan.

Matematik tushunchalarning iqtisodiy talqini va tadbiqlari keltirilgan.

Kitob bakalavriatning barcha iqtisod yo'nalishlari talabalari uchun mo'ljallangan.

Шарахметов Ш., Наимжонов А. Математика для экономистов
(учебник). Т.: «Fan va texnologiya», 2007. - 304 с.
Ответственный редактор: проф. Ганиходжаев Р.Н. (НУУ).
Рецензенты: доцент Зохиров М. (НУУ), проф. Розиков У.А.
(АНУз Институт математики), доц. Курбанов (ТГЭУ).

Учебник написан на основе Государственного образовательного стандарта Республики Узбекистан. В нем освещены разделы высшей математики: линейная алгебра, аналитическая геометрия и математический анализ.

Приведены экономические смыслы математических понятий их приложения в экономике.

Книга рассчитана для студентов всех экономических направлений бакалавриата.

Sharakhmetov Sh., Naimjonov A. Mathematics for economists
texbook. - T.: «Fan va texnologiya», 2007. - 304 p.
Editor: Prof. Ganihodjaev R.N.
Referees: dot. Zahirov M., prof. Rozikov O.A., dot. Kurbanov O.

The textbook has been written in conformity with the state standards of The Republic of Uzbekistan.

It covers the following parts of modern mathematics: linear algebra, analytical geometry and mathematical analysis.

It is recommended for students specializing in all fields of economics.

ISBN 978-9943-10-020-6

So‘z boshi

Jahon ta'lim tizimida matematika fanidan ma'lum bir soha (xususan ijtimoiy gumanitar, iqtisod sohalari) talabalari uchun maxsus darslik yaratish yangilik emas. Bunday darsliklarning o‘ziga xosligi shundan iboratki:

Bir tomondan matematika — matematika ligicha qolib-fundamental fan sifatida matematik tushunchalar, aksiomalar, teoremalarning uzviy bog‘lanishda mantiqiy izchilligida qat’iy bayon qilinishi zarur. Talabalarda mantiqiy, algoritmik, abstrakt fikrlashlarning sintezi bo‘lgan-matematik fikrlashni shakllantirishga xizmat qilishi kerak.

Ikkinchi tomondan konkret sohaning talab va ehtiyojlaridan kelib chiqib, uning o‘ziga xos jihatlarini aks ettirishi lozim.

Masalaning bu ikki tomoni ma'lum mutanosiblikda shunday uyg‘unlashuvi kerakki, natijada kurs ma'lum sohaning konkret masalalarini yechishga retseptlar beruvchi qo‘llanma yoki talabalarda matematika faqat hisoblashlarni (ikki nuqta orasidagi masofani, determinantni, limitni, hosila yoki integralni hisoblashni) o‘rganadigan fan degan tushunchani hosil qilmasligi kerak. Mana shu printsipdan kelib chiqib, ushbu darslikning birinchi bobida umuman matematikaning o‘ziga ham yangi ta'rif berishga jur'at etdik.

Matematika tabiat haqidagi barcha bilimlarimizni sistemaga soluvchi, tabiat va jamiyatdagi jarayonlarning matematik modellarini o‘rganuvchi fandir.

Ushbu maxsus iqtisodchilar uchun yozilgan - "Iqtisodchilar uchun matematika" kursida iqtisodning nazariy va amaliy masalalarini yechishga yetarli matematik apparat berildi. Mazkur kursning ehtimollar nazariyasi va matematik statistika, chiziqli programmalash, ekonometrika, moliya va sug‘urta matematikasi, makro va mikro iqtisod va boshqa fanlarga tayanch fan ekanligi nazarda tutiladi.

Darslik ikki bo‘limdan iborat. 1-analitik geometriya va chiziqli algebra elementlari, 2-matematik tahlil. Birinchi bobda dastlabki tushunchalar: Model, modellashtirish, to‘plam, funktsiya tushunchasi va matematik belgilar (kvantorlar) keltirildi. Ma'lum tushuncha va isbotlar noan'anaviy tarzda yoritildi.

Ko'p hollarda matematik tushunchalarning iqtisodiy talqini va tatbiqlari berildi (mavjud darsliklarda asosan fizik-mexanik talqinlar va tatbiqlar keltirilgan).

Masalan: $f(t)$ - t vaqtda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi bo'lsa, $\frac{f(t+\Delta t)-f(t)}{\Delta t}$, $(t, t+\Delta t)$ oraliqdagi o'rtacha ish samaradorligini aniqlaydi.

Tushunarliki, bu holda xosila - $f'(t)$ - t vaqtdagi ish samaradorligini ifodalaydi.

Aksincha korxonaning ish samarodorligi $F(t)$, $t \in (a,b)$ funktsiya orqali ifodalansa, ravshanki $\int_a^b F(t)dt$ – (a,b) oraliqda korxonaning ishlab chiqargan mahsuloti hajmini aniqlaydi.

Kitob yoqorida keltirilgan jihatlari bilan hozir respublikamizda Oliy matematika fanida dars berishda foydalaniliyotgan adabiyotlardan farq qiladi.

Darslik iqtisodning barcha yo'nalishlarda ta'lim olayotgan talabalarning Matematikani maqsadli o'rganishni ta'minlash bilan birga, uni o'zlashtirishni onsonlashtiradi deb o'ylaymiz.

Kitobga mualiflarning keyingi 7-8 yul davomida Toshkent Davlat Iqtisodiyot Universitetida, G.V.Plexanov nomli Rossiya iqtisod akademiyasida «Iqtisodchilar uchun matematika» fanidan o'qigan ma'ruzalari asos qilib olindi. Foydalanilgan adabiyotlar har bir bobda keltiriladi.

Qo'llanmaning ma'lum boblarini yoritishda o'z yordamlarini, maslaxat, fikr, mulohazalarini bergan Oliy matematika kafedrasining professor-o'qituvchilari, Isamuhamedov S.S., Akbarova M., Asraqulova D., G'aniho'jaev R.N., Roziqov O'., G'ulomov A., Rahmatullaev O., Eshqobilov YU larga o'z minnadorchiligimizni bildiramiz. Ma'ruza matnlarini komp'yuterda terish grafik, rasmlarni chizishdek mushkul ishni o'z bo'yniga olgan lobarantimiz Abdurahimova Muhayyohonga alohida xurmatimizni bildiramiz.

Qo'llanma iqtisodchilar uchun matematika fanidan o'zbek tilidagi dastlabki urinishlardan bo'lgani uchun xato va kamchiliklar, munozarali fikrlardan holi bo'lmasligi mumkin. O'quvchilarning kitob yaxshilanishiga qaratilgan tanqidiy fikr mulohazalarni mamnuniyat bilan qabul qilamiz.

I-bo'lim

CHIZIQLI ALGEBRA VA ANALITIK GEOMETRIYA ELEMENTLARI.

1-bob. DASTLABKI TUSHUNCHALAR

1.1 Modellashtirish tushunchasi va iqtisodiy ob'ektlarning matematik modellari

Matematikaning astronomiya, mexanika, fizika kabi fanlarga tatbiqlari qadimdan ma'lum.

XX asrning 40 yillarida elektron hisoblash mashinalarining kashf qilinishi, ayniqsa, axborot texnologiyalarining keyingi taraqqiyoti, bir tomondan matematik usullarning imkoniyatini oshirgan bo'lsa, ikkinchi tomondan uning tatbiqlari doirasi keskin kengayishiga olib keldi.

Hozir matematika qo'llanilmaydigan biror sohaga misol keltirish qiyin. U tobora ko'p fanlarning nazariy va tatbiqiy izlanishlarida universal qurolga aylanib bormoqda. Hozir matematika deganda tabiat haqidagi barcha bilimlarimizni sistemaga soluvchi, tabiat va jamiyatdagi real jarayonlarning matematik modellarini o'rganuvchi fan tushuniladi.

Dastlab, nima uchun modellar kerak degan savolga javob berishga harakat qilamiz. "Model" tushunchasining o'zi nimadan iborat ekanligini aniqlashtirishimiz lozim bo'ladi. Sababi, bu tushunchaga turli ma'nolar berish mumkin. Avvalam bor misollarga murojaat qilamiz.

Oq qora televizordagi biron bir narsaning tasvirini o'sha narsaning modeli deb qarash mumkin. Bu modelda, masalan o'sha narsaning real rangi e'tiborga olinmaydi. Agar shu narsaning rangli televizordagi tasvirini olsak, bu ham o'sha narsaning modelidan iborat bo'lib, bu model avvalgisidan reallikka ancha yaqin bo'ladi. Bu misol shuni ko'rsatadiki, agar biz biron-bir narsaning modelini ko'rmoqchi bo'lsak, tabiiy ravishda qaralayotgan narsaning ayrim xususiyatlari modelda o'z ifodasini topmaydi.

Turli iqtisodiy – matematik modellarni yaratish, ularni o'rganish, tahlil qilish va xulosa chiqarish mana shu model ifodalovchi real iqtisodiy borliq ustida izlanishlar qilish, tajribalar o'tkazish, tahlil qilish va xulosa chiqarish ko'p hollarda juda qimmatga tushsa, ayrim hollarda mumkin ham bo'lmaydi. Hayot tajribasi shuni ko'rsatadiki, iqtisodiyotda, avvaldan uning modelini tahlil qilish va xulosalar chiqarmasdan, to'g'ridan-to'g'ri iqtisodiyotning o'zida shunday tajribalar o'tkazish, keraksiz xarajatlar va salbiy holatlarga olib kelar ekan.

Qaralayotgan masalaning mohiyatiga ko'ra modellar turli maqsadlarni ko'zlab yaratilishi mumkin. Shunga ko'ra modelning ko'rinishi ham turli bo'ladi. Masalan, agar shahar tumanining bosh rejasi qaralayotgan bo'lsa, tabiiy ravishda bu reja chizmada yoki maket shaklida ifoda qilinishi mumkin. Maket ko'rinishda bo'lgan modelda biz real holatda qila olmaydigan harakatlarni bajara olamiz. Masalan, maketda tasvirlangan ayrim narsalarni, aytaylik biron-bir binoni, bir joydan ikkinchi joyga osonlikcha qo'yishimiz mumkin, shu bilan biz eng qulay variantlarni tanlash imkoniga ega bo'lamiz.

Fizikadagi $S=\frac{gt^2}{2}$ formula yuqoridan pastga erkin tushayotgan jismning bosib o'tgan yo'li bilan vaqtni bog'laydi, bu yerda, g erkin tushayotgan jismning joyga bog'liq bo'lgan tezlanishidir. Mana shu formula qaralayotgan model tenglama orqali ifoda etilganini ko'rsatib turibdi. Misollardan ko'rinib turibdiki, model o'zi aks ettirgan narsa to'g'risida yangi ma'lumotlarni olish yoki o'sha narsa to'g'risida keyinchalik tiklab bo'lmaydigan ayrim ma'lumotlarni saqlab qolishga ham xizmat qilishi mumkin ekan.

O'rganilayotgan narsalarni modellashtirish bilan jarayon tugamaydi. Balki, model ko'rilib, uning yordamida ayrim natijalar olinib, bu natijalarni reallik bilan solishtirish ham lozim bo'ladi. Agar bu solishtirishlar natijalari qoniqarli bo'lmas ekan, u holda modelga ba'zi-bir o'zgarishlar kiritishga yoki umuman yangi model ko'rishga ham to'g'ri kelishi mumkin. Agar bu solishtirishlar yaxshi natijalarga olib kelsa, ya'ni reallik bilan yetarlicha ustma-ust tushsa, u holda mana shu ustma-ust tushishlik chegaralari aniqlanishi kerak bo'ladi.

Endi model tushunchasiga ta'rif beramiz.

Ta'rif. Biz o'rganmoqchi bo'lgan borliq ob'ektning yoki hayoliy narsaning eng muhim xususiyatlarini ifoda qiluvchi, uning muhim parametrlarini o'zida mujassam qilgan material yoki ideal qurilmaga **model** deyiladi.

Modellar, ta'rifda aytilgandek material va ideal qurilma ko'rinishida bo'lishi mumkin ekan. Material modellar sifatida foto surat, televedinie ekranidagi tasvir, bino maketi va shunga o'xshash misollarni ko'rsatish mumkin. Ideal modellar esa asosan belgilar, matematik ifodalar yordamida mana shu belgilar, matematik ifodalar esa real narsalar orasidagi munosabatlarni, tenglamalar, tensizliklar, grafiklar, kompyuter uchun dasturlar va boshqalar asosida tasvirlaydi.

Matematik modellar ideal modellar sirasiga kiradi. Bu modellar odatda matematik belgilar, sonlar, funksiyalar, tenglamalar, grafiklar va hakazolar yordamida ko'riladi.

Iqtisodiy ob'ektlarning matematik modellari tenglamalar, tengsizliklar, mantiqiy bog'lanishlar, grafiklar, graflar va hokazolar yordamida ifodalanadi, ya'ni tasvirlanadi. Bu tasvir tarkibiga o'rganilayotgan narsaning tashkil etuvchi elementlari orasidagi bog'lanishlar ham kirishi kerak bo'ladi. Bu degan so'z, model qaralayotgan iqtisodiy ob'ektning shartli bir tasviri ekanligini bildiradi. Modelni o'rganish ob'ekt to'g'risida yangi ma'lumotlarni olish va turli holatlarda ularga mos keluvchi eng yaxshi (optimal) yechimlar topishga imkon beradi.

Turli iqtisodiy jarayonlarni o'rganish uchun iqtisodchilar soddalashtirilgan, formallashtirilgan iqtisodiy modellardan foydalanadilar. Iqtisodiy modellarga misol sifatida talab va taklif modeli, firma modeli, Leontev modeli, iqtisodiy o'sish modeli, tovar moliya bozorlaridagi muvozanat holatining modeli va boshqalarni keltirish mumkin. Model tuzishda modellashtirilayotgan ob'ektdagi jarayonlarni belgilovchi muhim faktorlar olinib, muhim bo'lmaganlari esa model tarkibiga kiritilmaydi.

Iqtisodiy modellarni ko'rishda quyidagilarga rioya qilish talab qilinadi.

1) izlanishning predmeti va maqsadi bayon qilinadi;

2) qaralayotgan iqtisodiy ob'ektdagi tarkibiy va funktsional elementlardan ko'zlanayotgan maqsadga javob beruvchilari ajratib olinib, shu elementlarning eng muhim sifat ko'rsatkichlari bayon etiladi;

3) model elementlari orasidagi bog'lanishlar ma'no jihatdan so'z bilan ifoda
qilinib beriladi;

4) iqtisodiy ob'ektning ko'rsatkichlarini belgilar yordamida ifodalab, ular orasidagi bog'lanishlarni imkoni boricha formallashtirish kerak bo'ladi. Natijada qaralayotgan iqtisodiy ob'ektning matematik modeli tuziladi, hosil bo'ladi;

5) yaratilgan matematik model yordamida hisob-kitoblar olib borilib, olingan natijalar tahlil qilinadi

Shuni ta'kidlash lozimki, matematik modelning tarkibiy tuzilishi bilan shu model ifodalovchi iqtisodiy ob'ektlar turli ma'noni kasb etishi mumkin.

Masalan:

$$x = x_0\left(1 + \frac{p}{100}\right)$$

formula orqali ko'rilgan matematik modelni turli ma'noda iqtisodiy talqin etish mumkin. Aytaylik, masalan, bankning yillik foizi stavka 20% bo'lsa ($p = 20$), bir yildan so'ng 12000 so'm olish uchun ($x = 12000$) bankka necha so'm ($x_0 = ?$) qo'yish lozim, degan masala yuqoridagi formula yordamida yechiladi. Shuningdek, quyidagi masalada ya'ni, texnik yangilanishlar natijasida zavod bir yildagi o'rtacha ish unumdorligi 20 % ga ($p = 20$) ortgan bo'lib, yil oxirida 12000 dona ($x = 12000$) mahsulot ishlab chiqarilqan bo'lsa, texnik yangilanishdan avval zavodning ishlab chiqarish hajmi ($x_0 = ?$) qancha bo'lgan, degan masala ham shu formula orqali ifodalanadi.

Iqtisodiy modellar qaralayotgan iqtisodiy ob'ekt faoliyatidagi muhim o'rin tutadigan tarkibiy qismlarni aniqlashga va shular asosida ushbu ob'ektning kelajak faoliyatidagi o'zgarishlarni, ayrim parametrlar o'zgarishiga bog'liq ravishda oldindan bashorat qilish imkonini beradi. Modelda parametrlar orasidagi bog'liqliklarni miqdoriy jihatdan baholash mumkin bo'lgani uchun, bashoratni yetarlicha aniqlikda va yetarlicha ishonch darajasida bajarish mumkin bo'ladi.

Har bir iqtisodiy ob'ekt uchun, uning kelgusidagi holatini bashorat qilish mana shu ob'ekt uchun avvalambor eng yaxshi natijalarga erishish, har xil salbiy holatlarni chetlab o'tishga xizmat qilishi kerak bo'ladi, xususan, davlat miqyosidagi iqtisodiy siyosat ham ana shunday bashoratlar asosida olib boriladi. Shuning uchun ham ular to'liq bo'la olmaydi. Shu sababli iqtisodiy modellarning amaliyotdagi tadbiqlari to'la amalda oshmasligi ham mumkin.

Shuni ta'kidlash lozimki, har qanday iqtisodiy model, ma'lum ma'noda ideallashtirilgandir. Bu modellarni ko'rishda modellashtirilayotgan iqtisodiy ob'ekt faoliyatida o'rin egallagan faktorlar ichidan, masalan, mohiyatiga monand eng muhimlari ajratib olinib, qolganlari esa e'tiborga olinmaydi.

Modellar turlari

Iqtisodiyotda foydalaniladigan matematik modellarni qator xususiyatlariga ko'ra bir necha turlarga ajratish mumkin. Masalan, makro va mikro-iqtisodiy modellar, nazariy va amaliyot modellari, optimallashtirish va muvozanat modellari, turg'un (statik) va harakat (dinamik) modellar, notasodifiy (diterministik) va tasodifiy (stoxastik) modellarni ko'rsatish mumkin.

Makroiqtisodiy modellar iqtisodni bir-butunlikda qarab, yirik moddiy va moliyaviy ko'rsatkichlar orasidagi bog'liqliklarni o'zida mujassam etadi. YAMD (yalpi milliy daromad), ehtiyoj investitsiyalari, ish bilan ta'minlanganlik, foiz stavkalari, muomaladagi pul miqdori va boshqa yirik faktorlar makroiqtisodiy modelda hisobga olinadi.

Mikroiqtisodiy modellar iqtisodiyotning tarkibiy va harakatdagi qismlari uchun yoki uning ma'lum bir shunday bo'lagiga bozor iqtisodi sharoitidagi o'rni va holatini o'rganish uchun ko'riladi. Iqtisodiy tarmoqlarning turli-tumanliligi, ular orasidagi bog'lanishlar turining xilma-xilligi, mikroiqtisodiy modellashtirish iqtisodiy-matematik nazariyaning asosiy bo'lagini tashkil etadi.

Nazariy modellar iqtisodiyotning umumiy xususiyatlari va tarkibiy qismlari orasidagi bog'lanishlar to'g'risidagi hulosalarni, avvaldan qabul qilingan yoki beriladigan formal holatlardan keltirib chiqarish uchun ko'riladi.

Amaliyot modellari muayyan iqtisodiy ob'ekt faoliyatidagi qatnashayotgan parametrlar orasidagi bog'lanishlar ko'rinishini berib, shu bog'lanishlar yordamida ma'lum amaliy yechimlarni qabul qilishni tavsiya etish uchun ko'riladi. Amaliyot modellariga, avvalambor ekonometrik modellar kiradi. Bunday modellar iqtisodiy o'zgaruvchilarning miqdoriy qiymatlaridan statistik xulosalar chiqarishda foydalaniladi.

Muvozanat modellari iqtisodning unga ta'sir etuvchi barcha kuchlarning teng ta'sir etuvchisi noldan iborat bo'lgan holati uchun ko'riladi.

Statik modellar iqtisodiy ob'ektning muayyan vaqtdagi yoki davrdagi holati uchun ko'riladi.

Dinamik modellar ob'ektning iqtisodiy holatini vaqt davomida o'zgarishini ifodalashda ko'riladi. Dinamik modellarda, odatda differentsial va ayirma tenglamalari, variatsion hisoblardan foydalaniladi.

Notasodifiy modellarda, o'zgaruvchilar orasida qat'iy bog'lanishlar bor deb qaraladi. Tasodifiy modellarda iqtisodiy ob'ekt faoliyatida tasodifiy holatlarni hisobga olgan holda ko'rilib, ehtimollar nazariyasi va matematik statistika uslublari qo'llaniladi.

Keyingi boblarda oliy matematikaning asosiy tushunchalari beriladi va bir qancha iqtisodiy-matematik modellar ko'riladi.

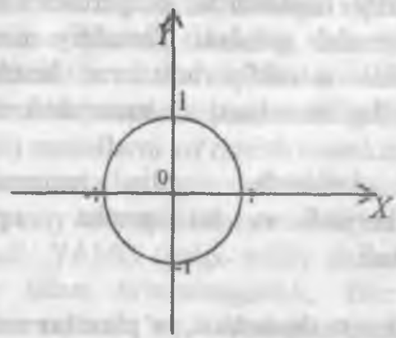
1.2. To'plam tushunchasi, to'plamlar ustida amallar

Biz biron bir narsalarning majmuasini o'rganar ekanmiz, ularni atrofdagi boshqa narsalardan farqlab, ajratib qaraymiz. Mana shu farqlashni qaralayotgan narsalar uchun ma'lum shartlar o'rinli bo'lishligi orqali bera olamiz. P -farqlashni aniqlaydigan shart deb, x-narsa uchun P-shart oʻrinli ekanligini $P(x)$ shaklda ifoda etsa, $\{x : P(x)\}$ yozuv orqali P shartni qanoatlantiruvchi barcha narsalar majmuasini belgilaymiz. Mana shu majmua $\{x : P(x)\}$ - toʻplam, uni tashkil etuvchi narsalar uning elementlari deb ataladi.

Masalan, P-qaralayotgan sonning natural son ekanligini anglatsa, u holda $\{x : P(x)\}$- barcha natural sonlar toʻplamidan iborat boʻladi. Yana boshqa misol, agar P- qaralayotgan uchburchak teng yonli uchburchak ekanligini anglatsa, u holda $\{x : P(x)\}$ - barcha teng yonli uchburchaklar toʻplamidan iborat boʻladi.

Toʻplam turli koʻrinishlarda beriladi. Toʻplamni uni tashkil etuvchi elementlarini koʻrsatib oʻtish orqali berish mumkin. Masalan, P- qaralayotgan natural sonning 9 dan katta emasligini anglatsa, u holda- $\{x : P(x)\}$ toʻplamni $\{1;2;3;4;5;6;7;8;9\}$ koʻrinishda berish mumkin.

Toʻplamni geometrik shakl koʻrinishda ham berish mumkin. Masalan, P- tekislikdagi nuqta koordinata boshidan 1 ga teng masofada yotishini anglatsa, u holda $\{x : P(x)\}$- toʻplamni tekislikdagi markazi koordinata boshida, radiusi 1 ga teng aylana shaklida ifoda eta olamiz, ya'ni



Toʻplamlar koʻpincha lotin alifbosining katta harflari A, B, C, ..., ularni tashkil etuvchi elementlar esa kichik harflar bilan a, b, c ..., belgilanadi.

x A to'plamining elementi ekanligini $x \in A$ shaklda, x A to'plamning elementi emasligini esa $x \notin A$ kabi ifoda etiladi. $x \in A$ yozuvni «x A ga tegishli», «x A da yotadi», yoki «x A ning elementi» deb o'qish mumkin.

Yuqoridagi qo'shtirnoq ichidagi jumlalarga «emas» iborasini qo'shib $x \notin A$ yozuvini o'qishimiz mumkin. $x \in A$ va $A \ni x$ yoki $x \notin A$ va $A \not\ni x$ yozuvlar bir xil ma'nodagi yozuvlar deb qaraladi.

Ayrim to'plamlar uchun maxsus belgilar kiritilgan.
Masalan: $\{N = n : n - natural\ son\}, Z = \{m : m - butun\ son\}$,

$Q = \{p : p - ratsional\ son\}$, $R = \{x : x - haqiqiy\ son\}$, ya'ni N - natural sonlar to'plami, Z -butun sonlar to'plami, Q - ratsional sonlar to'plami, R - haqiqiy sonlar to'plami ekan. Barcha haqiqiy sonlar to'plami R ni (-∞, +∞) shaklda ham ifoda etish qabul qilingan.

Ayrim hollarda qaralayotgan to'plamning bironta ham elementi bo'lmasligi mumkin, bunday to'plam bo'sh to'plam deb nomlanib, uning uchun maxsus belgi-$\varnothing$ ishlatiladi. Masalan: $\{\ x: x \in R\ va\ x^2+1=0\ \} = \varnothing$ bo'sh to'plamdir, chunki har qanday haqiqiy x son uchun $x^2 + 1 \geq 1$, ya'ni $x^2 + 1 \neq 0$ bo'ladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, to'plamda teng elementlar bo'lmaydi, ya'ni to'plamni tashkil etuvchi elementlar turlicha bo'lishi kerak.

Matematikada ayrim ko'p uchraydigan iboralar uchun qisqacha mantiqiy belgilar kiritilgan. Shulardan ayrimlarini keltirib o'tamiz:

«$\exists$»- mavjudlik kvantori deb ataladi, bu belgi biron shartni qanoatlantiruvchi narsaning mavjudligini anglatadi. Masalan:

«$\exists$ b$\in$B» yozuv «B to'plamning shunday b elementi mavjudki» degan ma'noni anglatadi.

«$\forall$»- ixtiyoriylik kvantori deb ataladi. Bu belgi «istalgan», «barcha», «har bir», «ixtiyoriy»- iboralar ma'nosini anglatadi. Masalan, «$\forall$ a$\in$A» uchun yozuv «A to'plamining istalgan a elementi uchun» degan ma'noni anglatadi.

«$\Rightarrow$» - mantiqiy belgi «kelib chiqadi» iborasi ma'nosini anglatadi. Masalan, «n istalgan natural son bo'lsa, u holda bu son butun son bo'ladi» degan jumlani qisqacha quyidagicha yozishimiz mumkin «$\forall n \in N \Rightarrow n \in Z$».

«$\Leftrightarrow$»- mantiqiy belgi «faqat va faqat shu holdaki», «zarur va yetarli» ma'nosini anglatadi. Masalan, «r sonning ratsional bo'lishligi uchun uni, butun sonning natural songa nisbati shaklida ifoda etilishi mumkinligi zarur va yetarlidir» yoki «r son faqat va faqat shu holda ratsional son bo'ladiki, agar uni butun sonning natural songa nisbati shaklida ifodalash mumkin bo'lsa» degan jumlani quyidagicha ifoda qila olamiz

$$r \in Q \Leftrightarrow r \in \left\{\frac{m}{m} : m \in Z, n \in N\right\}.$$

1-ta'rif. Agar A- to'plamning har bir elementi B- to'plamning ham elementi, ya'ni $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$ bo'lsa, u holda A to'plam B to'plamning qismi (yoki A to'plam B to'plamining to'plam ostisi), deyilib, bu holat $A \subset B$ yoki $B \supset A$ shaklda ifoda etiladi.

Masalan, $N \subset Z \subset Q \subset R$ munosabatlar o'rinlidir.

Shuni ta'kidlash lozimki, $A \subset B$ munosabat o'rinli ekanligini ko'rsatish uchun A ning har bir elementi B ga tegishli ekanligini ko'rsatish orqali bajarishdan farqli, boshqacha usul ham mavjud. Bu usul quyidagi teorema orqali beriladi.

1-teorema. Agar B to'plamga tegishli bo'lmagan har qanday element A to'plamga ham tegishli bo'lmasa, u holda A to'plam B to'plamning qismi bo'ladi.

Isbot. Haqiqatan ham, agar A to'plam B ning qismi bo'lmasa, A da shunday $x \in A$ element mavjud bo'lar ediki, bu element B ga tegishli bo'lmas edi, ya'ni $x \notin B$. U holda teorema shartiga ko'ra $x \notin A$ bo'lishi kerak. Bu esa qarama- qarshilikdir. Demak $A \subset B$ bo'lar ekan.

Bu teoremadan bo'sh to'plam har qanday to'plamning qismi ekanligi kelib chiqadi, ya'ni istalgan B to'plam uchun $\varnothing \subset B$ bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $A \subset B$ va $B \subset A$ munosabatlar o'rinli bo'lsa, A to'plam B to'plamga teng deyilib, A=B shaklda ifoda etiladi.

Masalan, $\{x : x \in R, x^2 - 1 = 0\} = \{-1; 1\}$.

Ta'rifdan elementlari bir xil bo'lgan to'plamlar o'zaro teng bo'lishi kelib chiqadi.

3-ta'rif. A ga yoki B ga tegishli elementlardan tashkil topgan to'plam shu to'plamlarning yig'indisi deyilib, $A \cup B$ shaklda ifoda etiladi, ya'ni

$$A \cup B = \{x : x \in A \ yoki \ x \in B\}.$$

4-ta'rif. Bir paytda A ga va B ga tegishli elementlardan tashkil topgan to'plam shu to'plamlarning kesishmasi (ko'paytmasi) deyilib $A \cap B$ shaklda ifoda etiladi, ya'ni

$$A \cap B = \{x : x \in A \ va \ x \in B\}.$$

5-ta'rif. A to'plamning B to'plamga tegishli bo'lmagan elementlaridan tashkil topgan to'plam, A va B to'plamlar ayirmasi (yoki B to'plamning A to'plamgacha) bo'lgan to'ldiruvchisi deyilib, $A \setminus B$ shaklda ifoda etiladi, ya'ni

$$A \setminus B = \{x : x \in A \ va \ x \notin B\}.$$

6-ta'rif. A to'plamning B ga kirmagan yoki B to'plamning A ga kirmagan elementlaridan tashkil topgan to'plam A va B to'plamlarning simmetrik ayirmasi deyilib, $A \Delta B$ shaklda belgilanadi, ya'ni

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Yuqorida kiritilgan to'plamlar ustidagi amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'ladi:

1. $A \cup B = B \cup A$
2. $A \cap B = B \cap A$
3. $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
6. $(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)$
7. $(A \Delta B) \cap C = (A \cap C) \Delta (B \cap C)$

Bu xossalarning isbotlari bir-biriga o'xshash bo'lgani uchun ulardan birini, masalan, 5 -xossa isbotini keltiramiz.

Demak,

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$$

tenglik o'rinli ekanligini isbot qilamiz. 2-ta'rif bo'yicha bu to'plamlar ustma-ust tushishini tekshiramiz:

$x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow x\in A\cup B$ va $x\in C\Rightarrow(x\in A$ va $x\in C)$ yoki $(x\in B$ va $x\in C)\Rightarrow x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Rightarrow(A\cup B)\cap C\subset(A\cap C)\cup(B\cap C)$, **(1)**

o'z navbatida

$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)\Rightarrow x\in A\cap C$ yoki $x\in B\cap C\Rightarrow(x\in A$ yoki $x\in B)$ va $x\in C\Rightarrow x\in(A\cup B)\cap C\Rightarrow(A\cap C)\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap C$. **(2)**

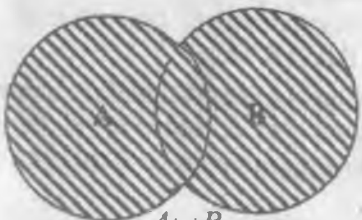
(1) va (2) munosabatlardan 2- ta'rifga ko'ra

$$(A\cup V)\cap S=(A\cap S)\cup(V\cap S)$$

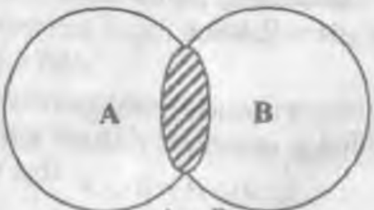
tenglik kelib chiqadi.

Qolgan xossalar isbotini o'quvchilarga mashq sifatida tavsiya etamiz.

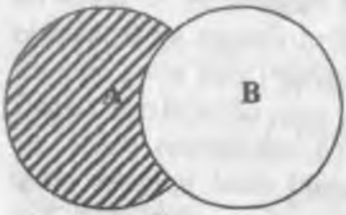
To'plamlar ustida kiritilgan amallarni geometrik shakl ko'rinishida ifoda etaylik. Quyidagi chizmalarda shtrixlangan qismlar qaralayotgan to'plamlar ustidagi amalga mos keladi.



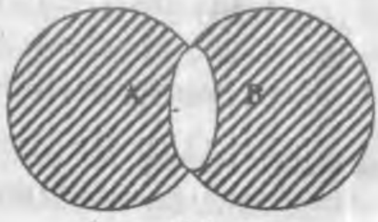
$A\cup B$



$A\cap B$



$A\setminus B$



$A\Delta B$

Agar qaralayotgan masala mohiyatidan kelib chiqib, yuzaga keladigan barcha to'plamlar biron-bir U to'plamning qismi ekanligi ma'lum bo'lsa, U to'plam universal to'plam deyiladi. Bu holda, $A \subset U$ uchun $U \setminus A = \overline{A}$ deb belgilanib, $\overline{A}$ to'plam A to'plamning to'ldiruvchisi (U to'plamgacha to'ldiruvchisi) deyiladi.

Masalan, biz faqat haqiqiy sonlar bilan ish ko'radigan bo'lsak, u holda R to'plamni universal to'plam sifatida qarashimiz mumkin.

Berilgan U universal to'plam uchun quyidagilar o'rinli bo'ladi:

1. $A \cup \varnothing = A,\ A \cap \varnothing = \varnothing;$
2. $A \cup \overline{A} = U,\ A \cap \overline{A} = \varnothing;$
3. $\overline{\varnothing} = U,\ \overline{U} = \varnothing;$
4. $A \cup A = A,\ A \cap A = A;$
5. $A \cup U = U,\ A \cap U = A;$
6. $A \cup (A \cap B) = A,\ A \cap (A \cup B) = A;$
7. $(\overline{A \cup B}) = \overline{A} \cap \overline{B},\ (\overline{A \cap B}) = \overline{A} \cup \overline{B}.$

Bu tengliklar isbotini o'quvchiga havola qilamiz.

Universal to'plam sifatida haqiqiy sonlar to'plami R ni olsak, uning qismi bo'lgan $A \subset R$ to'plam sonli to'plam deyiladi. a,b haqiqiy sonlar uchun quyidagi to'plamlarni kiritaylik:

$[a,b] = \{x : x \in R,\ a \le x \le b\}$ - segment, (yopiq oraliq)

$(a,b] = \{x : x \in R,\ a < x \le b\}$ - yarim ochiq oraliq

$[a,b) = \{x : x \in R,\ a \le x < b\}$ - yarim ochiq oraliq

$(a,b) = \{x : x \in R,\ a < x < b\}$ - interval (ochiq oraliq)

$(-\infty,a] = \{x : x \in R,\ x \le a\}$

$(-\infty,a) = \{x : x \in R,\ x < a\}$

$[a,+\infty) = \{x : x \in R,\ x \ge a\}$

$(a,+\infty) = \{x : x \in R,\ x > a\}$

$(-\infty,+\infty)=\{\ x : x\in R\ \}$

Yuqorida keltirilgan to'plamlardan farqli boshqa to'plamlarni hosil qilishda, to'plamlar ustidagi kiritilgan amallardan tashqari yana bir amal, to'plamlarning dekart ko'paytmasini kiritamiz.

1.3. Akslantirish, funksiya va ketma-ketlik tushunchalari

7-ta'rif. A va B to'plamlarning dekart ko'paytmasi deb shunday to'plamga aytiladiki, uning elementlari tartiblangan juftliklardan iborat bo'lib, bu juftliklarning birinchi elementi A to'plamdan, ikkinchilari B to'plamdan olingan bo'ladi. Dekart ko'paytma $A\times B$ shaklda ifoda etiladi, ya'ni

$$A\times B=\{(a;b): a\in A,\ b\in B\ \}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, agar $A\neq B$ bo'lsa, $A\times B\neq B\times A$ bo'ladi.

Xuddi shunga o'xshash $A_1, A_2, \ldots, A_n$ n ta to'plamning dekart ko'paytmasi $A_1\times, A_2\times, \ldots\times A_n$ to'plamni aniqlashimiz mumkin:

$$A_1\times, A_2\times, \ldots\times A_n=\ \{(a_1, \quad a_{2,\ldots} \quad a_n\ ): a_i\in A_i\ ,\ i=1,2\ldots,n\ \}$$

8- ta'rif. Faraz qilaylik $f\subset A\times B$. Agar $(a,b)\in f$ va $(a,c)\in f$ ekanligidan $b=c$ tenglik kelib chiqsa, u holda f - akslantirish deyiladi.

$(a,b)\in f$ ekanligini $f(a)=b$ -ko'rinishida ham ifoda etish mumkin. $A\times B\supset f$ akslantirishning aniqlanish sohasi deb quyidagi to'plamga aytiladi:

$$D(f)=\{a : a\in A,\ \exists\, b\in B,(a,b)\in f\}$$

$A\times B\supset f$ akslantirishning o'zgarish (qiymatlar) sohasi - $E(f)$ deb, quyidagi to'plamga aytiladi:

Ushbu

$$E(f)=\{b: b\in B, \exists a\in A, (a,b)\in f\}=\{f(a): a\in D(f)\}$$

to‘plam, f -akslantirishning o‘zgarishi, qiymatlar sohasi deb yuritiladi.

Agar f - akslantirish uchun $D(f)=A$ bo‘lsa, u holda f A to‘plamni B to‘plamga akslantiradi deyiladi, bu holat $f: A\to B$ ko‘rinishda ifoda etiladi.

Agar $f: A\to B$ akslantirish uchun $E(f)=B$ bo‘lsa, bunday akslantirish ustiga akslantirish deyiladi.

Agar $f(a)=b$ va $f(c)=b$ tengliklardan, $a=c$ tenglik kelib chiqsa, f - akslantirish o‘zaro bir qiymatli akslantirish deyiladi.

Agar $f: A\to B$ akslantirish o‘zaro bir qiymatli ustiga akslantirish bo‘lsa, bunday akslantirish ekvivalentlik munosabati deyiladi. Bu holda A va B to‘plamlar ekvivalent yoki teng quvvatli to‘plamlar deyilib, A=B shaklda ifoda etiladi.

9- ta'rif. Agar $f\subset R\times R$ bo‘lsa, u holda f - akslantirish funksiya deyiladi.

$(x,y)\in f$ bo‘lganda, $y=f(x)$ ko‘rinishda yozilib, x - erkli o‘zgaruvchi yoki argument, y -bog‘liqli o‘zgaruvchi yoki funksiya deyiladi.

Demak, funksiya deb, aniqlanish va o‘zgarish sohalari sonli to‘plamlardan iborat bo‘lgan akslantirishga aytilar ekan.

Funksiyaga odatda quyidagicha ta'rif ham beriladi:

X va Y haqiqay sonlar to‘plamlari bo‘lsin. Agar X to‘plamdagi har bir x songa biror f -qoida yoki qonunga ko‘ra Y to'plamdagi bitta y son mos qo‘yilgan bo‘lsa, X to‘plamda funksiya berilgan deb ataladi va $y=f(x)$ kabi belgilanadi. Demak funksiya ikki to‘plam orasidagi moslikni ifodalaydi.

Bu yerda, X to‘plam funksiyaning aniqlanish sohasi, Y esa o‘**zgarish** sohasi deyiladi.

Bu ta'rifning yuqoridagi 9-ta'rifga teng kuchli (ekvivalent) ekanligi, $f=\{(x,f(x)):x\in X\}$ tenglikdan bevosita kelib chiqadi.

Funksiyaning berilish usullari turlicha boʻlib, ular quyidagilardan iborat:

1. Agar y-bogʻliqli oʻzgaruvchi bilan x-erkli oʻzgaruvchi orasidagi bogʻlanish formula orqali ifodalansa, u holda, funksiya analitik usulda, ya'ni $y=f(x)$ tenglik koʻrinishida, berilgan deyiladi,

Masalan, $f=\{(x,x^2):x\in R\}$ funksiyani $y=x^2$ ya'ni $f(x)=x^2$ formula orqali berish mumkin.

10-ta'rif. Analitik usulda berilgan $y=f(x)$ funksiyaning aniqlash soxasi deb, x argumentning shunday qiymatlar toʻplami $D(f)$ ga aytiladiki, bunda har bir $x\in D(f)$ uchun y ning qiymati chekli va haqiqiy son boʻlishi lozim.

$$D(f)=\{x: f(x) - \text{chekli va haqiqiy}\}=\{x: f(x)\in R\}.$$

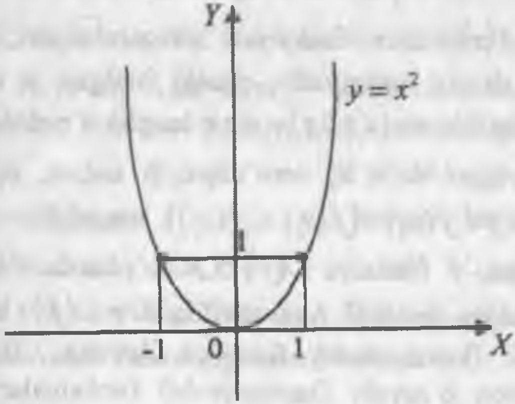
Masalan, $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ funksiya uchun $D(f)=(0,+\infty)$ boʻladi, chunki $x<0$ boʻlsa $\sqrt{x}$ - haqiqiy son boʻlmaydi va $x=0$ boʻlsa $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ chekli son boʻlmaydi.

2. Funksiyaning jadval koʻrinishda berilishi.
Masalan, $f=\{(0,1);(1,3);(2;-5)\}$ funksiya berilgan boʻlsa, uni quyidagi jadval shaklida berish mumkin.

x	0	1	2
$f(x)$	1	3	-5

3. Funksiyaning grafik usulda berilishi. Bu holda $f=\{(x,f(x)):x\in D(f)\}$ toʻplam tekislikdagi, dekart koordinatalar sistemasida $(x,f(x))$ nuqtalarni belgilash natijasida hosil boʻlgan toʻplam shaklida beriladi. Bu toʻplam funksiya grafigi deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ funksiyani grafik usulda bersak, u quyidagicha bo'ladi:



4. Funksiyani biror qonun yoki qoida yordamida bayon qilish bilan ifodalash. Masalan, Dirixle funksiyasi deb nomlanuvchi funksiya quyidagicha beriladi:

$$f(x)=\begin{cases} 1, \textit{ agar } x \textit{ ratsional son bo'lsa} \\ 0, \textit{ agar } x \textit{ irratsional son bo'lsa} \end{cases}$$

11-ta'rif. Agar barcha $x \in D(f)$ uchun $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda f - funksiya juft (toq) funksiya deyiladi.

Masalan, $f(x)=x^2$ –juft funksiya, $f(x)=x^3$ - toq funksiya bo'ladi.

Funksiya toq ham, juft ham bo'lmasligi mumkin:

Masalan: $f(x)=|x|+\sin x$, $y=1+x$;

12-ta'rif. Agar $\exists M>0$ bo'lsaki $\forall x \in X$ uchun $|f(x)| \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda f -funksiya $D(f) \supset X$ to'plamda chegaralangan funksiya deyiladi.

13-ta'rif. Agar shunday musbat T son mavjud bo'lsaki, $\forall x \in D(f)$ uchun $x \pm T \in D(f)$ bo'lib, $f(x \pm T) = f(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, bunday funksiyaga davriy funksiya deyiladi. Bunday $T > 0$ sonlarning eng kichigi $f(x)$ funksiyaning davri deyiladi.

Masalan, $f(x) = \sin x$ funksiyasi chegaralangan, davri $T = 2\pi$ bo'lgan davriy funksiyadir, chunki istalgan x uchun $|\sin x| \le 1$ $(M = 1)$ bo'lib, $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$ tenglik o'rinlidir.

14-ta'rif. Agar $\forall x_1 \in X$, va $\forall x_2 \in X$ uchun, $x_1 < x_2$ tengsizlikdan $f(x_1) < f(x_2)$ $(f(x_1) > f(x_2))$ tengsizlik o'rinli ekanligi kelib chiqsa, f funksiya $D(f) \supset X$ to'plamda o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi. Agar ta'rifda $X = D(f)$ bo'lsa, funksiya o'suvchi (kamayuvchi) funksiya deyiladi. Bunday funksiyalar monoton o'suvchi (kamayuvchi) funksiyalar ham deyiladi.

Masalan, $f(x) = \sin x$ funksiya $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ intervalda o'suvchi, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$ intervalda esa kamayuvchi funksiyadir. $f(x) = x$ funksiya o'suvchi, $f(x) = -x$ funksiya esa kamayuvchi funksiya bo'ladi.

15-ta'rif. Natural sonlar to'plamida aniqlangan f funksiyaga sonlar ketma-ketligi deyiladi, ya'ni,

$$f : N \to R.$$

Agar $x_n = f(n)$, $n \in N$, deb belgilash kiritsak, sonlar ketma-ketligini, $\{x_n\}_1^{\infty}$ yoki $x_1, x_2 ..., x_n ...$ ko'rinishda ifoda etish ham qabul qilingan. Bu yerda x_n -ketma-ketlikning n- hadi deyiladi.

Masalan, $f(n) = \frac{1}{n}$ ketma-ketlikni $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, ..., \frac{1}{n}, ...$ ko'rinishlarda ifoda etish mumkin. Bu ketma-ketlik monoton kamayuvchi, chegaralangan ketma-ketlik bo'ladi, chunki

$n \in N, m \in N$ uchun n<m bo‘lsa $\frac{1}{n} > \frac{1}{m}$ bo‘lib, istalgan $n \in N$ uchun $\frac{1}{n} \le 1$ tengsizlik o‘rinli bo‘ladi.

$$X = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_1 \in A_1, x_2 \in A_2, \ldots x_n \in A_n\},$$

$A_i \subset R,\ i = \overline{1,n}$ va $B \subset R$ to‘plamlar berilgan bo‘lsin.

16-ta'rif. Agar biror f- qoida va qonunga ko‘ra $X \subset R^n$ to‘plamning har bir $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ elementiga, B to‘plamning aniq bir y qiymati mos qo‘yilca ko‘p o‘zgaruvchili (n-o‘zgaruvchili) $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ funksiya berilgan deyiladi.

Masalan, $f(x, y) = x^2 + y^2$ ikki o'zgaruvchili funksiya bo‘ladi yoki quyidagi funksiya $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2$ n o‘zgaruvchili funksiyaga misol bo‘ladi.

1.4. Elementar funksiyalar va funksiyalarni klassifikatsiyalash

Asosiy elementar funksiyalar deb quyidagi funksiyalar guruhiga tegishli funksiyalarga aytiladi.

1. Darajali funksiya: $f(x) = x^{\alpha}, \alpha \in R \setminus \{0\}$, $D(f) = (0, +\infty)$. Agar $|\alpha|$ toq bo‘lsa funksiya toq funksiya bo‘ladi, agar $|\alpha|$ juft bo‘lsa funksiya-juft funksiya bo‘ladi.

2. Butun va kasr ratsional funksiyalar.

$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$ funksiyaga $(n \in N$ *va* $a_i = const,\ i = \overline{1,n})$ butun ratsional funksiya (polinom; ko‘phad) deyiladi.

Ikkita butun ratsional funksiyaning nisbatidan tuzilgan

$$f(x) = \frac{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n}{b_0 x^m + b_1 x^{m-1} + \cdots + b_{m-1} x + b_m},$$

funksiyaga kasr ratsional funksiya deyiladi.

Misol,

$f(x)=ax^2+bx+c$ -butun ratsional funksiyada,

$f(x)=\frac{k}{x}$ -kasr ratsional funksiyaga misol, $D(f)=(-\infty;+\infty)\cup(0,+\infty)$, $E(f)=(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$.

3. Ko'rsatkichli funksiya: $f(x)=a^x, a>0, a\neq 1$

$$D(f)=(-\infty,+\infty), \mathrm{E}(f)=(0,+\infty)$$

4. Logarifmik funksiya: $f(x)=\log_a x,\ a>0, a\neq 1$

$$D(f)=(0,+\infty), \mathrm{E}(f)=(-\infty,+\infty)$$

5. Trigonometrik funksiyalar: a) $f(x)=\sin x$, davriy, davri 2π ga teng $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $\mathrm{E}(f)=[-1;1]$, toq funksiya. b) $f(x)=\cos x$, davriy, davri 2π ga teng $D(f)=(-\infty,+\infty)$, $\mathrm{E}(f)=[-1;1]$, juft funksiya. c) $f(x)=tgx$, davriy, davri π ga teng, $D(f)=\left\{x: x\in R, x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in \mathrm{Z}\right\}$, $\mathrm{E}(f)=(-\infty,+\infty)$, toq funksiya. d) $f(x)=ctgx$, davriy, davri π ga teng $D(f)=\{x: x\in R, x\neq k\pi, k\in \mathrm{Z}\}$, $\mathrm{E}(f)=(-\infty,+\infty)$, toq funksiya.

6. Teskari trigonometrik funksiyalar:

a) $f(x)=\arcsin x, D(f)=[-1,1]$, $\mathrm{E}(f)=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, toq funksiya.

в) $f(x)=\arccos x, D(f)=[-1;1]$, $E(f)=[0,\pi]$

v) $f(x)=arctgx, D(x)=(-\infty,+\infty)$, $E(f)=\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$, toq funksiya

g) $f(x)=arcctgx, D(f)=(-\infty,+\infty)$, $\mathrm{E}(f)=(0,\pi)$

17- ta'rif. $y=f(x)$ va $y=g(x)$ funksiyalar o'zaro teskari funksiyalar deyiladi, agarda $D(f)=\mathrm{E}(g)$, $\mathrm{E}(f)=D(g)$ bo'lib, istalgan $x\in D(f)$ uchun $g(f(x))=x$ va istalgan $x\in D(g)$ uchun $f(g(x))=x$ tengliklar o'rinli bo'lsa.

Masalan, $y = a^x$ va $y = \log_a x$ funksiyalar o'zaro teskari bo'ladi, chunki $a^{\log_a x} = x$ va $\log_a a^x = x$ tengliklar o'rinlidir.

O'zaro teskari funksiyalar grafiklari OXY tekisligida $y = x$ to'g'ri chizig'iga nisbatan simmetirik joylashgan bo'ladi.

18-ta'rif. Agar $y = f(x)$ va $u = g(x)$ funksiyalar uchun $E(g) \cap D(f) \neq \varnothing$ bo'lsa, u holda $y = f(g(x))$ funksiya murakkab funksiya (funksiyalar kompozitsiyasi, funksiyaning funksiyasi) deyiladi.

Masalan; $y = \sqrt[3]{x}$ va $u = \sin x$ uchun $y = \sqrt[3]{\sin x}$ murakkab funksiya bo'ladi.

19-ta'rif. Asosiy elementar funksiyalardan chekli sondagi algebraik amallar va chekli sondagi murakkab funksiya hosil qilish yo'li bilan qurilgan funksiyalar elementar funksiyalar deyiladi.

Masalan,

$$y = \frac{5\ln\cos x + x^3}{-2tgx + 41}$$

Elementar funksiyalarni sinflarga ajratish ularni algebraik va transsendent (no algebraik) funksiyalarga ajratish orqali bajariladi.

Algebraik funksiya deb x argument ustida chekli marta algebraik amallarni bajarishdan hosil bo'lgan funksiyaga aytiladi. Algebraik funksiyalarga quyidagi funksiyalar kiradi:

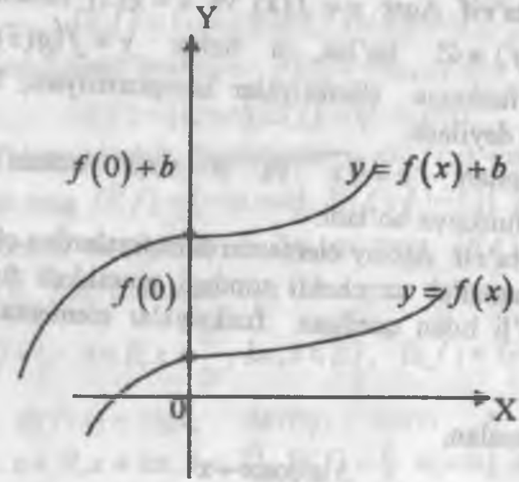
1) butun ratsional funksiya (ko'phad, ya'ni polinom);
2) kasr –ratsional funksiya- ikkita ko'phadlar nisbati;
3) irratsional funksiya– ya'ni amallar tarkibida ildizdan chiqarish amali qatnashgan funksiya.

Har qanday noalgebraik funksiya transtsendent funksiya deyiladi. Transtsendent funksiyalarga ko'rsatkichli, logarifmik, trigonometrik va teskari trigonometrik funksiyalar kiradi.

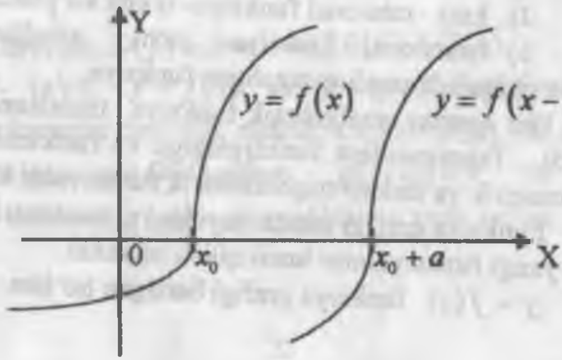
Funksiya grafigi ustida quyidagi almashtirishlarni bajarish orqali yangi funksiyalarni hosil qilish mumkin.

$y = f(x)$ funksiya grafigi berilgan bo'lsin.

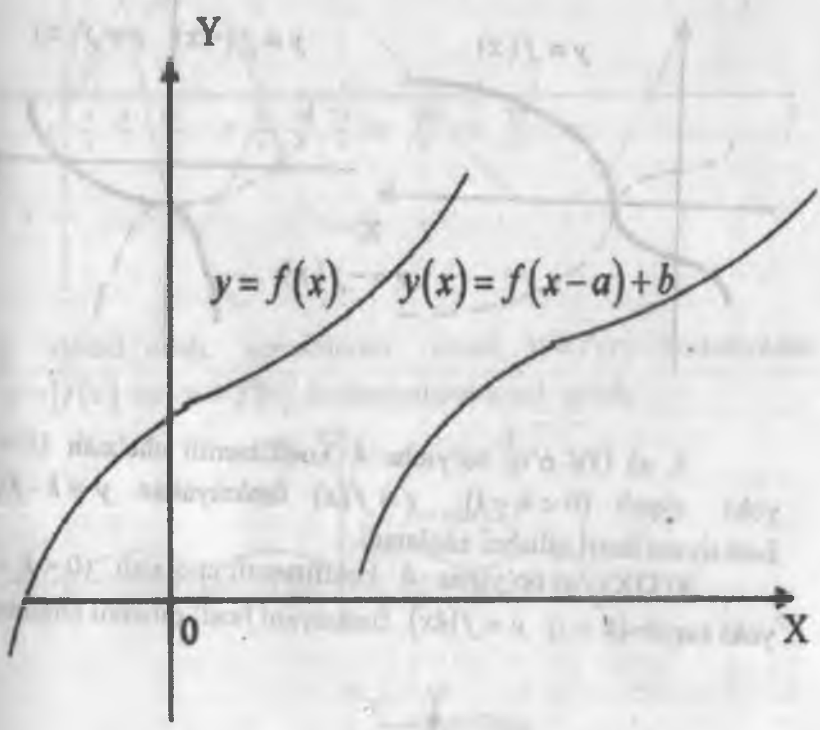
1. Vertikal ko'chirish- $y = f(x)$ funksiyadan $y = f(x) + b$ funksiyani hosil qilishni bildiradi. b>0 bo'lsa $y = f(x)$ grafigini yuqoriga, b<0 bo'lsa quyiga parallel ko'chirish kerak.



2. Gorizontal ko'chirish- $y = f(x)$ funksiyadan $y = f(x - a)$ funksiyani hosil qilishni bildiradi. a>0 bo'lsa $y = f(x)$ grafigini o'ngga, a<0 bo'lsa chapga parallel ko'chirish kerak.

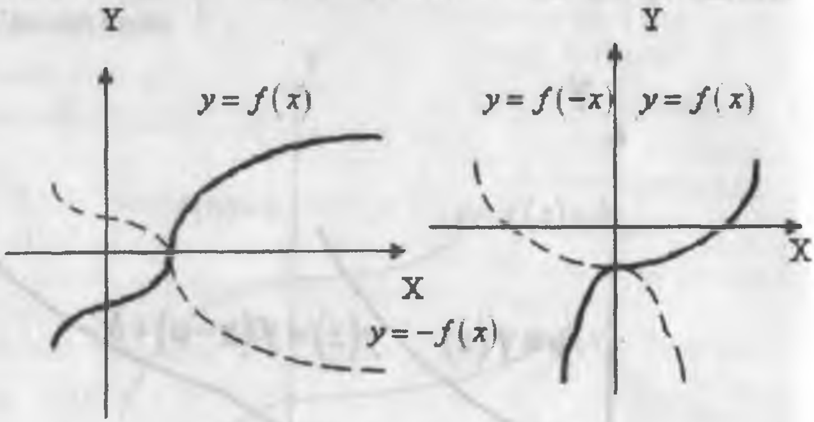


3. Aralash ko'chirish- $y = f(x)$ funksiyadan $y = f(x-a)+b$ funksiyani hosil qilishni bildiradi.



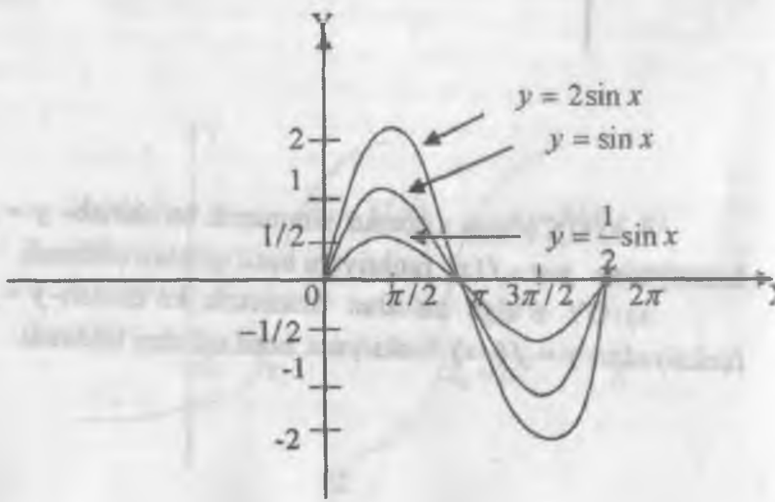
4. a) OX o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish- $y = f(x)$ funksiyadan $y = -f(x)$ funksiyani hosil qilishni bildiradi.

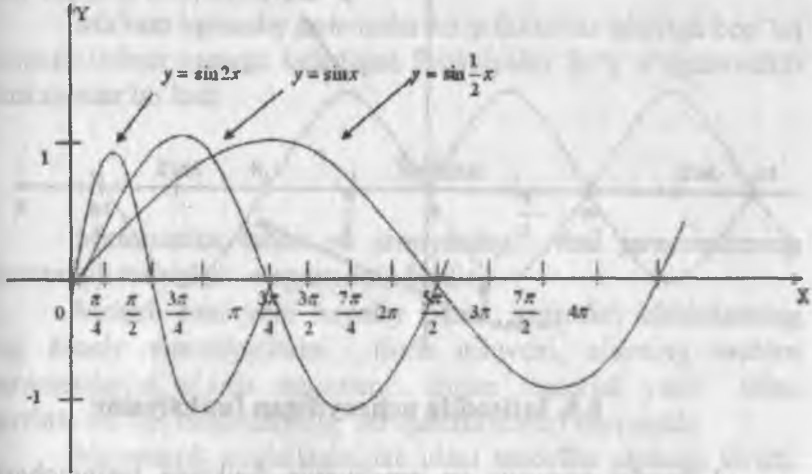
в) OY o'qiga nisbatan simmetrik ko'chirish- $y = f(x)$ funksiyadan $y = f(-x)$ funksiyani hosil qilishni bildiradi.



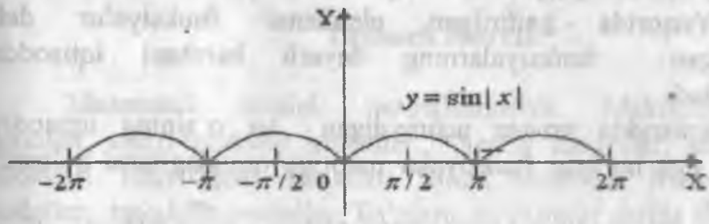
5. a) OY o‘qi bo‘yicha k koeffitsentli cho'zish $(k > 1)$ yoki siqish $(0 < k < 1)$: $y = f(x)$ funksiyadan $y = k \cdot f(x)$ funksiyani hosil qilishni anglatadi.

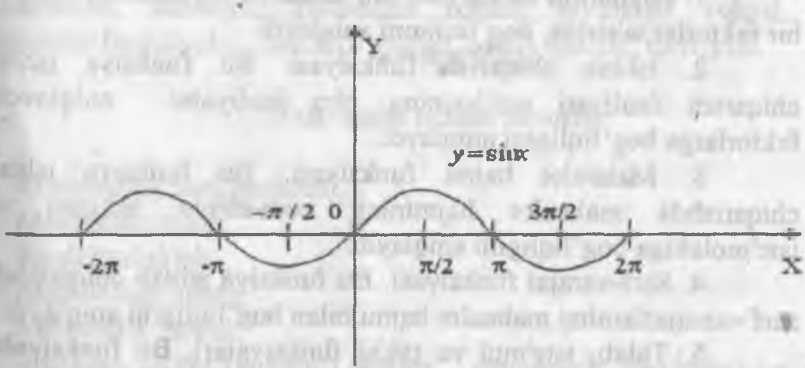
в) OX o‘qi bo‘yicha k koeffitsentli cho‘zish $(0 < k < 1)$ yoki siqish $(k > 1)$ $y = f(kx)$ funksiyani hosil qilishni anglatadi.

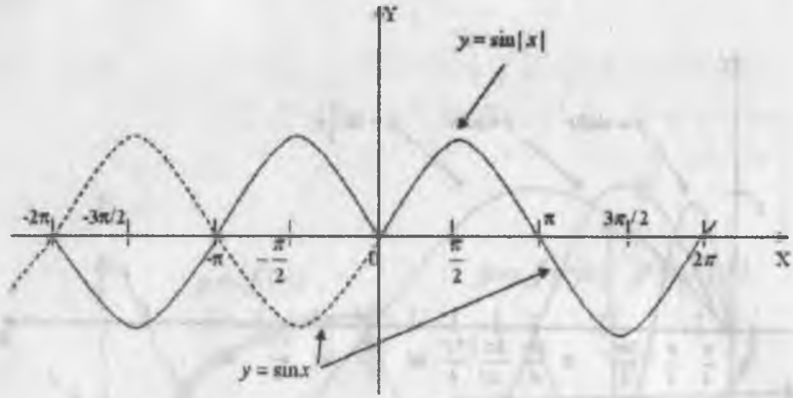




6. Modul olish operatsiyasi orqali $y=f(x)$ funkstiyadan $y=|f(x)|$ *va* $y=f(|x|)$ funkstiyalarni hosil qilish.







1.5. Iqtisodda uchraydigan funksiyalar

Iqtisodiy nazariya va amaliyotda funksiya tushunchasi juda keng qo'llaniladi. Iqtisodda uchraydigan funksiyalar turlari rang-barang, bo'lib, ular chiziqli funksiyadan tortib maxsus funksiya deb nomlanuvchi funksiyalar ham qo'llaniladi.

Yuqorida keltirilgan elementar funksiyalar deb nomlangan funksiyalarning deyarli barchasi iqtisodda qo'llaniladi.

Iqtisodda tez-tez uchraydigan va o'zining iqtisodiy nomiga ega bo'lgan funksiyalar qatoriga quyidagilarni keltirish mumkin.

1. Foydalilik funksiyasi. Bu funksiya foydalilikni ma'lum bir faktorlar ta'siriga, bog'liqligini aniqlaydi.

2. Ishlab chiqarish funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarish faoliyati natijasining, shu faoliyatni aniqlovchi faktorlarga bog'liqligini aniqlaydi.

3. Mahsulot hajmi funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda mahsulot hajmining xom-ashyo zahirasi va iste'molchiga bog'liqligini aniqlaydi.

4. Sarf-xarajat funksiyasi. Bu funksiya ishlab chiqarishda sarf –xarajatlarning mahsulot hajmi bilan bog'liqligini aniqlaydi.

5. Talab, iste'mol va taklif funksiyalari. Bu funksiyalar mahsulotga bo'lgan talab, iste'mol va taklif hajmlarining turli

faktorlarga (masalan, narx-navo, daromad va boshqa) bog'liqligini aniqlaydi.

Ma'lum iqtisodiy jarayonlar ko'p faktorlar ta'siriga bog'liq bolgani uchun yuzaga keladigan funksiyalar ko'p o'zgaruvchili funksiyalar bo'ladi.

Xulosa

Matematika tabiat va jamiyatdagi real jarayonlarning matematik modelini o'rganuvchi fandir.

Model: real yoki hayoliy (ideal, abstrakt) ob'ektlarning eng asosiy xususiyatlarini ifoda qiluvchi, ularning muhim parametrlarini o'zida mujassam qilgan material yoki ideal qurilma bo'lib, modellarning bir qancha turlari mavjuddir.

Matematik modellashtirish ideal modellar sirasiga kiradi. U sonlar, simvollar, funksiyalar, tenglamalar, tengsizliklar, grafiklar va hokazolar yordamida beriladi va o'rganilayotgan jarayonning asosiy qonuniyatlarini ochish uchun xizmat qiladi.

Tayanch iboralar

Matematik model, modellashtirish. Makroiqtisodiy modellar, mikroiqtisodiy modellar. Nazariy modellar, amaliyot modellari. Muvozanat modellari. Statik modellar. Notasodifiy modellar, tasodifiy modellar. To'plam, to'plamlar ustida amallar, akslantirish, funksiya, aniqlanish sohasi, qiymatlar sohasi, elementar funksiyalar, funksiya grafigi, toqlik, juftlik, davriylik.

Takrolash uchun savollar

1. Matematika fani predmeti.
2. Modelning ta'rifi.
3. Modellashtirish.
4. Modelning turlari.
5. Matematik model.
6. Iqtisodiy ob'ekt (jarayon) larning matematik modellari va ularga qo'yiladigan talablar.
7. Modellashtirish nima uchun kerak?

8. To'plam tushunchasi.
9. To'plamlar ustida amallar.
10. To'plamlarni akslantirish.
11. Funksiyaning ta'rifi.
12. Elementar funksiyalar.
13. O'zaro teskari funksiyalar.
14. Iqtisodda funksiyadan foydalanish.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich молiyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – М, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

2-bob. MATRITSA VA DETERMINANTLAR

2.1. Matritsalar va ular ustida amallar

1-ta'rif. O‘lchamlari $m\times n$ bo‘lgan matritsa deb, satrlar soni m ga, ustunlar soni n ga teng bo‘lgan, $m\cdot n$ ta sondan tashkil topgan to‘g‘ri to‘rtburchak shaklidagi sonli jadvalga aytiladi.

Matritsalar lotin alifbosining katta harflari A,B,C va h.k. bilan belgilanadi va matritsani tashkil etuvchi sonlar uning elementlari deb atalib, matritsaning i–satri va j-ustuni kesishmasida joylashgan elementi a_{ij} -ko'rinishda yoziladi. Matritsalar

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1j} & \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2j} & \cdots a_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots a_{ij} & \cdots a_{in} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots\dots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots a_{mj} & \cdots a_{mn} \end{pmatrix}$$

ko‘rinishda yoki qisqacha $A=(a_{ij}),\ i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}$ shaklda ham ifodalanishi mumkin. Matritsalarni ifodalashda $\|\cdot\|$ yoki $[\cdot]$ belgilardan ham foydalaniladi.

Birgina satrdan yoki birgina ustundan iborat matritsa vektor–satr yoki vektor-ustun deb nomlanadi, ya'ni

$$A=(a_{11},a_{12},\cdot\cdot,a_{1n})\ \text{vektor -satr},\quad B=\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ . \\ b_{m1} \end{pmatrix}\ \text{vektor-ustun}$$

Matritsa o'lchami $(n \times n)$ bo'lsa, ya'ni satrlar soni ustunlar soniga teng bo'lsa, bunday matritsa n-tartibli kvadrat matritsa deyiladi. Kvadrat matritsaning a_{ii}, $i=\overline{1,n}$ ko'rinishdagi elementlari uning dioganal elementlari deb atalib, ular matritsaning dioganalini tashkil etadi deyiladi. Agar kvadrat matritsa uchun $i \neq j$ bo'lganda $a_{ij}=0$ bo'lsa, bunday matritsa dioganal matritsa deyiladi. Agar dioganal matritsada barcha $i=\overline{1,n}$ lar uchun $a_{ii}=1$ bo'lsa, bunday matritsa birlik matritsa deb ataladi va E bilan belgilanadi, ya'ni

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots 0 \cdots 0 \\ 0 & 1 \cdots 0 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 1 \cdots 0 \\ 0 & 0 \cdots 0 \cdots 1 \end{pmatrix}$$

Agar matritsaning barcha elementlari, ya'ni istalgan $i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$ uchun $a_{ij}=0$ bo'lsa, u holda bunday matritsa 0-ko'rinishda ifodalanadi va nol- matritsa deyiladi.

Endi matritsalar ustida bajariladigan amallarni kiritamiz.

2-ta'rif. $A=(a_{ij})$ matritsani λ-songa ko'paytmasi deb shunday C-matritsa tushuniladiki, bunda C matritsa elementlari c_{ij} ushbu $c_{ij}=\lambda a_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi.

Xususan istalgan A matritsa uchun $0 \cdot A = 0$ bo'ladi.

3-ta'rif. Bir xil $m \times n$ o'lchamli $A=(a_{ij})$ va $B=(b_{ij})$ matritsalar uchun ularning yig'indisi deb shunday $m \times n$ o'lchamli $C=(c_{ij})$ matritsaga aytiladiki, istalgan $i=\overline{1,n}$ va $j=\overline{1,m}$ lar uchun c_{ij}-element, $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$ tenglik orqali aniqlanadi va matritsalar yig'indisi A+B shaklda belgilanadi, ya'ni C=A+B

A matritsaning B matritsaga ko'paytmasini aniqlashda, A matritsaning ustunlar soni B matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi talab etiladi. Ya'ni $A=(a_{ij})_{m\times n}$, $B=(b_{ij})_{n\times k}$ bo'lishi kerak.

4-ta'rif. $A=(a_{ij})_{m\times n}$ va $B=(b_{ij})_{n\times k}$ matritsalar ko'paytmasi deb, o'lchami $m\times k$ bo'lgan shunday $C=(c_{ij})_{m\times k}$ matritsaga aytiladiki, uning c_{ij} - elementi,

$$c_{ij}=\sum_{s=1}^{n} a_{is}\cdot b_{sj},\quad i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,k}$$

tenglik orqali aniqlanib, matritsalar ko'paytmasi $A\cdot B$ ko'rinishda ifodalanadi, ya'ni $C=A\cdot B$.

Yuqorida kiritilgan matritsalar ustidagi amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lib, bu xossalarning isboti, ularga mos xossalarning sonlar ustida o'rinli ekanligidan kelib chiqadi. Bu isbotlarni o'quvchining o'ziga havola qilamiz.

1. Matritsalarni qo'shish amali uchun kommutativlik- o'rin almashtirish xossasi o'rinli, ya'ni

$$A+B=B+A;$$

2. Matritsalarni qo'shish amali uchun assotsiativlik- guruhlash xossasi o'rinli, ya'ni

$$(A+B)+C=A+(B+C);$$

3. Matritsalarni songa ko'paytirishda qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli, ya'ni

$$\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$$

4. Matritsalarni ko'paytirish amalida qo'shishga nisbatan distributivlik xossasi o'rinli, ya'ni

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C \text{ yoki } (A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C;$$

5. Matritsani songa ko'paytirish va matritsalarni matritsaga ko'paytirish orasida quyidagi xossa o'rinli, ya'ni

$$\lambda\cdot(A\cdot B)=(\lambda A)\cdot B=A\cdot(\lambda B);$$

6. Matritsalarni ko'paytirish amali uchun guruhlash xossasi o'rinlidir, ya'ni

$$A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C.$$

Shuni ta'kidlab o'tish lozimki, $A\cdot B$ ko'paytma mavjud ekanligidan $B\cdot A$ ning mavjud ekanligi kelib chiqmaydi, sababi $A\cdot B$ ko'paytmani aniqlashda A –matritsaning ustunlar soni B-matritsaning satrlar soniga teng bo'lishi kerak, bunda B matritsaning ustunlar soni A-matritsaning satrlar soniga teng bo'lmasligi ham mumkin, shuning uchun $B \cdot A$ ko'paytmani har doim aniqlab bo'lmas ekan. Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $A \cdot B$ ni aniqlash mumkin, lekin $B \cdot A$ ni aniqlab bo'lmaydi.

Yana shuni ta'kidlash kerakki $A \cdot B$ va $B \cdot A$ ko'paytmalar mavjud bo'lgan taqdirda ham $A \cdot B = B \cdot A$ tenglik o'rinli bo'lmasligi mumkin.

Masalan:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

matritsalar uchun $A \cdot B$ ko'paytma matritsaning o'lchami 3x3 bo'lsa, $B \cdot A$ niki esa 2x2. Demak, tabiiy ravishda $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Endi A n-tartibli kvadrat matritsa bo'lsin. U holda

$$A \cdot E = E \cdot A = A \quad \text{va} \quad O \cdot A = A \cdot O = O$$

munosabatlar o'rinli ekanligini ko'rish qiyin emas.

Natural k son uchun quyidagi tenglik orqali

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{k-marta}$$

A matritsaning « k-darajasi» ni aniqlaymiz.

Shartli ravishda $A^0 = E$ va $A^1 = A$ deb qabul qilinadi.

Agar A matritsa elementlarining tartib raqamlarini o'zgartirmagan holda satrlarini ustun yoki ustunlarini satr qilib almashtirsak, hosil bo'lgan yangi matritsa A matritsaning transponirlangani deb nomlanib, A' (yoki A^T) shaklda belgilanadi. Masalan, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 5 \end{pmatrix}$ bo'lsa, $A' = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ bo 'ladi.

A matritsani A' ga almashtirish matritsani transponirlash deb nomlanadi. Transponirlash quyidagi xossalarga ega:

1. $(A')' = A$

2. $(\lambda A)' = \lambda \cdot A'$

3. $(A + B)' = A' + B'$

4. $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$

Bu xossalarning isbotini ham o'quvchiga havola qilamiz.

2.2. Determinantlar

Matematika va uning tatbiqlarida, xususan iqtisoddagi tatbiqlarida chiziqli tenglamalar sistemasini yechishga to'g'ri keladi. Bunday sistemalarni yechishda, ular bilan bog'liq bo'lgan kvadrat matritsalarni xarakterlash uchun determinant deb nomlanuvchi son mos qo'yiladi. Bu son $|A|$ yoki $\det(A)$ shaklida ifoda etiladi. Kvadrat matritsa determinantini, uning tartibi n-bo'yicha induktsiya metodi orqali ta'riflaymiz.

$n = 1$ bo'lsin, ya'ni $A = (a_{11})$ 1-tartibli matritsa bo'lsin, A-matritsaning determinanti deb $|A| = a_{11}$ sonini olamiz.

$n - 1$ tartibli barcha kvadrat matritsalar uchun ularning determinanti aniqlangan bo'lsin deb faraz qilamiz.

5-ta'rif. n-tartibli $A = (a_{ij})$ matritsa a_{ij} elementining M_{ij}-minori deb, A-matritsaning i-satri va j-ustunini o'chirishdan keyin hosil bo'lgan $(n-1)$ tartibli matritsa determinantiga aytiladi.

6-ta'rif. n-tartibli $A = (a_{ij})$ matritsa a_{ij}-elementining algebraik to'ldiruvchisi A_{ij} - deb quyidagi songa aytiladi

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Yig'indi $\sum_{s=1}^{n} a_{is} A_{is}$ – i-satr bo'yicha yoyilma, $\sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ yig'indi esa, j-ustun bo'yicha yoyilma deb ataladi.

7-ta'rif. n-tartibli kvadrat $A=(a_{ij})$ matritsaning determinanti deb, quyidagi tenglik bilan aniqlangan songa aytiladi:

$$|A|=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}\ A_{1k} \qquad (1)$$

Bu ta'rifdan foydalanib 2- va 3-tartibli determinantlarni hisoblash uchun quyidagi formulalarni hosil qilamiz:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{2} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^{3} a_{1k}A_{1k} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$
$$+ a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{21}a_{12}a_{33}$$

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

1-teorema (Laplas teoremasi). Istalgan i va j lar uchun

$$\sum_{s=1}^{n} a_{is}\ A_{is} = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}\ A_{kj} = |A| \quad i=\overline{1,n}; \quad j=\overline{1,n} \qquad (2)$$

tenglik o‘rinli bo ‘ladi.

Ya'ni n-tartibli A-matritsa uchun uning barcha yoyilmalari uning determinantiga teng bo‘lar ekan.

1-xossa Agar A-matritsaning biron-bir satridagi (ustunidagi) barcha elementlari nolga teng bo‘lsa, u holda uning determinanti nolga teng bo ‘ladi.

Haqiqatan ham, agar matritsaning i-satri elementlari $a_{ik}=0,\ \ k=\overline{1,n}$ bo‘lsa, (1) formuladan $|A|=0$ ekanligi kelib chiqadi. Agar matritsaning j-ustun elementlari $a_{kj}=0,\ k=\overline{1,n}$

bo'lsa, Laplas teoremasidan, ya'ni (2) tenglikdan $|A| = 0$ ekanligi kelib chiqadi.

2-xossa. Agar A-matritsaning biron-bir satr (ustun) elementi λ soniga ko'paytirilsa, determinant qiymati ham λ soniga ko'payadi, ya'ni $\lambda \cdot |A|$ ga teng bo 'ladi.

Bu xossaning isboti (1) tenglikdan to'g'ridan-to'g'ri kelib chiqadi, chunki

$$\sum_{k=1}^{n} (\lambda \cdot a_{ik}) \cdot A_{ik} = \lambda \cdot \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik} = \lambda \cdot |A|.$$

Xossaning ustun holi uchun isboti, Laplas teoremasi, ya'ni (2) tenglikdan kelib chiqadi.

3-xossa. A-matritsa va uning transponirlangani A' matritsalarning determinantlari teng bo'ladi, ya'ni $|A| = |A'|$ tenglik o'rinlidir.

Bu xossaning isboti to'g'ridan-to'g'ri Laplas teoremasi, ya'ni (2)- tenglikdan kelib chiqadi. Chunki transponirlangan A' matritsa uchun (1) tenglikni, ya'ni satr bo'yicha yoyilmasini qarasak, bu yoyilma A matritsa uchun ustun bo'yicha yoyilmadan iborat bo 'ladi, u holda (2) tenglikdan bu $|A|$ ga tengligi kelib chiqadi. Demak $|A'| = |A|$ ekan.

4-xossa. Agar A- matritsaning ikkita qo'shni satrlari o'rnini almashtirsak, hosil bo'lgan yangi A_1 matritsaning determinanti A-matritsa determinantining teskari ishora bilan olinganiga teng bo 'ladi, ya'ni $|A_1| = -|A|$ tenglik o'rinli bo'ladi.

A_1 matritsa A matritsaning $i-$ va $i+1$- satrlari o'rnini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, agar A_1 matritsaning $i+1$ satri bo'yicha yoyilmasini qarasak, ya'ni

$$|A_1| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+1+k} M_{ik} = -\sum_{k=1}^{n} a_{ik} (-1)^{i+k} M_{ik} = -|A|$$

ekani kelib chiqadi. Demak, bu holda 4-xossa isbot bo'ldi.

Endi A_1 matritsa A-matritsadan i va j satrlarining $(i < j)$ o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan bo'lsin, u holda bu almashtirishni ketma-ket keluvchi satrlar o'rnini almashtirish orqali ifodalash mumkin bo 'ladi. Aytaylik $j=i+m$ ko'rinishda bo'lsin. $i, i+1, i+2,\dots, i+m-1, i+m$ satrlar joylashuvidan $i+m, i+1, i+2,\dots, i+m-1, i$ – satrlar joylashuviga o'tish kerak, buni quyidagicha bajarish mumkin.

$i, i+1, i+2,\dots, i+m-1, i+m \to i+1, i, i+2,\dots, i+m-1, i+m \to \dots$

$\dots, i+m-1, i+m, i$

bu o'tishlar soni m ga teng, so'ngra

$i+1, i+2,\dots, i+m, i+m-1, i \to \dots, i+m, i+1, i+2,\dots, i+m-2,$

-bu o'tishlar soni $m-1$ ga teng.

Demak, jami $m+m-1=2m-1$ qadamli o'tishlar bor ekan va A-matritsa determinanti o'z ishorasini toq marta o'zgartirar ekan, u holda $|A_1|=-|A|$ bo 'ladi.

5-xossa. Agar A-matritsa bir xil ikki satrga (ustunga) ega bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng $|A|=0$ bo 'ladi.

Chunki, agar A –matritsaning i- va j-satrlari bir xil bo'lsa, u holda ularning o'rinlarini almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa A_1 uchun $A_1=A$ va $|A_1|=-|A|$ bo'lishi kerak, ya'ni $|A|=-|A|$, bundan esa $|A|=0$ ekanligi kelib chiqadi.

6-xossa. Agar A-matritsada ikki satrning (ustun) mos elementlari proporsional bo'lsa, u holda uning determinanti nolga teng, ya'ni $|A|=0$ bo 'ladi.

Faraz qilaylik, A-matritsaning i-satri mos elementlari j-satrning mos elementlariga proporsional bo'lsin, ya'ni

$$a_{ik}=\lambda a_{jk}, \qquad k=\overline{1,n} \tag{3}$$

tengliklar o'rinli bo'lsin, (λ-proporsional koeffitsenti), u holda, agar A_1 matritsani A matritsaning j-satri elementlarini uning i-satri elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa deb qarasak, u holda (3) tenglik va 2-xossaga ko'ra $|A|=\lambda\cdot|A_1|$

ekanligi kelib chiqadi. 5-xossaga ko'ra $|A_1| = 0$ bo'ladi, demak $|A| = 0$ ekan.,

7-xossa. Agar A matritsaning biron satr (ustun) elementlarini boshqa satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytirib yig'indi hosil qilsak, bunday yig'indi nolga teng bo'ladi, ya'ni

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = 0, \qquad i \neq j.$$

Agar A- matritsaning j-satr elementlarini uning i-satr elementlari bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsani A_1 desak, 5-xossaga ko'ra $|A_1| = 0$ bo'ladi. Agar A_1 matritsaning j-satri bo'yicha yoyilmasini olsak, determinantning ta'rifiga ko'ra

$$|A_1| = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \ A_{jk} = 0$$

ekanligi kelib chiqadi.

Bu erda 7-xossa va Laplas teoremasiga ko'ra quyidagi natijani hosil qilamiz.

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} = \begin{cases} |A|, agar \ i = j \ bo'lsa \\ 0, \ agar \ \ i \neq j \ bo'lsa \end{cases} \qquad (4)$$

8- xossa. A matritsaning biron-bir satri (ustuni) elementlarini bir xil songa ko'paytirib, boshqasiga qo'shishdan hosil bo'lgan A_1- matritsaning determinanti A matritsa determinantiga teng bo'ladi, ya'ni $|A_1| = |A|$.

Ushbu matritsalar berilgan bo'lsin,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{in} \\ a_{j1} & a \cdots a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ a_{i1} + \lambda a_{j1} & a_{i2} + \lambda a_{j2} & \cdots a_{in} + \lambda a_{jn} \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots \ a_{jn} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots \ a_{nn} \end{pmatrix}$$

U holda 4-tenglikdan,

$$|A_1| = \sum_{k=1}^{n}(a_{ik} + \lambda a_{jk})A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} + \lambda \sum_{k=1}^{n} a_{jk}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot A_{ik} = |A|,$$

ya'ni 8-xossa isboti kelib chiqadi.

9-xossa. $b_1, \ b_2, \ldots, b_n$ sonlarni n-tartibli A matritsaning berilgan satr (ustun) mos elementlarining algebraik to'ldiruvchilariga ko'paytmasining yig'indisi, A matritsaning berilgan satr (ustun) elementlarining $b_1, \ b_2, \ldots, b_n$ sonlari bilan almashtirilgan matritsa determinantiga teng bo 'ladi.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{va} \quad B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_1 & b_2 & \ldots & b_n \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$|B| = \sum_{k=1}^{n} b_k \, A_{ik}$ tenglik o'rinli bo 'ladi.

Quyidagi xossani isbotsiz keltiramiz.

10-xossa. n-tartibli kvadrat A va B matritsalar uchun $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$ tenglik o'rinli bo'ladi, ya'ni matritsalar ko'paytmasining determinanti, ularning determinantlari ko'paytmasiga teng bo'ladi.

2.3. Teskari matritsa. Matritsa rangi

8-ta'rif. A kvadrat matritsaga teskari matritsa deb, shunday A^{-1} matritsaga aytiladiki, uning uchun quyidagi $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ tenglik o'rinli bo'lsin.

9-ta'rif. Agar A matritsa uchun $|A| \neq 0$ bo'lsa, bunday matritsa xos bo'lmagan matritsa, aks holda, ya'ni $|A| = 0$ bo'lsa xos matritsa deyiladi.

2-teorema. A kvadratik matritsaga teskari A^{-1} matritsa mavjud va yagona bo'lishi uchun, uning xos bo'lmagan matritsa bo'lishi zarur va yetarlidir.

Zarurligi. Agar A matritsa uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lsa, u holda $A \cdot A^{-1} = E$ tenglik o'rinli bo'ladi. Bu yerdan 10-xossani e'tiborga olib, quyidagini hosil qilamiz.

$$|A \cdot A^{-1}| = |A| \cdot |A^{-1}| = |E| = 1, \qquad (5)$$

demak $|A| \neq 0$ bo'lar ekan.

Yetarliligi. A-matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'lsin, ya'ni $|A| \neq 0$ bo'lsin. U holda (4) tenglikdan, matritsalarni o'zaro ko'paytirish va matritsani songa ko'paytirish qoidasiga ko'ra,

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \ldots A_{j1} \ldots A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} \ldots A_{j2} \ldots A_{n2} \\ A_{1k} & A_{2k} \ldots A_{jk} \ldots A_{nk} \\ A_{1n} & A_{2n} \quad A_{jn} \ldots A_{nn} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi teskari matritsaning yagona ekanligini ko'rsatamiz. Agar B matritsa A matritsa uchun teskari matritsa bo'lsa, $B = A^{-1}$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham

$$B = B \cdot E = B \cdot (A \cdot A^{-1}) = (B \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}$$

Demak, $B = A^{-1}$ ekan.

(5) tenglikdan $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ ekanligi kelib chiqadi.

Endi matritsa rangi tushunchasini kiritamiz. O'lchami $m \times n$ bo'lgan A- matritsa berilgan bo'lsin. $k = \min\{m, n\}$ deb olsak, A matritsada satr yoki ustunlarni o'chirish natijasida tartibi k dan oshmaydigan bir nechta kvadrat matritsalarni hosil qilishimiz mumkin. Mana shu kvadrat matritsalarning determinantlari berilgan A-matritsaning minorlari deb aytiladi.

10-ta'rif. A matritsaning rangi deb uning noldan farqli minorlarining eng yuqori tartibiga aytilib, $r(A)$ orqali belgilanadi.

Bu ta'rifdan, agar $A \neq 0$ va A matritsa o'lchami $m \times n$ bo'lsa, u holda $r(A) \leq \min\{m,n\}$ bo'lar ekan.

11-ta'rif. Matritsa ustidagi elementar almashtirishlar deb quyidagi almashtirishlarga aytiladi:

1. Barcha elementlari noldan iborat satrni (ustunni) tashlab yuborish.
2. Satrning (ustunning) barcha elementlarini noldan farqli songa ko'paytirish.
3. Satr (ustun) o'rinlarini almashtirish.
4. Berilgan satr (ustun) elementlariga boshqa satr (ustun) elementlarini biron songa ko'paytirib qo'shish.
5. Matritsani transponirlash.

3-teorema. Matritsa rangi uning ustida elementar almashtirishlarni bajarish natijasida o'zgarmaydi.

Bu teorema isboti yuqorida keltirilgan determinantlar xossalaridan kelib chiqadi. Xuddi shuningdek matritsa rangi uchun quyidagi xossalar o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin:

1. $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$

2. $r(A+B) \geq |r(A) - r(B)|$

3. $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$

4. $r(A'A) = r(A)$

5. Agar A va B lar kvadrat matritsalar bo'lib, $|B| \neq 0$ bo'lsa, u holda $r(AB) = r(A)$ bo 'ladi.

$A = (a_{ij})$ $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$ bo'lsin, uning satrlaridan quyidagi satr-vektorlarni hosil qilamiz.

$$I_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}),\ I_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \cdots, I_m = (a_{m1}, a_{m2}, \cdots, a_{mn})$$

Berilgan $I_1, I_2, \ldots, I_m$ satrlar chiziqli bog'liq deyiladi, agarda shunday $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_m$ sonlar mavjud bo'lsaki, ulardan birontasi noldan farqli bo'lib, $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, bu yerda $0-(0,0,\ldots,0)$-hos vektor, aks holda ular chiziqli erkli satrlar deyiladi. Demak, agar berilgan satrlar chiziqli bog'liq bo'lsa, u holda biron-bir satr qolganlarining chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'ladi. Aytaylik $\lambda_m \neq 0$ bo'lsa, u holda $I_m - m$-satr qolganlarining chiziqli kombinatsiyasi, ya'ni $I_m = -\frac{\lambda_1}{\lambda_m} I_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_m} I_2 - \cdots - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} I_{m-1}$ bo'lar ekan. Agarda $I_1, I_2, \cdots, I_m$ satrlar chiziqli erkli bo'lsa, u holda $\lambda_1 I_1 + \lambda_2 I_2 + \cdots + \lambda_m I_m = 0$ tenglikdan $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Xuddi shuningdek ustun-vektorlar uchun yuqoridagilarni aytish mumkin.

Matritsalar uchun quyidagi teoremalar o'rinli bo'ladi.

4-teorema. Matritsa uchun uning chiziqli erkli satrlarning maksimal soni chiziqli erkli ustunlarning maksimal soniga teng bo'ladi.

5-teorema. Matritsa rangi undagi chiziqli erkli satrlarning (ustunlarning) maksimal soniga teng bo'ladi.

Matritsa rangini topish uchun matritsa ustida elementar almashtirishlar bajarish natijasida bu matritsani uchburchak yoki trapetsiya ko'rinishiga olib kelish mumkin, ya'ni

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \ldots a'_{1r} \\ 0 & a'_{22} & \ldots a'_{2r} \\ -- & -- & -- \\ 0 & 0 & \ldots a'_{rr} \end{pmatrix} \text{ - uchburchak ko'rinish, } r(A) = r$$

$$\begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} \cdots a'_{1r} & a'_{1r+1} \cdots a'_{1k} \\ 0 & a'_{22} \cdots a'_{2r} & a'_{2r+1} \cdots a'_{2k} \\ -- & -- & -- \\ 0 & 0 \cdots a'_{rr} & a'_{rr+1} \cdots a'_{rk} \end{pmatrix} - \text{ trapetsiya ko'rinish, } r(A) = r$$

Xulosa

Matematikada matritsa va determinant tushunchalari juda muhim rol o'ynaydi, ayniqsa ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modelini tuzayotganimizda matritsa tushunchasidan keng foydalanamiz. Masalan, iqtisoddagi transport masalasini olib qarasak, uni yechishda matritsa tushunchasi va matritsa ustidagi amallardan foydalanish juda qo'l keladi. Demak, matritsa tushunchasi ko'p tarmoqli axborotlarni tartiblashga va ular ustidagi masalalarni yechishga yordam beradi.

Tayanch iboralar

Matritsa, minor, algebraik to'ldiruvchi, determinant, teskari matritsa, matritsa rangi.

Takrorlash uchun savollar

1. Matritsa nima?
2. Matritsalar ustida qanday amallar bajarilishi mumkin?
3. Qanday matritsalarni ko'paytirish mumkin?
4. Minor va algebraik to'ldiruvchi orasida qanday farq bor?
5. Ikkinchi va uchinchi tartibli determinantlarni hisoblash formulasini yozing.
6. p -tartibli determinant qanday hisoblanadi?
7. Teskari matritsa deb qanday matritsaga aytiladi?
8. Teskari matritsa qanday topiladi?
9. Matritsa rangi ta'rifini keltiring.
10. Matritsa rangini hisoblash usullarini keltiring.

Adabiyotlar

1. Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2. Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3. Jo'rayv T.J., Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.

4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалавріанта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

3-bob. CHIZIQLI TENGLAMALAR SISTEMASI

3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi va uning yechimi.
3.2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi
3.3. Ko'p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)

3.1. Chiziqli tenglamalar sistemasining umumiy ko'rinishi va uning yechimi

n ta noma'lum va m ta tenglamadan iborat chiziqli tenglamalar sistemasi deb quyidagi sistemaga aytiladi.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1j}x_j + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2j}x_j + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ij}x_j + \cdots + a_{in}x_n = b_i \\ - \quad - \quad - \quad - \quad - \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mj}x_j + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

bu yerda $a_{ij}, b_i \ (i = \overline{1,m}; j = \overline{1,n})$ - berilgan sonlar bo'lib, a_{ij} – noma'lumlar oldidagi koeffitsientlar, b_i – ozod hadlar deyiladi.

1-ta'rif. (1) tenglamalar sistemasidagi noma'lum $x_1, x_2, \ldots, x_n$ larning o'rniga mos ravishda $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sonlarni qo'yish natijasida ushbu

$$\begin{cases} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \ldots a_{1n}c_n \equiv b_1 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \ldots a_{2n}c_n \equiv b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \ldots a_{mn}c_n \equiv b_m \end{cases}$$

ayniyatlar sistemasi hosil bo'lsa, noma'lumlarning bunday $c_1, c_2, \ldots, c_n$ qiymatlari (1) tenglamalar sistemasining yechimi deyiladi.

2-ta'rif. Agarda (1) tenglamalar sistemasi yechimga ega bo'lsa, u birgalikda deyiladi, aks holda birgalikda emas deyiladi.

3-ta'rif. Birgalikda bo'lgan tenglamalar sistemasi yagona (cheksiz ko'p) yechimga ega bo'lsa, u aniq (noaniq) deyiladi.

Bizga (1) tenglamalar sistemasidan tashqari, quyidagi

$$\begin{cases} a'_{11}x_1 + a'_{12}x_2 + \dots + a'_{1n}x_n = b'_1 \\ a'_{21}x_1 + a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2n}x_n = b'_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a'_{m1}x_1 + a'_{m2}x_2 + \dots + a'_{mn}x_n = b'_m \end{cases} \qquad (2)$$

tenglamalar sistemasi ham berilgan bo'lsin.

4-ta'rif. Agar (1) va (2) tenglamalar sistemalarining yechimlar to'plami ustma-ust tushsa, u holda ular teng kuchli (ekvivalent) deyiladi.

Endi (1) chiziqli tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishini yozamiz. Buning uchun a_{ij}, b_i, va x_i lar yordamida quyidagi matritsalarni hosil qilamiz.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ - & - \quad - \quad - \\ a_{m1} & a_{m2} \dots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

bu yerda A koeffitsientlar (1) yoki sistema matritsasi, V ustun matritsa, ozod hadlar matritsasi deyiladi. U holda (1) tenglamalar sistemasini quyidagi ko'rinishda yoza olamiz:

$$AX = B$$

(1) tenglamalar sistemasida tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng, ya'ni $m = n$, bo'lsin. Bu holda sistema matritsasi A kvadrat matritsa bo'ladi. Uning determinanti $|A| = \Delta$ deb belgilanib, sistema determinanti deyiladi. Δ_j bilan A matritsaning j-ustunini ozod hadlar ustuni bilan almashtirishdan hosil bo'lgan matritsa determinantini belgilaymiz.

Agar $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, ya'ni A-xos bo'lmagan matritsa bo‘lsa, u holda A^{-1} teskari matritsa mavjud bo‘ladi, u holda (2) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}B \Rightarrow (A^{-1}A)X = A^{-1}B \Rightarrow EX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B \tag{3}$$

bu yerda, matritsalarning ko‘paytirish qoidasi va II-bobdagi (6)-tenglikdan quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \cdots A_{m} \\ A_{12} & A_{22} \cdots A_{n2} \\ - - - & - - - \\ A_{1j} & A_{2j} \cdots A_{n2} \\ A_{1n} & A_{2n} \cdots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Oxirgi tenglikdan $x_j = \frac{1}{\Delta}(b_1 A_{1j} + b_2 A_{2j} + \cdots + b_n A_{nj}) = \frac{\Delta j}{\Delta}$, $\Delta_j = \overline{1,n}$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, quyidagi teorema o‘rinli ekan.

1-teorema (Kramer teoremasi). Agar sistema determinanti $\Delta \neq 0$ bo‘lsa, u holda (1) sistema yagona yechimga ega bo‘lib, bu yechim quyidagi formulalar orqali topiladi.

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \qquad j = \overline{1,n} \tag{4}$$

Teoremadagi (4) formula Kramer formulasi deb nomlanadi. (1) tenglamalar sistemasini (3)-(4) formulalar orqali yechilishi esa Kramer yoki determinantlar usuli deyiladi. Shuni ta'kidlash kerakki, bu usullarni tenglamalar soni noma'lumlar soniga teng bo‘lgan holdagina qo‘llash mumkin. Endi umumiy holda qo‘llaniladigan usul-Gauss usulini bayon qilamiz. Gauss usuli noma'lumlarni ketma-ket yo‘qotish usuli deb ham nomlanadi.

Chiziqli tenglamalar sistemasi ustida bajariladigan elementar almashtirish deb quyidagilarga aytiladi: (1) Sistemadagi biron-bir tenglamani noldan farqli songa ko‘paytirish, tenglamalar o‘rnini almashtirish va biron-bir tenglamani songa ko‘paytirib, boshqa bir tenglamaga qo‘shish. Mana shu almashtirishlar natijasida hosil bo‘lgan yangi tenglamalar sistemasi avvalgisiga ekvivalent, ya'ni yechimlar to‘plami ikkala sistema uchun bir xil bo‘ladi.

(1) sistema matritsasi va ozod hadlar ustuni yordamida kengaytirilgan matritsa hosil qilamiz,

$$\bar{A}=\begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \cdots x_n & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\cdots a_{2n} & b_2 \\ ---- & ---- & ---- & \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}\cdots a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \end{array}$$

Yuqoridagi ta'kidlangan almashtirishlar natijasida, bu matritsa quyidagi ko'rinishlardan biriga kelishi mumkin:

$$\text{a)}\ \begin{array}{c} \begin{matrix} x_{i1} & x_{i2} & x_{i3}\cdots x_{in} & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{11} & \cdots c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & \cdots c_{2n} & d_2 \\ ---- & ---- & ---- & ---- & - \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots c_{mn} & d_n \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} c_{ii}\neq 0, \quad i=\overline{1,n} \\ m=n, \quad r(A)=r(\bar{A})=n \end{array}$$

bu holda yechim yagona;

$$\text{б)}\ \begin{array}{c} \begin{matrix} x_{i1} & x_{i2} & \cdots & x_{in} & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ ---- & ---- & ---- & ---- & - \\ 0 & 0 & \cdots & c_{nn} & d_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \quad \begin{array}{l} c_{ii}\neq 0, \quad i=\overline{1,n} \\ m>n, \quad r(A)=r(\bar{A})=n \end{array}$$

bu holda yechim yagona;

$$
\text{c)}\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_r} & \cdots & x_{i_n} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc|c}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
\hline
0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
c_{ii} \neq 0,\ \ i = \overline{1,n} \\
r(A) = r(\bar{A}) = r,\ \ r < n
\end{array}
$$

bu holda sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

$$
\text{d)}\quad
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_r} & \cdots & x_{i_n} \end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccc|c}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1r} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\
0 & c_{22} & \cdots & c_{2r} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\
0 & 0 & \cdots & c_{rr} & \cdots & c_{rn} & d_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_{r+1} \\
0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & d_m
\end{array}\right)
\end{array}
$$

$c_{ii} \neq 0,\ \ i = \overline{1,n}$

bu yerda $d_{r+1},\dots,d_m$ sonlardan birontasi noldan farqli, bu holda $r(A) = r,\ r(\bar{A}) = r+1$, ya'ni $r(A) \neq r(\bar{A})$ sistema yechimga ega emas.

Bu yerda $i_1,\ i_2,\ \dots,i_n$ lar $1, 2, \dots, n$ ning qandaydir o'rin almashtirishlaridan iborat bo'ladi. Demak, quyidagi teorema o'rinli.

2-teorema. (Kroneker-Kapelli teoremasi). Agar sistema matritsasi rangi kengaytirilgan matritsa rangiga teng bo'lsa, ya'ni $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, u holda sistema birgalikda bo'ladi, ya'ni yechimga ega bo'ladi.

Demak, biz quyidagi xulosalarni qilishimiz mumkin ekan.

1. Agar $r(A) = r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'ladi.
2. Agar $r(A) \neq r(\bar{A})$ bo'lsa, sistema birgalikda bo'lmaydi.

3. Agar $r(A)=r(\overline{A})=n$ bo'lsa, sistema yagona yechimga ega bo'ladi.

4. Agar $r(A)=r(\overline{A})<n$ bo'lsa, sistema cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi.

3.2. Bir jinsli chiziqli tenglamalar sistemasi

Agar chiziqli tenglamalar sistemasi (1) da ozod hadlar nolga teng bo'lsa, ya'ni $b_1=b_2=\cdots=b_m=0$ bo'lsa, hosil bo'lgan tenglamalar sistemasi bir jinsli tenglamalar sistemasi deyiladi, ya'ni

$$\begin{cases} a_{11}\,x_1+a_{12}\,x_2+\cdots+a_{1n}\,x_n=0 \\ a_{21}\,x_1+a_{22}\,x_2+\cdots+a_{2n}\,x_n=0 \\ ----------------- \\ a_{m1}\,x_1+a_{m2}\,x_2+\cdots+a_{mn}\,x_n=0 \end{cases} \qquad (5)$$

Bu sistema kengaytirilgan matritsaning oxirgi ustuni elementlari nolga teng bo'lgani uchun sistema matritsasi va kengaytirilgan matritsalar rangi teng bo'ladi, ya'ni $r(A)=r(\overline{A})$ bo'ladi. Shuning uchun Kroneker-Kaspelli teoremasiga ko'ra bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim birgalikda bo'ladi. Masalan, (0,0,..., 0)=0 sistemaning trivial yechimi (nol yechim) bo'ladi.

(5) tenglamalar sistemasining matritsa ko'rinishi quyidagidan iborat:

$$\mathrm{AX}=0. \qquad (6)$$

Yuqorida keltirilgan 1-4 xulosalarga ko'ra, agar $r(A)=n$ bo'lsa (5)-sistema yagona, nol yechimga ega, agarda $r(A)<n$ bo'lsa, cheksiz ko'p yechimga ega bo'ladi. Demak $m=n$ bo'lgan holda (5) sistema noldan farqli yechimga ega bo'lishi uchun uning determinanti nolga teng bo'lishi zarur va yetarli bo'lar ekan.

Agar (5) sistemada $m<n$ bo'lsa, ya'ni tenglamalar soni noma'lumlar sonidan kichik bo'lsa, (5) sistema albatta noldan

farqli yechimlarga ega bo'ladi (cheksiz ko'p), chunki bu holda $r(A) \leq m$ va demak $r(A) < n$ bo'ladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, agar $X_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \cdots x_n^{(0)}\right)$ va $X_1 = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \cdots x_n^{(1)}\right)$ vektorlar (6) sistema yechimi bo'lsa, u holda istalgan λ_0 va λ_1 sonlar uchun, $\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1$ -vektor ham (6) sistema yechimi bo'ladi, haqiqatan ham,

$$A(\lambda_0 X_0 + \lambda_1 X_1) = \lambda_0 A X_0 + \lambda_1 A X_1 = \lambda_0 0 + \lambda_1 0 = 0. \qquad (7)$$

Bu tengliklar matritsalarni qo'shish, songa ko'paytirish va ko'paytirish ta'riflaridan kelib chiqadi.

(7) tenglikdan shuni xulosa qilish mumkinki, (6) sistema yechimlarining chiziqli kombinatsiyasi ham (6)-sistemaning yechimi bo'lar ekan.

5-ta'rif. Agar (6) sistemaning $X_1, X_2, \cdots, X_k$ -chiziqli erkli yechimlar sistemasi berilgan bo'lib, bu sistemaning istalgan X yechimi ularning chiziqli kombinatsiyasidan iborat bo'lsa, ya'ni shunday $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sonlar mavjud bo'lsaki,

$$X = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 + \cdots + \lambda_k X_k$$

bo'lsa, u holda bu sistema fundamental yechimlar sistemasi deyiladi

Ta'rifda $X_i = (x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}),\ i = 1, 2, \cdots, k,$ ko'rinishda bo'lgani uchun, $k \leq n$ bo'ladi.

3-teorema. Agar (6) sistema uchun $r(A) < n$ bo'lsa, u holda istalgan fundamental yechimlar sistemasi $k = n - r(A)$ ta yechimdan iborat bo'ladi.

Isboti. $r(A) < n$ bo'lsin, u holda (6) sistemaning kengaytirilgan matritsasi elementar almashtirishlar natijasida quyidagi ko'rinishga keladi,

$$\begin{array}{c} \quad x_{i1} \quad x_{i2} \cdots x_{ir} \cdots x_{in} \\ \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \cdots c_{1r} & \cdots c_{1n} & 0 \\ 0 & c_{22} \cdots c_{2r} & \cdots c_{2n} & 0 \\ - - - & - - - & - - - & \\ 0 & 0 \quad c_{rr} & \cdots c_{rn} & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

bu yerda $r=r(A)$ bo'lib, $c_{ii}\neq 0, i=\overline{1,r}$. Agar buni tenglama ko'rinishida yozsak quyidagini hosil qilamiz.

$$c_{11}\ x_{i1}+c_{12}\ x_{i2}+\cdots+c_{1r}\ x_{ir}+c_{1r+1}\ x_{ir+1}+\cdots+c_{in}\ x_{in}=0$$

$$c_{22}\ x_{i2}+\cdots+c_{2r}\ x_{in}+c_{2r+1}\ x_{ir+1}+\cdots+c_{2n}\ x_{in}=0$$

$$c_{rr}\ x_{ir}+c_{rr+1}\ x_{ir+1}+\cdots+c_{rn}\ x_{in}=0$$

bu yerda oxirgi tenglamadan x_{ir} ni $x_{ir+1},\cdots,x_{in}$ lar orqali ifodalab, undan oldingi tenglamadagi x_{ir} ning o'rniga qo'ysak, x_{ir-1} ning $x_{ir+1},\cdots,x_{in}$ larning chiziqli kombinatsiya ekanligi kelib chiqadi. Shu tariqa yuqoriga ko'tarilib, natijada quyidagilarni hosil qilamiz.

$$x_{i1}=\lambda_{i1}\ x_{ir+1}+\lambda_{12}\ x_{ir+2}+\cdots+\lambda_{1n}\ x_{in}$$

$$x_{i2}=\lambda_{21}\ x_{ir+1}+\lambda_{22}\ x_{ir+2}+\cdots+\lambda_{2n}\ x_{in}$$

$$x_{ir}=\lambda_{r1}\ x_{ir+1}+\lambda_{r2}\ x_{ir+2}+\cdots+\lambda_{rn}\ x_{in}$$

Bu yerda $x_{ir-1},\ x_{ir+2},\cdots,x_{in}$ lar erkli o'zgaruvchilar deb ataladi. Ularning soni $n-r=n-r(A)=k$ ga teng bo'ladi. Bu o'zgaruvchilardan birini 1 ga, qolganlarini 0 ga teng qilib olib, quyidagi k ta chiziqli erkli bo'lgan yechimlar sistemasini hosil qilamiz.

$$X_1=(\lambda_{11},\ \lambda_{21},\cdots,\lambda_{r1}, 1,\ 0,\cdots,0)$$

$$X_2=(\lambda_{12},\ \lambda_{22},\cdots,\lambda_{r2},\ 0,\ 1,\cdots,0)$$

$$X_k=(\lambda_{1k},\ \lambda_{2k},\cdots,\lambda_{kn},\ 0,\ 0,\cdots,1)$$

Shuni ta'kidlash lozimki, bir jinsli bo'lmagan n noma'lumli m ta chiziqli tenglamalar sistemasi $AX=B$ ning umumiy yechimi, unga mos keluvchi $AX=0$ bir jinsli tenglamalar sistemasining umumiy yechimi va $AX=B$ tenglamaning biron-bir xususiy yechimi yig'indisiga teng bo'ladi.

3.3. Ko'p tarmoqli iqtisod modeli (Balans modeli)

Balans modelining asosiy masalasi, makroiqtisodiyotni tashkil etadigan ko'p tarmoqli iqtisodiyot faoliyatini maqsadga muvofiq tarzda samarali olib borishdan iborat bo'lib, bu masala quyidagicha qo'yiladi: n ta tarmoqli xo'jalikning har bir ishlab chiqargan mahsulot miqdori qanday bo'lganda ehtiyoj to'la qondiriladi? Bu yerda shuni e'tiborga olish kerakki, n ta tarmoqning har biri ishlab chiqargan mahsulotning bir qismi shu tarmoq ehtiyoji uchun, bir qismi boshqa tarmoqlar ehtiyoji uchun va yana bir qismi ishlab chiqarish bilan bog'liq bo'lmagan ehtiyojlar uchun sarf etiladi.

Ishlab chiqarishning ma'lum bir davridagi, aytaylik, bir yillik faoliyatini qaraylik. x_i deb i- tarmoqning shu davr davomida ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmining pul birligida ifodalangan qiymatini, bu yerda $i=1,2,\cdots,n$. x_{ij} deb $i-$tarmoq mahsulotining $j-$tarmoq ehtiyoji uchun sarf etilgan hajmining pul miqdorini belgilaymiz. y_i deb i tarmoq mahsulotining noishlab chiqarish ehtiyoji hajmining pul miqdorini belgilaymiz. Tabiiyki, i tarmoq ishlab chiqargan yalpi mahsulot hajmi x_i, n ta tarmoq ehtiyojlari va noishlab chiqarish ehtiyojlari uchun sarf etilgan mahsulotlar hajmlarining pul miqdorlari yig'indisiga teng bo'lishi kerak, ya'ni

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}x_{ij}+y_i,\qquad i=1,2,\cdots,\ n \tag{8}$$

(8) tenglamalar balans munosabatlari deb nomlanadi.

Agar $a_{ij}=\dfrac{x_{ij}}{x_j}$ $(i,\ j=1,2,\cdots,n)$ belgilash kiritsak, $a_{ij}-j$-tarmoqning mahsulot hajmi birligi uchun sarf etilgan i-tarmoq mahsulot hajmi qiymatini bildiradi. a_{ij}-bevosita xarajatlar koeffitsienti deb nomlanadi. a_{ij}-koeffitsientlarni qaralayotgan davrdagi ishlab chiqarish jarayonida qo'llanilayotgan texnologiya aniqlaydi. Qanchalik yangi, samarador texnologiya qo'llanilsa, a_{ij}-koeffitsientlar shunchalik kichik, sarf-xarajatlar shunchalik kam bo'lib, samaradorlik yuqori bo'ladi. Qaralayotgan davr ichida a_{ij} koeffitsientlarni o'zgarmas deb olib, ya'ni sarf-xarajatlarni yalpi xarajatlarga chiziqli bog'liq deb qaraymiz.

$$x_{ij} = a_{ij} \cdot x_j, \quad (i, j = 1,2,...,n)$$

Shu munosabat bilan ko'rilgan ko'p tarmoqli iqtisodiyot modelini chiziqli balans modeli deb ham nomlanadi. (1) tenglamalar sistemasi quyidagi ko'rinishga keladi.

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + y_i, \qquad i = 1,2,\cdots,n \qquad (9)$$

Endi quyidagi belgilashlarni kiritaylik,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}\ a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\ a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_{n1}\ a_{n2} \ldots a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

bu yerda A -texnologik matritsa, X -yalpi mahsulot vektori, Y - yakuniy mahsulot vektori deb nomlanadi. Bu belgilashlarga asosan (9) tenglikning quyidagi matritsa ko'rinishini hosil qilamiz.

$$X = AX + Y. \qquad \textbf{(10)}$$

Ko'p tarmoqli balansning asosiy masalasi berilgan yakuniy mahsulot vektori va bevosita xarajatlar matritsasi A- ga ko'ra X -yalpi mahsulot vektorini topishdan iborat bo'ladi, ya'ni (10) tenglamani noma'lum vektor X ga nisbatan yechish kerak. Buning uchun uni quyidagi ko'rinishga olib kelamiz $(E - A)X = Y$.

Agar det $(E - A) \neq 0$ bo'lsa, u holda teskari $(E - A)^{-1}$ matritsa mavjud bo'lib, yechim quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

$$X = (E - A)^{-1} Y \qquad \textbf{(11)}$$

$S = (E - A)^{-1}$ -matritsa bevosita xarajatlar matritsasi deb nomlanadi. Bu matritsaning iqtisodiy ma'nosini tushunish uchun $Y_i = (0, 0, \cdots, 1, \cdots 0)$, $(i = 1, 2, \cdots, n)$ i-o'rnida 1, qolgan joylarda 0 bo'lgan yakuniy mahsulot birlik vektorlarini qaraymiz.

Ularga mos keluvchi (11) tenglama yechimlari quyidagiga teng bo'ladi.

$$X_1 = \begin{pmatrix} s_{11} \\ s_{21} \\ \vdots \\ s_{n1} \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} s_{12} \\ s_{22} \\ \vdots \\ s_{n2} \end{pmatrix}, \ \ldots, \quad X_n = \begin{pmatrix} s_{1n} \\ s_{2n} \\ \vdots \\ s_{nn} \end{pmatrix}.$$

Demak, $S = (s_{ij})$ matritsaning s_{ij}-elementi i-tarmoqning j-tarmoq birlik yakuniy mahsuloti Y'_j ni, ishlab chiqarish uchun sarf qilinishi zarur bo'lgan mahsulot miqdori qiymatini bildiradi.

Qaralayotgan masalaning iqtisodiy ma'nosiga ko'ra, (11) tenglamada $y_i \geq 0, \ \left(i = \overline{1,n}\right)$, $a_{ij} \geq 0 \ \left(i, j = \overline{1,n}\right)$ bo'lib, tenglama yechimi uchun $x_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,n}\right)$ bo'lishi kerak. Bu holatni biz $Y \geq 0$, $A \geq 0$ va $X \geq 0$ deb belgilaymiz.

Agar istalgan $Y \geq 0$ vektor uchun $X \geq 0$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi (11) ning yechimi mavjud bo'lsa. $A \geq 0$ matritsa samarali matritsa deyiladi. Bu holda Leontev modeli ham samarali model deyiladi.

A matritsaning samarali bo'lishi uchun, bir nechta kriteriylar mavjud. Ulardan biri shundan iboratki, agar A matritsaning har bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan katta bo'lmay, hech bo'lmaganda biron–bir ustun elementlari yig'indisi 1 dan kichik bo'lsa, u holda A samarali matritsa bo'ladi, ya'ni:

$\max\limits_{j} \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} \leq 1$, bo'lib, shunday j_0 mavjudki, uning uchun $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij_0} < 1$ o'rinli bo'lsa, A-samarali matritsa bo'ladi.

Xulosa

Chiziqli tenglamalar sistemasi iqtisodning juda ko'p tarmoqlarida qo'llaniladi. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning ko'p usullari mavjud, lekin Gauss usuli universal usul hisoblanadi, chunki kengaytirilgan matritsa satrlari ustida elementar almashtirishlar bajarib, istalgan tenglama uchun, uning yechimi haqida aniq javobni olish mumkin.

Tayanch iboralar

Chiziqli tenglamalar sistemasi, chiziqli tenglamalar sistemasining yechimi, Kramer usuli, Gauss usuli, bir jinsli tenglama, kengaytirilgan matritsa, Kroneker- Kapelli teoremasi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli tenglamalar sistemasi deb qanday sistemaga aytiladi?
2. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Kramer usuli.
3. Chiziqli tenglamalar sistemasini yechishning Gauss usuli.
4. Kroneker- Kapelli teoremasi.
5. Qaysi hollarda yagona yechim, qaysi hollarda cheksiz ko'p yechim bo'ladi?
6. Balans modeli nima?

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.

11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma'ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

4-bob. CHIZIQLI FAZO ELEMENTLARI

4.1. Chiziqli fazo va uning o'lchovi.

Chiziqli fazo tushunchasi matematikadagi asosiy tushunchalardan biri bo'lib, iqtisodda ham muhim ahamiyatga ega.

1-ta'rif. Agar bo'sh bo'lmagan L-to'plamning istalgan x, y, z elementlari va λ son uchun qo'shish- $x + y \in L$, songa ko'paytirish- $\lambda x \in L$ aniqlangan bo'lib, bu amallar uchun quyidagi xossalar o'rinli bo'lsa,

1. $x + y = y + x$ (qo'shish amalining kommutativligi);
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$ (qo'shishning assostiativligi);
3. L da shunday 0 (nol) element mavjudki, istalgan $x \in L$ uchun $x + 0 = x$;
4. Har bir $x \in L$ uchun, L da shunday - x elementi mavjudki, uning uchun $x + (-x) = 0$;
5. α va β sonlar va $x \in L$ uchun $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6. $1 \cdot x = x$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;

u holda u chiziqli yoki vektor fazo deyilib, uning elementi vektor deyiladi.

Yuqoridagi ta'rifda songa ko'paytirish amali deganda ikki holatni farqlash kerak. Agar ta'rifdagi sonlar haqiqiy sonlar to'plami $R = (-\infty, +\infty)$ dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo haqiqiy chiziqli fazo deyiladi, agarda bu sonlar kompleks sonlar to'plami C dan olingan deb qaralsa, bunday chiziqli fazo kompleks chiziqli fazo deyiladi.

$\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazislar berilgan bo'lsin, u holda $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ lar uchun

$$\ell_1^* = a_{11}\ell_1 + a_{12}\ell_2 + \cdots + a_{1n}\ell_n$$

$$\ell_2^* = a_{21}\ell_1 + a_{22}\ell_2 + \cdots + a_{2n}\ell_n$$

$$-----------------$$

$$\ell_n^* = a_{n1}\ell_1 + a_{n2}\ell_2 + \cdots + a_{nn}\ell_n$$

tengliklarni hosil qilamiz, bu yerda

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------ \\ a_n & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix}$$

matritsa $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazisdan $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazisga o'tish matritsasi deyiladi. Shuni ta'kidlaymizki, A matritsa xos bo'lmagan matritsa bo'ladi, shuning uchun unga teskari A^{-1} matritsa mavjud bo'lib, bu matritsa $\ell_1^*, \ell_2^*, \cdots, \ell_n^*$ bazisdan $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ bazisga o'tish matritsasi bo'ladi.

Endi berilgan vektorning turli bazislardagi koordinatalari orasidagi bog'lanishni qaraymiz, $x \in L$ vektor uchun

$$X = x_1\ell_1 + x_2\ell_2 + \ldots + x_n\ell_n = x_1^*\ell_1^* + x_2^*\ell_2^* + \ldots + x_n^*\ell_n^*$$

bo'lsin, u holda

$$\mathrm{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad X^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \\ \vdots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

deb belgilasak, quyidagi tengliklarni hosil qilamiz: $\mathrm{X} = \mathrm{A}'\mathrm{X}^*$ *ёки* $\mathrm{X}^* = \left(A^{-1}\right)'\mathrm{X}$ bu yerda $\mathrm{A}' - \mathrm{A}$ matritsaning transponirlangan matritsasidir.

n o'lchovli chiziqli fazoga misol keltiramiz. Elementlari tartiblangan n ta haqiqiy sonlar majmuasidan iborat bo'lgan

$$R^n = \left\{x : x = (x_1, x_2, \cdots, x_n), \quad x_i \in (-\infty, +\infty), \quad i = \overline{1, n}\right\}$$

to‘plamda $x=(x_1, x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ va $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in R^n$ lar uchun qo‘shish:

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$ va λ songa ko‘paytirish amalini: $\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,\ldots,\lambda x_n)$ kiritsak, bu amallar chiziqli fazo ta'rifidagi 1-8 xossalarni qanoatlantiradi. Demak, R^n kiritilgan amallarga nisbatan chiziqli fazoni tashkil etar ekan. Bundan tashqari

$$\ell_1=(1,\quad 0,\cdots,0)$$
$$\ell_2=(0,\quad 1,\cdots,0)$$
$$-----------$$
$$\ell_n=(0,\quad 0,\cdots,1)$$

birlik vektorlar sistemasi R^n da bazisni tashkil etadi, chunki $\forall x=(x_1,\ x_2,\cdots,\ x_n)\in R^n$ vektorni $x=x_1\ell_1+x_2\ell_2+\cdots+x_n\ell_n$ ko‘rinishda ifodalash mumkin.

4.2. Evklid fazolari. Chiziqli operatorlar

6-ta'rif. Agar L chiziqli fazo berilgan bo‘lib, $\forall x,y\in L$ elementlar uchun shunday $(x;y)$ son mos qo‘yilgan bolsa va u quyidagi xossalarni qanoatlantirsa:

1. $(x,y)=(y,x),(x,y\in L)$;
2. $(x,y+z)=(x,y)+(x,z),(x,y,z\in L)$;
3. $(\alpha x,y)=\alpha(x,y),(\alpha\in R,\ x,y\in L)$;
4. $(x,x)\geq 0$ va faqat $x=0(x\in L)$ bo‘lganda $(x;x)=0$,

U holda bu chiziqli fazoda skalyar ko‘paytma aniqlangan deyiladi.

Skalyar ko‘paytma kiritilgan chiziqli fazo evklid fazosi deyiladi.

Skalyar ko‘paytma yordamida vektorning normasi (uzunligi) tushunchasini kiritish mumkin. x vektorning uzunligi (normasi) $|x|$ deb, quyidagicha aniqlangan songa aytiladi.

$$|x|=\sqrt{(x,x)}$$

Norma quyidagi xossalarga ega bo'ladi.

1. $|x| = 0$ faqat va faqat shu holdaki, agar $x = 0$, bo'lsa.

2. Istalgan λ son uchun $|\lambda x| = |\lambda| \cdot |x|$

3. $|(x, y)| \le |x| \cdot |y|$-Koshi-Bunyakovskiy tengsizligi

4. $|x + y| \le |x| + |y|$ uchburchak tengsizligi

Ikkita x va y vektorlar orasidagi burchak ϑ quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\cos\vartheta = \frac{(x, y)}{|x| \cdot |y|}, \text{ bu yerda } 0 \le \vartheta \le \pi \text{ deb qaraladi.}$$

Normaning 1-va 2-xossalari to'g'ridan-to'g'ri skalyar ko'paytma ta'rifidan kelib chiqadi. 3- va 4-xossalarini isbot qilaylik. Skalyar ko'paytmaning ta'rifiga va 1-,2-xossalariga ko'ra quyidagilarni hosil qilamiz.

$$0 \le (x + \alpha y,\ x + \alpha y) = (x, x) + 2\alpha(x, y) + \alpha^2 (y, y);$$

bu yerda $\alpha = -\dfrac{(x, y)}{(y, y)}$ deb olsak, quyidagi hosil bo'ladi.

$$0 \le (x,x) - 2\cdot\frac{(x,y)^2}{(y,y)} + \frac{(x,y)^2 \cdot (y,y)}{(y,y)^2} = |x|^2 - \frac{(x,y)^2}{|y|^2} \Rightarrow (x,y)^2 \le |x|^2 \cdot |y|^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(x,y)| \le |x| \cdot |y|$$

Demak, Koshi –Bunyakovskiy tengsizligi isbot bo'ldi. Endi 4-xossa Koshi-Bunyakovskiy tengsizligidan kelib chiqadi:

$$|x + y|^2 = (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \le |x|^2 + 2 \cdot |x| \cdot |y| + |y|^2$$

$$\Rightarrow |x + y| \le |x| + |y|$$

Agar x va y vektorlar orasidagi burchak $\dfrac{\pi}{2}$ ga teng bo'lsa, ya'ni $(x, y) = 0$ bo'lsa, u holda ular ortogonal vektorlar deyiladi.

Agarda n o'lchovli evklid fazosidagi $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ vektorlar uchun $(\ell_i, \ell_j) = 0$ $i \ne j$ bo'lib, $|\ell_i| = 1$, $i = 1, 2, \ldots, n$, bo'lsa, u holda ular bu fazoning ortonormal bazisi deyiladi.

3-teorema. Har qanday n o'lchovli L evklid fazosida ortonormal bazis mavjuddir.

Isbot. $f_1, f_2, \cdots, f_n$ vektorlar L Evklid fazosidagi bazis bo'lsin, shu bazis asosida biz ortonormal bazisni hosil qilamiz. 1-qadamda $\ell_1 = \frac{f_1}{|f_1|}$ deb olamiz, tabiiy $|\ell_1| = 1$ bo'ladi.

2-qadamda $f_2^* = \lambda_1 \ell_1 + f_2$ vektor uchun $\lambda_1$ni shunday tanlaymizki, $(f_2^*, \ell_1) = 0$ bo'lsin, ya'ni $o = (f_2^*, \ell_1) = \lambda_1 (f_1, \ell_1) + (f_2, \ell_1) = \lambda_1 + (f_2, \ell_1)$ demak, $\lambda_1 = -(f_2, \ell_1)$ deb olsak $(f_2^*, \ell_1) = 0$ bo'lar ekan, endi $\ell_2 = \frac{f_2^*}{|f_2^*|}$ deb olsak, $|\ell_2| = 1$ va $(\ell_1, \ell_2) = 0$ bo'ladi.

$k < n$ uchun $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k$ ortonormal vektorlar hosil qilingan bo'lsin, $k+1$ qadamda $f_{k+1}^* = \lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \cdots + \lambda_k \ell_k + f_{k+1}$ vektor uchun $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ sonlarni shunday tanlaymizki $(\ell_i, f_{k+1}^*) = 0, i = \overline{1,k}$ tengliklar o'rinli bo'lsin, buning uchun $\lambda_i = -(f_{k+1}, \ell_i)$, $i = 1, 2, \ldots, k$ deb olish yetarlidir. Agar biz $\ell_{k+1} = \frac{f_{k+1}^*}{|f_{k+1}|}$ deb olsak, $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_k, \ell_{k+1}$ ortonormal sistemani tashkil qiladi. Natijada n ta qadamdan so'ng $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ ortonormal sistema hosil bo'ladi. Istalgan ortonormal sistema chiziqli erkli bo'ladi, chunki agar $\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \cdots + \lambda_i \ell_i + \cdots + \lambda_n \ell_n = 0$ bo'lsa, u holda istalgan $i = 1, 2, \ldots, n$ uchun

$$(\lambda_1 \ell_1 + \lambda_2 \ell_2 + \cdots + \lambda_i \ell_i + \cdots + \lambda_n \ell_n, \ell_i) = \lambda_i (\ell_i, \ell_i) = \lambda_i = 0$$

ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ chiziqli erkli ekan, L fazo n o'lchovli bo'lgani uchun $\ell_1, \ell_2, \cdots, \ell_n$ ortonormal bazis ekanligi kelib chiqadi.

Evklid fazosiga misol tariqasida chiziqli n o'lchovli fazo R^n ni keltirish mumkin. R^n da $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ va $y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi deb quydagini olamiz:

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Kiritilgan skalyar ko'paytma 6-ta'rifdagi barcha xossalarni qanoatlantiradi. R^n da kiritilgan skalyar ko'paytmaga mos ravishda $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R^n$ vektorning normasi quyidagicha aniqlanadi:

$$|x|=\sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$$

R^n Evklid fazoda $\ell_1=(1,0,\ldots,0)$, $\ell_2=(0,1,\ldots,0),\cdots,\ell_n=(0,0,\ldots,1)$ vektorlar ortonormal bazisni tashkil etadi.

7-ta'rif Agar L_1 chiziqli fazoning har bir elementi $x\in L_1$ uchun biron qoida, qonunga asosan L_2 chiziqli fazoning aniq elementi mos qo'yilgan bo'lsa, L_1 ni L_2 ga akslantiruvchi operator berilgan deyiladi. Bu operatorni A deb belgilab, akslantirishni $A:L_1\to L_2$ shaklda ifoda etiladi, bu akslantirishda x ning y ga mos kelishi $Ax=y$ kabi yoziladi.

8-ta'rif. Agar istalgan $x\in L_1, y\in L_1$ va λ son uchun

$$A(x+y)=Ax+Ay$$

$$A(\lambda x)=\lambda Ax$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $A:L_1\to L_2$ operator chiziqli operator deyiladi.

$A:L_1\to L_2$ va $B:L_2\to L_3$ chiziqli operatorlar bo'lsa, A va B operatorlarning ko'paytmasi (yoki kompozitsiyasi) deb ushbu $(AB)(x)=A(Bx)$ ko'rinishda aniqlangan operatorga aytiladi. Bu yerda $AB:L_1\to L_3$ va $C=AB$ chiziqli operatordir.

Agar $A:L\to L$ va $B:L\to L$ chiziqli operatorlar bo'lsa, bunday operatorlar uchun $A+B$, $\lambda\cdot A$ va $A\cdot B$ chiziqli operatorlarni aniqlashimiz mumkin bo'ladi. L chiziqli fazoning o'zini-o'ziga akslantiruvchi barcha chiziqli operatorlar to'plamini $\Im(L)$ deb belgilaymiz, operatorlarni qo'shish va songa ko'paytirishga nisbatan $\Im(L)$ to'plam chiziqli fazoni tashkil etadi.

9-ta'rif. Agar $A\in\Im(L)$ operator uchun shunday λ son mavjud bo'lib, x vektor uchun

$$Ax=\lambda x,\quad x\neq 0$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x vektor A operatorning xos vektori, λ esa uning hos soni deyiladi.

$A:R^n\to R^m$ chiziqli operator bo'lsin. Biz A operatorning matritsa ko'rinishini hosil qilamiz. Buning uchun R^n da $\ell_1,\ell_2,\ldots,\ell_n$ va R^m da esa $\ell_1^*,\ell_2^*,\ldots,\ell_m^*$ bazislarni olaylik. $x\in R^n, Ax=y\in R^m, A\ell_i\in R^m$ uchun ushbu tengliklarni yoza olamiz:

$$x=x_1\ell_1+x_2\ell_2+\cdots+x_n\ell_n$$

$$Ax=y=y_1\ell_1^*+y_2\ell_2^*+\cdots+y_m\ell_m^*$$

$$A\ell_j=a_{1j}\ell_1^*+a_{2j}\ell_2^*+\cdots+a_{mj}\ell_m^*,\ j=1,2,\ldots,n$$

Bu yerdan quyidagilarni hosil qilamiz:

$$Ax=\sum_{j=1}^{n}x_jA\ell_j=\sum_{j=1}^{n}x_j\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\ell_i^*=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)\ell_i^*$$

$$Ax=y=\sum_{i=1}^{m}y_i\ell_i^*$$

demak, $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j,\quad i=1,2,\ldots,m$

tengliklar hosil bo'ladi. Agar biz ushbu matritsalarni kiritsak,

$$\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ - - - & - - - \\a_{m1} & a_{m2}\cdots a_{mn}\end{pmatrix},$$

u holda yuqoridagi tengliklarni quyidagicha yozishimiz mumkin:

$$AX=Y$$

bu yerda A matritsa qaralayotgan A operatorning berilgan bazislardagi matritsasi deyiladi. $A\in\Im(R^n)$ bo‘lsin, u holda bunday operatorga mos keladigan matritsa kvadratik matritsa bo‘ladi.

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\ldots a_{1n}\\a_{21} & a_{22}\ldots a_{2n}\\ - - - & - - - \\a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}\end{pmatrix}$$

$x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in R^n$ vektor A chiziqli operatorning λ xos soniga mos keluvchi xos vektor, ya'ni $Ax=\lambda x$ bo‘lsin.

Agar $\mathrm{X}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ vektor matritsa bo‘lsa, u holda ushbu tenglik hosil bo‘ladi

$$AX=\lambda\mathrm{X}.$$

Bu yerdan E birlik matritsa uchun, quyidagi $(A-\lambda E)\mathrm{X}=0$ tenglikni yoza olamiz. Bu bir jinsli tenglamalar sistemasi har doim nol $x=0$ yechimga ega. U noldan farqli yechimga ega bo‘lishi uchun, ya'ni xos vektorning mavjud bo‘lishi uchun $|A-\lambda E|=0$ bo‘lishi, ya'ni

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12}\cdots a_{1n}\\a_{21} & a_{22}-\lambda\cdots a_{2n}\\ - - - - - & - - - - - \\a_{n1} & a_{n2}\ldots a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0$$

ekanligi zarur va yetarlidir. Bu determenant λ ga nisbatan n-tartibli ko'phaddan iborat bo'ladi, uni A operatorning yoki A matritsaning xarakteristik ko'phadi, (1) tenglama A operatorning (matritsaning) xarakteristik tenglamasi deyiladi. Shuni ta'kidlash lozimki, xarakteristik ko'phad qaralayotgan bazisga bog'liq bo'lmaydi.

A operator n ta chiziqli erkli $\ell_1,\ell_2,...,\ell_n$ xos vektorlarga ega bo'lib, $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_n$ xos sonlari bo'lsin, u holda A operatorning $\ell_1,\ell_2,...,\ell_n$ bazisga mos keluvchi A matritsasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

ya'ni A matritsa diagonal matritsa bo'lar ekan.

Aksincha, biron-bir bazisda A operator matritsasi dioganal ko'rinishga ega bo'lsa, u holda bu bazis vektorlari A operatorning xos vektorlari bo'lib, matritsa dioganallaridaga sonlar uning xos sonlaridan iborat bo'ladi.

Agar A operator n ta turli xos sonlarga ega bo'lsa, u holda ularga mos keluvchi xos vektorlar chiziqli erkli bo'lib, shu vektorlar hosil qilgan bazisda A operator matritsasi diogonal ko'rinishga ega bo'ladi.

4.3. Kvadratik formalar

Turli amaliy masalalarni yechishda kvadratik formalar hosil bo'lib, ularni o'rganishga to'g'ri keladi.

10-ta'rif. n ta o'zgaruvchining kvadratik formasi deb

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\,x_i x_j$$

tenglik orqali aniqlangan f funksiyaga aytiladi.

Bu yerda a_{ij}-lar kvadratik formaning koeffitsientlari deyiladi. Ular haqiqiy sonlar bo'lib, $a_{ij}=a_{ji}$ shartlarni qanoatlantiradi. Shu koeffitsientlar yordamida tuzilgan

$A=(a_{ij})$ $(i,j=1,2,\dots,n)$ matritsa kvadratik formaning matritsasi deyiladi, $a_{ij}=a_{ji}$ shart bajarilgani uchun bunday matritsalarni simmetrik matritsalar ko'rinishida ifoda qilish mumkin:

$$f(X)=X'AX \tag{3}$$

bu yerda $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ - matritsa ustundan iboratdir.

$C=(c_{ij})(i,j=1,2,\dots,n)$ n-tartibli xos bo'lmagan matritsa bo'lib, $X=(x_1,x_2,\dots,x_n)'$ va $Y=(y_1,y_2,\dots,y_n)'$ lar $X=CY$ tenglik orqali bog'langan bo'lsin. U holda (3) tenglikdan quyidagilarni hosil qilamiz,

$$f=X'AX=(CY)'A(CY)=(Y'C')A(CY)=Y'(C'AC)Y=Y'A^{*}Y$$

Demak, $X=CY$ xos bo'lmagan chiziqli almashtirishda f kvadratik formaga mos keluvchi matritsa quyidagicha bo'lar ekan

$$A^{*}=C'AC$$

Agarda barcha $i\neq j$ lar uchun $a_{ij}=0$ bo'lsa, ya'ni $f=a_{11}x_1^2+a_{22}x_2^2+\dots+a_{nn}x_n^2=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}x_i^2$ ko'rinishda bo'lsa, demakki kvadratik formaning matritsasi diagonal ko'rinishda bo'lsa u holda $f=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$ forma kanonik kvadratik forma deyiladi.

Quyidagi teoremalar o'rinlidir:

4-teorema. Istalgan kvadratik formani xos bo'lmagan chiziqli almashtirish yordamida kanonik ko'rinishga olib kelish mumkin.

Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi koeffitsientlari ma'nosida yagona bo'lmaydi. Lekin quyidagi teorema o'rinlidir:

5-teorema. (Kvadratik forma uchun inertsiya qonuni). Kvadratik formaning barcha kanonik ko'rinishlaridagi musbat va manfiy hadlari soni bir xil bo'ladi.

Kvadratik formaga mos keluvchi matritsaning rangi shu kvadratik formaning rangi deb atalib, kvadratik formaning kanonik ko'rinishdagi noldan farqli koeffitsientlar soniga teng bo'lib, yuqoridagi teoremaga ko'ra kvadratik formaning barcha xos bo'lmagan chiziqli almashtirishlari uchun uning rangi o'zgarmas bo'ladi.

Agarda barcha $(x_1, x_2, \dots, x_n) \neq (0, 0, \dots, 0)$ uchun $f(x_1, x_2, \dots, x_n) > 0 (f(x_1, x_2, \dots, x_n) < 0)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan deyiladi.

6-teorema. $f = X'AX$ kvadratik forma musbat aniqlangan bo'lishi uchun A matritsaning barcha bosh minorlari musbat bo'lishi zarur va yetarlidir, ya'ni

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2i} \\ \hline \\ a_{i1} & a_{i2} \cdots a_{ii} \end{vmatrix} > 0, \ i = 1, 2, \cdots, n$$

bo'lishi zarur va yetarlidir.

Kvadratik forma manfiy aniqlangan bo'lishi uchun esa $(-1)^i \Delta_i > 0, \ i = 1, 2, \dots, n$ shartning bajarilishi zarur va yetarlidir.

4.4. Iqtisodda chiziqli modellar

Matritsaning xos vektori va xos sonini topishga olib keladigan iqtisodiy jarayonning matematik modeli sifatida xalqaro savdo modelini keltirish mumkin.

$S_1, S_2, \cdots, S_n$ n-ta mamlakat bo'lib, ularning milliy daromadlari mos ravishda $x_1, x_2, \dots, x_n$ larga teng bo'lsin. a_{ij} - S_j-mamlakatning S_i-mamlakatdan sotib olgan tovarlarga sarf qilgan milliy daromadning ulushi bo'lsin. Milliy daromad to'laligicha mamlakat ichida va boshqa mamlakatlardan tovar xaridi uchun sarf bo'ladi deb hisoblaymiz, ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Quyidagi matritsani qaraylik

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \cdots a_{2n} \\ ------- \\ a_{n1} & a_{n2} \cdots a_{nn} \end{pmatrix},$$

bu matritsa savdo-sotiqning strukturaviy matritsasi deb nomlanadi. Istalgan S_i $(i = \overline{1,n})$ mamlakat uchun ichki va tashqi savdodan hosil bo'lgan tushumi $P_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n$ tenglik orqali aniqlanadi. Mamlakat olib borayotgan savdo-sotiqning muvozanatda bo'lishi uchun har bir mamlakat savdosi kamomadsiz bo'lishi kerak, ya'ni har bir mamlakat savdosidan hosil bo'lgan tushum uning milliy daromadidan kam bo'lmasligi kerak. Ya'ni

$$P_i \geq x_i, \quad i = \overline{1,n}$$

Agar $P_i > x_i$ deb faraz qilsak, u holda quyidagini hosil qilamiz:

$$Pi = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k > x_i, \quad i = \overline{1,n}$$

bu yerdan

$$\sum_{i=1}^{n} P_i > \sum_{i=1}^{n} x_i,$$

ya'ni

$$\sum_{i=1}^{n} P_i = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ik} \right) x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k > \sum_{k=1}^{n} x_i$$

ekanligi kelib chiqadi, bu esa qarama-qarshilikdir. Demak, $P_i \geq x_i$ tengsizlik o'rniga $P_i = x_i$ tenglik o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Iqtisodiy nuqtai nazardan bu tushunarli holatdir, chunki mamlakatlarning barchasi bir paytda foyda ko'rolmaydi.

Mamlakatlar milliy daromadi uchun $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ vektorni kiritsak

u holda $P_i = x_i$, ya'ni $\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = x_i$, $i = \overline{1,n}$ tengliklardan quyidagi tenglamani hosil qilamiz: $\mathrm{AX} = \mathrm{X}$, ya'ni, qaralayotgan masala A matritsaning $\lambda = 1$ xos soniga mos keladigan xos vektorini topish masalasiga kelar ekan.

Xulosa

Ko'pgina iqtisodiy masalalarning matematik modeli chiziqli modellarga keltirilishi sababli, chiziqli fazo elementlari iqtisodda o'zining muhim o'rnini egallagan. Chiziqli fazo bilan Evklid fazosining farqi shundan iboratki, Evklid fazosida ikkita elementning skalyar ko'paytmasi tushunchasi kiritilib, to'rtta aksiomani qanoatlantirishi talab qilinadi.

Tayanch iboralar

Chiziqli fazo, o'lchov, skalyar ko'paytma, chiziqli erkli va bog'liq vektorlar, bazis, ortonormal bazis, chiziqli operator, kvadratik forma, kvadratik formaning kanonik ko'rinishi.

Takrorlash uchun savollar

1. Chiziqli fazo nima?
2. Chiziqli erkli va chiziqli bog'liq vektorlarning ta'rifini keltiring.
3. Chiziqli fazo o'lchami nima?
4. Bazis nima?
5. Evklid fazo ta'rifini keltiring.
6. Koshi-Bunyakovskiy, uchburchak tengsizliklarini keltiring.
7. Chiziqli operator nima?
8. Kvadratik forma nima?

9. Kvadratik formaning kanonik ko'rinishi qanday bo'ladi?
10. Xalqaro cavdo modelini tushuntiring?

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

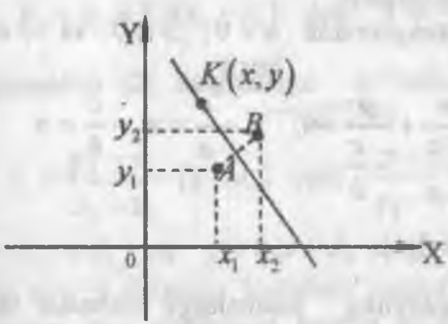
5-bob. ANALITIK GEOMETRIYANING ASOSIY TUSHUNCHALARI

5.1.Tekislikda egri chiziq tenglamasi. Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasi, parallellik va perpendikulyarlik shartlar.
5.2.Aylana, ellips, giperbola va parabola
5.3. Tekislik va to'g'ri chiziqning fazodagi tenglamalari.

5.1.Tekislikda to'g'ri chiziq tenglamasi, parallellik va perpendikulyarlik shartlari

1-ta'rif. OXY Dekart koordinatalari kiritilgan tekislikda yotgan egri chiziq tenglamasi deb, bu egri chiziqda yotuvchi nuqtalar koordinatalari x va y ni bog'lovchi tenglamaga aytiladi. Umumiy holda egri chiziq tenglamasi $F(x,y)=0$ ko'rinishda, mumkin bo'lgan hollarda $y=f(x)$ yoki $x=\varphi(y)$ oshkor ko'rinishdagi tengliklar orqali beriladi. Bu yerda $F(x,y)$, $f(x)$ va $\varphi(y)$ funksiyalar egri chiziqni aniqlovchi qonun-qoidalarni ifoda etadilar.

Endi berilgan $A(x_1,y_1)$ va $B(x_2,y_2)$ nuqtalardan bir xil masofada yotuvchi nuqtalarning geometrik o'rnini ifoda etuvchi tenglamani topaylik.



$K(x,y)$ nuqta A va B nuqtalardan bir xil masofada yotsin, u holda

$$KA=\sqrt{(x-x_1)^2+(y-y_1)^2}=\sqrt{(x-x_2)^2+(y-y_2)^2}=KB$$

$$x^2-2xx_1+x_1^2+y^2-2yy_1+y_1^2=x^2-2xx_2+x_2^2+y^2-2yy_2+y_2^2$$
$$(2x_2-2x_1)x+(2y_2-2y_1)y+(x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2)=0$$
bu yerda $2x_2-2x_1=a,\ 2y_2-2y_1=b,\ x_1^2+y_1^2-x_2^2-y_2^2=c$ belgilashlarni kiritsak, quyidagi tenglama hosil bo'ladi

$$ax+by+c=0 \qquad (1)$$

bu tenglamada a,b,c lar o'zgarmas sonlardir. (1) tenglama to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Bu tenglamaning ayrim maxsus hollarini qaraymiz:

1) agar $c=0$ bo'lsa, $ax+by=0$ yoki $y=-\frac{a}{b}x$ $b\neq 0$, ya'ni to'g'ri chiziq koordinata boshidan o'tadi.

2) agar $b=0$ $a\neq 0$ bo'lsa, $x=-\frac{c}{a}=const$, ya'ni to'g'ri chiziq OY o'qqa parallel bo'ladi.

3) agar $a=0$ $b\neq 0$ bo'lsa, $y=-\frac{c}{b}=const$, ya'ni to'g'ri chiziq OX o'qqa parallel bo'ladi.

4) agar $b=0$ va $c=0$ bo'lsa $x=0$, ya'ni to'g'ri chiziq OY o'q bilan ustma-ust tushadi.

5) agar $b\neq 0$ $a=0$ va $c=0$ bo'lsa, $y=0$ to'g'ri chiziq OX o'q bilan ustma-ust tushadi.

Agar (1) tenglamada $a\neq 0$, $b\neq 0$ va $c\neq 0$ bo'lsa, quyidagini hosil qilamiz

$$ax+by=-c \Rightarrow \frac{x}{-\frac{c}{a}}+\frac{y}{-\frac{c}{b}}=1, \qquad -\frac{c}{a}=m, -\frac{c}{b}=n$$ deb

belgilasak $\frac{x}{m}+\frac{y}{n}=1$.

To'g'ri chiziqning kesmalarga nisbatan tenglamasini hosil qilamiz, bu yerda $|m|$ va $|n|$ berilgan to'g'ri chiziqning koordinata o'qlarini kesishidan hosil bo'lgan kesmalar uzunliklariga teng bo'ladi.

Agar (1) tenglamada $b \neq 0$ bo'lsa, uni quyidagi ko'rinishga olib kelish mumkin: $ax + by + c = 0 \Rightarrow y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$, bu yerda $-\frac{a}{b} = k, -\frac{c}{b} = d$ deb belgilash kiritib, $y = kx + d$ ko'rinishdagi tenglamani hosil qilamiz. Bu tenglama to'g'ri chiziqning burchak koeffitsientli tenglamasi deyiladi. Tenglamadagi k koeffitsient to'g'ri chiziqning OX o'qining musbat yo'nalish bilan hosil qilgan φ burchakning tangensiga teng, ya'ni $k = tg\varphi$

Endi $A(x_1, y_1)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topamiz, bunda burchak koeffitsienti k berilgan deb qaraladi. To'g'ri chiziq tenglamasini $y = kx + d$ ko'rinishda izlaymiz, u holda $y_1 = k \cdot x_1 + d$ tenglik o'rinli bo'ladi, ikkala tenglikni hadma-had ayirib quyidagini hosil qilamiz

$$y - y_1 = k \cdot (x - x_1) \qquad (2)$$

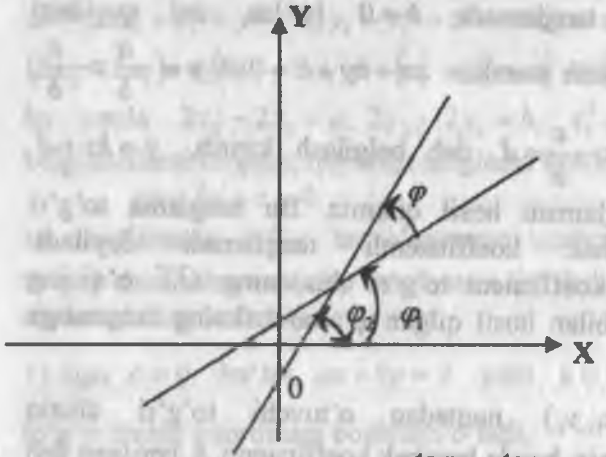
$A(x_1, y_1)$ va $B(x_2, y_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. (2) tenglamaga ko'ra, quyidagini hosil qilamiz,

$$y_2 - y_1 = k \cdot (x_2 - x_1) \text{ yoki } k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

k ning qiymatini (2) tenglamaga qo'ysak, quyidagini hosil qilamiz:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot (x - x_1) \text{ yoki } \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}.$$

$y = k_1 x + d_1$ va $y = k_2 x + d_2$ to'g'ri chiziqlar berilgan bo'lsin. Bu to'g'ri chiziqlar kesishish nuqtasi atrofida, birinchi to'g'ri chiziqni soat strelkasiga teskari yo'nalishda aylantirish natijasida to ikkinchi to'g'ri chiziq bilan ustma-ust tushguncha hosil bo'lgan burchak φ, ikki to'g'ri chiziq orasidagi burchak deyiladi.



$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 \Rightarrow tg\varphi = \frac{tg\varphi_2 - tg\varphi_1}{1 + tg\varphi_2 \cdot tg\varphi_1} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_2 \cdot k_1}$$

Agar $k_1 = k_2$ bo'lsa, $tg\varphi = 0$, ya'ni $\varphi = 0$ ekanligidan, to'g'ri chiziqlarning parallel ekanligi kelib chiqadi va aksincha, agar to'g'ri chiziqlar parallel, ya'ni $\varphi_2 = \varphi_1$ bo'lsa, $tg\varphi = 0$ va demak $k_2 = k_1$ ekanligi kelib chiqadi.

Demak, to'g'ri chiziqlarning parallelik sharti, $k_2 = k_1$ ekan.

Endi, agar to'g'ri chiziqlar uchun $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$, ya'ni $\varphi = \frac{\pi}{2}$ bo'lsa, u holda $\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \varphi_1$ va $tg\varphi_2 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right) = -ctg\varphi_1 = -\frac{1}{tg\varphi_1}$, $tg\varphi_2 \cdot tg\varphi_1 = -1$ ekan, demak, agar ikki to'g'ri chiziq o'zaro perpendikulyar bo'lsa $k_2 \cdot k_1 = -1$ tenglik o'rinli bo'lar ekan. Aksincha, agar $k_2 \cdot k_1 = -1$ bo'lsa, u holda $k_2 = -\frac{1}{k_1}$, ya'ni $tg\varphi_2 = -\frac{1}{tg\varphi_1} = -ctg\varphi_1 = tg\left(\frac{\pi}{2} + \varphi_1\right)$, demak $\varphi_2 - \varphi_1 = \frac{\pi}{2}$

bo'lar ekan, ya'ni to'g'ri chiziqlarning perpendikulyarlik sharti $k_2 \cdot k_1 = -1$ tenglik orqali berilar ekan.

To'g'ri chiziqlar umumiy ko'rinishda berilgan bo'lsin:

$$a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$a_2 x + b_2 y + c_2 = 0$$

U holda bu to'g'ri chiziqlarning parallellik sharti $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}$ tenglik orqali beriladi, ularning perpendikulyarlik sharti esa $a_1 \cdot a_2 + b_1 \cdot b_2 = 0$ tenglik bilan ifodalanadi.

Agar qaralayotgan to'g'ri chiziqlar parallel bo'lmasa,

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \end{cases}$$

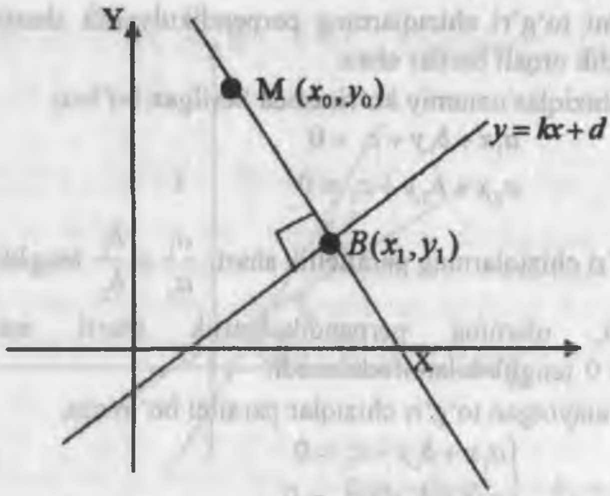
tenglamalar sistemasi yechimi shu to'g'ri chiziqlarning kesishish nuqtasidan iborat bo'ladi.

Endi berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofani topaylik. To'g'ri chiziq tenglamasini $y = kx + d$ ko'rinishga keltiramiz, $k = -\frac{a}{b}$, $d = -\frac{c}{b}$. Berilgan M nuqtadan o'tib $y = kx + d$ to'g'ri chiziqqa perpendikulyar bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'ladi: $y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0)$. Quyidagi sistemani yechamiz,

$$\begin{cases} y_1 = kx_1 + d \\ y_1 - y_0 = -\frac{1}{k}(x_1 - x_0) \end{cases} \Rightarrow kx_1 + d - y_0 = -\frac{1}{k}(x_1 - x_0) \Rightarrow k^2 x_1 - ky_0 + kd = -x_1 + x_0 \Rightarrow$$

$$x_1 = \frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} \Rightarrow y_1 = k \cdot \frac{x_0 + ky_0 - kd}{k^2 + 1} + d = \frac{kx_0 + k^2 y_0 - k^2 d + k^2 d + d}{k^2 + 1} =$$

$$= \frac{kx_0 + k^2 y_0 + d}{k^2 + 1}$$



Sistema yechimi (x_1, y_1) bilan aniqlanuvchi $B\ (x_1, y_1)$ nuqta va $M\left(x_0, y_0\right)$ nuqtalar orasidagi masofani topamiz:

$$MB=\sqrt{(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2}=\sqrt{\left(\frac{x_0+ky_0-kd}{k^2+1}-x_0\right)^2+\left(\frac{kx_0+k^2y_0+d}{k^2+1}-y_0\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{\left(x_0+ky_0-kd-k^2x_0-x_0\right)^2+\left(kx_0+k^2y_0+d-k^2y_0-y_0\right)^2}}{k^2+1}=\frac{\sqrt{(kx_0-y_0+d)^2(k^2+1)}}{k^2+1}=$$

$$\frac{|kx_0-y_0+d|}{\sqrt{k^2+1}}=\frac{\left|-\frac{a}{b}x_0-y_0-\frac{c}{b}\right|}{\sqrt{\left(-\frac{a}{b}\right)^2+1}}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}};$$

Demak, $M\left(x_0, y_0\right)$ nuqtadan $ax + by + c = 0$ to‘g‘ri chiziqqacha bo‘lgan masofani d deb belgilasak, ushbu

$$d=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

formulani hosil qilamiz.

5.2.Aylana, ellips, giperbola va parabola

2-ta'rif. Tekislikda berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqtadan bir xil R masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni aylana deyiladi. Berilgan $M(x_0, y_0)$ nuqta aylana markazi, R esa aylana radiusi deb ataladi.

Aylana tenglamasini topaylik. Aylana markazi $M(x_0, y_0)$ nuqtada bo'lib, uning radiusi R ga teng bo'lsin. $B(x, y)$ nuqta aylanada yotuvchi nuqta bo'lsin, u holda ta'rifga ko'ra aylana tenglamasi quyidagi

$$MB=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}=R \quad \text{yoki} \quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2 \qquad \textbf{(3)}$$

ko'rinishda bo'ladi. (3) tenglamada sodda almashtirishlarni bajarsak, aylana tenglamasini

$$x^2+y^2+mx+ny+p=0 \qquad \textbf{(4)}$$

ko'rinishga olib kelish mumkin. (4) ko'rinishdagi tenglamadan (3) ko'rinishdagi tenglamaga o'tish uchun, (4) da to'liq kvadratlarni ajratish kerak bo'ladi, u holda $m^2+n^2-4p>0$ shart asosida,

$$\left(x+\frac{m}{2}\right)^2+\left(y+\frac{n}{2}\right)^2-\frac{m^2+n^2-4p}{4}=R^2$$

tenglamani hosil qilamiz.

3-ta'rif. Ellips deb tekislikda berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar yig'indisi avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ta'rifdagi ikki nuqta ellipsining fokuslari deyilib, berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan katta bo'lishi kerak. Endi ta'rifdan foydalanib ellips tenglamasini hosil qilaylik. Soddalik uchun ellips fokuslari OX o'qda yotib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan deb olamiz. Ya'ni F_1 va F_2 lar ellipis fokuslari bo'lsa, ular $F_1(-c,0)$ va $F_2(c,0)$ $(c>0)$ ko'rinishda deb olamiz.

Agar ta'rifidagi o'zgarmas sonni *2a (a>0)* deb olsak, $2a>F_1F_2$, ya'ni $2a>2c$ yoki $a>c$ shart o'rinli bo'lishi kelib chiqadi. Agar $M(x,y)$ nuqta ellipsda yotsa, u holda ta'rifga ko'ra $MF_1+MF_2=2a$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak. Ya'ni

$$MF_1+MF_2=\sqrt{(x+c)^2+y^2}+\sqrt{(x-c)^2+y^2}=2a \Rightarrow \sqrt{(x+c)^2+y^2}=2a-\sqrt{(x-c)^2+y^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+c)^2+y^2=4a^2-4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}+(x-c)^2+y^2 \Rightarrow 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}=4a^2-4cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a^2\left[(x-c)^2+y^2\right]=(a^2-cx)^2 \Rightarrow a^2x^2-2a^2cx+a^2c^2+a^2y^2=a^4-2a^2cx+c^2x^2 \Rightarrow$$

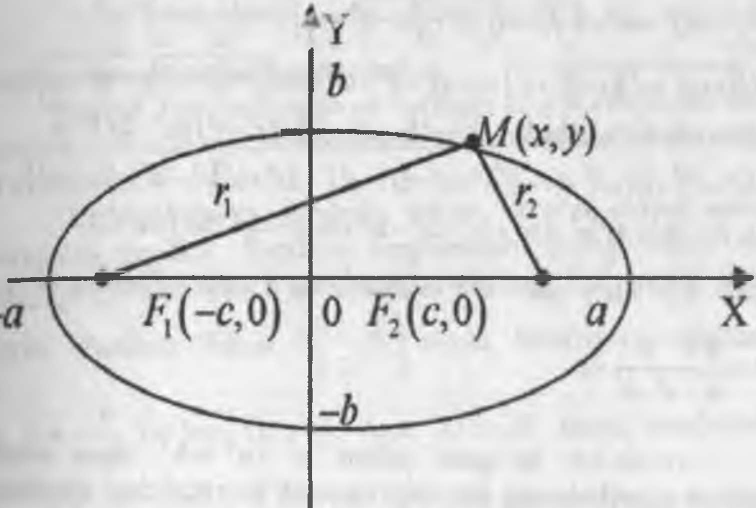
$$\Rightarrow (a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2) \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=1$$

$a>c$ bo'lgani uchun $a^2-c^2=b^2$ deya olamiz, u holda ellipsning ushbu kanonik tenglamasini hosil qilamiz,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (5)$$

(5) tenglama bilan berilgan ellips koordinata o'qlariga va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo'ladi. a va b musbat sonlar deb qaralib, ular ellipsning yarim o'qlari deyiladi. (5) tenglamani keltirib chiqarishda $a>b$ edi, shuning uchun uning fokuslari OX o'qida joylashgan bo'lib, fokuslar koordinata boshidan $c=\sqrt{a^2-b^2}$ masofada yotadi. $\frac{c}{a}=\varepsilon<1$ nisbat ellipsning ekstsentrisiteti deyiladi. Ellipsda yotgan $M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo'lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb nomlanib, ular quyidagi tenglik orqali topiladi: $r_1=a-\varepsilon x$, $r_2=a+\varepsilon x$.

Agar (5) tenglamada $a<b$ bo'lsa, ellips fokuslari OY o'qda joylashib, $c=\sqrt{b^2-a^2}$, $\varepsilon=\frac{c}{b}$, $r_1=b-\varepsilon y$, $r_2=b+\varepsilon y$ tengliklar o'rinli bo'ladi.



4-ta'rif. Giperbola deb berilgan ikki nuqtagacha bo'lgan masofalar ayirmasining moduli avvaldan berilgan o'zgarmas songa teng bo'lgan barcha nuqtalarning geometrik o'rniga aytiladi.

Ta'rifdagi ikki nuqta giperbolaning fokuslari deyilib, berilgan o'zgarmas son fokuslar orasidagi masofadan kichik bo'lishi kerak. Giperbola tenglamasini uning fokuslari OX o'qida yotib, koordinata boshiga nisbatan simmetrik joylashgan hol uchun hosil qilaylik. Giperbola fokuslari F_1, F_2 nuqtalarda bo'lsa, biror $c > o$ son uchun ular $F_1(-c,o)$ va $F_2(c,o)$ koordinatalarga ega bo'ladi. Agar giperbola ta'rifidagi o'zgarmas sonni $2a\,(a > o)$ deb olsak, u holda $2a < F_1F_2$, ya'ni $2a < 2c$, $a < c$ bo'lishi kerak. Agar $M(x,y)$ nuqta giperbolada yotsa, ta'rifga ko'ra $|MF_1 - MF_2| = 2a$, demak,

$$(MF_1-MF_2)^2=4a^2 \Rightarrow \left(\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}\right)^2=4a^2 \Rightarrow (x+c)^2+y^2-$$
$$-2\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}+(x-c)^2+y^2=4a^2 \Rightarrow 2\sqrt{\left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)}=$$
$$=2(x^2+y^2)+2(c^2-2a^2)\Rightarrow \left((x+c)^2+y^2\right)\left((x-c)^2+y^2\right)=\left((x^2+y^2)+(c^2-2a^2)\right)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (x^2-c^2)^2+\left((x+c)^2+(x-c)^2\right)y^2+y^4=(x^2+y^2)^2+2(x^2+y^2)(c^2-2a^2)+(c^2-2a^2)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(-2c^2-2c^2+4a^2)x^2+(2x^2+2c^2-2x^2-2c^2+4a^2)y^2=(c^2-2a^2)^2-c^4\Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4(a^2-c^2)x^2+4a^2y^2=4a^4-4a^2c^2\Rightarrow(a^2-c^2)x^2+a^2y^2=a^2(a^2-c^2)\Rightarrow\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2-c^2}=$$
$$=1\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{c^2-a^2}=1$$

$o<a<c$ bo‘lgani uchun $c^2-a^2=b^2$ deya olamiz, natijada giperbolaning quyidagi kanonik ko‘rinishdagi tenglamasi hosil bo‘ladi:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \qquad (6)$$

(6) tenglama ko‘rinishida berilgan giperbola koordinata o‘qlari va koordinata boshiga nisbatan simmetrik bo‘ladi. a va b parametrlar musbat son bo‘lib, a- haqiqiy yarim o‘q, b- mavhum yarim o‘q deb nomlanadi. Giperbola OX o‘qni giperbola uchlari deb ataluvchi $A_1(-a,o)$ va $A_2(a,o)$, nuqtalarda kesib o‘tadi. $c=\sqrt{a^2+b^2}$ son fokuslardan koordinata boshigacha bo‘lgan masofaga teng bo‘ladi. $\frac{c}{a}=\varepsilon>1$ nisbat giperbola ekstsentrisiteti deb nomlanadi. $y=\frac{b}{a}x$ va $y=-\frac{b}{a}x$ to‘g‘ri chiziqlar giperbola asimptotalari deyiladi. Giperbolada yotuvchi $M(x,y)$ nuqtadan fokuslargacha bo‘lgan masofalar fokal radius-vektorlar deb atalib, quyidagicha topiladi:

$$r_1=|\varepsilon x-a|, \qquad r_2=|\varepsilon x+a|$$

Agar (6) tenglamada $a=b$ bo‘lsa, bunday giperbola teng tomonli giperbola deyiladi, uning tenglamasi $x^2-y^2=a^2$, asimptotalari esa $y=\pm x$ ko‘rinishda bo‘ladi.

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \text{va} \quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1$$

o'zaro qo'shma giperbolalar deyiladi.

5-ta'rif. Berilgan nuqta va berilgan to'g'ri chiziqdan teng masofada yotuvchi barcha nuqtalarning geometrik o'rni parabola deb aytiladi.

Ta'rifdagi nuqta parabola fokusi, to'g'ri chiziq uning direktrisasi deyiladi. Parabola tenglamasini uning fokusi OX o'qda, direktrisasi OY o'qqa parallel bo'lgan hol uchun hosil qilaylik. Parabola fokusi $F\left(\frac{p}{2},0\right)$ nuqta, direktrisa tenglamasi esa $x=-\frac{p}{2}$ bo'lsin $(p>o)$. Agar $M(x,y)$ nuqta parabolada yotsa, u holda ta'rifga ko'ra $MF=\left|x+\frac{p}{2}\right|$ tenglik o'rinli bo'lishi kerak, ya'ni

$$\sqrt{\left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2}=\left|x+\frac{p}{2}\right| \Rightarrow \left(x-\frac{p}{2}\right)^2+y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow y^2=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2-\left(x-\frac{p}{2}\right)^2 \Rightarrow \qquad (7)$$

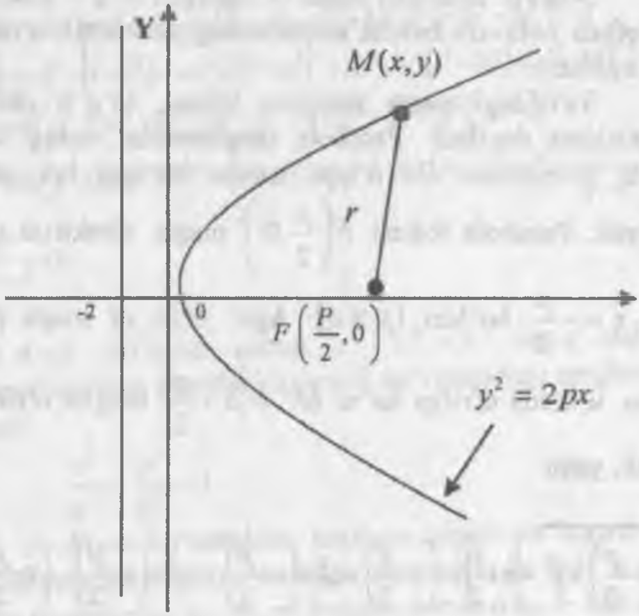
$$\Rightarrow y^2=2px$$

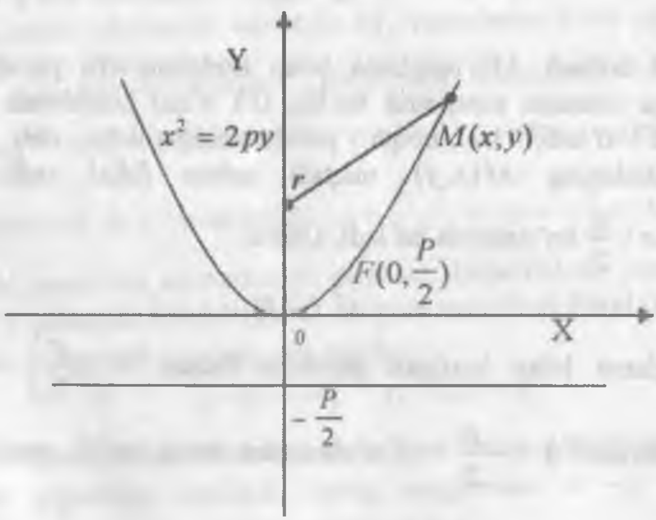
hosil bo'ladi. (7) tenglama bilan ifodalanuvchi parobola OX o'qqa nisbatan simmetrik bo'lib, OX o'qni koordinata boshida kesib o'tadi, bu nuqta parabolaning uchi deb ataladi. Parabolaning $M(x,y)$ nuqtasi uchun fokal radius-vektor $r=x+\frac{p}{2}$ ko'rinishda bo'ladi. Ushbu

$$x^2=2py \qquad (8)$$

tenglama bilan berilgan parabola fokusi $F\left(0;\frac{p}{2}\right)$ nuqtada, direktrisasi $y=-\frac{p}{2}$ to'g'ri chiziqdan iborat bo'lib, parabolaning

$M(x, y)$ nuqtasi uchun fokal radius-vektor $r = y + \frac{p}{2}$ ko'rinishda bo'ladi.





Agar x va y o'zgaruvchilar teskari proportsional ya'ni $y=\frac{m}{x}$ tenglik orqali bog'langan bo'lsa, sistemasi OXY koordinatalar bissektrisalarini, yangi koordinatalar $OX'Y'$ sistemasi sifatida qarasak, bu tenglama $(x')^2-(y')^2=m$ ko'rinishga keladi, bundan esa asimptotalari OX va OY o'qlardan iborat bo'lgan teng tomonli giperbola ekanligi kelib chiqadi. Agar $m>o$ bo'lsa giperbola I va III choraklarda, agar $m<o$ bo'lsa II va IV choraklarda joylashgan bo'ladi.

Endi kasr-chiziqli funksiyani qaraylik:

$$y=\frac{ax+b}{cx+d}$$

Bu yerda $c\neq o$ va $ad-bc\neq o$ deb olmadi. Kasr-chiziqli funksiya grafigi asimptotalari $x=-\frac{d}{c}$ va $y=\frac{a}{b}$ bo'lgan teng tomonli giperbola bo'ladi.

5.3. Tekislik va to'g'ri chiziqning fazodagi tenglamalari

Fazodagi $M(x_0,y_0,z_0)$ nuqtadan o'tuvchi,. $\vec{n}(A,B,C)$ vektorga perpendikulyar bo'lgan tekislik tenglamasini topaylik. Buning uchun shu tekislikda yotuvchi istalgan $B(x,y,z)$ nuqtani olsak, $\overline{MB}$ *вa* $\vec{n}$ vektorlar perpendikulyar, ya'ni ularning skalyar ko'paytmasi $\overrightarrow{MB}\cdot\vec{n}=0$ bo'lishi kerak. Demak, quyidagilar o'rinli bo'lar ekan:

$$\overrightarrow{MB}\cdot\vec{n}=A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$$

Agar qavslarni ochib, ifodani ixchamlasak quyidagi tenglama hosil bo'ladi,

$$Ax+By+Cz+D=0 \qquad \textbf{(9)}$$

Bu yerda $D=-(Ax_0+By_0+Cz_0)$. $\vec{n}(A,B,C)$ vektor tekislikning normal vektori deyiladi.

(9) tenglama tekislikning umumiy ko'rinishdagi tenglamasi deyiladi. Endi (9) tenglamaning ayrim maxsus ko'rinishlarini keltiramiz:

1. Agar $D=0$ bo'lsa, u holda $Ax+By+Cz=0$ tekislik koordinata boshidan o'tadi.
2. Agar $A=0$ bo'lsa, $By+Cz+D=0$ tekislik OX o'qqa parallel bo'ladi.
3. Agar $A=0, D=0$ bo'lsa, $By+Cz=0$ tekislik OX o'qdan o'tadi.
4. Agar $A=0$, $B=0$ bo'lsa, $Cx+D=0$ tekislik OXY tekislikka parallel bo'ladi.
5. Agar $A=0$, $B=0$, $D=0$ bo'lsa, $Cz=0$ (yoki $z=0$) tekislik OXY tekislik bilan ustma-ust tushadi. Ushbu

$$\begin{matrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{matrix} \qquad (10)$$

tekisliklarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari ularni aniqlaydigan $\overline{n_1}(A_1,B_1,C_1)$ va $\overline{n_2}(A_2,B_2,C_2)$ vektorlarning parallellik va perpendikulyarlik shartlari bilan bir xil bo'ladi, shuning uchun ular quyidagicha bo'ladi:

$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$ - tekisliklarning paralellik sharti,

$A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2+C_1\cdot C_2=0$ - tekisliklarning perpendikulyarlik sharti.

(9) tenglamada $D\neq 0$ bo'lganda tekislikning kesmalardagi tenglamasini keltirib chiqarish mumkin:

$$Ax+By+Cz=-D \Rightarrow \frac{x}{-\frac{D}{A}}+\frac{y}{-\frac{D}{B}}+\frac{z}{-\frac{D}{C}}=1 \text{ yoki } -\frac{D}{A}=a,\ -\frac{D}{B}=b,\ -\frac{D}{C}=c$$

deb belgilash kiritsak

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

tekislikning kesmalardagi tenglamasi hosil bo'ladi.

(10) tengliklar bilan berilgan ikki tekislik orasidagi φ burchak ularga perpendikulyar bo'lgan $\overline{n_1}(A_1, B_1, C_1)$ va

$\overrightarrow{n_2}(A_2, B_2, C_2)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi. Shuning uchun φ burchak quyidagi tenglikdan topiladi

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|\cdot\left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1\cdot B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2+B_1^2+C_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2+C_2^2}}.$$

$M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan $Ax + By + Cz + D = 0$ tekislikkacha bo'lgan masofa quyidagi formula orqali topiladi (masofa d bilan belgilangan):

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Bu formulaning isboti tekislikda avval ko'rilgan nuqtadan to'g'ri chiziqqacha bo'lgan masofa formulasining isboti kabi bo'ladi.

Endi $M(x_0, y_0, z_0)$ nuqtadan o'tib, $\vec{p}(m, n, k)$ vektorga parallel bo'lgan to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. Agar $B(x, y, z)$ nuqta qidirilayotgan to'g'ri chiziqda yotsa, u holda $\overrightarrow{MB}(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ vektor $\vec{p}$ vektorga parallel bo'lishi kerak, ya'ni quyidagi tenglama hosil bo'ladi:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{k} \qquad \textbf{(11)}$$

Bu tenglama fazodagi to'g'ri chiziqning kanonik ko'rinishdagi tenglamasi deb ataladi. Agar (11) da $\frac{z - z_0}{k} = t$ deb olsak, to'g'ri chiziqning quyidagi parametrik tenglamasini hosil qilamiz:

$$x = mt + x_0,$$
$$y = nt + y_0,$$
$$z = kt + z_0.$$

Agar (10) tengliklardagi tekisliklar parallel bo'lmasa, ular to'g'ri chiziq bo'yicha kesishadi, bu to'g'ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglamalar sistemasi orqali topiladi

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases} \qquad (12)$$

(12) sistema to'g'ri chiziqning umumiy tenglamasi deyiladi. Agar tenglamadan x va y ni z orqali topsak, u holda to'g'ri chiziqning proektsiyalardagi tenglamasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} x=mz+a \\ y=nz+b \end{cases}$$

Endi $\frac{x-a}{m}=\frac{y-b}{n}=\frac{z-c}{k}$ to'g'ri chiziq va $Ax+By+Cz+D=0$ tekislik orasidagi φ burchakni topaylik. $\frac{\pi}{2}-\varphi$ burchak $\bar{p}(m,n,k)$ va $\vec{n}(A,B,C)$ vektorlar orasidagi burchakka teng bo'ladi, u holda $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)=\sin\varphi$ bo'lgani uchun,

$$\sin\varphi=\frac{|Am+Bn+Ck|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\cdot\sqrt{m^2+n^2+k^2}}.$$

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning parallel bo'lishi uchun $\bar{p}$ va $\vec{n}$ vektorlar perpendikulyar bo'lishi kerak, ya'ni $Am+Bn+Ck=0$.

Berilgan to'g'ri chiziq va tekislikning perpendikulyar bo'lishi uchun $\bar{p}$ *ва* $\bar{n}$ vektorlar parallel bo'lishi kerak, ya'ni $\frac{A}{m}=\frac{B}{n}=\frac{C}{k}$.

To'g'ri chiziq bilan tekislikning kesishgan nuqtasini topish uchun, to'g'ri chiziqning parametrik tenglamasi va tekislikning umumiy tenglamasi orqali hosil bo'lgan sistemani yechish lozim, ya'ni

$$\begin{cases} x=mt+a \\ y=nt+b \\ z=kt+c \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

tenglamalar sistemasini yechish kerak.

Berilgan ikki $M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtadan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasini topaylik. Bu to'g'ri chiziq $M(x_1, y_1, z_1)$ nuqtadan o'tganligi uchun

$$\frac{x-x_1}{m}=\frac{y-y_1}{n}=\frac{z-z_1}{k} \qquad (13)$$

Endi bu to'g'ri chiziqning $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtadan ham o'tishini e'tiborga olsak,

$$\frac{x_2-x_1}{m}=\frac{y_2-y_1}{n}=\frac{z_2-z_1}{k}.$$

Natijada quyidagi tenglamani hosil qilamiz

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

Bu tenglama berilgan ikki $M(x_1, y_1, z_1)$ va $K(x_2, y_2, z_2)$ nuqtalardan o'tuvchi to'g'ri chiziq tenglamasidir.

Xulosa

Chiziq va sirt tushunchalari geometriyaning asosiy tushunchalari hisoblanadi. Ularni tashkil etuvchi nuqtalar biror qonuniyatga bo'ysunadi. Analitik geometriya bo'limida koordinatalar sistemasi usuli yordamida ma'lum qonuniyatlarga asosan ularning tenglamalari keltirib chiqariladi va tenglamalarni tahlil qilish bilan shu tenglamalar bilan aniqlagan ob'ektlar o'rganiladi.

Tayanch iboralar

Chiziq tenglamasi, to'g'ri chiziq, parallellik, perpendikulyarlik, burchak koeffitsienti, to'g'ri chiziqlar dastasi, kesmalarga nisbatan tenglama, to'g'ri chiziqlar orasidagi burchak, kesishish nuqtasi, aylana, ellips, giperbola, parabola, fokus, ekstsentrisitet, fokal radiuslar, tekislik tenglamasi, fazoda to'g'ri chiziq tenglamasi, yo'naltiruvchi vektor.

Takrorlash uchun savol va topshiriqlar

1.Tekislikda to‘g‘ri chiziq tenglamalarining qanday ko‘rinishlari mavjud?
2.To‘g‘ri chiziqlar orasidagi burchak qanday topiladi.?
3.Nuqtadan to‘g‘ri chiziqqacha masofa qanday topiladi.?
4.Aylana, ellips, giperbola, parabola ta'rifi.
5.Fazoda tekislik va to‘g‘ri chiziq tenglamalari.
6.Tekislik va to‘g‘ri chiziqlarning parallelik va perpendikulyarlık shartlari.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O‘zbekiston, 2001.
3.Jo‘rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O‘zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O‘qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М : ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma’ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G‘., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o‘quv qo‘llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to‘plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang‘ich моliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

2-bo‘lim

MATEMATIK ANALIZ

1-bob. LIMITLAR NAZARIYASI

1.1.Sonli ketma-ketliklar limiti.
1.2.Funksiya limiti.
1.3. Noaniqliklar.

1.1. Sonli ketma-ketliklar limiti

N - natural sonlar to‘plamida berilgan funksiya sonlar ketma-ketligi deb yuritiladi, ularni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ yoki $x_1, x_2, \dots, x_n \dots$ ko‘rinishlarda ifodalaymiz.

1-ta'rif. $\varepsilon > 0$ va a son uchun $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ interval a ning ε-atrofi deyiladi. Agar $a=o$ bo'lsa, $(-\varepsilon, \varepsilon)$ interval qisqacha ε-atrof deyiladi.

2-ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun, ε-atrofdan tashqarida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo‘lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik deyiladi. Bu hol

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

shaklda ifodalanib, n cheksizlikka intilganda x_n ketma-ketlikning limiti 0 ga teng yoki $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik 0 ga yaqinlashadi deb aytiladi.

2-ta'rifni unga teng kuchli bo‘lgan, o‘zgacha ko‘rinishda ham aytish mumkin. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ natural son mavjud bo‘lsaki, istalgan $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo‘lgan natural n son uchun $|x_n| < \varepsilon$ tengsizlik o‘rinli bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ deyiladi.

Endi cheksiz kichik ketma-ketlikka misollar keltiramiz.

1. $x_n = \dfrac{1}{n}$, $n = 1,2,\dots$ ketma–ketlikni qaraylik, agar $\varepsilon > 0$ bo‘lsa, $n < \dfrac{1}{\varepsilon}$ ya'ni $\dfrac{1}{n} > \varepsilon$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural

sonlar chekli bo'ladi, ya'ni $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ε-atrofdan tashqarida $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli hadi yotadi, demak,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

2. $|q| < 1$ bo'lsin, u holda $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, agar $q = 0$ bo'lsa $\lim_{n\to\infty} 0 = 0$ bo'lishi o'z - o'zidan ravshan. Agar $0 < |q| < 1$ bo'lsa, u holda $\varepsilon > 0$ son uchun quyidagini hosil qilamiz. $|q^n| = |q|^n > \varepsilon \Leftrightarrow n\, \ell n|q| > \ell n\varepsilon \Leftrightarrow n < \frac{\ell n\varepsilon}{\ell n|q|}$ (chunki $\ell n|q| < 0$).

Oxirgi tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural son chekli bo'ladi, ya'ni $(-\varepsilon, \varepsilon)$ ε-atrofdan tashqarida $\{q^n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli hadi yotadi, demak $q(|q| < 1)$ son uchun $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ bo'lar ekan.

3. $x_n = \frac{1}{n^\alpha}$, $\alpha > 0$, ketma-ketlikni qaraylik. $\alpha > 0$ ekanligidan $\varepsilon > 0$ son uchun $n^\alpha < \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow n < \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$ va bu tengsizlikni qanoatlantiruvchi natural sonlar chekli, ya'ni $\frac{1}{n^\alpha} > \varepsilon$ tengsizlik chekli natural son uchun o'rinli bo'lisidan istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun ε- atrofdan tashqarida $\left\{\frac{1}{n^\alpha}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli hadi yotar ekan. Demak, $\alpha > 0$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^\alpha} = 0.$$

Endi cheksiz kichik ketma-ketliklar xossalarini keltiramiz.

1) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$;

Biror $\varepsilon > 0$ son berilganda, shunday $n_1(\varepsilon)$ va $n_2(\varepsilon)$ natural sonlar mavjudki, $n \geq n_1$ bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{2} < x_n < \frac{\varepsilon}{2}$, $n \geq n_2(\varepsilon)$ bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{2} < y_n < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar o'rinli bo'ladi, agar $n \geq n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ deb olsak, u holda $-\frac{\varepsilon}{2} < x_n < \frac{\varepsilon}{2}$ va $-\frac{\varepsilon}{2} < y_n < \frac{\varepsilon}{2}$ tengsizliklar bir paytda o'rinli bo'ladi, ya'ni $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\varepsilon < x_n + y_n < \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = 0$ bo'ladi.

2) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lganda, istalgan α son uchun $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = 0$; Haqiqatan ham, agar $\alpha = 0$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} 0 \cdot x_n = 0$ ekanligi ravshan. Agar $\alpha \neq 0$ bo'lsa, u holda $\varepsilon > 0$ son uchun shunday $n_0(\varepsilon)$ natural son mavjudki, $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\frac{\varepsilon}{|\alpha|} < x_n < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda $n \geq n_0(\varepsilon)$ bo'lganda $-\varepsilon < \alpha x_n < \varepsilon$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha x_n = 0$.

3) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\lim y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$; chunki $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_1 *ва* n_2 natural sonlar mavjudki, barcha $n \geq n_1$ uchun $|x_n| < \sqrt{\varepsilon}$ va barcha $n \geq n_2$ uchun $|y_n| < \sqrt{\varepsilon}$ bo'ladi, u holda barcha $n \geq n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ *lar uchun* $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \sqrt{\varepsilon} \cdot \sqrt{\varepsilon}$, ya'ni $|x_n y_n| < \varepsilon$

Demak,

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = 0.$$

4) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsa, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik chegaralangan bo'ladi. Chunki $\varepsilon = 1$ son uchun shunday n_0 natural son mavjudki, istalgan $n \geq n_0$ uchun $|x_n| < 1$ o'rinli bo'ladi. Agar biz $K = \max\limits_{1\leq n<n_0}|x_n|$ deb olsak, istalgan natural n son uchun $|x_n| < K + 1$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chegaralangan ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi.

5) Agar $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ chegaralangan ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$, ya'ni $\{x_n y_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik ham cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi.

Haqiqatan ham $K > 0$ son uchun, barcha natural n larda $|y_n| < K$ bo'lsin. $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $|x_n| < \frac{\varepsilon}{K}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda barcha $n \geq n_0$ uchun $|x_n y_n| = |x_n| \cdot |y_n| < \frac{\varepsilon}{K} \cdot K = \varepsilon$ Demak, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$.

6) Agar barcha n larda $0 \leq x_n \leq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

$\lim y_n = 0$ bo'lganligi uchun, $\forall\varepsilon > 0$ son uchun $(-\varepsilon, \varepsilon)$ atrofdan tashqarida $\{x_n\}$ ketma-ketlikning ham chekli elementi yotadi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

7) Agar barcha n larda $x_n \leq z_n \leq y_n$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$ bo'ladi. Ma'lumki, $x_n \leq z_n \leq y_n$ tengsizlikdan $0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n$ tengsizlik kelib chiqadi. 1-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(y_n - x_n) = 0$, bundan 6-xossaga ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - x_n) = 0$. U

holda yana 1-xossaga ko'ra $\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty}[(z_n - x_n) + x_n] = \lim_{n\to\infty}(z_n - x_n) + \lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

3-ta'rif. $R \supset A$ to'plam berilgan bo'lsin. Agar shunday K son topilib, istalgan $x \in A$ uchun $x \le K\,(K \le x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda A to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan to'plam deyiladi. Bunda K son A to'plamning yuqori (quyi) chegarasi deyiladi. Agar A yuqoridan ham quyidan ham chegaralangan bo'lsa, bunday to'plam chegaralangan deyladi.

4-ta'rif. Agar $x < K$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $\forall x$ son uchun $x < a \le K$ $(x > a \ge K)$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi $a \in A$ element mavjud bo'lsa, K son A to'plamning aniq yuqori (aniq quyi) chegarasi deyiladi va $\sup A = (\inf A = K)$ ko'rinishda yoziladi.

1-teorema. Agar A to'plam yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo'lsa $\sup A\ (\inf A)$ chekli son bo'ladi.

2-teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ $\left(\inf\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0\right)$ bo'lsa, u holda $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'ladi.

Isbot. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'suvchi bo'lsin, ya'ni $x_1 \le x_2 \le x_3 \le \cdots \le x_n \le x_{n+1} \le \ldots$ o'rinli bo'lib $\sup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = 0$ bo'lsin, u holda $\forall \varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjudki, $x_n \in (-\varepsilon, 0]$ bo'ladi, u holda istalgan $n \ge n_0$ uchun

$$-\varepsilon < x_{n_0} \le x_n \le 0 \ .$$

ya'ni $n \ge n_0$ lar uchun $x_n \in (-\varepsilon, 0]$ bo'lar ekan, demak $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.

Ketma-ketlik kamayuvchi bo'lgan holda ham isbot shu tarzda bajariladi.

5-ta'rif. Agar istalgan $M > 0$ son uchun $(-M; M)$ atrof ichida $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning chekli sondagi hadi bo'lsa, u holda bu ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik deyladi. Bu hol

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

shaklda ifodalanib, n cheksizlikka intilganda x_n ketma-ketlik limiti cheksizlikka teng, yoki cheksizlikka intiladi deb aytiladi.

Bu ta'rifda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlikning biror hadidan keyingi barcha hadlari musbat bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

manfiy bo'lsa,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

deb ta'riflanadi.

Masalan, $\lim_{n\to\infty}(-1)^n n = \infty$, $\lim_{n\to\infty} n = +\infty$ va $\lim_{n\to\infty}(-n) = -\infty$. 5-ta'rifni unga teng kuchli bo'lgan, o'zgacha ko'rinishdagi ta'rifga almashtirish ham mumkin.

Agarda istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki barcha $n \geq n_0$lar uchun $|x_n| > \varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$, $\left(\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty\right)$ deyiladi. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ uchun shunday n_0 nomer mavjud bo'lsaki, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $x_n > \varepsilon$ $(x_n < -\varepsilon)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, $\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$ ($\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$)deyiladi

3-teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz katta ketma-ketlik bo'ladi. Aksincha $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$-cheksiz katta ketma-ketlik bo'lsa, $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ -cheksiz kichik ketma-ketlik bo'ladi. Teoremada barcha n larda $x_n \neq 0$ deb qaraladi

Isbot. $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ bo'lsin, u holda istalgan katta $E > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki, har qanday $n \geq n_0$ uchun

$|x_n| < \frac{1}{E}$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, u holda shu $n \geq n_0$ lar uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| > E$ bo'ladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty \cdot$$

Aksincha, agar $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$ bo'lsa, u holda istalgan kichik $\varepsilon > 0$ son uchun shunday n_0 mavjudki, har qanday $n \geq n_0$ uchun $|x_n| > \frac{1}{\varepsilon}$ bo'ladi, u holda shu $n \geq n_0$ lar uchun $\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon$ tengsizlik bajariladi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0 .$$

6-ta'rif. Agar $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik cheksiz kichik ketma-ketlik bo'lsa, u holda $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti a songa teng (yoki a songa yaqinlashadi) deyiladi. Bu hol $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ shaklda ifoda etiladi.

Demak, agar $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ tenglik o'rinli bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ deyiladi. Bunday ketma-ketlik yaqinlashuvchi ketma-ketlik deyiladi.

Ketma- ketlik limiti quyidagi xossalarga ega. Faraz qilaylik $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ va $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ bo'lsin, u holda:

1. Istalgan α va β sonlar uchun

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\, x_n + \beta\, y_n) = \alpha\, a + \beta\, b ,$$

chunki cheksiz kichik ketma-ketlik xossalariga ko'ra,

$$\lim_{n\to\infty}(\alpha\, x_n + \beta\, y_n - \alpha\, a - \beta\, b) = \lim_{n\to\infty}[\alpha\,(x_n - a) + \beta(y_n - b)] = 0 .$$

2. Yaqinlashuvchi ketma-ketlik chegaralangandir. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo'lsin, u holda $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$ bo'lgani uchun

$\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ chegaralangan ketma-ketlik bo‘ladi, ya'ni shunday $K > 0$ son mavjudki, barcha n lar uchun $|x_n - a| < K$, u holda

$$|x_n| = |(x_n - a) + a| \le |x_n - a| + |a| < K + |a|, \quad n \in N.$$

Demak, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ -chegaralangan ketma-ketlik ekan.

3. $\lim\limits_{n\to\infty} y_n x_n = a \cdot b$.

Cheksiz kichik ketma-ketlik xossalariga ko‘ra,

$$\lim_{n\to\infty}(x_n y_n - ab) = \lim_{n\to\infty}[(x_n - a)y_n + a(y_n - b)] = \lim_{n\to\infty}(x_n - a)y_n + \lim_{n\to\infty} a\cdot(y_n - b) = 0\cdot b + a\cdot 0 = 0$$

4. $y_n \neq 0,\ n \in N$ va $b \neq 0$ bo‘lsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = \frac{a}{b}$$

tenglik o‘rinli bo‘ladi.

Aniqlik uchun $b > o$ bo‘lsin, u holda $\varepsilon = \frac{b}{2}$ uchun shunday n_0 mavjudki barcha $n \ge n_0$ lar uchun

$$|y_n - b| < \frac{b}{2}.$$

U holda

$$-\frac{b}{2} < y_n - b < \frac{b}{2} \Rightarrow y_n > \frac{b}{2} > 0$$

va $0 < \frac{1}{y_n} < \frac{2}{b}$, ya'ni $\frac{1}{y_n}$ ketma-ketlik chegaralangan ekan. U holda ($n \ge n_0$ deb qarash mumkin)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right) = \lim_{n\to\infty}\frac{x_n\cdot b - y_n a}{y_n\cdot b} = \lim_{n\to\infty}\frac{(x_n - a)b - a(y_n - b)}{y_n\cdot b} = \lim_{n\to\infty}\left[b(x_n - a)\frac{1}{y_n\cdot b} - a(y_n - b)\frac{1}{y_n\cdot b}\right] = 0.$$

5) Biror nomerdan boshlab $x_n \le y_n$ bo‘lsa, u holda $a \le b$. Teskarisini faraz qilamiz, ya'ni $a > b$ bo‘lsin, u holda

$\varepsilon > 0$ sonni shunday tanlab olish mumkinki, $a-\varepsilon > b+\varepsilon$ (masalan, $\varepsilon < \dfrac{b-a}{2}$) tengsizlik o‘rinli bo‘ladi, u holda shunday n_0 natural son mavjudki, barcha $n \geq n_0$ lar uchun $a-\varepsilon < x_n$ va $y_n < b+\varepsilon$ tengsizliklar o‘rinli bo‘ladi, u holda biror $n \geq n_0$ uchun $x_n > y_n$ bo‘ladi. Bu esa ziddiyatdir.

4-teorema. Agar $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o‘suvchi (kamayuvchi) ketma-ketlik bo‘lib, yuqoridan (quyidan) chegaralangan bo‘lsa, u holda $\{x_n\}$ yaqinlashuvchi va $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n \{x_n\}$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n \{x_n\}\right)$ bo‘ladi.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra $\sup\{x_n\} = a$ -chekli son bo‘ladi, u holda $\{x_n - a\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘lib, $\sup\{x_n - a\} = 0$ bo‘ladi va 2-teoremaga ko‘ra $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n - a) = 0$, demak $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ bo‘ladi.

5-teorema. Agar barcha natural n lar uchun $x_n \leq z_n \leq y_n$ bo‘lib, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

Isbot. $x_n - a \leq z_n - a \leq y_n - a$ tengsizlik barcha natural n lar uchun o‘rinli bo‘ladi, u holda 7) xossaga ko‘ra $\lim\limits_{n\to\infty}(z_n - a) = a$, demak $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$.

6-teorema. (Ichma-ich joylashgan segmentlar ketma-ketligi haqidagi teorema).

Agar har bir natural n uchun $[a_n, b_n]$ $(a_n < b_n)$ segment berilgan bo‘lib, barcha n larda

$$[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$$

munosabat o‘rinli va $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ bo‘lsa, u holda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ va $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ limitlar mavjud bo‘lib

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,$$

va istalgan natural n uchun $a_n \leq c \leq b_n$ tengsizlik o‘rinlidir.

Isbot. Teorema shartiga ko‘ra $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik o‘suvchi bo‘lib, yuqoridan (masalan, b_1 bilan) chegaralangan, $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik esa kamayuvchi bo‘lib, quyidan (masalan, a_1 bilan) chegaralangan bo‘ladi, u holda $\sup\limits_n\{a_n\}=a$ *ва* $\inf\limits_n\{b_n\}=b$ desak, 4-teoremaga asosan

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ \lim_{n\to\infty} b_n = b,$$

bo‘ladi. Barcha n larda $a_n \le a \le b \le b_n$ bo‘lgani uchun,

$$0 \le b-a \le b_n - a_n,\ n\in N.$$

va $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n)=0$. 5-teoremaga ko‘ra $b-a=0$, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = c,\ a_n \le c \le b_n,\ \forall n\in N.$$

Teorema isbot bo‘ldi.

4-teoremaning tatbiqi sifatida quyidagi limitni ko‘rsatamiz

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Dastlab $x_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ ketma-ketlikning o‘suvchi va yuqoridan chegaralangan ekanligini ko‘rsatamiz. Buning uchun biz quyidagi tengsizlikdan va Nyyuton binoidan foydalanamiz: agar $x\ge -1$ bo‘lsa,

$$(1+x)^n \ge 1+nx,\ n\in N\ ;$$

Istalgan a, b va natural n uchun

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k}\cdot b^k$$

tenglik o‘rinlidir, bu yerda $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$, $n! = 1\cdot 2\cdots n$.

$$\frac{x_{n+1}}{x_n}=\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{n+1}}{1+\frac{1}{n}}\right)^{n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left[\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right]^{n}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^{n}\geq\left(1+\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right)=\frac{(n+2)}{n+1}\cdot\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}=\frac{(n+2)(n^2+n+1)}{(n+1)^3}=$$

$$\frac{n^3+3n^2+3n+2}{(n+1)^3}>\frac{n^3+3n^2+3n+1}{(n+1)^3}=1$$

Demak, $1<\frac{x_{n+1}}{x_n}$, ya'ni $x_n<x_{n+1}$ $n\in N$: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ o'suvchi ketma-ketlik ekan. Endi uning yuqoridan chegaralanganligini ko'rsatamiz. Ushbu

$$C_n^k\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot\frac{1}{n^k}=\frac{1}{k!}\cdot\frac{[n-(k-1)][n-(k-2)]\cdots(n-1)\cdot n}{n^k}=$$

$$=\frac{1}{k!}\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{k-2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{k!}$$

tengsizlikka ko'ra

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cdot\frac{1}{n^k}<\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=1+1+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}=2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k!}.$$

$k\geq 2$ bo'lganda, $\frac{1}{k!}=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots k}<\frac{1}{2^{k-1}}$ va bundan quyidagini hosil qilamiz:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<2+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2+\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{2}}=2+\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)<3$$

Demak, $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}<3$, $n\in N$.

U holda 4-teoremaga ko'ra $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik limiti mavjud va chekli bo'ladi, uning qiymatini *e* orqali belgilaymiz:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

e soni irratsional son bo‘lib, u matematika va uning tadbiqlarida katta ahamiyat kasb etadi. e sonining o‘nli kasrga yoyilmasidagi dastlabki 10 ta raqam quyidagicha bo‘ladi

$$e = 2{,}7182818284\ldots$$

Quyidagi limitni istalgan $a > o$ uchun ko‘rsataylik

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = \lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Dastavval, $a > 1$ deb qaraylik, u holda $a^{\frac{1}{n}} > 1$ bo'lib,

$$(1+x)^n \geq 1+nx.$$

tengsizlikda $(x \geq -1)$ $1+x = a^{\frac{1}{n}}$ deb olsak,

$$1+n\cdot\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) \leq a \Rightarrow o < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n},\ n \in N.$$

Bu yerda $n \to \infty$ da limitga o‘tsak,

$$\lim_{n\to\infty}\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right) = 0$$

ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Agar $o < a < 1$ bo‘lsa, u holda $\frac{1}{a} > 1$ bo‘lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{1}{n}}} = 1.$$

Demak, istalgan $a > 0$ uchun

$$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}} = 1.$$

Keyingi misol sifatida istalgan $a > 0$ $(a \neq 0)$ son uchun

$$\lim_{n\to\infty} \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$$

ekanligini ko'rsatamiz. Dastavval, $a>1$ deb qaraylik, u holda $\log_a x$ funksiya o'suvchi bo'lgani uchun, biz $t_n=\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ketma–ketlikni hosil qilsak, bu ketma-ketlik kamayuvchi bo'lib, ya'ni $t_1>t_2>\cdots>t_n>t_{n+1}>\cdots$, istalgan n uchun $t_n>0$,uning chekli limiti α mavjud bo'lib, 4-teoremaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} t_n=\inf_n\{t_n\}=\alpha.$$

$\alpha=0$ ekanligini ko'rsatamiz. Agar $\alpha>0$ deb faraz qilsak, $a^\alpha-1>0$ bo'lgani uchun, $\frac{1}{n}<a^\alpha-1$ deb olsak, u holda bunday n larda

$$t_n=\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)<\log_a a^\alpha=\alpha.$$

Bu esa $\alpha=\inf_n\{t_n\}$ ekanligiga ziddir. Demak, $\alpha=0$ ekan, ya'ni

$$\lim_{n\to\infty} \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$$

Agar $o<a<1$ bo'lsa, $\frac{1}{a}>1$ bo'lgani uchun

$$\lim_{n\to\infty} \log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}-\left(\log_{\frac{1}{a}}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)=0.$$

Xuddi shuningdek,

$$\lim_{n\to\infty} \log_a\left(1-\frac{1}{n}\right)=0$$

ekanligi ko'rsatiladi.

1.2.Funksiya limiti

7-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib (x_0 nuqtada aniqlangan bo'lishi shart emas) istalgan $\varepsilon>0$ son uchun shunday $\delta>0$ son mavjud bo'lsaki, $o<|x-x_0|<\delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x lar (ya'ni istalgan $x\in(x_0-\delta,x_0)\cup(x_0,x_0+\delta)$) uchun $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi, (bu hol $\lim_{x\to x_0} f(x)=a$ shaklda ifoda etiladi),

7'-ta'rif. Agar $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ bo'lgan istalgan $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ ketma-ketlik uchun $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda x argument x_0 ga intilganda $f(x)$ funksiyaning limiti a ga teng deyiladi.

7-va 7'-ta'riflar teng kuchlidir. Agar 7-ta'rifda barcha $x\in(x_0-\varepsilon,x_0)$ yoki $(x\in(x_0-\varepsilon,x_0)(x\in(x_0,x_0+\varepsilon)\text{bo'lsa})$ lar uchun $|f(x)-a|<\varepsilon$ tengsizlik o'rinli bo'lishi talab qilinsa, u holda a son $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtadagi chap (o'ng) limiti deyiladi va $\lim_{x\to x_0-0} f(x)=a$ $\left(\lim_{x\to x_0+0} f(x)=a\right)$ ko'rinishda ifoda etiladi. Chap va o'ng limitlar uchun quyidagi belgilashlar qo'llaniladi:

$$\lim_{x\to x_0-0} f(x)=f(x_0-0),\quad \lim_{x\to x_0+0} f(x)=f(x_0+0)$$

Yuqoridagi ta'rifda x_0 nuqta va a sifatida $+\infty$ yoki $-\infty$ (cheksizliklarni olishimiz mumkin. Ta'riflarda mos o'zgartirishlar kiritib, quyidagi

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=a$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=a$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to x_0} f(x)=\pm\infty$,

$\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to x_0\pm 0} f(x)=\infty$,

$\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$. $\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty$, $\lim_{x\to\infty} f(x)=\pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\infty$

kabi limitlarni ta'riflashimiz mumkin.

8-ta'rif. Agar $\lim_{x\to x_0} f(x)=0$ $\left(\lim_{x\to\infty} f(x)=0\right)$ bo'lsa, u holda $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ da $f(x)$ funksiya cheksiz kichik miqdor deyiladi.

9-ta'rif. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ $\left(\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty\right)$ bo'lsa, u holda $x\to x_0$ $(x\to\infty)$ da $f(x)$ funksiya cheksiz katta miqdor deyiladi.

Funksiya limiti, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar quyidagi xossalarga ega:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ va $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ bo'lsa, u holda istalgan α va β sonlar uchun

$$\lim_{x\to x_0}(\alpha f(x)+\beta g(x))=0.$$

2. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron $(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$ ε-atrofida chegaralangan bo'ladi.

3. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron ε-atrofida chegaralangan bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ bo'lsa, u holda

$$\lim_{x\to x_0} f(x)\, g(x)=0.$$

bo'ladi.

4. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a$ bo'lib, $c<a<b$ bo'lsa, u holda x_0 nuqtaning (biron $\varepsilon>0$ son uchun) $(x_0-\varepsilon, x_0)\cup(x_0, x_0+\varepsilon)$ atrofida $c<f(x)<b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

5. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a\neq 0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=\infty$.

6. Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron atrofida chegaralangan bo'lib, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=\infty$ bo'ladi.

7. Agar $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ bo'lsa, u holda $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$ va aksincha, agar $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ bo'lsa $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{g(x)}=0$ bo'ladi.

8. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$, $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b$ bo'lsa, istalgan α *va* β sonlar uchun

$$\ell im_{x\to x_0}(\alpha f(x)\pm\beta g(x))=\alpha\cdot a+\beta\cdot b,\ \ell im_{x\to x_0} f(x)\cdot g(x)=a\cdot b$$

bo'ladi.

9. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$ va $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b\neq 0$ bo'lsa, $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{a}{b}$ bo'ladi.

10. Agar $\ell im_{x\to b} f(x)=a$ va $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b$ bo'lsa, u holda $f(g(x))$ murakkab funksiya uchun $\ell im_{x\to x_0} f(g(x))=a$.

11. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$, $\ell im_{x\to x_0} g(x)=b$ bo'lib, x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0=\infty$ bo'lgan holda, $|x|$ yetarlicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $a\le b$ tengsizlik o'rinli bo'ladi.

12. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0=\infty$ bo'lganda, $|x|$ yetarlicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x)\le\varphi(x)\le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lib, $\ell im_{x\to x_0} f(x)=\ell im_{x\to x_0} g(x)=a$ bo'lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0}\varphi(x)=a$.

13. Agar x_0 nuqtaning biron atrofida (yoki $x_0=\infty$ bo'lganda, $|x|$ yetralicha katta bo'lgan barcha x larda) $f(x)=const=a$ bo'lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$.

14. Agar $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$ bo'lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0-0} f(x)=\ell im_{x\to x_0+0} f(x)=a$. Aksincha, agar $\ell im_{x\to x_0-0} f(x)=\ell im_{x\to x_0+0} f(x)=a$ bo'lsa, u holda $\ell im_{x\to x_0} f(x)=a$ bo'ladi.

1.3. Noaniqliklar

Ketma-ketlik va funksiyalar limitlarini hisoblayotganda quyidagi ko'rinishdagi noaniqliklar yuzaga kelishi mumkin:

$$\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0\cdot\infty,\ \infty-\infty, 1^{\infty},\ 0^0,\ \infty^0$$

Bu yerdagi noaniqliklarning ayrimlarini boshqasi orqali ifodalash mumkin. Limitning 7-xossasiga ko'ra $\frac{1}{\infty}=0,\quad \frac{1}{0}=\infty$ simvollarni kiritishimiz mumkin. Shunga ko'ra

$$\frac{\infty}{\infty}=\frac{\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0},\quad 0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{\frac{1}{\infty}}=\frac{0}{0},\quad 1^{\infty}=e^{\infty \ln 1}=e^{\infty\cdot 0},$$

$$0^0=e^{0\ln 0}=e^{\infty\cdot 0},\quad \infty^0=e^{0\ln\infty}=e^{0\cdot\infty}$$

noaniqliklar tengligini yoza olamiz, shuni ta'kidlash kerakki, bu tengliklar sonlar tengligi ma'nosiga ega bo'lmay, balki bir ko'rinishdagi noaniqlikni ikkinchi xil ko'rinishdagi noaniqlikka olib kelish mumkinligini anglatadi. Shu holatni e'tiborga olib $\frac{0}{0}$ va $\infty-\infty$ ko'rinishidagi noaniqliklarga misollar keltiramiz:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2}{x}=\lim\limits_{x\to 0}x=0$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\cdot x}{x}=a\lim\limits_{x\to 0}1=a$

4. $\chi(x)=\begin{cases}1, agar\ \ x-ratsional\ son\ \ bo`lsa\\ 0, agar\ \ x-irratsional\ son\ \ bo`lsa\end{cases}$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot\chi(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\chi(x)$ – limit mavjud emas.

Bu misollar $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqliklardan iboratdir. Endi $\infty-\infty$ ko'rinishdagi noaniqliklarga misollar keltiramiz:

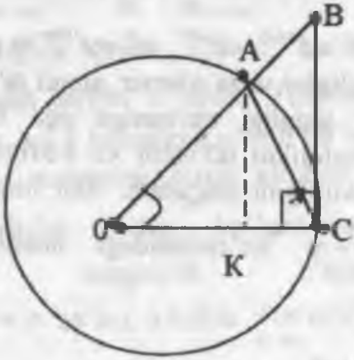
1) $\lim\limits_{x\to+\infty}(2x-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x=+\infty$

2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+a-x)=a$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-2x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(-x)=-\infty$

4) $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+\chi(x)-x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\chi(x)$ limit mavjud emas.

Endi $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}$ limitni hisoblaylik. Avval $\lim\limits_{x\to0}\sin x=0$ ekanligini ko'rsatamiz. $0<x<\frac{\pi}{2}$ deb olaylik. Radiusi 1 ga teng quyidagi aylanani qaraylik, $x-<AOC$ burchakning radian o'lchovi bo'lsin,



u holda $A\breve{C}$ -uzunligi x ga teng va $\sin x=\frac{AK}{OA}=AK$, $tgx=\frac{BC}{OC}=BC$. Agar $S_{OAC}-OAC$ -sektor yuzasi bo'lsa, u holda

$$S_{\Delta OAC}<S_{OAC}<S_{\Delta OBC}\Rightarrow\frac{1}{2}OC\cdot AK<\frac{1}{2}x<\frac{1}{2}OC\cdot BC\Rightarrow\sin x<x<tgx$$

tengsizlik kelib chiqadi.

$0<x<\frac{\pi}{2}$ bo'lganda, $o<\sin x<x$ ekanligidan

$\lim\limits_{x\to+0}\sin x=0$ tenglik kelib chiqadi. $\sin(-x)=-\sin x$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to -0}\sin x = 0$ bo'lar ekan. Demak $\lim\limits_{x\to 0}\sin x = 0$ ya'ni $\lim\limits_{x\to +0}\frac{\sin x}{x}$ limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik ekan. Endi $0 < x < \frac{\pi}{2}$ uchun quyidagilarni hosil qilamiz.

$$\sin x < x < tg x \Rightarrow 1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x} \Rightarrow 1 > \frac{\sin x}{x} > \cos x \Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 2\sin^2\frac{x}{2} < 2\sin\frac{x}{2} < 2\cdot\frac{x}{2} < x$$

ya'ni $0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < x$ tengsizlik kelib chiqar ekan.

Demak,

$$\lim_{x\to +0}\left(1 - \frac{\sin x}{x}\right) = 0 \quad \text{, ya'ni} \quad \lim_{x\to +0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Endi $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin x}{x}$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{x\to -0}\frac{\sin x}{x} = \lim\limits_{t\to +0}\frac{\sin(-t)}{-t} = \lim\limits_{t\to +0}\frac{\sin t}{t} = 1$. Shunday qilib,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1.$$

Endi 1^∞ ko'rinishdagi noaniqlikka doir $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni hisoblaylik. Dastavval

$$\lim_{x\to +0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

limitni qaraymiz. Agar x ushbu $\frac{1}{n+1} \le x \le \frac{1}{n}$ tengsizliklarni qanoatlantirsa, u holda

$$n \le \frac{1}{x} \le n+1 \text{ va}$$

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \Rightarrow \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)} \le (1+x)^{\frac{1}{x}} \le \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)$$

Bu tengsizlikda $x \to +0$, ya'ni $n \to +\infty$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e$ va $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right) = \lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right) = 1$ bo'lgani uchun, limitlar xossasiga asosan

$$\lim_{x\to+0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Endi $\lim\limits_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}}$ limitni qaraymiz. $-x = \frac{t}{1+t}$ almashtirish bajarsak, $x \to -0$ bo'lganda $t \to +0$ bo'ladi, chunki $t = \frac{-x}{1+x}$, u holda

$$(1+x)^{\frac{1}{x}} = \left(1-\frac{t}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}} = \left(\frac{1}{1+t}\right)^{-\frac{1+t}{t}} = (1+t)^{\frac{1+t}{t}} = (1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t)$$

tenglik kelib chiqadi. Agar biz $x \to -0$, da ya'ni $t \to +0$ da limitga o'tsak

$$\lim_{x\to-0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = \lim_{t\to+0}(1+t)^{\frac{1}{t}} \cdot (1+t) = e$$

hosil bo'ladi. Demak,

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Shuni ta'kidlaymizki, ushbu

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

limit birinchi ajoyib limit,

$$\lim_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

esa ikkinchi ajoyib limit deb nomlanadi.

Xulosa

Limitlar nazariyasidagi asosiy ta'rif va teoremalar keltirilgan. Teoremalarning isboti yetarli darajada sodda ifodalangan. Har bir ta'rif va teoremalar uchun misollar keltirilgan.

Tayanch iboralari

Ketma-ketlik, limit, cheksiz kichik va cheksiz katta miqdorlar.

Takrorlash uchun savollar

1. Ketma-ketlik deb nimaga aytiladi?
2. Cheksiz kichik ketma-ketlik deganda qanday ketma-ketlik tushuniladi?
3. Ketma-ketlik limiti xossalarini keltiring.
4. Limiti mavjud bo'lmagan ketma-ketliklarga misollar keltiring.
5. 2 ga intiluvchi 3 ta ketma-ketlik yozing.
6. Ajoyib limitlarni yozing.
7. Veyershtrass teoremalarini ayting.
8. Chegaralangan ketma-ketlikka misollar keltiring.
9. Noaniqliklarni ochishga misollar keltiring.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.

7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалавrianта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich моliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

2-bob. FUNKSIYA UZLUKSIZLIGI

2.1. Uzluksiz funksiylar.
2.2. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari.

2.1. Uzluksiz funksiyalar

1-ta'rif. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan $f(x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ tenglik o'rinli bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deb ataladi.

Agar $\lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)$, $\left(\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0)\right)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada o'ngdan (chapdan) uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan quyidagi teorema o'rinli ekanligi kelib chiqadi.

1-teorema. Agar $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$ bo'lsa, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'ladi.

1-ta'rifni orttirmalar tilida ham aytish mumkin. Agar argumentning ikki x_0 va $x_0 + \Delta x$ qiymatlari qaralsa, Δx - argument orttirmasi deyiladi. Bu orttirmaga mos keluvchi $y = f(x)$ funksiya orttirmasi Δy quyidagicha aniqlanadi

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0).$$

Agar $\lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Funksiya limiti xossalaridan foydalanib, uzluksiz funksiyalar uchun quyidagi teoremalarning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-teorema. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, quyidagi funksiyalar ham uzluksiz bo'ladi

$$\alpha f(x) \pm \beta g(x), \ f(x) \cdot g(x), \ \frac{f(x)}{g(x)}$$

bu yerda α va β istalgan sonlar bo'lib, funksiyalar nisbati qaralayotganda $g(x_0)\neq 0$ deb faraz qilinadi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x=b$ nuqtada uzluksiz, $g(x)$ funksiya esa $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lib, $g(x_0)=b$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda murakkab $f(g(x))$ funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz bo'ladi.

2-ta'rif. Agar $f(x)$ funksiya biron A - to'plamning har bir nuqtasida uzluksiz bo'lsa, bu funksiya A -to'plamda uzluksiz deyiladi.

Endi uzluksiz funksiyalarga misollar keltiramiz.

1. Butun va ratsional kasr funksiyalar, o'zlarining aniqlanish sohasida uzluksiz bo'ladi.

Haqiqatan ham, $f(x)=x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda, ya'ni barcha x larda uzluksiz, u holda 1-teoremadan istalgan natural n va a sonlar uchun $f(x)=a\cdot x^n$ funksiyaning $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksizligi kelib chiqadi. Bundan x ga nisbatan ko'phad bo'lgan

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

funksiya ham $(-\infty,+\infty)$ da uzluksiz bo'lishi kelib chiqadi.

Demak, yana 2-teoremani e'tiborga olib, n va m natural sonlar uchun quyidagi

$$\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+b_m}$$

kasr-ratsional funksiya maxrajining ildizi bo'lmagan x larda uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

2. Ko'rsatkichli funksiya, ya'ni $f(x)=a^x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda uzluksiz.

Dastavval

$$\lim_{x\to 0} a^x=1$$

ekanligini ko‘rsatamiz. $a>1$ bo‘lsin, agar $|x|<\frac{1}{n}$, ya'ni $-\frac{1}{n}<x<\frac{1}{n}$ bo‘lsa, u holda

$$a^{-\frac{1}{n}}<a^{x}<a^{\frac{1}{n}}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘lib, $x\neq 0$ uchun $n=\left[\frac{1}{|x|}\right]$ deb olsak, ($[b]-b$ sonning butun qismi, ya'ni b sondan oshmaydigan butun sonlarning eng kattasi), $x\to 0$ da $n\to\infty$ bo‘lgani uchun, funksiya limitining 12-xossasiga ko‘ra

$$\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1.$$

Bundan $\lim\limits_{x\to 0} a^{x}=1$ ni hosil qilamiz. Agar $0<a<1$ bo‘lsa $\frac{1}{a}>1$ va

$$\lim_{x\to 0} a^{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^{x}}=\frac{1}{1}=1$$

ekanligi kelib chiqadi. $f(x)=a^{x}$ funksiyaning istalgan $x=x_0$ nuqtada uzluksizligini ko‘rsatamiz:

$$\lim_{x\to x_0} a^{x}=\lim_{x\to x_0} a^{x_0}\cdot a^{x-x_0}=a^{x_0}\lim_{x\to x_0} a^{x-x_0}=a^{x_0}.$$

3. Trigonometrik funksiyalar o‘z aniqlanish sohalarida uzluksiz. Avval $y=\sin x$ funksiyani qaraylik:

$$\lim_{x\to x_0}\sin x=\lim_{x\to x_0}\left[(\sin x-\sin x_0)+\sin x_0\right]=\lim_{x\to x_0}(\sin x-\sin x_0)+\sin x_0=$$

$$=\lim_{x\to x_0} 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x+x_0}{2}+\sin x_0$$

$\cos x$ funksiya chegaralangan bo‘lganligi uchun, funksiya limitining 3-xossasiga va $\lim\limits_{t\to 0}\sin t=0$ ekanligidan

$$\lim_{x\to x_0} 2\sin\frac{x-x_0}{2}\cdot\cos\frac{x-x_0}{2}+\sin x_0=\sin x_0.$$

Demak,

$$\ell im_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0 .$$

Xuddi shuningdek istalgan $x = x_0$ nuqtada $y = \cos x$ funksiyasi ham uzluksiz ekanligi isbot qilinadi. U holda 1-teoremaga ko'ra $y = \frac{\sin x}{\cos x} = tgx,\ x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi(k \in \pi)$ va $y = \frac{\cos x}{\sin x} = ctgx,\quad x \neq k\pi,\ (k \in Z)$ funksiyalar aniqlanish sohasida uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

4. $y = \ell og_a x \ \ a > 0, \quad a \neq 1$ logarafik funksiyaning $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksizligi. Avvalo $a > 1$ deb, funksiya $x = 1$ nuqtada uzluksiz ekanligini ko'rsatamiz. Haqiqatan ham, $x = 1 + t$ deb olsak, quyidagi

$$\ell im_{x\to 1} \ell og_a x = \ell im_{t\to 0} \ell og_a (1+t)$$

tenglikda $t \neq 0,\ n = \left[\frac{1}{|t|}\right]$ bo'lsa, $t \to 0$ da $n \to \infty$ bo'lgani uchun, va $-\frac{1}{n} \leq t \leq \frac{1}{n}$ tengsizlikdan

$$\ell og_a\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq \ell og_a (1+t) \leq \ell og_a\left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Ushbu $\ell im_{t\to\infty} \ell og_a\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ell im_{n\to\infty} \ \ell og_a\left(1 + \frac{1}{n}\right) = 0$ tenglikdan VI-bobdagi 12-xossaga ko'ra

$$\ell im_{t\to 0} \ell og_a (1+t) = 0,$$

ya'ni

$$\ell im_{x\to 1} \ell og_a x = \ell og_a 1 = 0.$$

Agar $0 < a < 1$ bo'lsa, $\frac{1}{a} > 1$ va

$$\ell im_{x\to 1} \ell og_a x = \ell im_{x\to 1}\left(-\ell og_{\frac{1}{a}} x\right) = 0 = \ell og_{\frac{1}{a}} 1$$

ekanligi kelib chiqadi.

Endi istalagn $x = x_0$ $(x_0 > 0)$ nuqtada $y = \ell og_a x$ funksiyaning uzluksizligini ko‘rsatamiz. Haqiqatan ham, agar $\frac{x}{x_0} = 1 + t$ deb olsak, $x \to x_0$ da $t \to 0$ bo‘ladi, demak,

$$\lim_{x\to x_0} \ell og_a x = \lim_{x\to x_0}\left(\ell og_a \frac{x}{x_0} + \ell og_a x_0\right) = \lim_{x\to x_0} \ell og_a \frac{x}{x_0} + \ell og_a x_0 = \lim_{t\to 0} \ell og_a(1+t) + \ell og_a x_0 = \ell og_a x_0 \cdot$$

5. Darajali $y = x^{\alpha}$, $\alpha \neq 0$ funksiyaning uzluksizligi. $y = x^{\alpha}$ funksiyaning $(0,+\infty)$ oraliqda uzluksiz ekanligini ko‘rsatamiz. Murakkab funksiya uzluksizligiga doir 3-teoremaga ko‘ra

$$\lim_{x\to x_0} x^{\alpha} = \lim_{x\to x_0} e^{\alpha \cdot \ell nx} = e^{\alpha\, \ell n x_0} = x_0^{\alpha}$$

6. Teskari trigonometrik funksiyalar o‘z aniqlanish sohalarida uzluksiz.

$y = arc\sin x$ funksiyani uzluksizlikka tekshiramiz, qolgan funksiyalarni tekshirish shunga o‘xshash bajariladi. $y = arc\sin x$ funksiyaning aniqlanish sohasi $[-1, 1]$ oraliq bo‘lib, o‘zgarish sohasi $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dan iborat, $x_0 \in [-1, 1]$ bo‘lsin. Biz funksiyaning x_0 da o‘ngdan uzluksizligini ko‘rsatamiz, chapdan uzluksizligi shunga o‘xshash tarzda aniqlanadi. Demak, $x_0 < x$ bo‘lib, $x \to x_0 + 0$ bo‘lsin, u holda $0 < t < \frac{\pi}{2}$ uchun

$$\sin t < t < tgt$$

tengsizlik o‘rinli. Bundan va $y = arc\sin x$ funksiya $[-1, 1]$ da o‘suvchi bo‘lgani uchun $x_0 < x$ da quyidagini hosil qilamiz.

$$\sin(arc\sin x - arc\sin x_0) < arc\sin x - arc\sin x_0 < tg(arc\sin x - \text{arcsir}$$

,

bu yerda $\sin(arc\sin x) = x, \cos(arc\sin x) = \sqrt{1 - x^2}$ ekanligidan

$$x\cdot\sqrt{1-x_0^2}-\sqrt{1-x^2}\cdot x_0<\arcsin x-\arcsin x_0<\frac{x\sqrt{1-x_0^2}-\sqrt{1-x^2}\cdot x_0}{\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x_0^2}+x\cdot x_0}$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bu tengsizlikda $x\to x_0+0$ bo'lsa,

$$\lim_{x\to x_0+0}\left(x\sqrt{1-x_0^2}-\sqrt{1-x^2}\cdot x_0\right)=0 \quad \text{va}$$

$$\lim_{x\to x_0+0}\left(\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x_0^2}+x\cdot x_0\right)=1.$$

Limitning VI-bobdagi 12-xossasiga asosan

$$\lim_{x\to x_0+0}(\arcsin x-\arcsin x_0)=0$$

bu esa $y=\arcsin x$ funksiyaning x_0 nuqtada o'ngdan uzluksiz ekanligini ko'rsatadi.

Yuqoridagi 1-6 misollardan foydalanib, elementar funksiyalar o'z aniqlanish sohalarida uzluksiz degan xulosani ayta olamiz.

Funksiya uzluksizligidan foydalanib, quyidagi limitlarni hisoblashimiz mumkin.

1. $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}=\log_a e$,

2. $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}$ limitni hisoblaylik.

Bu limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlikdir, agar $a^x-1=t$ deb olsak, $x\to0$ da $t\to0$ bo'ladi va $a^x=1+t,\ x=\log_a(1+t)$.

Demak,

$$\lim_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{t\to0}\frac{t}{\log_a(1+t)}=\frac{1}{\log_a e}=\frac{\log_a a}{\log_a e}=\ln a$$

3. $\lim\limits_{x\to0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$, bu limit ham $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib, agar $(1+x)^\alpha-1=t$ deb olsak $x\to0$ da $t\to0$ bo'ladi va $(1+x)^\alpha=1+t,\ \alpha\cdot\ln(1+x)=\ln(1+t)$.

Demak,

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{t\cdot\alpha\,\ln(1+x)}{x\,\ln(1+t)}=\lim_{x\to 0}\alpha\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\frac{t}{\ln(1+t)}=$$

$$\alpha\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(1+t)}=\alpha\cdot\ln e\cdot\frac{1}{\ln e}=\alpha$$

Natijada, $\frac{0}{0}$ ko‘rinishdagi noaniqliklarga tegishli bo‘lgan quyidagi muhim limitlarni hosil qildik.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$, xususan $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$

2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a$

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha$

7.2. Uzluksiz funksiyalarning asosiy xossalari

Quyida keltiriladigan uzluksiz funksiyalarning xossalarini teorema shaklida bayon qilamiz.

4-teorema. (Boltsano-Koshining birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda aniqlangan va uzluksiz bo‘lib, oraliq chegaralarida turli ishorali qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a)\cdot f(b)<0$ bo‘lsa, u holda (a,b) oraliqda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqtada funksiya nolga teng, ya'ni $f(c)=0$.

Isbot. $f\left(\frac{a+b}{2}\right)$ funksiya qiymatini ko‘raylik, agar $f\left(\frac{a+b}{2}\right)=0$ bo‘lsa, $c=\frac{a+b}{2}$ deb olish mumkin, bu holda teorema isbot qilingan bo‘ladi. Aks holda $f(a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ bo‘lsa, $a_1=a$, $b_1=\frac{a+b}{2}$ deb olamiz, $f\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot f(b)<0$ bo‘lsa, $a_1=\frac{a+b}{2}$, $b_1=b$ deb olamiz. Keyingi qadamda, yuqoridagi mulohazani $[a_1, b_1]$ oraliq uchun bajaramiz. Bu jarayon biron chekli qadamdan keyin, masalan n qadamdan keyin to'xtasa, u holda $f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)=0$ bo'lib, $c=\frac{a_n+b_n}{2}$ bo'ladi va bu holda teorema isbot qilingan deyish mumkin, aks holda ya'ni bu jarayon cheksiz davom etsa, u holda ichma-ich joylashgan $[a_n, b_n]$ ketma-ketliklar hosil bo'lib, keyingi qadamda hosil bo'ladigan har bir oraliq uzunligi avvalgisining yarmisiga teng bo'lgani uchun

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$$

ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$ ekan. U holda 6-teorema ko'ra $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = c$ bo'lib, barcha n larda

$$a_n < c < b_n, \text{ ya'ni } a < c < b$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi. Endi $f(c)=0$ ekanligini ko'rsatamiz. Funksiya uzluksiz bo'lganligi uchun

$$f(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) \Rightarrow f^2(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\cdot f(b_n).$$

Endi $[a_n, b_n]$ oraliqlarning qurilishiga ko'ra $f(a_n)\cdot f(b_n) < 0$ edi, u holda

$$f^2(c) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)\, f(b_n) \le 0,$$

demak, $f(c)=0$.

5-teorema. (Boltsano–Koshining ikkinchi teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, oraliq chegarasida turli qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a)=A$, $f(b)=B$ bo'lib, $A \ne B$ bo'lsa, u holda A va B sonlari orasida yotuvchi istalgan C son uchun (a,b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, bu nuqta uchun

$$f(c) = C$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Demak $C \ne A$, $C \ne B$ bo'lib, C son A va B sonlar orasida yotgani uchun $(A-C)\cdot(B-C) < 0$ bo'ladi. Agar

$g(x) = f(x) - C$ yangi funksiya kiritsak, bu funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lib,

$$g(a) \cdot g(b) = (f(a) - C) \cdot (f(b) - C) = (A - C)(B - C) < 0$$

bo'lganidan $g(x)$ funksiya uchun Boltsano-Koshining birinchi teorema shartlari bajariladi. Demak, (a,b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, uning uchun $g(c) = 0$ ya'ni

$$g(c) = f(c) - C = 0$$

Demak, $f(c) = C$. Teorema isbot bo'ldi.

Bu teoremadan quyidagi xulosani olamiz. Agar $f(x)$ funksiya uchun $[a,b] \subset D(f)$ bo'lib, funksiya $[a,b]$ da uzluksiz bo'lsa, u holda

$$A = \min\{f(a), f(b)\} \ va\ B = \max\{f(a), f(b)\}$$

uchun $[A,B] \subset E(f)$ bo'lar ekan.

Yuqorida keltirilgan teoremalarga taalluqli misollarni keltiramiz:

1. $f(x) = x^2$ funksiya uchun $[1,\ 2]$ oraliqda 4-teorema o'rinli emas, chunki $f(1) \cdot f(2) = 4 > 0$

2. $f(x) = \dfrac{1}{x}$ funksiya uchun $[-1, 1]$ orliqda 4-teorema o'rinli emas, sababi, $f(x)$ funksiya $x = 0$ nuqtada aniqlanmagan.

3. $f(x) = \begin{cases} -1, & agar \ \ x < 0 \ bo'lsa \\ 1, & agar \ \ x \ge 0 \ bo'lsa \end{cases}$

funksiya uchun $[-2, 2]$ oraliqda 4 va 5 teoremalar o'rinli emas, chunki $f(x)$ funksiya bu oraliqda uzluksiz emas, $x = 0$ nuqta uzilish nuqta: $f(-0) = -1$, $f(+0) = 1$, ya'ni $f(-0) \ne f(+0)$.

6-teorema (Veyershtrassning birinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, $f(x)$ funksiya bu oraliqda chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday m va M sonlari mavjud bo'ladiki, istalgan $x \in [a, b]$ uchun

$$m \le f(x) \le M$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Teoremani isbot qilish uchun, teskarisini faraz qilish usulini qo'llaymiz. Ya'ni $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo'lmasin. $\frac{a+b}{2}$ nuqta bilan $[a,b]$ oraliqni teng ikkiga bo'lamiz, hosil bo'lgan ikki oraliqdan birida $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'lmaydi, chunki aks holda, ya'ni ikkala oraliqda ham funksiya chegaralangan bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda ham chegaralangan bo'lar edi. Demak, $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ yoki $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ oraliqda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'lmaydi, agar ikkalasida ham chegaralangan bo'lmasa, ulardan chapdagisini olamiz. Hosil bo'lgan kichik oraliqni qaytadan $[a_1,b_1]$ deb belgilaymiz. Keyingi qadamda, yuqoridagi mulohazani $[a_1,b_1]$ oraliq uchun bajarib, $[a_2,b_2]$ oraliqni hosil qilamiz. Bu jarayon cheksiz marta davom etadi, chunki aks holda funksiya $[a_n,b_n]$ ko'rinishdagi oraliqda bir paytda ham chegaralangan, ham chegaralanmagan bo'lib qoladi. Demak, har bir natural n uchun $[a_n,b_n]$ oraliq hosil bo'lib, bu oraliqda $f(x)$ funksiya chegaralangan bo'lmadi. Bu oraliqlar ichma-ich joylashgan bo'lib, $b_n-a_n=\frac{a-b}{2^n}$ u holda 6-teoremaga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty} b_n=c$$

va $c\in(a,b)$. $f(x)$ funksiya uzluksizligidan

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n)=\lim_{n\to\infty} f(b_n)=f(c)$$

tenglikni hosil qilamiz. Agar A va B sonlar $A<f(c)<B$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qilib olingan bo'lsa, funksiya limitining 4-xossasiga ko'ra shunday $\varepsilon>0$ son mavjud bo'ladiki, istalgan $x\in(c-\varepsilon,c+\varepsilon)$ uchun $A<f(x)<B$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. U holda shunday natural n mavjudki, uning uchun

$$c-\varepsilon<a_n<c<b_n<c+\varepsilon$$

tengsizlik bajariladi. Demak, istalgan $x \in [a_n, b_n]$ uchun $A < f(x) < B$ tengsizlik o'rinli bo'lar ekan. Ammo farazga ko'ra $f(x)$ funksiya $[a_n, b_n]$ oraliqda chegaralangan emas edi. Bu qarama-qarshilik teoremani isbot qiladi.

7-teorema. (Veyershtarssning ikkinchi teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya $[a, b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zining yuqori aniq $\sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ va quyi aniq $\inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$ chegaralariga erishadi, ya'ni $[a,b]$ oraliqda shunday x_0 va x_1 nuqtalar mavjudki, $f(x_0) = \sup\{f(x)\}$ va $f(x_1) = \inf\{f(x)\}$.

Isbot. Teoremani yuqori aniq chegara uchun isbotlaymiz. Teskarisini faraz qilaylik. Agar $\sup\{f(x)\} = M$ desak, 6-teoremaga ko'ra M -chekli son bo'ladi. Farazga ko'ra istalgan $x \in [a,b]$ uchun $f(x) < M$ tengsizlik o'rinli bo'lsin, u holda $\forall x \in [a, в]$ uchun $M - f(x) > 0$.

Bundan esa

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}$$

funksiyaning $[a,b]$ oraliqda uzluksiz ekanligi kelib chiqadi. Veyershtrassning birinchi teoremasiga ko'ra $g(x)$ funksiya chegaralangan bo'ladi, ya'ni shunday $\delta > 0$ son mavjudki, istalgan $x \in [a,b]$ uchun $g(x) < \delta$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, istalgan $x \in [a,b]$ uchun

$$\frac{1}{M - f(x)} < \delta,$$

ya'ni $\frac{1}{\delta} < M - f(x)$ yoki $f(x) < M - \frac{1}{\delta}$. Bu holda $\sup\{f(x)\} \le M - \frac{1}{\delta}$ tengsizlik o'rinli bo'lib, bu esa $\sup\{f(x)\} = M$ ekanligiga ziddir. Bu ziddiyat qilingan farazning noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi. Teorema isbot bo'ldi.

Izoh. x_0 va x_1 nuqtalarda $f(x_0)=\sup\{f(x)\}$ va $f(x_1)=\inf\{f(x)\}$ tengliklarning o'rinli ekanligi $f(x)$ uzluksiz funksiya uchun $[a,b]$ oraliqda uning eng katta va eng kichik qiymatlari mavjud ekanligi va quyidagi tengliklar o'rinli ekanligini bildiradi:

$$f(x_0)=\max_{x\in[a,b]}\{f(x)\} \text{ va } f(x_1)=\min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

Xulosa

Uzluksiz funksiya ta'rifi va uning xossalari keltirilgan Ba'zi elementar funksiyalar uzluksizlikka tekshirilgan.

Tayanch iboralari

Limit, cheksiz kichik miqdorlar, funksiya, uzluksizlik.

Takrorlash uchun savollar

1. Uzluksiz funksiya ta'rifini aytib, misollar keltiring.
2. Ajoyib limitlarni yozing.
3. Veyershtrass teoremalarini ayting.
4. Chegaralangan ketma-ketlikka misollar keltiring.
5. Noaniqliklarni ochishga misollar keltiring.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.

8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma'ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

3-bob. BIR O'ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR DIFFERENTSIAL HISOBI

3.1. Hosila tushunchasi

Biz $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada uzluksizligini

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \qquad (1)$$

tenglik bajarilishi orqali ta'riflagan edik. Agar $x - x_0 = \Delta x$ - argument orttirmasi deb nomlanuvchi kattalikni kiritsak, $x \to x_0$ da tabiiy $\Delta x \to 0$. (1) limitda yangi o'zgaruvchiga $x = x_0 + \Delta x$ o'tsak, uni quydagicha yozish mumkin

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \qquad (2)$$

Agar funksiya orttirmasi deb nomlanuvchi $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = \Delta y$ miqdorni kiritsak, (2)dan

$$\lim_{x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, $y = f(x)$ funksiya x_0 nuqtada uzluksiz bo'lsa, argument orttirmasi Δx nolga intilganda, ya'ni Δx cheksiz kichik miqdor bo'lganda, unga mos keluvchi funksiya orttirmasi $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ ham nolga intilishi, ya'ni cheksiz kichik miqdor bo'lishi kelib chiqadi. Shuni e'tiborga olsak, x_0 nuqtada uzluksiz bo'lgan $y = f(x)$ funksiya uchun, ushbu

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \qquad (3)$$

limit $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lishligi kelib chiqar ekan. Avval ko'rganimizdek bunday noaniqliklar qaralayotgan funksiyaga bog'liq bo'lib, (3) limit qiymati chekli, cheksiz yoki mavjud bo'lmasligi mumkin. Umuman aytganda (3)-ko'rinishdagi limitni x_0 nuqta atrofida berilgan istalgan funksiya uchun qarashimiz mumkin. Shuni ta'kidlash lozimki, agar (3) limit qaralayotgan $y = f(x)$ funksiya uchun chekli bo'lsa, u holda bu funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz bo'lishligi kelib chiqadi. Haqiqatan ham, agar

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a$$

bo'lib, a - chekli son bo'lsa, funksiya limiti ta'rifiga ko'ra $\varepsilon > 0$ son uchun, shunday $\delta > 0$ son mavjud bo'ladiki $0 < |\Delta x| < \delta$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha Δx lar uchun

$$a - \varepsilon < \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} < a + \varepsilon$$

ya'ni qaralayotgan Δx lar uchun, $\Delta x > 0$ bo'lganda

$$(a - \varepsilon) \cdot \Delta x < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < (a + \varepsilon) \cdot \Delta x \qquad (4)$$

yoki $\Delta x < 0$ bo'lganda

$$(a + \varepsilon) \cdot \Delta x < f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) < (a - \varepsilon) \cdot \Delta x \qquad (5)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi. U holda (4) tengsizlikdan $f(x_0 + 0) = f(x_0)$ va (5) tengsizlikdan $f(x_0 - 0) = f(x_0)$ ekanligini hosil qilamiz. Bundan,

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0),$$

ya'ni $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

1-ta'rif. Agar ushbu limit qiymati $\lim_{\Delta x \to} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ chekli bo'lsa, u holda $y = f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega deyiladi.

Limit qiymati $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi hosilasi deyiladi, va quyidagicha belgilanishi mumkin.

$$y'(x_0),\ f'(x_0),\ \frac{dy(x_0)}{dx},\ \frac{df(x_0)}{dx},\ y'_x(x_0)$$

Demak, $f'(x_0)$ deb quyidagini

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

tushunar ekanmiz. Hosila ta'rifidan, agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu funksiya $x=x_0$ nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqar ekan. Teskari tasdiq noto'g'ri ekanligini, ushbu uzluksiz $f(x)=|x|$ funksiyaning $x=0$ nuqtada hosilasi mavjud emasligi isbot qiladi. Haqiqatan ham, quyidagi tengliklar

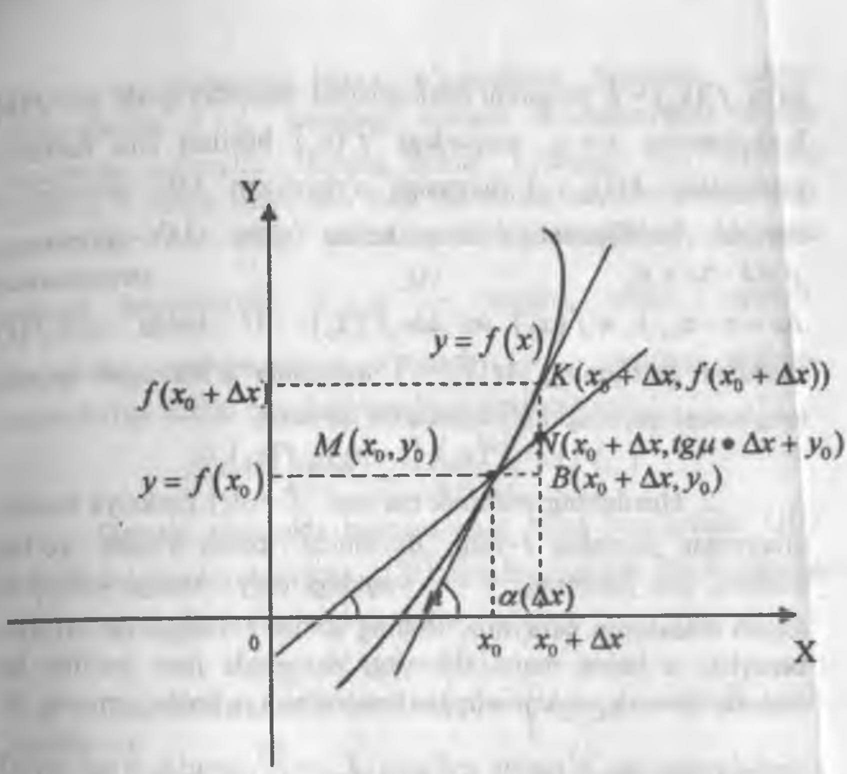
$$\lim_{\Delta x\to+0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to+0}\frac{\Delta x}{\Delta x}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to-0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to-0}\frac{-\Delta x}{\Delta x}=-1$$

$\lim\limits_{\Delta x\to0}\dfrac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}$ -limitning mavjud emasligini ko'rsatadi, ya'ni $f(x)=|x|$ funksiya $x=0$ nuqtada hosilaga ega emas, ammo $f(x)=|x|$ uzluksiz funksiya.

Endi, funksiya hosilasi qanday ma'no kasb etishini ko'rib chiqaylik.

1. Hosilaning geometrik ma'nosi. Tekislikda berilgan $y=f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0,y_0)$, (bu yerda $y_0=f(x_0)$) nuqtasiga o'tkazilgan urinmani qaraymiz. Bu urinmani hosil qilish uchun quyidagi chizmada, avval *MK* kesuvchi to'g'ri chiziq o'tkazamiz. So'ngra Δx-orttirmani nolga intiltirsak, grafikdagi K-nuqta, M-nuqtaga yaqinlasha borib,



MK to‘g‘ri chiziq MN-urinma holatini egallaydi. U $\Delta x \to 0$ da MK to‘g‘ri chiziq OX-o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan $\alpha(\Delta x)$ burchagi, MN-urinma hosil qilgan φ burchakka intiladi. Bu yerda MN to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y - y_0 = tg\varphi \cdot (x - x_0)$ ko‘rinishda bo‘lib, $x - x_0 = \Delta x$ va $tg\varphi = k$ - MN to‘g‘ri chiziq OX o‘qining musbat yo‘nalishi bilan hosil qilgan burchak koeffitsienti ekanligini e'tiborga olsak, MN to‘g‘ri chiziq tenglamasi $y = k \cdot \Delta x + y_0$ ko‘rinishda bo‘ladi. 1-chizmada MKB uchburchak uchun $MB = \Delta x$, $KB = \Delta y$ va $tg\alpha(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ Demak,

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} tg\alpha(\Delta x) = tg\varphi = k$$

ya'ni $f'(x_0) = k$ tenglikni hosil qilamiz. Shunday qilib, $y = f(x)$ funksiyaning $x = x_0$ nuqtadagi $f'(x_0)$ hosilasi shu funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasiga o'tkazilgan MN urinmaning burchak koeffitsientiga teng bo'lar ekan. MN-urinmaning $y = k \cdot \Delta x + y_0$ tenglamasida $\Delta x = x - x_0$, $y_0 = f(x_0)$ va $k = f'(x_0)$. U holda $y = f(x)$ funksiya grafigining $M(x_0, y_0)$ nuqtasida o'tkazilgan urinma tenglamasi quyidagi ko'rinishda bo'lar ekan.

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

2. Hosilaning mexanik ma'nosi. $S = s(t)$ funksiya harakat qilayotgan jismning t-vaqt davomida bosib o'tgan yo'lini bildirsa, shu jismning $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezligi $\vartheta(t_0)$ ni topish masalasini qaraymiz. Buning uchun t-vaqtga Δt orttirma beraylik, u holda mana shu vaqt davomida jism ma'lum bir masofa $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ni bosib o'tadi, u holda jismning Δt vaqt davomidagi o'rtacha tezligini $\vartheta_{o'r} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ tenglik orqali topish mumkin. Tabiiyki o'rtacha tezlik, $t = t_0$ vaqtdagi oniy tezlik $\vartheta(t_0)$ga qandaydir xatolik bilan teng bo'ladi. Biz $|\Delta t|$ vaqt kattalikni qanchalik kichik qilib olsak, $\vartheta_{o'rta}$-o'rtacha tezlik $\vartheta(t_0)$ oniy tezlikka shunchalik yaqin bo'lib, xatolik kam bo'ladi. Shuning uchun,

$$\vartheta(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \vartheta_{o'rta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = S'(t_0)$$

tenglik o'rinli deya olamiz. Natijada jismning $S = s(t)$ harakat tenglamasida, yo'ldan t-vaqt bo'yicha olingan hosila, shu jismning ayni t-vaqtdagi tezligiga teng bo'lar ekan, ya'ni

$$S'(t) = \vartheta(t).$$

3. Hosilaning iqtisodiy ma'nosi. Shuni ta'kidlash lozimki, hosilaning iqtisodiy ma'nosi ko'p qirrali bo'lib, muayyan ob'ektga yo'naltirilgan maqsaddan kelib chiqadi. Biz shu masalalardan birini keltiramiz. $U = U(t)$ funksiya t-vaqt davomida ishlab

chiqarilgan mahsulot hajmi o'zgarishini bildirsin. Ishlab chiqarishning $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligini topish masalasini ko'raylik. Buning uchun t-vaqtga Δt- orttirma beramiz, u holda mana shu vaqt davomida ma'lum miqdordagi $\Delta U = U(t_0 + \Delta t) - U(t_0)$ mahsulot ishlab chiqariladi, o'rtacha mehnat unumdorlik $Z_{o'rta} = \dfrac{\Delta U}{\Delta t}$ tenglik orqali topiladi. Yuqoridagi mulohazalarga o'xshash $t = t_0$ vaqtdagi mehnat unumdorligi uchun quyidagi tenglikni hosil qilamiz:

$$Z(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} Z_{o'rta} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta U}{\Delta t} = U'(t_0)$$

Demak, mahsulot hajmini vaqt bilan bog'lovchi $U(t)$ funksiyaning vaqt bo'yicha $U'(t)$ hosilasi, ishlab chiqarishning $Z(t)$ unumdorligini berar ekan, ya'ni

$$U'(t) = Z(t)$$

Endi funksiya hosilasini topishning asosiy qoidalari bilan tanishamiz.

1. Agar $f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda istalgan o'zgarmas a- son uchun $\varphi(x) = a \cdot f(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi $\varphi'(x_0) = a \cdot f'(x_0)$, chunki funksiya limiti xossasiga ko'ra,

$$\varphi'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a f(x_0 + \Delta x) - a f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = a \cdot f'(x_0)$$

2. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x) = f(x) \pm g(x)$ funksiya ham $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi.

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$$

Haqiqatan ham, limit xossalari va hosila ta'rifiga ko'ra.

$$\varphi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\pm g(x_0+\Delta x)-(f(x_0)\pm g(x_0))}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\pm\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\pm$$

$$\pm\lim_{\Delta x\to 0}\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\pm g'(x_0)$$

3. $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada hosilasiga ega bo'lsa, u holda $\varphi(x)=f(x)\cdot g(x)$ funksiya ham $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, bu hosila quyidagi tenglik orqali topiladi.

$$\varphi'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

Funksiya limiti xossasiga va $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega funksiya shu nuqtada uzluksiz ekanligidan, quyidagini hosil qilamiz:

$$\varphi'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x_0+\Delta x)-\varphi(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)\cdot g(x_0+\Delta x)-f(x_0)\cdot g(x_0)}{\Delta x}=$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)]\cdot g(x_0+\Delta x)+f(x_0)[g(x_0+\Delta x)-g(x_0)]}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\cdot g(x_0+\Delta x)+$$

$$+\lim_{\Delta x\to 0}f(x_0)\cdot\frac{g(x_0+\Delta x)-g(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$$

4. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lib, $g(x_0)\neq 0$ bo'lsa, u holda $\varphi(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ funksiya ham $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'ladi va bu hosila quyidagi formula orqali topiladi:

$$\varphi'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$$

Funksiya limiti xossalari, $g(x)$ funksiyaning $x=x_0$ dagi uzluksizligi va $g(x_0)\neq 0$ ekanligidan, hamda $g(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida noldan farqli ekanligini e'tiborga olib quyidagini hosil qilamiz.

$$\varphi'(x_0) = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0)}{\Delta x} = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{f(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x)} - \frac{f(x_0)}{g(x_0)}}{\Delta x} =$$

$$= \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0) \cdot \Delta x} = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{1}{g(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0)} \cdot$$

$$\left[\frac{(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) \cdot g(x_0) - f(x_0)(g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x}\right] = \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot$$

$$\left[\ell im_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot (x_0) - \ell im_{\Delta x \to 0} f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}\right] =$$

$$= \frac{1}{g^2(x_0)} \cdot (f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0))$$

5. Agar $u = g(x)$ funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘lib, $y = f(u)$ funksiya esa, $u = u_0 = g(x_0)$ nuqtada hosilaga ega bo‘lsa, u holda $y = f(g(x))$ murakkab funksiya $x = x_0$ nuqtada hosilaga ega bo‘ladi va bu hosila quyidagi formula orqali topiladi.

$$y_0'(x_0) = f_u'(u_0) \cdot u_x'(x_0)$$

Haqiqatan ham, murakkab funksiya limiti va hosilaga ega bo‘lgan funksiya uzluksizligiga ko‘ra

$$y_x'(x_0) = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{\Delta x} = \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \ell im_{\Delta u \to 0} \frac{f(u_0 + \Delta u) - f(u_0)}{\Delta u} \cdot \ell im_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = f_u'(u_0) \cdot u_x'(x_0)$$

Bu yerda $\Delta u = g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$ bo‘lib, $\Delta x \to 0$ da $g(x)$ funksiya $x = x_0$ da uzluksiz bo‘lganligidan $\Delta u \to 0$ kelib chiqishi e'tiborga olingan.

6. Agar $y = f(x)$ va $x = g(y)$ funksiyalar o‘zaro teskari funksiyalar bo‘lib, $x = x_0$ nuqtada $f'(x_0) \neq 0$ va $y_0 = f(x_0)$ nuqtada $g'(y_0)$ hosilalar mavjud bo‘lsa, u holda $g_y'(y_0) = \frac{1}{f_x'(x_0)}$, ya'ni $x_y'(y_0) = \frac{1}{y_x'(x_0)}$ tenglik o‘rinli.

Murakkab funksiya hosilasiga va $x' = 1$ ekanlagini e'tiborga olib, $x = g(f(x))$ tenglikdan quyidagi kelib chiqadi.

$$1 = (x)' = (g(f(x_0)))'_x = g_y'(y_0) \cdot f_x'(x_0).$$

7. Agar funksiya $f(kx+b)$ ko'rinishda bo'lsa

$$(f(kx+b))' = kf'(kx+b)$$

bo'ladi. Bu tenglik murakkab funksiya hosilasidan kelib chiqadi.

Yuqoridagi qoidalar umumiy holda quyidagicha yozilishi mumkin:

1. $(a \cdot f(x))' = a \cdot f'(x), \quad a = const$
2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$
3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$
4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$
5. $y = f(u), \quad u = g(x)$

funksiyalar uchun $(f(u))_x' = f_x'(u) \cdot u_x'$.

6. $y = f(x)$ va $x = g(y)$ o'zaro teskari funksiyalar uchun, $x_y' = \dfrac{1}{y_x'}$.

7. $y = f(kx+b)$ funksiya uchun $y' = kf'(kx+b)$

Endi asosiy elementar funksiyalarning hosilalarini hisoblaylik.

1. $y = c = const$, u holda $(c)' = 0$ bo'ladi, chunki $\Delta y = 0$ bo'lgani uchun $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 0$.
2. $y = x^\alpha$ darajali funksiya uchun $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ o'rinli bo'ladi.

Limitning xossalariga ko'ra,

$$\left(x^{\alpha}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^{\alpha}-x^{\alpha}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^{\alpha}\left[\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\alpha}-1\right]}{x\cdot\frac{\Delta x}{x}} = \alpha\cdot\frac{x^{\alpha}}{x} = \alpha\cdot x^{\alpha-1}$$

Xususan, $(x)' = 1$.

3. $y = a^{x}$ $(a>0)$ ko'rsatkichli funksiya uchun $\left(a^{x}\right)' = a^{x}\ln a$. Ajoyib limit xossalariga ko'ra

$$\left(a^{x}\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x}\cdot\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x} = a^{x}\cdot\ln a.$$

Xususan, $\left(e^{x}\right)' = e^{x}$.

2 va 3 ning isbotida mos ravishda $\lim\limits_{x\to 0}\frac{(1+x)^{a}}{x} = a$ va $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x} = \ln a$ ekanligidan foydalanildi.

4. $y = \log_a x$ logarifmik funksiya $(a>0,\ a\neq 1)$ uchun $\left(\log_a x\right)' = \frac{\log_a e}{x}$. Haqiqatdan ham,

$$\left(\log_a x\right)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\log_a(x+\Delta x)-\log_a x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\frac{x+\Delta x}{x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}} = \frac{1}{x}\cdot\log_a e$$

Xususan, $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

5. $y = \sin x$ uchun $(\sin x)' = \cos x$. 1-ajoyib limit va $\cos x$ funksiya uzluksizligiga ko'ra

$$(\sin x)' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cdot\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{2\cdot\frac{\Delta x}{2}} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right) = \cos x$$

Bu yerdan funksiya hosilasi xossalaridan foydalanib quyidagilarni hosil qilamiz:

$$(\cos x)' = \left[\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right]' = \cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$$

$$(tgx)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)'\cdot\cos x - \sin x\cdot(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)' = \frac{(\cos x)'\cdot\sin x - \cos x\cdot(\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

6. Teskari trigonometrik funksiyalar. $y = \arcsin x$ uchun $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ tenglik o‘rinli bo‘ladi.

$x = \sin y$ funksiya $y = \arcsin x$ funksiyaga teskari bo‘lgani uchun, teskari funksiya hosilasi formulasiga ko‘ra

$$(arc\sin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Xuddi shunga o‘xshash, $y = arctgx$, $y = \arccos x$ va $y = arcctg$ funksiyalar uchun $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$, $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ va $(arcctg\,x)' = -\frac{1}{1+x^2}$ tengliklarni hosil qilish mumkin.

Yuqorida hosil bo‘lgan formulalarni quyidagi jadval ko‘rinishida ifoda qilamiz.

1. $c' = 0$

2. $x' = 1$

3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$

4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$

5. $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

6. $\left(a^x\right)' = a^x \cdot \ell na$

7. $\left(e^x\right)' = e^x$

8. $\left(\ell og_a^x\right)' = \frac{\ell og_a e}{x} = \frac{1}{x \cdot \ell na}$

9. $(\ell nx)' = \frac{1}{x}$

10. $(\sin x)' = \cos x$

11. $(\cos x)' = -\sin x$

12. $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

13. $(ctgx)' = \frac{-1}{\sin^2 x}$

14. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

15. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

16. $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$

17. $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$

3.2. Yuqori tartibli hosilalar

Agar $y = f(x)$ funksiya uchun (a,b) oraliqning har bir nuqtasida hosila mavjud bo'lsa, u holda (a,b) oraliqda yangi $f'(x)$ funksiyani hosil qilamiz. Bu $f'(x)$ funksiya $x = x_0 \in (a,b)$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, u holda $x = x_0$ nuqtada $y = f(x)$ funksiya ikkinchi tartibli hosilaga ega deyilib, bu xosila

$$y''(x_0),\ f''(x_0),\ \frac{d^2 y(x_0)}{dx^2},\ \frac{d^2 f(x_0)}{dx^2},\ y''_{x^2}(x_0)$$

shaklda belgilanadi. Demak, ikkinchi tartibli hosila quyidagi tenglik orqali topilar ekan:

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}$$

Xuddi shuningdek, $y=f(x)$ funksiya uchun uchinchi, to'rtinchi va n- tartibli hosilani aniqlash mumkin. Umumiy holda, agar $y=f(x)$ funksiya uchun (a,b) oraliqning har bir nuqtasida $(n-1)$-tartibli hosilaga ega bo'lib, mana shu hosil bo'lgan funksiyani $f^{(n-1)}(x)$ deb belgilasak, o'z navbatida $f^{(n-1)}(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtada hosilaga ega bo'lsa, bu hosila $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqtadagi n-tartibli hosilasi deyiladi. n-tartibli hosilani quyidagi ko'rinishlarda ifoda etish mumkin.

$$y^{(n)}(x_0),\ f^{(n)}(x_0),\ \frac{d^n y(x_0)}{dx^n},\ \frac{d^n f(x_0)}{dx^n},\ y^{(n)}_{x^n}(x_0)$$

Demak, ta'rifga ko'ra n-tartibli hosila

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}$$

tenglik orqali aniqlanar ekan. Bu tenglikni umumiy holda quyidagicha yozishimiz mumkin

$$f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)',\ n=1,2,3\ldots$$

bu yerda $f^{(0)}(x)=f(x)$.

Yuqori tartibli hosila uchun quyidagi tengliklar o'rinli bo'ladi.

1. $(cf(x))^{(n)}=c\cdot f^{(n)}(x)$ $\qquad c=const$

2. $(f(x)+g(x))^{(n)}=f^{(n)}(x)+g^{(n)}(x)$

3. $(f(ax+b))^{(n)}=a^n f^{(n)}(ax+b)$

4. $(f(x)\cdot g(x))^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(n-k)}(x)\cdot g^{(k)}(x)$

Bu tengliklarning barchasini matematik induktsiya usuli bilan isbot qilish mumkin. 4-tenglik Leybnits formulasi deb nomlanadi.

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqori tartibli hosilalarini keltiramiz. Bu formulalar ham matematik induktsiya usuli bilan isbot qilinadi.

1. $\left(x^m\right)^{(n)} = m\cdot(m-1)(m-2)\cdots(m-n+1)x^{m-n}$, m - istalgan haqiqiy son. Agar m natural son bo'lsa, $n>m$ uchun $\left(x^m\right)^{(n)}=0$ *ва* $n=m$ uchun $\left(x^m\right)^{(m)}=m!$.

2. $\left(a^x\right)^{(n)} = a^x\cdot(\ell na)^n$, xususan $\left(e^x\right)^{(n)}=e^x$

3. $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

4. $(\cos)^{(n)} = \cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$

3.3. Funksiya differentsiali

Matematika tadbiqida asosan taqribiy hisoblashlar qo'llaniladi. Taqribiy hisoblashlarning muhim manbai funksiya differentsiali hisoblanadi. Biz mana shu tushuncha bilan tanishamiz.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan bo'lib, x_0 nuqtada uzluksiz, ya'ni $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$ bo'lsin. Agar $x-x_0=\Delta x$ va $f(x)-f(x_0)=\Delta y$ deb belgilashlar kiritsak, Δx argument orttirmasi, Δy esa shu orttirmaga mos keluvchi funksiya orttirmasi bo'lib, yuqoridagi limit munosabatini quyidagicha yozish mumkin:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y = \lim_{\Delta x\to 0}\left[f(x_0+\Delta x)-f(x_0)\right]=0$$

2-ta'rif: Agar $\Delta x\to 0$ da, funksiya orttirmasi Δyni quyidagi ko'rinishda ifodalash mumkin bo'lsa,

$$\Delta y = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x) \qquad (1)$$

bu yerda A – o'zgarmas son, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$, u holda $y=f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi va funksiyaning x_0 nuqtadagi differentsiali $A\cdot\Delta x$ ga teng deb ataladi. Bu differentsial $A\cdot\Delta x=df(x_0)$ shaklda belgilanadi.

Izoh. $\alpha(\Delta x)$ funksiya uchun $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=0$ tenglik $\alpha(\Delta x)=0(\Delta x)$ kabi ifoda etiladi va $\alpha(\Delta x)$ funksiya $\Delta x\to 0$ da Δx ga nisbatan yuqori tartibli cheksiz kichik funksiya deyiladi. Masalan, $x\to 0$ da $1-\cos x=o(x)$ $x^2=o(x)$ bo'ladi, chunki $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{x}=0$ yoki $x\to 0$ da $1-\cos x=o(x)$ bo'ladi, sababi

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2\cdot\frac{x}{2}=0$$

tenglik o'rinlidir. Xuddi shunga o'xshash $x\to 1$ da $tg^2(x-1)=o(x-1), 1-\cos(x-1)=o(x-1)$ va x.k.

Agar (1) tenglikni Δx ga bo'lib $\Delta x\to 0$ da limitga o'tsak quyidagini hosil qilamiz:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(A+\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}\right)=A$$

Bu tenglikdan, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada hosilasi mavjud bo'lib, $f'(x_0)=A$ ekanligi kelib chiqar ekan. Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lsa, bu nuqtada funksiya hosilasi ham mavjud bo'lar ekan. Bu tasdiqning teskarisi ham o'rinli bo'lishini ko'rsatamiz.

1-teorema. x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan $f(x)$ funksiya shu nuqtada $f'(x_0)$ hosilaga ega bo'lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning $df(x_0)$ differentsiali mavjud bo'lib, bu differentsial uchun

$$df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x$$

tenglik o'rinli.

Isbot.

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

tenglikda $\frac{f(x_0-\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}-f'(x_0)=\alpha(\Delta x)$ belgilashni kiritsak, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha(\Delta x)=0$. U holda $\alpha(\Delta x)=\overline{\alpha}(\Delta x)\cdot\Delta x=o(\Delta x)$ bo'lgani uchun

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\cdot\Delta x.$$

Demak, $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada differentsiallanuvchi va

$$df(x_0)=f'(x_0)\cdot\Delta x \qquad (2)$$

tenglik o'rinli.

Xulosa qilib shuni aytish mumkin ekanki, $f(x)$ funksiyaning x_0 nuqtada differentsiallanuvchi bo'lishi uchun, funksiyaning x_0 nuqtada hosilaga ega bo'lishi zarur va yetarli, bu nuqtadagi differentsial uchun (2) tenglik o'rinlidir.

Shunday qilib, x_0 nuqtada differentsiallnuvchi funksiya orttirmasi

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+0(\Delta x)=df(x_0)+0(\Delta x) \qquad (3)$$

Taqribiy hisoblashlarni funksiya orttirmasini uning differentsiali bilan almashtirish orqali bajarish mumkin, ya'ni (3) tenglikda $\theta(\Delta x)$ni tashlab yuborsak quyidagi taqribiy

$$\Delta y\approx df(x_0)$$

tenglikni hosil qilamiz. Bu yerda yo'l qo'yilgan xatolik $\theta(\Delta x)$ ko'rinishda bo'lib, $|\Delta x|$ kichik bo'lgani sari bu xatolik $|\Delta x|$ ga nisbatan tezroq kichiklashib boradi.

Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalning har bir nuqtasida differentsiallanuvchi bo'lsa, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda differentsiallanuvchi deyiladi.

Endi misollar qaraymiz. $f(x)=x$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ da differentsiallanuvchi bo'lib, (2) tenglikga ko'ra

$$dx=(x)\cdot\Delta x=\Delta x$$

o'rinli bo'ladi, ya'ni erkli o'zgaruvchi uchun, uning differentsiali va orttirmasi teng bo'lar ekan.

Bu tenglikdan funksiya differentsiali uchun

$$df(x)=f'(x)\cdot dx \text{ yoki } dy=y'dx \qquad (4)$$

tenglikni yoza olamiz. Demak,

$$f'(x)=\frac{df(x)}{dx},\ y'=\frac{dy}{dx}.$$

(4) tenglikka tayanib asosiy elementar funksiyalarning differentsiali va differentsiallash qoidalarini kelitiramiz.

1. $d(c)=0 \qquad c=const$
2. $d(x^{\alpha})=\alpha\cdot x^{\alpha-1}dx$
3. $d(a^{x})=a^{x}\ell na\,dx,\ d(e^{x})=e^{x}\,dx$
4. $d(\ell og_a x)=\frac{1}{x\ell na}dx,\ d(\ell nx)=\frac{1}{x}dx$
5. $d(\sin x)=\cos x\,dx$
6. $d(\cos x)=-\sin x\,dx$
7. $d(tg\,x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx$
8. $d(ctg\,x)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$
9. $d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
10. $d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$
11. $d(arctg\,x)=\frac{1}{1+x^2}dx$
12. $d(arcctg\,x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$

Differentsiallash qoidalari quyidagi ko'rinishda bo'ladi.

1. $d(cf(x))=c\cdot df(x), \quad c=const$
2. $d[f(x)\pm g(x)]=df(x)\pm dg(x)$
3. $d[f(x)\cdot g(x)]=g(x)df(x)+f(x)dg(x)$
4. $d\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{g(x)df(x)-f(x)dg(x)}{g^2(x)}$

Yuqori tartibli differentsiallar

$df(x)=f'(x)dx$, tenglikda dx-erkli o'zgaruvchining orttirmasini o'zgarmas deb qarasak, $df(x)$ funksiya differentsiali x ning funksiyasi ekanligi kelib chiqadi, shuning uchun $df(x)$ funksiya differentsialini topish masalasini ko'rishimiz mumkin. Bu differentsial $f(x)$ funksiyaning ikkinchi tartibli differentsiali deb atalib, $d^2 f(x)$ shaklda belgilanadi, ya'ni

$$d^2 f(x)=d(df(x))=d(f'(x)dx)=d(f'(x))dx=f''(x)dx\cdot dx=f''(x)dx^2.$$

Xuddi shunga o'xshash

$$d^3 f(x)=f'''(x)dx^3$$

$$d^4 f(x)=f^{IV}(x)dx^4$$

$$d^n f(x)=f^{(n)}(x)dx^n, \text{ yoki } y^{(n)}=\frac{d^n y}{dx^n}$$

tengliklarni hosil qilamiz.

Ko'paytmaning yuqori tartibli differentsiali uchun, Leybnits formulasini e'tiborga olib, quyidagi tenglikni hosil qilamiz

$$d^n(f(x)g(x))=\sum_{k=0}^{n} C_n^k d^{n-k} f(x)\cdot d^k g(x),$$ bu yerda $d^0 f(x)=f(x), d^0 g(x)=g(x)$ deb olingan.

3.4. Differentsial hisobning asosiy teoremalari

Yuqorida kiritilgan funksiya hosilasi va differentsialining tadbiqlari quyidagi teoremalarga asoslangandir.

2-teorema (Ferma teoremasi). Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)(\delta>0)$ atrofida berilgan bo'lib, x_0 nuqtada eng katta (eng kichik) qiymatga erishib, $f'(x_0)$- hosilasi mavjud bo'lsa, u holda bu hosila nolga teng, ya'ni $f'(x_0)=0$.

Isbot. Istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \le f(x_0)$, ya'ni

$$f(x_0) = \max_{x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)} \{f(x)\}$$

bo'lsin, u holda $f'(x_0)$ mavjudligidan

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to -0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \ge 0$$

bo'ladi, chunki $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \le 0$ va $\Delta x < 0$. Xuddi shunga o'xshash

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to +0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \le 0$$

bo'ladi, chunki $f(x_0 - \Delta x) - f(x_0) \le 0$ va $\Delta x > 0$. U holda, bu tengsizliklardan $f'(x_0) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

3-teorema (Roll teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lib, oraliq chegaralarida bir xil qiymatlarni qabul qilsa, ya'ni $f(a) = f(b)$ bo'lsa, u holda (a,b) intervalda shunday c nuqta topiladiki, uning uchun $f'(c) = 0$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Veyershtrasning 2- teoremasiga ko'ra $[a,b]$ oraliqda shunday x_1 va x_2 nuqtalar mavjud bo'ladiki, ular uchun

$$f(x_1) = \inf_{x \in [a,b]} \{f(x)\} \text{ va } f(x_2) = \sup_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$$

tengliklar o'rinli bo'ladi.

Agar $\{x_1; x_2\} = \{a, b\}$ bo'lsa, u holda $f(x_1) = f(x_2)$ va istalgan $x \in [a,b]$ uchun $f(x) = f(x_1) = f(x_2) = const$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, $f'(x) \equiv 0$ ekan, bu esa teoremaning $\{x_1; x_2\} = \{a, b\}$ hol uchun isbot bo'lganini bildiradi.

Agar $\{x_1; x_2\} \ne \{a, b\}$ bo'lsa, u holda $x_1 \in (a,b)$ yoki $x_2 \in (a,b)$. Bundan Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_1) = 0$ yoki $f'(x_2) = 0$ ekanligi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

Taqribiy hisoblash uchun qo'llaniladigan ko'pgina formulalarni hosil qilishda quyidagi Lagranj teoremasidan foydalaniladi.

4-teorema (Lagranj teoremasi). $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz va (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lsin, u holda (a,b) intervalda shunday c nuqta mavjudki, uning uchun quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi.

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Isbot. $\varphi(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a)$

funksiyani kiritamiz. $\varphi(x)$ funksiya uchun Roll teoremasining barcha shartlari o'rinli va

$$\varphi'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

U holda shunday $c\in(a,b)$ nuqta mavjudki $\varphi'(c)=0$ ya'ni

$$\varphi'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0.$$

Bu tenglikdan esa,

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

tenglik kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

3.5. Teylor formulasi

Endi biz taqribiy hisoblashlarda ko'p qo'llaniladigan formulani keltiramiz.

5-teorema. Agar $\tau(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan bo'lib, x_0 nuqtada n-tartibgacha $\tau^{(k)}(x)$, $k=1,2,\dots,n$ hosilalari mavjud bo'lib,

$$\tau(x_0)=\tau'(x_0)=\tau''(x_0)=\dots=\tau^{(n-1)}(x_0)=\tau^{(n)}(x_0)=0$$

tengliklar o‘rinli bo‘lsa, u holda $\tau(x)$ funksiya uchun $\tau(x)=o((x-x_0)^n)$ munosabat o‘rinli bo‘ladi.

Isbot. Matematik induktsiya usuli yordamida isbot qilamiz. $n=1$ bo‘lsin, u holda

$$\tau(x_0)=\tau'(x_0)=0.$$

Bundan

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\tau(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\tau(x)-\tau(x_0)}{x-x_0}=\tau'(x_0)=0$$

tenglik kelib chiqadi, ya'ni $\tau(x)=o((x-x_0))$ ekan.

Endi $n-1$ da $\tau(x_0)=\tau'(x_0)=\cdots=\tau^{(n-1)}(x_0)=0$ tengliklardan $\tau(x)=0\left((x-x_0)^{n-1}\right)$ munosabat o‘rinli ekanligi kelib chiqsin deb faraz qilaylik va n da $\tau(x_0)=\tau'(x_0)=\cdots=\tau^{(n-1)}(x_0)=\tau^{(n)}(x_0)=0$ tengliklar o‘rinli bo‘lsin. Agar $\tau_1(x)=\tau'(x)$ belgilashni kiritsak, $\tau(x_0)=\tau'(x_0)=\cdots=\tau^{(n-1)}(x_0)=0$ ekanligi kelib chiqadi, demak,

$$\tau_1(x)=o((x-x_0)^{(n-1)}).$$

Teorema isbot bo‘ldi.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtaning biron-bir atrofida berilgan va bu atrofda uning $(n-1)$ tartibli hosilasi mavjud va x_0 nuqtada $f(x)$ funksiyaning n-tartibli hosilasi mavjud bo‘lsin. Bu shartlarda x_0 ning qaralayotgan atrofida quyidagi $p(x)$-ko‘phadni aniqlay olamiz:

$$p(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-$$

Agar $\tau_n(x)=f(x)-p(x)$ funksiyani tekshirsak, $\tau_n(x_0)=\tau_n'(x_0)=\cdots=\tau_n^{(n)}(x_0)=0$ tengliklar kelib chiqadi. Yuqoridagi teoremaga ko‘ra $\tau(x)=0\left((x-x_0)^{(n)}\right)$ munosabat o‘rinlidir. Bundan Teylor formulasi deb nomlanuvchi formulani hosil qilamiz

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\tau_n(x), \quad (5)$$

bu yerda $\tau_n(x)$ formulaning qoldiq hadi deyiladi.

Isbot qilinganiga ko'ra $\tau_n(x)=0\left((x-x_0)^{(n)}\right)$, ya'ni x o'zgaruvchi x_0 dan yetrarlicha kam farq qilsa, $\tau_n(x)$ ham 0 dan $(x-x_0)^n$ tartibda farqlanadi, ya'ni n qanchalik katta bo'lsa ($|x-x_0|<1$ deb olish mumkin), $\tau_n(x)$ ifoda 0 dan shunchalik kam farq qiladi. Demak, hisoblashlarda ushbu

$$f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

taqribiy formuladan foydalanishimiz mumkin ekan.

(5) formulada $x-x_0=\Delta x$ deb belgilasak, Teylor formulasining quyidagi ko'rinishlarini hosil qilamiz:

$$f(x)-f(x_0)=\Delta f(x_0)=f'(x_0)\Delta x+\frac{1}{2!}f''(x_0)\Delta x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0)\Delta x^n+o(\Delta x^n)$$

$$\Delta f(x_0)=df(x_0)+\frac{1}{2!}d^2f(x_0)+\cdots+\frac{1}{n!}d^nf(x_0)+o(\Delta x^n)$$

Agar (5) formulada $x=0$ deb olinsa, Makloren formulasi deb nomlanuvchi ushbu formulani hosil qilamiz:

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+o(x^n)$$

Endi ayrim elementar funksiyalarning yuqoridagi formulalarga yoyilmasini topaylik

1) $f(x)=e^x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=e^x$ va $f^{(0)}(0)=1$ bo'lgani uchun,

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+0(x^n).$$

2) $f(x)=\sin x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ va $f^{(n)}(0)=\sin\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ ekanligidan, $n=2k$ bo'lsa, $f^{(2k)}(0)=0$ va

$n=2k-1$ bo'lsa $f^{(2k-1)}(0)=\sin\left(k\pi-\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^{k-1}$ shuning uchun

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{k-1}\frac{x^{2k-1}}{(2k-1)}+o(x^{2k}).$$

3) $f(x)=\cos x$ bo'lsa, $f^{(n)}(x)=\cos\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ va

$f^{(n)}(0)=\cos\left(n\cdot\frac{\pi}{2}\right)$ $n=2k$ bo'lganda $f^{(2k)}_{(0)}=\cos(k\pi)=(-1)^k$

va $n=2k-1$ bo'lganda $f^{(2k-1)}(0)=0$ shuning uchun

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots+(-1)^k\frac{x^{2k}}{(2k)!}+o(x^{2k+1}).$$

Hosil qilingan yoyilmalar e^x, $\sin x$ va $\cos x$ funksiyalar qiymatini topish x ga nisbatan ko'phad bo'lgan qiymatini topishga olib kelishini ko'rsatadi.

3.6. Funksiyani hosila yordamida tekshirish va uning grafigini yasash

Endi funksiyani tekshirishda hosilaning qo'llanilishini ko'rib chiqamiz.

6-teorema. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas bo'lishi uchun, uning hosilasi shu intervalda nolga teng bo'lishi zarur va yetarli.

Isbot. Zarurligi. Agar $x\in(a,b)$ uchun $f(x)=c=const$ bo'lsa, $f'(x)=(c)'=0$ bo'lishi kelib chiqadi.

Yetarliligi. Ixtiyoriy $x\in(a,b)$ uchun $f'(x)=0$ bo'lsin, u holda $a<x_0<b$ va $a<x<b$ uchun $[x_0,x]$ oraliqda $f(x)$ funksiyaga Lagranj teoremasini qo'llasak

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(c),\ (x_0<c<x)$$

tenglik o'rinli bo'lib, $f'(c)=0$ dan $f(x)=f(x_0)$ ekanligi kelib chiqadi. Ya'ni $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'zgarmas ekanligini hosil qilamiz. Teorema isbot bo'ldi.

Natija. Agar $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uchun (a,b) intervalda $f'(x)=g'(x)$ tenglik o'rinli bo'lsa, shu intervalda

$$f(x)=g(x)+c, \qquad c=const$$

tenglik o'rinlidir.

Haqiqatan ham, $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ funksiya uchun (a,b) intervalda $\varphi'(x)=0$ ekanligi kelib chiqadi. U holda 1-teoremaga ko'ra $\varphi(x)=c=const, x\in(a,b)$, natijada

$$f(x)=g(x)+c,\ x\in(a,b).$$

7-teorema. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lib, barcha $x\in(a,b)$ uchun $f'(x)>0$ $(f'(x)<0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'ladi.

Isbot. $a<x_1<x_2<b$ bo'lsin, u holda $[x_1,x_2]$ oraliqda Lagranj teoremasiga ko'ra, shunday $c\in(x_1,x_2)$ mavjudki, uning uchun

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=f'(c)>0.$$

Bundan $x_2-x_1>0$ bo'lgani uchun $f(x_2)-f(x_1)>0$, ya'ni $f(x_1)<f(x_2)$. Demak, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi ekan. $f'(x)<0$ bo'lganda $f(x)$ funksiyaning kamayuvchi ekanligi shunga o'xshash tarzda isbot qilinadi.

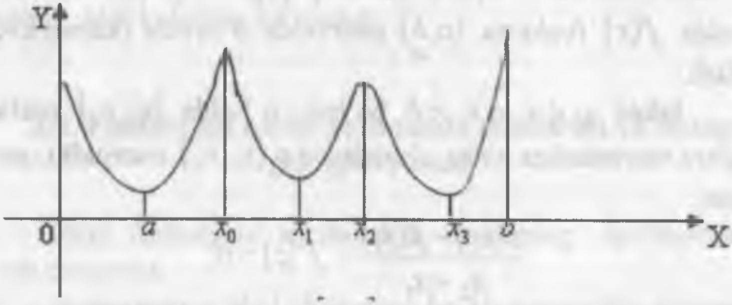
Izoh. Agar $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda o'suvchi (kamayuvchi) bo'lib, shu intervalda $f'(x)$ hosila mavjud bo'lsa, hosila uchun $f'(x)\geq 0$ $(f'(x)\leq 0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi, deyish mumkin, ya'ni o'suvchi (kamayuvchi) funksiyaning ayrim nuqtalaridagi hosilasi nolga teng bo'lishi mumkin. Masalan

$y = x^3$ funksiya $(-\infty, +\infty)$ oraliqda o'suvchi bo'lib, uning hosilasi $y' = 3x^2$, $x = 0$ da $y'(0) = 0$ bo'ladi.

Funksiya ekstremumi

Funksiya grafigini chizishda uning maksimum va minimum nuqtalari muhim o'rin egallaydi.

3-ta'rif. Agar x_0 nuqtaning shunday atorfi $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $(\delta > 0)$ mavjud bo'lsaki, shu oraliqdan olingan istalgan $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ uchun $f(x) \le f(x_0)$ $(f(x) \ge f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal maksimumga (lokal minimumga) erishadi deyiladi. Funksiyaning lokal maksimum va lokal minimum nuqtalari, funksiyaning lokal ekstremumlari yoki shunchaki funksiya ekstemumlari deb yuritiladi.



Funksiya berilgan $[a,b]$ oraliqda bir necha lokal ekstremumlarga ega bo'lishi mumkin. Masalan, rasmda x_0, x_1, x_2, x_3 nuqtalarda funksiya lokal ekstremumlarga erishadi. $[a,b]$ oraliqdagi funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari funksiyaning global ekstremumlari deyiladi. Funksiya global ekstremumga oraliq chegaralarida erishishi mumkin. Masalan, rasmdagi funksiya uchun $f(b) = \max\limits_{x \in [a,b]} \{f(x)\}$ ekanligini ko'rish mumkin.

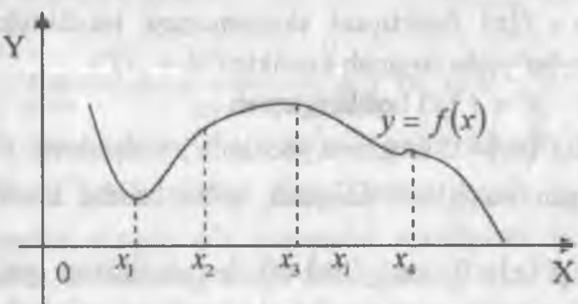
Agar $f(x)$ funksiya x_0 nuqtada lokal ekstremumga erishib, bu nuqtada $f'(x_0)$ hosila mavjud bo'lsa, Ferma teoremasiga ko'ra $f'(x_0)=0$. Lekin, $f'(x_0)=0$ ekanligidan, x_0 nuqtada funksiya ekstremumga erishadi deya olmaymiz. Masalan $y=x^3$ funksiya, $(-\infty,+\infty)$ da o'suvchi bo'lgani uchun uning ekstremum nuqtalari mavjud emas, lekin $y'=3x^2$ hosila $x=0$ da nolga teng bo'ladi. Shu bilan birga $y=\sqrt[3]{x^2}$ funksiya $x=0$ nuqtada lokal ekstremumga ega bo'lib, bu nuqtada funksiya lokal minimumga erishgani bilan, $x=0$ nuqtada funksiya hosilasi mavjud emasligini avval ko'rgan edik

Yuqorida aytilganlarga asoslanib, lokal ekstremumning quyidagi zaruriy shartini keltirishimiz mumkin.

$f(x)$ funksiya x_0 nuqtada ekstremumga erishishi uchun, shu nuqtada funksiya hosilasi nolga teng bo'lishi yoki funksiya hosilasi mavjud bo'lmasligi zarur.

Funksiya hosilasi nolga teng bo'lgan nuqtalar, ya'ni $f'(x)=0$ tenglama yechimlari va hosila mavjud bo'lmagan nuqtalar, funksiyaning kritik (yoki statsionar) nuqtalari deyiladi.

Demak, funksiyaning ekstremum nuqtalarini uning kritik nuqtalari orasidan izlashimiz kerak.



Chizmadagi $y=f(x)$ funksiya uchun x_1,x_2,x_3,x_4 nuqtalar kritik nuqtalar bo'lib, ($f'(x_1)$ mavjud emas, $f'(x_2)=\infty$, $f'(x_3)=0$, $f'(x_4)=0$) faqat, x_1 va x_3 nuqtalari ekstremum nuqtalari bo'ladi.

Funksiya ekstremumining birinchi yetarli sharti

8-teorema. Agar x_0 kritik nuqta atrofida x nuqta chapdan o'ngga qarab o'zgarganda, $f(x)$ funksiya hosilasi o'z ishorasini musbatdan manfiyga(manfiydan musbatga) o'zgartirsa, bu x_0 nuqta lokal maksimum nuqta (lokal minimum) bo'ladi.

Isbot. Agar $(x_0-\delta, x_0)(\delta>0)$ intervalda $f'(x)>0$ bo'lsa, funksiya bu oraliqda o'suvchi bo'lganligidan istalgan $x\in(x_0-\delta, x_0)$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Agar $(x_0, x_0+\delta)$ intervalda $f'(x)<0$ bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya kamayuvchi bo'lib, barcha $x\in(x_0, x_0+\delta)$ lar uchun $f(x)\leq f(x_0)$ tengsizlik o'rinli bo'ladi. Demak, istalgan $x\in(x_0-\delta, x_0+\delta)$ uchun $f(x)\leq f(x_0)$, ya'ni x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal maksimumga erishar ekan. Demak, hosila x_0 kritik nuqta atrofida ishorasini musbatdan manfiyga o'zgartirsa x_0 nuqta, uning maksimum nuqtasi bo'lar ekan.

Shunga o'xshash, x_0 atrofida hosila ishorasi manfiydan musbatga o'zgargan holda, x_0 nuqta lokal minimum ekanligini isbotlash mumkin.

$y=f(x)$ funksiyani ekstremumga tekshirishni quyidagi algoritm bo'yicha bajarish mumkin:

1. $y'=f'(x)$ hosilani topish.

2. $f'(x)=0$ tenglama yechimlarini topish va $f'(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, ya'ni barcha kritik nuqtalarni topish.

3. $f'(x)>0$ va $f'(x)<0$ tengsizliklarni yechib, $f'(x)$ hosilaning kritik nuqta atrofidagi ishoralarini aniqlash lozim.

Agar kritik nuqtadan chapda va o'ngda hosila turli ishoralarga ega bo'lsa, funksiya shu nuqtada ekstremumga erishadi, aks holda bu kritik nuqta ekstremum nuqta bo'lmaydi. Kritik nuqta atrofida funksiya hosilasi ishorasi chapda + va o‘ngda – bo‘lsa bu nuqta lokal maksimum, chapda – va o‘ngda + bo‘lsa, bu nuqta lokal minimum nuqta bo‘ladi.

4.Funksiyaning ekstremum qiymatlarini topish.

Funksiya ekstremumining ikkinchi yetarli sharti

9-teorema. Agar x_0 nuqta atrofida $f(x)$ funksiya hosilaga ega va $f'(x_0)=0$, hamda x_0 nuqtada funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo‘lib, $f''(x_0)>0$ $(f''(x_0)<0)$ bo‘lsa, u holda x_0 nuqtada $f(x)$ funksiya lokal minimumga (lokal maksimumga) erishadi.

Isbot. $f'(x_0)=0$ va $f''(x_0)>0$ bo‘lsin, u holda

$$\lim_{\Delta x\to -0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=f''(x_0)>0.$$

Bundan $f'(x_0)=0$ va $\Delta x<0$ ekanligidan, $f'(x_0+\Delta x)<0$ kelib chiqadi, ya'ni x_0 nuqtadan chapda hosila manfiy ekan. Shunga o‘xshash

$$\lim_{\Delta x\to +0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}=f''(x_0)>0$$

va $\Delta x>0$ bo‘lgani uchun $f'(x_0+\Delta x)>0$ kelib chiqadi, ya'ni x_0 nuqtadan o‘ngda hosila musbat ekan. Demak, hosila x_0 nuqta atrofida chapdan o‘ngga o‘z ishorasini manfiydan musbatga o‘zgartirar ekan, u holda x_0 nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo‘ladi.

$f''(x_0)<0$ bo‘lgan hol shunga o‘xshash isbot qilinadi. Teorema isbot bo‘ldi.

Bu teoremaga ko‘ra, x_0 kritik nuqta uchun $f''(x_0)\neq 0$ bo‘lsa ekstremum mavjudligi ta'minlanadi. Lekin $f''(x_0)=0$

ekanligidan ekstremum mavjud emas deya olmaymiz. Masalan, $y = x^4$ funksiya uchun, $x = 0$ nuqta ekstremum nuqta bo'lib, $y'' = 12x^2$ ikkinchi tartibli hosila esa nolga teng.

Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu oraliqda $f(x)$ funksiya o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga, ya'ni global ekstremumiga erishadi. Global ekstremumga $f(x)$ funksiya oraliqning chegaraviy nuqtalarida erishish mumkinligini e'tiborga olib, ularni topish uchun quyidagi algoritmni keltiramiz:

1. $f'(x)$ hosilani topish.
2. $f(x)$ funksiyaning [a,b] oraliqdagi kritik nuqtalarini topish
3. $f(a)$, $f(b)$ qiymatlarni aniqlash va barcha kritik nuqtalarda $f(x)$ funksiya qiymatlarini topib, bu qiymatlar orasidan eng kattasi va eng kichigini topish.

Funksiya qavariqligi va botiqligi. Egilish nuqtalari

Funksiya grafigini chizishda, grafikning qaysi oraliqlarda qavariqligi va botiqligini bilish muhimdir.

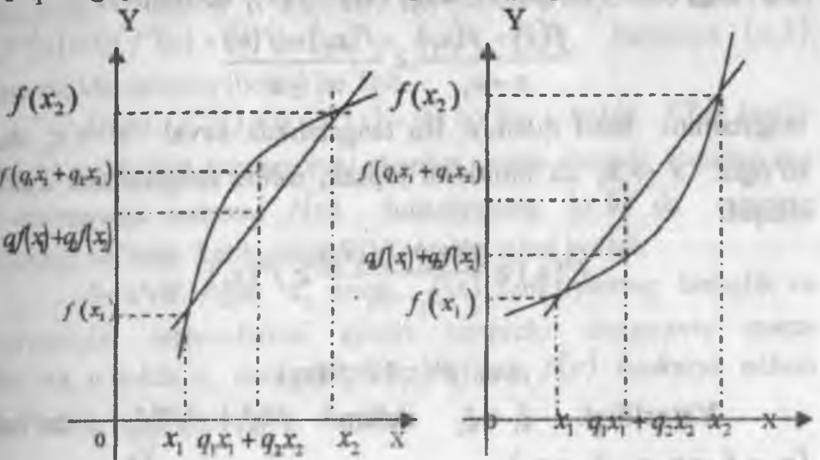
4-ta'rif. Agar (a,b) intervaldan olingan istalgan x_1 va x_2 lar va $q_1 + q_2 = 1$ munosabatni qanoatlantiruvchi istalgan $q_1 \geq 0$ va $q_2 \geq 0$ sonlar uchun

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$
$$(f(q_1x_1 + q_2x_2) \leq q_1f(x_1) + q_2(x_2))$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) deyiladi.

Bu ta'rifning geometrik ma'nosi shundan iboratki, agar funksiya (a,b) oraliqda qavariq (botiq) bo'lsa, (a,b) oraliqdan olingan istalgan x_1 va x_2 lar uchun grafikning $(x_1; f(x_1))$ va $(x_2; f(x_2))$

nuqtalarini tutashtiruvchi kesma funksiya grafigidan ordinatalar o'qining yo'nalishiga nisbatan quyida (yuqorida) yotadi.



10-teorema. (a,b) intervalda hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya, bu oraliqda qavariq (botiq) bo'lishi uchun, uning $f'(x)$ hosilasi (a,b) intervalda kamayuvchi (o'suvchi) bo'lishi zarur va yetarlidir.

Isbot. Zarurligi. $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq bo'lsin, ya'ni istalgan $x_1, x_2 \in (a,b)$ va $q_1 + q_2 = 1$ tenglikni qanoatlantiruvchi musbat q_1 va q_2 sonlar uchun

$$f(q_1x_1 + q_2x_2) \geq q_1f(x_1) + q_2f(x_2)$$

tenglik o'rinli bo'lsin. U holda $x_1 < x < x_2$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi x lar uchun,

$$q_1 = \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}, \quad q_2 = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

deb olsak, $q_1x_1 + q_2x_2 = x$ bo'lgani uchun quyidagi tengsizlikni hosil qilamiz

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1}f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}f(x_2).$$

Bundan,

$(x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1)f(x_2)$,yoki

$(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$ va nihoyat

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

tengsizlikni hosil qilamiz. Bu tengsizlikda avval $x \to x_1$ da, so‘ngra $x \to x_2$ da limitlarni topsak, ushbu tengsizliklar kelib chiqadi

$$f'(x_1) \geq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \geq f'(x_2)$$

$$\text{ya'ni } f'(x_1) \geq f'(x_2)$$

Yetarliligi. $\xi_1 < \xi_1$ uchun $f'(\xi_1) \geq f'(\xi_2)$ bo‘lsa $(x_1 < \xi_1 < x,\ x < \xi_2 < x_2)$

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \geq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}$$

tengsizlik o‘rinli bo‘ladi. Bu tengsizlikdan

$$(x_2 - x)[f(x) - f(x_1)] \geq (x - x_1)[f(x_2) - f(x)]$$

yoki

$$(x_2 - x_1)f(x) \geq (x_2 - x)f(x_1) + (x - x_1) \cdot f(x_2)$$

va nihoyat

$$f(x) \geq \frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} f(x_1) + \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} f(x_2)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Bunda $\frac{x_2 - x}{x_2 - x_1} = q_1$ va $\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = q_2$ belgilashlarga asosan, $q_1 \geq 0,\ q_2 \geq 0,\ q_1 + q_2 = 1$ va $x = q_1 x_1 + q_2 x_2$ munosabatlar o‘rinli ekanligidan

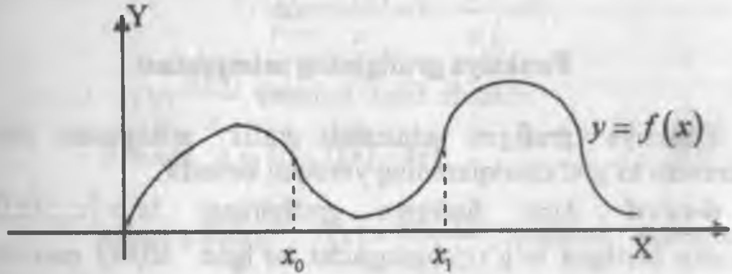
$$f(q_1 x_1 + q_2 x_2) \geq q_1 f(x_1) + q_2 f(x_2)$$

tengsizlik kelib chiqadi. Demak, $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq ekan. Botiq funksiya xossasi ham shu tarzda isbotlanadi. Teorema isbot bo‘ldi.

11-teorema. Agar $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervalda ikkinchi tartibli hosilasi mavjud bo'lib, bu intervalda $f''(x)<0\,(f''(x)>0)$ bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiya (a,b) intervalda qavariq (botiq) bo'ladi.

Isbot. $f''(x)<0$ ($f''(x)>0$) bo'lsa, u holda $f'(x)$ hosila (a,b) intervalda kamayuvchi ekanligi kelib chiqadi. Bundan esa 1-teoremaga asosan, $f(x)$ funksiyaning (a,b) da qavariq (botiq) bo'lishi kelib chiqadi. Teorema isbot bo'ldi.

5-ta'rif. Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning botiqlik va qavariqlik intervallarini ajratib turuvchi chegaraviy nuqta bo'lsa, u holda x_0 nuqta atrofida berilgan $f(x)$ funksiya uchun bu nuqta egilish nuqtasi deyiladi.



Chizmada x_0 va x_1 nuqtalar egilish nuqtalari bo'ladi.

Egilish nuqta ta'rifidan ular $f'(x)$ funksiya hosilasining ekstremum nuqtalari bo'lishi kelib chiqadi. Bularni e'tiborga olsak, quyidagi teoremalar o'rinli ekanligi ravshan bo'ladi.

12-teorema. (Egilish nuqtasining zaruriy sharti). Ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun x_0 nuqta egilish nuqtasi bo'lsa, u holda $f''(x_0)=0$.

13-teorema. (Egilish nuqtasining yetarli sharti). Agar ikkinchi tartibli hosilaga ega bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun $f''(x)$ hosila x_0 nuqta atrofida o'z ishorasini o'zgartirsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning egilish nuqtasi bo'ladi.

Berilgan $f(x)$ funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlarini va egilish nuqtalarini topishni quyidagi algoritm bo‘yicha bajarish mumkin:

1. $f''(x)$ hosilani topish;
2. $f''(x)=0$ tenglamani yechish va $f''(x)$ hosila mavjud bo‘lmagan nuqtalarni topish, ya'ni $f'(x)$ hosilaning kritik nuqtalarini topish.
3. $f'(x)$ ning kritik nuqtalari atrofida $f''(x)$ hosilaning ishoralarini aniqlash. Buning uchun $f''(x)>0$ va $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechish lozim.
4. Egilish nuqtalarida funksiya qiymatini hisoblash.

Funksiya grafigining asimptotasi

Funksiya grafigini chizishda grafik asimptotasi deb nomlanuvchi to‘g‘ri chiziqlarnning yordami kattadir.

6-ta'rif. . Agar funksiya grafigining $M=(x,f(x))$ nuqtasidan berilgan to‘g‘ri chiziqgacha bo‘lgan $d(M)$ masofa uchun $\lim\limits_{|M|\to+\infty} d(M)=0$ tenglik o‘rinli bo‘lsa, shu to‘g‘ri chiziq $y=f(x)$ funksiya grafigining asimtotasi deyiladi, bu yerda $|M|=\sqrt{x^2+f^2(x)}$ - M nuqtadan koordinata boshigacha bo‘lgan masofa.

Agar

$$\lim_{x\to x_0}|M|=+\infty$$

bo‘lsa u holda asimptota vertikal asimptota deyiladi. Vertikal asimptota $x=x_0$ to‘g‘ri chiziq bilan ifodalanadi.

Agar $\lim\limits_{x\to+\infty}|M|=+\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to-\infty}|M|=+\infty$ bo‘lsa, asimptota og‘ma asimptota deyiladi.

Og‘ma asimptota $y=kx+b$ ko‘rinishda bo‘ladi.

Agar og'ma asimptota uchun k=0 bo'lsa, ya'ni asimptota $y=b$ ko'rinishda bo'lsa, bunday asimptota gorizontal asimptota deyiladi.

$x=x_0$ vertikal asimptota, $y=f(x)$ funksiyani cheksizlikka aylantiruvchi x_0 nuqta bilan ifodalangani uchun, x_0 ni $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)=\infty$ yoki $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)=\infty$ tengliklarni qanoatlantiruvchi nuqta deb qarash kerak.

$y=kx+b$ og'ma asimptotani topish uchun ushbu tenglikdan

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0$$

foydalanish mumkin. Bu yerdan

$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right]=0,$$

ya'ni $k=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}$ ekanligi kelib chiqadi.

U holda $b=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-kx]$

Misol sifatida $f(x)=\frac{3x^2+1}{x-2}$ funksiya asimptotalarini topaylik. $x=2$ to'g'ri chiziq uning vertikal asimptotasi bo'ladi. Og'ma asimptota uchun quyidagilarni hosil qilamiz

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1}{x\cdot(x-2)}=3$$

$$b=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x^2+1}{x-2}-3x\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+1-3x^2+6x}{x-2}=6$$

Demak, $y=3x+6$ chiziq funksiya grafigining og'ma asimptotasi ekan.

Funksiyani tekshirish va uning grafigini chizishni quyidagi algoritm bo'yicha amalga oshirsa bo'ladi.

1. $y=f(x)$ funksiyaning aniqlanish sohasini, imkon bo'lsa o'zgarish sohasini ham topish.

2. Funksiyani juftlik, toqlik va davriylikka tekshirish.

3. $f(x)=0$ tenglama, $f(x)>0$ va $f(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiya nollarini, musbatlik va manfiylik intervallarini topish.

4. Funksiyani uzluksizlikka tekshirish.

5. Funksiyaning vertikal va og'ma asimptotalarini topish.

6. $f'(x)$ hosilani topish, hosila mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f'(x)=0$ tenglama va $f'(x)>0$, $f'(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning kritik nuqtalarini, o'sish va kamayish oraliqlarini topish. Funksiya ekstremumlarini topish.

7. $f''(x)$ hosilani topib, $f''(x)$ mavjud bo'lmagan nuqtalarni aniqlash, $f''(x)=0$ tenglama va $f''(x)>0$, $f''(x)<0$ tengsizliklarni yechish, ya'ni funksiyaning qavariqlik, botiqlik oraliqlari va egilish nuqtalarini topish.

8. Funksiya grafigiga aniqliklar kirituvchi ayrim nuqtalarni topish.

Lopital qoidasi

Limitlarni hisoblashda uchraydigan $\frac{0}{0}$ va $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqliklarni ochishda, quyidagi Lopital qoidasi deb nomlanadigan qoidani asoslab beruvchi, teoremani keltiramiz.

14-teorema. Agar $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$ limit $\frac{0}{0}$ yoki $\frac{\infty}{\infty}$ ko'rinishdagi noaniqlik bo'lib, $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ limit mavjud bo'lsa, (cheksiz bo'lishi ham mumkin), u holda

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. Isbotni $\frac{0}{0}$ ko'rinishdagi noaniqlik uchun keltiramiz. Demak,

$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a} g(x)=0$$

bo'lsin, u holda $f(a)=g(a)=0$ deb olib, Lagranj teoremasiga ko'ra

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi_1)(x-a)}{g'(\xi_2)(x-a)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Bu yerdagi oxirgi tenglik $|\xi_1-a|<|x-a|$ va $|\xi_2-a|<|x-a|$ tengsizlikdan kelib chiqadi.

Teorema isbot bo'ldi.

Misollar.

1. $\lim\limits_{x\to+0} x\cdot \ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to+0}(-x)=0$

2. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{2x}=\dfrac{1}{2}$

3.7. Hosilaning iqtisodiyotga tadbiqlari. Mikroiqtisodiyotda chegaraviy (marjinal) xarajatlar

Mikroiqtisodiyotdagi ikkita oxirgi ko'rsatkichga doir misollar keltiramiz.

1. Ulardan birinchisi ishlab chiqarilgan mahsulotning tannarxi C bilan uning hajmi Q orasidagi bog'lanish $A(Q)=Q:C$ aloqadorlik. Shunday qilib, MC chegaraviy xarajat ΔC-tannarxning mahsulot miqdorining o'sishi ΔQ ga nisbati bilan xarakterlanadi:

$$MC = \frac{\Delta C}{\Delta Q}. \qquad (6)$$

ΔC ning ΔQ bilan uzluksiz bog'liqligini faraz qilib, tabiiy ravishda (6) munosabatni uning limiti bilan almashtirish mumkin:

$$MC = \lim_{\Delta Q \to 0} \frac{\Delta C}{\Delta Q} = C'(Q). \qquad (7)$$

Odatda ilovalarda matematik apparatdan foydalanib chegaraviy xarajat deb (7) tenglik bilan aniqlanuvchi qiymat tushuniladi.

Masalan, faraz qilaylik ishlab chiqarish xarajatining ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmi bilan bog'liqligi quyidagi formula bilan ifodalangan bo'lsin:

$C = 40Q - 0.03Q^3$ pul birligi (Q-mahsulot hajmi, C-pul birligi) $Q = 15$ hajm birligida o'rtacha va chegaraviy xarajatni aniqlaymiz.

A) Mahsulot birligida sarflanadigan o'rtacha xarajat funksiyasi quyidagi formula bilan aniqlanadi: $\bar{C} = C/Q$, yoki bizning misolda

$$\bar{C} = 40 - 0.03Q^2,$$

bundan $\bar{C}(15) = 40 - 0.03 \cdot 225 = 33.25$ pul birligi.

B) Chegaraviy xarajat uchun (1a) ga ko'ra $Q = 15$ da $C'(15) = 19.75$ pul birligini olamiz.

Boshqacha aytganda, birlik mahsulot ishlab chiqarishga o'rtacha sarf 33.25 pul birligini tashkil qilsa, qo'shimcha mahsulot birligini ishlab chiqarishga sarflanadigan qo'shimcha xarajat 19.75 pul birligini tashkil qiladi va o'rtacha xarajatdan oshmaydi.

2. Narx navo siyosatining analizi va prognozida talabning elastiklik tushunchasi qo'llaniladi.

Faraz qilaylik $D = f(P)$- talab, talab funksiyasi, P-tovarning narxi bo'lsin. U holda ehtiyoj (talab)ning elastikligi deganda tovarning narxi bir foizga o'zgarayotganda ehtiyojning o'zgarish foizi

$$E = \frac{\Delta D / D \cdot 100\%}{\Delta P / P \cdot 100\%}$$ tushuniladi: **(8)**

Oldingi holdagiday, ΔD ΔP bilan uzluksiz bog'liq deb, $\Delta P \to 0$ da limitga o'tish qulay:

$$E(D) = P\frac{D'(P)}{D(P)} \qquad \textbf{(9)}$$

Shunga o'xshash tushunchani taklif $S(P)$ funksiyasi uchun ham kiritish mumkin. Eslatib o'tamiz, $D(P)$ funksiya kamayadi, $S(P)$ funksiya esa P narx o'sishi bilan o'sadi.

Elastiklikning ba'zi xossalarini ko'rsatamiz. (9) formuladan elastiklik formulasini quyidagicha ifodalash mumkinligi ko'rinib turibdi:

$$E(D) = P(\ell n D(P))'. \qquad \textbf{(10)}$$

(10) tenglikdan $E(D)$ ning logarifmik funksiya xossalariga ega ekanligi kelib chiqadi, ya'ni

$$E(D_1 D_2) = E(D_1) + E(D_2),$$

$$E\left(D_1 / D_2\right) = E(D_1) - E(D_2).$$

$D(P)$ kamayuvchi funksiya bo'lgani uchun $D'(P) < 0$, u holda (9) formulaga asosan $E(D) < 0$. Aksincha, talab funksiyasi o'suvchi ekanligidan, unga mos keluvchi $E(S)$ elastiklik funksiyasi uchun $E'(S) > 0$.

$|E(D)|$ ning kattaligiga qarab ehtiyojning uch turi farqlanadi:

a) agar $|E(D)| > 1$ $(E(D) < -1)$ bo'lsa, u holda talab elastik deb hisoblanadi;

b) agar $|E(D)| = 1$ $(E(D) = -1)$ bo'lsa, u holda talab birlik elastik deb hisoblanadi.

v) agar $|E(D)| < 1$ $(E(D) > -1)$ bo'lsa, u holda noelastik bo'lmagan deb hisoblanadi.

1-misol. Talab funksiyasi quyidagicha bo'lsin $D(P) = D_0 \exp(-kP^2)$, D_0 va k-ma'lum parametrlar. P narxning qanday qiymatlarida talab elastik bo'lishini toping.

Yechish. (8) formulaga asosan $E(D)$ ifodani tuzamiz.

$$E(D) = \frac{-2kP^2 D_0 \exp(-kP^2)}{D_0 \exp(-kP^2)}; \qquad E(D) = -2kp^2 \qquad \textbf{(11)}$$

Talab elastik bo'lishi uchun $2kP^2 > 1$ tengsizlik bajarilishi zarur, bundan $P > 1/\sqrt{2k}$ ni hosil qilamiz.

2-misol. Talab elastikligi har xil bo'lgan variantlarda tovarning narxi o'sishi bilan daromad o'zgarishini toping.

Yechish. I daromad tovarning narxi P bilan D talab miqdorining ko'paytmasiga teng: $I(P) = D(P)P$. Bu funksiyaning hosilasini topamiz:

$$I'(P) = D(P) + D'(P)P.$$

Endi (9) formulani hisobga olib, talab elastiklikning barcha variantlarini tahlil qilamiz.

1) $E(D) < -1$ bo'lsa, u holda bu tengsizlikni (9) ga qo'yib, (10) ning o'ng tomoni manfiyligini olamiz, shunday qilib, elastik talabda P narxning o'sishi daromadning kamayishiga olib keladi. Aksincha, tovar narxining kamayishi daromadning oshishiga olib keladi.

2) $E(D) = -1$ bo'lsa (9) dan (11) ning o'ng tomoni nolga tengligi kelib chiqadi. Neytral talabda tovar narxining o'zgarishi daromadga ta'sir qilmaydi.

3) $E(D) > -1$ bo'lsa, $I'(P) > 0$ elastik bo'lmagan talabda P tovar narxining oshishi daromadning o'sishiga olib keladi.

3-misol. Faraz qilaylik, mahsulot tannarxi C va uni ishlab chiqarish hajmi Q orasidagi bog'lanish quyidagi formula bilan ifodalansin: $C = 50 - 0{,}4\ Q$, $Q = 30$ p.b.

Mahsulot ishlab chiqarishdagi tannarx elastikligini aniqlang.

Yechish. (9) formulaga asosan

$$E(Q) = -\frac{0.4Q}{50-0.4Q}.$$

Bundan $Q=30$ da izlanayotgan elastiklik taxminan –0,32 ni tashkil qiladi, ya'ni berilgan hajmda mahsulot ishlab chiqarishni 1% ga oshirish tannarxning taxminan 0,32 % ga kamayishiga olib keladi.

Qo‘shimcha qiymatni maksimallashtirish (iloji boricha orttirish).

Faraz qilaylik, Q-sotilgan tovar miqdori, $R(Q)$-kirim, daromad funksiyasi, $C(Q)$ tovar ishlab chiqarishdagi chiqim funksiyasi. Haqiqatan bu funksiyalarning ko‘rinishi birinchi navbatda ishlab chiqarish usuli, infrastrukturasi va h.k. larni tashkil qilishga bog‘liq. Ishlab chiqarilgan tovarni sotishdan olingan qo‘shimcha qiymat quyidagi formula bilan beriladi:

$$\Pi(Q) = R(Q) - C(Q) \qquad (12)$$

Mikroiqtisodiyotda quyidagi tasdiq ma'lum: qo‘shimcha qiymat maksimal bo‘lishi uchun oxirgi (predelniy) kirim va oxirgi chiqim teng bo‘lishi kerak. Oxirgi kirim va chiqim ko‘rsatkichlari (9) ga o‘xshash tarzda ifodalanadi. Shunday qilib, bu printsipni quyidagicha yozish mumkin: $R'(Q) = C'(Q)$.

Haqiqatan ekstremumning zaruriy shartidan (12) funksiya uchun $\Pi'(Q) = 0$ asosiy printsip kelib chiqadi.

4-misol. Daromad va xarajat quyidagi formulalar bilan aniqlanganda:

$$R(Q) = 100Q - Q^2, \quad C(Q) = Q^3 - 37Q^2 + 169Q + 4000,$$

qo‘shimcha qiymatning maksimumini toping.

Yechish. (12) ga asosan, qo‘shimcha qiymat $\Pi(Q) = -Q^3 + 36Q^2 - 69Q - 4000$. Qo‘shimcha qiymat funksiyasining hosilasini nolga tenglab, quyidagi tenglamani olamiz $Q^2 - 24Q + 23 = 0$. Bu tenglamaning ildizlari $Q_1 = 1, Q_2 = 23$. Tekshirish shuni ko‘rsatadiki, qo‘shimcha qiymat o‘z maksimumiga $Q = 23$ da erishadi va Пmax=1290.

Ishlab chiqarish samaradorligining kamayish qonuni

Bu qonun shuni tasdiqlaydiki, ishlab chiqarishning asosiy faktorlaridan birini, masalan asosiy xarajatlar K ni oshirish bilan, K ning qaysidir qiymatidan boshlab ishlab chiqarish funksiyasi qiymati kamayib boradi. Boshqacha qilib aytganda, ishlab chiqarilgan mahsulotning V hajmi K ning funksiyasi sifatida pastga qavariqlik yuqoriga qavariqlik bilan almashadigan grafik bilan ifodalanadi.

5-misol. Faraz qilaylik, V- ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi funksiyasi quyidagi formula bilan berilgan bo'lsin:

$$V(k) = V_{lim}\left(1 + e^{-bk+c}\right), \qquad \textbf{(13)}$$

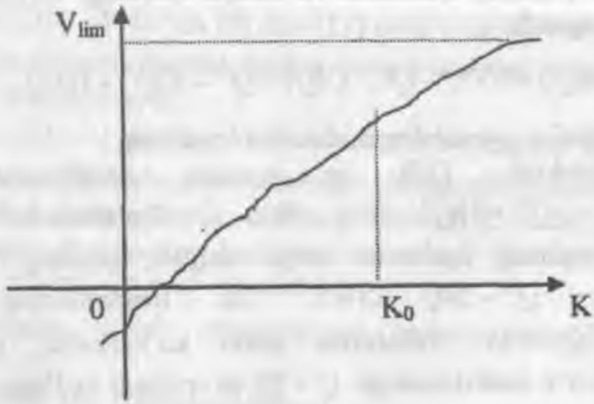
Bu yerda b va c-ma'lum musbat sonlar (ular avvalambor ishlab chiqarishni tashkil qilish strukturasi bilan aniqlanadi), V_{lim}-ishlab chiqarilayotgan mahsulotning imkoni boricha maksimal hajmi. (13) funksiyaning ikkinchi tartibli hosilasini hisoblash qiyin emas.

$$V''(K) = V_{lim} b^2 e^{-bk+c} \frac{e^{-bk+c} - 1}{\left(1 + e^{-bk+c}\right)}.$$

$V''(K) = 0$ shartdan kritik (shubhali) nuqta topiladi:

$$K_{cr} = {}^{c}\!/_{b} \qquad \textbf{(14)}$$

va bu funksiyaning grafigi chizmada tasvirlangan.



K_{cr} (14)-egilish nuqtasida funksiya grafigining pastga qavariqligi yuqoriga qavariqlik bilan o‘zgaradi. Bu nuqtagacha asosiy xarajatlarning o‘sishi mahsulot hajmining jadal o‘sishiga olib keladi: mahsulot hajmining o‘sish sur'ati (birinchi hosilaga o‘xshash) o‘sadi, ya'ni $V''(K) > 0$. Agar $K > K_{cr}$ bo‘lsa, ishlab chiqarilayotgan mahsulot hajmining o‘sish sur'ati kamayadi, ya'ni $V''(K) < 0$ va asosiy xarajatlarning samaradorligi kamayadi.

Shunday qilib, kapital qurilishiga sarflangan mablag‘ strategiyasida juda muhim omil xarajatning kritik hajmini topishdir. Kapital qurilishiga sarflangan mablag‘ foydaliligini oshirish uchun $b, c, V\ \ell im$ ko‘rsatkichlar miqdorlarini "yaxshilash" kerak bo‘ladi.

Xulosa

Hosila va differentsial tushunchasi keltirilgan, asosiy ta'rif va teoremalar ifodalangan. Teoremalarga misollar keltirilgan. Yuqori tartibli hosila va differentsial tushunchalar keltirilgan. Asosiy xossalar to'la va sodda isbotlar bilan bayon etilgan.

Tayanch iboralar

Funksiya, argument orttirmasi, funksiya orttirmasi, hosila, bir tomonlama hosilalar, kritik nuqta, maksimum, minimum, o'sish va kamayish oraliqlari, botiqlik, qavariqlik, differentsial, ekstremum, yuqori tartibli hosila.

Takrorlash uchun savollar

1. Hosila ta'rifini ayting.
2. Hosilaning geometrik ma'nosi nima?
3. Hosilaning fizik ma'nosi nima?
4. Hosilani hisoblash qoidalarini keltiring?
5. Elementar funksiyalar hosilalarining jadvalini keltiring.
6. Yuqori tartibli hosilani hisoblash qoidalarini keltiring.
7. Funksiya differentsialining ta'rifini ayting.
8. Differentsial hisobning asosiy teoremalarini ayting.

9. Teylor formulasini yozing.

10. Funksiya ekstremumini topish shartlarini ayting.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.

2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.

3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.

4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.

5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.

6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.

7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.

8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.

9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124

10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.

11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).

12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich моliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.

13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

4-bob. KO‘P O‘ZGARUVCHILI FUNKSIYALAR DIFFERENTSIAL HISOBI

4.1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi.
4.2. Xususiy hosilalar.
4.3. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya differentsiali.
4.4. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning lokal ekstremumlari
4.5. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari.
4.6. Shartli ekstremumlar.
4.7. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotga tatbiqi.
4.8. Eng kichik kvadratlar usuli.

4.1. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiya limiti va uzluksizligi

Biz birinchi bobda ko‘p o‘zgaruvchili funksiya ta’rifi, uning aniqlanish va o‘zgarish sohasi tushunchalarini kiritgan edik.

Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarga doir misollar keltiramiz. Ko‘p o‘zgaruvchili funksiyalarni $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko‘rinishda ifoda etamiz.

1. $z = \sqrt{R^2 - x_1^2 - x_2^2}$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D(z) = \{(x_1; x_2) : x_1^2 + x_2^2 \le R^2\}$$

to‘plamdan iborat. Bu to‘plam markazi koordinata boshi 0 $(0, 0)$ nuqtada radiusi R ga $(R > 0)$ teng bo‘lgan doiradir.

2. $z = \dfrac{1}{x_1 \cdot x_2}$

Bu funksiyaning aniqlanish sohasi

$$D(z)=\{(x_1;x_2):x_1\neq 0,\ x_2\neq 0\}$$

to'plamdan iborat. Bu to'plam X_1OX_2 tekislikdan OX_1 va OX_2 koordinata o'qlarini chiqarib tashlashdan hosil bo'ladi.

3. $Z=a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n+b$ funksiya chiziqli funksiya deyiladi, bu yerda $a_1,a_2,\cdots,a_n$ o'zgarmas sonlar.

4. $Z=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$, a_{ij} - o'zgarmas son va $a_{ij}=a_{ij}$. Bu funksiya kvadratik funksiya deyiladi.

5. Iqtisodda uchraydigan asosiy tushunchalardan biri, bu foydalilik funksiyasidir. Ko'p o'zgaruvchili foydalilik funksiyasiga misol tariqasida quyidagini keltirish mumkin:

a) $Z=\sum_{i=1}^{n}a_i\ell n(x_i-c_i)$, bu yerda $a_i>0\ va\ x_i>c_i\geq 0$.

Funksiyaning aniqlanish sohasi $D(Z)=\{x:\ x_i>c_i,\ i=\overline{1,n}\}$ to'plamdan iborat. Bu funksiya o'zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi, bu yerda $x=(x_1,x_2,...,x_n)$.

6. Ko'p o'zgaruvchili ishlab chiqarish funksiyasiga misol tariqasida quyidagi funksiyalarni keltirish mumkin:

a) $Z=b_0x_1^{b_1}x_2^{b_2}$.

Bu funksiya Kobba-Duglas funksiyasi deyiladi. Bu yerda x_1- mehnat xarajatlari, x_2- ishlab chiqarish fondlari hajmini bildiruvchi o'zgaruvchilardir.

b_0,b_1 *ва* b_2 ishlab chiqarish texnologiyasi orqali aniqlanadigan parametrlardir.

b) $Z=a_0\left(a_1x_1^{-\beta}+a_2x_2^{-\beta}\right)^{-\frac{h}{\beta}}$.

Bu funksiya almashtirishning o'zgarmas egiluvchanlik funksiyasi deyiladi.

1-Ta'rif. $Z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya grafigi deb quyidagi

$$\Gamma(f)=\{(Z,x_1,x_2,...,x_n):Z=f(x_1,x_2,...,x_n),(x_1,x_2,...,x_n)\in D(f)\}$$

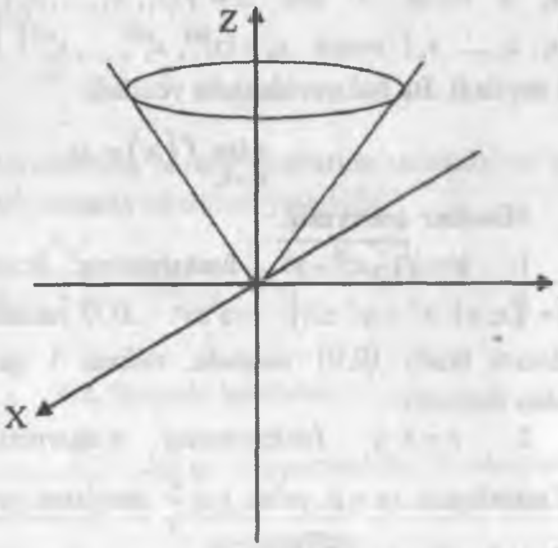
to'plamga aytiladi. Bu yerda $D(f)$-funksiyaning aniqlanish sohasi bo'lib, $\Gamma(f)\subset R^{n+1}$ munosabat o'rinlidir.

2-ta'rif. $Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning o'zgarmaslik chizig'i yoki o'zgarmaslik sirti deb ushbu

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in D(f) : f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c\}$$

to'plamga aytiladi. Bu yerda $c = const$.

Masalan, $Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ikki o'zgaruvchili funksiya grafigi, R^3-uch o'lchovli fazoda uchi koordinata boshida bo'lgan cheksiz konusdan iborat bo'ladi.



$Z = \sqrt{x^2 + y^2}$ funksiyaning o'zgarmaslik chiziqlari, markazi koordinata boshida bo'lgan, XOY tekislikda joylashgan aylanalardan iborat bo'ladi. Chunki $c > 0, x^2 + y^2 = c^2$ tenglik aylana tenglamasini aniqlatadi.

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n$ va $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n$ bo'lsin. Bu nuqtalar orasidagi masofa $d(x, y)$ deb quyidagi tenglik orqali aniqlangan songa aytilishini eslatib o'tamiz.

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \dots + (x_n - y_n)^2}$$

3-ta'rif. Markazi $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ nuqtada, radiusi $R>0$ ga teng ochiq shar $-S(x,R)$ deb, quyidagi to'plamga aytiladi.

$$S(x,R)=\{y:d(x,y)<R\}$$

Izoh. $\varepsilon>0$ son uchun $S(x,\varepsilon)$-x nuqtaning, «ε-atrofi» ham deyiladi. $\overline{S}(x,R)=\{y:d(x,y)\le R\}$ to'plam esa yopiq shar deyiladi.

4-ta'rif. Agar $\lim\limits_{d(x,x_0)\to 0} f(x_1,x_2,...,x_n)=a$ tenglik o'rinli bo'lsa, u holda a son $Z=f(x_1, x_2,...,x_n)$ funksiyaning, $x=(x_1, x_2,...,x_n)$ nuqta $x_0=(x_1^{(0)}, x_2^{(0)},...,x_n^{(0)})$ ga intilgandagi limiti deyiladi. Bu hol quyidagicha yoziladi.

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=a$$

Misollar qaraymiz.

1. $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ funksiyaning aniqlanish sohasi $D(z)=\{(x;y): x^2+y^2\le 1\}$ ya'ni XOY tekislikda markazi koordinata boshi $(0,0)$ nuqtada, radiusi 1 ga teng bo'lgan doiradan iboratdir.

2. $z=x\cdot y$ funksiyaning o'zgarmaslik chiziqlari XOY tekisligida $xy=c$ ya'ni $y=\dfrac{c}{x}$ tenglama orqali aniqlangan giperboladan iborat bo'ladi.

3.

$$\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{x_1^2+x_2^2}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\frac{(x_1^2+x_2^2)\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)}{x_1^2+x_2^2+1-1}=\lim_{\substack{x_1\to 0\\ x_2\to 0}}\left(\sqrt{x_1^2+x_2^2+1}+1\right)=2.$$

5-ta'rif. Agar $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya $x_0=(x_1^{(0)},x_2^{(0)},\cdots,x_n^{(0)})$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib,

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda bu funksiya x_0 nuqtada uzluksiz deyiladi.

Masalan, $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ funksiya $x^2+y^2\neq 0$ munosabatni qanoatlantiruvchi nuqtalarda, ya'ni koordinata boshidan farqli barcha nuqtalarda uzluksiz bo'ladi. Bu funksiya $(0,0)$ nuqtada uzluksiz bo'lmaydi. Ammo

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & agar\ \ x^2+y^2\neq 0\\ 0 & agar\ \ x=0,\ \ y=0\end{cases}$$

funksiya XOY tekislikning barcha nuqtlarida uzluksiz bo'ladi. Uzluksizlikni $(0,0)$ nuqtada tekshirish yetarlidir.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{\dfrac{1}{y^2}+\dfrac{1}{x^2}}=0=f(0,0)$$

4.2. Xususiy hosilalar

$z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning barcha x_i argumentlariga Δx_i orttirma beramiz, u holda funksiya quyidagi Δz orttirmani

$$\Delta z=f(x_1+\Delta x_1,\ \ x_2+\Delta x_2,\cdots,x_n+\Delta x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

hosil qiladi. Bu orttirma funksiyaning to'liq orttirmasi deyiladi. Agar $Z=f(x_1,\ x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)$ funksiyaning faqat i- argumenti bo'lgan x_i o'zgaruvchiga Δx_i orttirma berib, qolgan o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qarasak, u holda funksiya hosil qilgan orttirma $\Delta_{x_i}z$ quyidagicha aniqlanib,

$$\Delta_{x_i}z=f(x_1,x_2,\dots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\dots,x_n)-f(x_1,x_2,\dots,x_i,\dots,x_n)$$

bu orttirma funksiyaning xususiy orttirmasi deyiladi.

Masalan: $z = xy$ funksiyaning to'liq va xususiy orttirmalarini topaylik:

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y + y \cdot \Delta x + \Delta x \cdot \Delta y$$
$$\Delta_x z = (x + \Delta x) \cdot y - xy = y \cdot \Delta x,$$
$$\Delta_y z = x \cdot (y + \Delta y) - xy = x \cdot \Delta y$$

6-ta'rif. $z = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning x_i o'zgaruvchisi bo'yicha xususiy hosilasi deb, x_i o'zgaruvchidan boshqa o'zgaruvchilarni o'zgarmas deb qaraganda hosil bo'lgan bir o'zgaruvchili, ya'ni x_i-o'zgaruvchili funksiyaning, x_i-o'zgaruvchi bo'yicha olingan hosilaga aytilib, $\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_i}$ *yoki* f'_{x_i} shaklda belgilanadi, ya'ni xususiy hosila quyidagi limit orqali topiladi:

$$\frac{\partial z}{\partial x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i}$$

Masalan, $z = x \cdot y$ funksiya uchun uning xususiy hosilalari quyidagicha bo'ladi

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$z = arctg\frac{x}{y}$ funksiya uchun esa,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{y}{y^2 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{1 + \frac{x^2}{y^2}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = -\frac{x}{y^2 + x^2}$$

$\frac{\partial z}{\partial x_i}$ xususiy hosila, o'z navbatida, yana ko'p o'zgaruvchili funksiya bo'lgani uchun, uning yana xususiy hosilalarini topish mumkin. Bu xususiy hosilalar ikkinchi tartibli xususiy hosilalar deyiladi. Xuddi shunga o'xshash uchinchi va h.k. tartibli xususiy hosilalarni kiritish mumkin.

Bu hosilalar quyidagicha belgilanadi.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) - \textit{ikkinchi tartibli xususiy hosila}$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x_i^2 \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x_i^2}\right) - \textit{uchinchi tartibli xususiy hosila}$$

$$\frac{\partial^n z}{\partial x_{i_1}^{k_1} \partial x_{i_2}^{k_2} \dots \partial x_{i_m}^{k_m}},$$

$$k_1 + k_2 + \dots + k_m = n$$

$n -$ *tartibli xususiy hosila*.

Umuman, aralash hosilalarda tartibning ahamiyati yo'q, ya'ni masalan, quyidagi tenglik o'rinlidir,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i},$$

bu aralash hosilalarni uzluksiz deb qarash kerak bo'ladi.

4.3. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differentsiali

Avval aytganimizdek, matematik uslublarning tadbiqlari taqribiy hisoblashlar bilan uzviy bog'langan bo'lib, bir o'zgaruvchili funksiya uchun taqribiy hisoblashlar funksiya differentsiali asosida olib borilishini aytib o'tgan edik. Ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun differentsial tushunchasini kiritish mumkin.

7-ta'rif. $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning differentsiali deb, dZ - shaklda belgilanib quyidagicha aniqlangan ifodaga aytiladi:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\Delta x_2 + \dots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\Delta x_n$$

Bu yerda $dx_i = \Delta x_i$ - tenglikni e'tiborga olsak, **dz** - differentsial uchun quyidagi tenglikni yoza olamiz.

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial z}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n$$

8-ta'rif. Agarda x – nuqtaning yetarli kichik atrofida, uning to'liq orttirmasi ΔZ ni quyidagicha ifodalash mumkin bo'lsa,

$$\Delta Z=dz+0\left(\sqrt{\Delta x_1^2+\Delta x_2^2+\cdots+\Delta x_n^2}\right),$$

u holda $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x=(x_1,\ x_2,...,x_n)$ nuqtada differentsiallanuvchi deyiladi.

Shuni ta'kidlash lozimki, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun uning berilgan nuqtada barcha birinchi tartibli xususiy hosilalarining mavjudligidan, shu nuqtada funksiyaning differentsiallanuvchi ekanligi kelib chiqmaydi. Quyidagi teorema ko'p o'zgaruvchili funksiyani differentsiallanuvchi bo'lishligining yetarli shartini ifoda etadi.

1-teorema. Agar $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x=(x_1,\ x_2,...,x_n)$ nuqtaning biron–bir atrofida barcha birinchi tartibli $\frac{\partial z}{\partial x_i}, i=1,2,\ldots,n$, xususiy hosilalari mavjud bo'lib, bu xususiy hosilalar x nuqtada uzluksiz bo'lsa, u holda $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiya shu nuqtada differentsiallanuvchi bo'ladi.

Biz bu teoremani isbotsiz qabul qilamiz. Shuni ta'kidlash lozimki, xuddi bir o'zgaruvchili funksiyalardagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun ham yuqori tartibli differentsial tushunchasini kiritish mumkin.

Yo'nalish bo'yicha hosila va gradient

$A=(a_1,a_2,\ldots,a_n)$ va $B=(b_1,b_2,\ldots,b_n)$ nuqtalar uchun boshi A nuqtada, oxiri B nuqtada bo'lgan $\overline{AB}$ vektor quyidagicha aniqlanadi:

$$\overline{AB}=(b_1-a_1,\ b_2-a_2,\cdots,b_n-a_n)$$

Vektor, odatda bitta kichik lotin harfi bilan belgilanadi, masalan,

$$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$$

Bizga ma'lumki $\vec{a}$ vektorning uzunligi uchun $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2}$. $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlarning skalyar ko'paytmasi esa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 \cdot b_2 + \cdots + a_n \cdot b_n$$

tenglik orqali aniqlanadi. Bundan tashqari, $\vec{a}$ va $\vec{b}$ vektorlar orasidagi $\varphi(0 \le \varphi < \pi)$ burchak ushbu

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

tenglik orqali topiladi. $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ vektorga parallel va $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ nuqtadan o'tuvchi to 'g 'ri chiziq tenglamasi quyidagi tenglik orqali beriladi

$$x = t \cdot \vec{a} + x_0$$

bu yerda $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, t- haqiqiy son. Ya'ni bu to'g'ri chiziqda yotuvchi x nuqtaning koordinatalari

$$x_i = t \cdot a_i + x_i^{(0)}, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ko'rinishda bo'ladi.

Agar $\vec{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ birlik vektor, ya'ni $|\vec{a}| = 1$ bo'lsa, u holda i- koordinatasi 1 ga teng bo'lib, qolgan koordinatalari nolga teng bo'lgan $\vec{e_i}$ - birlik vektor uchun quyidagilarni hosil qilamiz

$$\vec{a} \cdot \vec{e_i} = a_i = |\vec{a}| \cdot |\vec{e_i}| \cdot \cos\alpha_i = \cos\alpha_i$$

bu yerda α_i burchak $\vec{a}$ va $\vec{e_i}$ vektorlar orasidagi burchakni bildiradi. Demak, $|\vec{a}| = 1$ bo'lgani uchun

$$\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cdots + \cos^2\alpha_n = 1.$$

Ushbu $\cos\alpha_i$, $i = 1,2,\ldots,n$, qiymatlar $\vec{a}$ vektorning yo'naltiruvchi kosinuslari deyiladi. Demak, birlik $\vec{a}$ vektorni $\vec{a} = (\cos\alpha_1, \ \cos\alpha_2, \cdots, \cos\alpha_n)$ ko'rinishda ifoda etish mumkin.

$\vec{a}$ birlik vektor bo'lsin, u holda Δt son uchun quyidagi orttirma

$$\Delta_{\vec{a}} z = f(x+\Delta t\cdot\vec{a}) - f(x) = f(x_1+\Delta t\cos\alpha_1, x_2+\Delta t\cos\alpha_2, \ldots, x_n+\Delta t\cos\alpha_n) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtadagi $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bo'yicha orttirmasi deyiladi.

9-ta'rif. $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko p o'zgaruvchili funksiyaning $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nuqtadagi $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bo'yicha hosilasi $\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ deb, quyidagicha aniqlangan miqdorga aytiladi:

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f(x+\Delta t\cdot\vec{a}) - f(x)}{\Delta t}.$$

$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}}$ hosila $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $\vec{a}$ vektor yo'nalishi bo'yicha o'zgarish (o'sish yoki kamayish) tezligini bildiradi.

Xususan, agar $\vec{e}_i = (0, 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ - i-koordinatasi 1 ga, boshqa koordinatalari nolga teng bo'lgan birlik vektor bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{e}_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Murakkab funksiya hosilasi formulasiga asosan, quyidagi tenglikni ko'rsatish mumkin

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\cdot\cos\alpha_1 + \frac{\partial z}{\partial x_2}\cos\alpha_2 + \cdots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\cos\alpha_n$$

10-ta'rif. $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiyaning gradienti deb ushbu $\nabla z = \left(\frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right)$ vektorga aytiladi.

Ta'rifga ko'ra, funksiyaning yo'nalish bo'yicha hosilasini quyidagi skalyar ko'paytma ko'rinishida ifoda eta olamiz.

$$\frac{\partial z}{\partial \vec{a}} = \nabla z \cdot \vec{a}$$

Bu skalyar ko'paytmada $\vec{a}$ vektor ∇z-gradient yo'nalishi bilan ustma-ust tushsa, yo'nalish bo'yicha hosila o'zining eng katta qiymatiga erishadi. Demak funksiya gradienti ∇z- vektor, funksiya o'sishining eng katta bo'lgan yo'nalishini aniqlar ekan.

4.4. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning lokal ekstremumlari

11-ta'rif. Agar $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ funksiya $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, shu atrofdan olingan istalgan x uchun $f(x) \le f(x_0)$, $(f(x) \ge f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqta z funksiya uchun lokal maksimum (lokal minimum) nuqta deyiladi.

Xuddi bir o'zgaruvchili funksiyadagi kabi, ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham ekstremumning zaruriy va yetarli shartlari haqidagi teoremalarni isbot qilish mumkin.

2-teorema. (Ekstremumning zaruriy sharti). Agar x_0 nuqta $f(x)$ funksiya uchun ekstremum nuqtasi bo'lib, shu nuqtada funksiya differentsiallanuvchi bo'lsa, u holda

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = 0, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

ya'ni x_0 nuqtada funksiya gradienti nol vektorga teng bo'ladi: $\nabla f(x_0) = (0, 0, \ldots, 0)$

Bu teoremadan, agar x_0 nuqta differentsiallanuvchi funksiyaning ekstremum nuqtasi bo'lsa, x_0 nuqtadagi istalgan yo'nalish bo'yicha funksiyaning hosilasi nolga tengligi kelib chiqadi, chunki

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{a}} = \nabla f \cdot \vec{a} = \sum_{i=1}^{n} 0 \cdot \cos\alpha_i = 0.$$

Endi ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumning yetarli shartini keltiramiz.

$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x_0 = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ nuqtaning biron-bir atrofida barcha ikkinchi tartibli xususiy hosilalari mavjud va uzluksiz funksiya bo'lsin. U holda istalgan $1 \le i,\ j \le n$ uchun

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}.$$

Agar

$$\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j} = a_{ij}(x)$$

belgilashni kiritsak, ushbu kvadratik matritsa,

$$A(x) = \begin{pmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) \ldots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) \ldots & a_{2n}(x) \\ - - - & - - - - - - & - - - \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) \ldots & a_{nn}(x) \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = a_{ji}$ bo'lgani uchun simmetrik matritsa bo'ladi. Avval ko'rganimizdek har bir simmetrik kvadratik matritsa kvadratik forma hosil qiladi. $A(x)$ matritsaga mos keluvchi kvadartik formani $L(x)$ bilan belgilaymiz.

12-ta'rif. Agar $z = f(x)$ funksiya uchun $\nabla f(x_0) = 0$ bo'lsa, x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning statsionar yoki kritik nuqtasi deyiladi.

3-teorema. Agar $f(x)$ funksiya uchun $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)$ statsionar nuqtaning biron-bir atrofida ikkinchi tartibli hosilalari mavjud va uzluksiz bo‘lib, shu x_0 nuqtada $L(x_0)$ kvadratik forma musbat (manfiy) aniqlangan bo‘lsa, u holda x_0 nuqta $f(x)$ funksiyaning lokal minimum (lokal maksimum) nuqtasi bo‘ladi.

Xususan, agar biz $z = f(x, y)$ ikki o‘zgaruvchili funksiya uchun shu teoremani qo‘llasak quyidagini hosil qilamiz.

(x_0, y_0) nuqta $z = f(x, y)$ funksiyaning statsionar nuqtasi, ya'ni

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$$

bo‘lib, nuqtaning biron-bir atrofida

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = a_{11}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = a_{12}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = a_{22}$$

ikkinchi tartibli hosilalar mavjud bo‘lsin. U holda,

$$A(x, y) = \begin{pmatrix} a_{11}(x, y) & a_{12}(x, y) \\ a_{21}(x, y) & a_{22}(x, y) \end{pmatrix}$$

simmetrik kvadratik matritsaga mos keluvchi $L(x, y)$ kvadratik formaning (x_0, y_0) nuqtada musbat aniqlangan bo‘lishi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0, y_0) & a_{12}(x_0, y_0) \\ a_{21}(x_0, y_0) & a_{22}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

bo‘lishi lozim. Demak, statsionar (x_0, y_0) nuqta $z = f(x, y)$ funksiya uchun lokal minimum nuqta bo‘lishi uchun

$$a_{11}(x_0, y_0) > 0, \ a_{11}(x_0, y_0) \cdot a_{22}(x_0, y_0) - a_{12}^2(x_0, y_0) > 0$$

shartlarning bajarilishi yetarli bo‘lar ekan. (x_0, y_0) nuqta lokal minimum nuqta bo‘lishligi uchun esa

$$a_{11}(x_0,y_0)<0, \qquad \begin{vmatrix} a_{11}(x_0,y_0) & a_{12}(x_0,y_0) \\ a_{21}(x_0,y_0) & a_{22}(x_0,y_0) \end{vmatrix} > 0$$

ya'ni

$$a_{11}(x_0,y_0)<0, \; a_{11}(x_0,y_0)\,a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)>0$$

shartlarning bajarilishi yetarli.

$z=f(x,y)$ funksiyaning (x_0,y_0) statsionar nuqtasi uchun

$$a_{11}(x_0,y_0)\,a_{22}(x_0,y_0)-a_{12}^2(x_0,y_0)<0$$

tengsizlik o'rinli bo'lsa, (x_0,y_0) nuqta ekstremum nuqta emasligi kelib chiqadi.

$z=x^3+y^3-3xy$ funksiyani ekstremumga tekshiraylik. Buning uchun dastavval uning xususiy hosilalarini, keyin statsionar nuqtalarini, so'ngra ikkinchi tartibli hosilalar yordamida ekstremum nuqtalarni aniqlaymiz.

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y}=3y^2-3x$$

$$\begin{cases} 3x^2-3y=0 \\ 3y^2-3x=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-y=0 \\ y^2-x=0 \end{cases} \Rightarrow x^4-x=0 \Rightarrow x(x^3-1)=0$$

$$x_1=0, \quad x_2=1 \Rightarrow (0,\,0) \; va \; (1,\,1)$$

nuqtalar statsionar nuqtalar ekan.

$$a_{11}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x, \quad a_{12}=\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=-3, \; a_{22}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=6y$$

$$\begin{vmatrix} a_{11}(x,y) & a_{12}(x,y) \\ a_{21}(x,y) & a_{22}(x,y) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6y \end{vmatrix} = 36xy-9$$

bo'lgani uchun $(0, 0)$ ekstremum nuqta bo'lmaydi, chunki

$$\begin{vmatrix} a_{11}(0,0) & a_{12}(0,0) \\ a_{21}(0,0) & a_{22}(0,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0$$

Lekin $(1, 1)$ nuqta funksiyaning lokal minimum nuqtasi bo'ladi, chunki

$$a_{11}(1, 1) = 6 > 0 \text{ va } \begin{vmatrix} a_{11}(1,1) & a_{12}(1, 1) \\ a_{21}(1,1) & a_{22}(1, 1) \end{vmatrix} = 36 - 9 = 27 > 0$$

4.5. Ko'p o'zgaruvchili funksiyaning eng katta va eng kichik qiymatlari

Dastavval R^n fazodagi ayrim tushunchalar bilan tanishib chiqaylik.

13-ta'rif., Agar $R^n \supset B$ to'plam berilgan bo'lsa, shunday $R > 0$ son mavjud bo'lsaki, bu son uchun

$$B \subset S(0, R)$$

munosabat o'rinli bo'lsa, ya'ni markazi koordinata boshida va radiusi R ga teng bo'lgan shar B to'plamni o'z ichiga olsa, u holda $R^n \supset B$ to'plam chegaralangan to'plam deyiladi

14-ta'rif. Agar shunday $\varepsilon > 0$ son topilsaki, bunda $S(x, \varepsilon) \subset B$ munosabat o'rinli bo'lsa, u holda $R^n \supset B$ to'plam uchun x nuqta ichki nuqta deyiladi.

15-ta'rif. Agar istalgan $\varepsilon > 0$ son uchun $S(x, \varepsilon)$ sharda B to'plamga tegishli va B ga tegishli bo'lmagan nuqtalar mavjud bo'lsa, ya'ni

$$S(x, \varepsilon) \cap B \neq \varnothing \quad \text{va} \quad S(x, \varepsilon) \cap (R^n \setminus B) \neq \varnothing$$

bo'lsa, u holda $R^n \supset B$ -to'plam uchun x nuqta chegaraviy nuqta deyiladi.

16-ta'rif. Agar $R^n \supset B$ to'plamning barcha chegaraviy nuqtalari ham shu to'plamga tegishli bo'lsa, u holda bu to'plam yopiq to'plam deyiladi.

Bir o'zgaruvchili funksiya uchun isbot qilingan Veyershtrass teoremasini ko'p o'zgaruvchili funksiya uchun ham isbot qilish mumkin.

4-teorema. (Veyershtrass teoremasi). Agar $z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ko'p o'zgaruvchili funksiya chegaralangan yopiq B to'plamda uzluksiz bo'lsa, u holda bu funksiya B to'plamda chegaralangan bo'lib, shu to'plamda o'zining eng katta va eng kichik qiymatlariga (global ekstremumlarga) erishadi, ya'ni shunday $K > 0$ musbat son, $x_0 = \left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right) \in B$ va $y_0 = \left(y_1^{(0)}, y_2^{(0)}, \dots, y_n^{(0)}\right) \in B$ nuqtalar mavjudki, ular uchun quyidagi munosabatlar o'rinli bo'ladi: $|f(x)| \le K \quad \forall x \in B$ va

$$f(x_0) = \sup_{x \in B}\{f(x)\}, \quad f(y_0) = \inf_{x \in B}\{f(x)\}$$

Shuni ta'kidlash lozimki, funksiya global ekstremum qiymatlarga B to'plamning chegaraviy nuqtalarida erishishi mumkin.

$z = e^{-x^2-y^2} \cdot \left(2x^2 + 3y^2\right)$ funksiyaning $x^2 + y^2 \le 4$ tengsizlik bilan berilgan $\overline{S}(0,2)$ yopiq shardagi eng katta va eng kichik qiymatlarini topaylik.

Dastavval $S(0,2)$ ochiq shardagi statsionar nuqtalarni topamiz:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{-x^2-y^2}\left[-2x\left(2x^2 + 3y^2\right) + 4x\right] = 2x \cdot e^{-x^2-y^2}\left[2 - \left(2x^2 + 3y^2\right)\right]$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = e^{-x^2-y^2}\left[-2y\left(2x^2 + 3y^2\right) + 6y\right] = 2y \cdot e^{-x^2-y^2}\left[3 - \left(2x^2 + 3y^2\right)\right]$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \Rightarrow y \cdot \left(1 - y^2\right) = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x \cdot \left(1 - x^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

Demak, $(0,0)$, $(0,\pm 1)$ va $(\pm 1,0)$ nuqtalar qaralayotgan funksiyaning statsionar nuqtalari bo'ladi. Ikkinchi tartibli xususiy hosilalarni keltiramiz:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = e^{-(x^2+y^2)}\left(8x^4 + 12x^2y^2 - 20x^2 - 6y^2 + 4\right) = a_{11}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = e^{-(x^2+y^2)}\left(8x^3y + 12xy^3 - 20xy\right) = a_{12}(x,y)$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = e^{-(x^2+y^2)}\left(12y^4 + 8x^2y^2 - 30y^2 - 4x^2 + 6\right) = a_{22}(x,y)$$

Bundan $(0,0)$ nuqtada $a_{11}(0,0) = 4$, $a_{12}(0,0) = 0$, $a_{22}(0,0) = 6$ bo'lib $a_{11} > 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 24 > 0$ bo'lgani uchun $(0,0)$ nuqta lokal minimum nuqtasi bo'ladi va $z(0,0) = 0$.

$(0,\pm 1)$ nuqtada $a_{11}(0,\pm 1) = -2e^{-1}$, $a_{12}(0,\pm 1) = 0$, $a_{22}(0,\pm 1) = -12 \cdot e^{-1}$ bo'lib, $a_{11} < 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = 24 \cdot e^{-2} > 0$ bo'lgani uchun, $(0,\pm 1)$ nuqta lokal maksimum nuqtasi bo'ladi va $z(0,\pm 1) = 3 \cdot e^{-1}$.

$(\pm 1,0)$ nuqtada $a_{11}(\pm 1,0) = -8e^{-1}$, $a_{12}(\pm 1,0) = 0$, $a_{22}(\pm 1,0) = 2e^{-1}$ bo'lib, $a_{11} < 0$ va $a_{11} \cdot a_{22} - a_{12}^2 = -16e^{-2} < 0$ bo'lgani uchun, $(\pm 1,0)$ nuqta ekstremum nuqta emas.

Endi berilgan funksiyani $\overline{S}(0,2)$ sharning chegaraviy nuqtalarida, ya'ni $x^2 + y^2 = 4$ tenglikni qanoatlantiruvchi nuqtalarda tekshiramiz. $x^2 + y^2 = 4$ bo'lsin, u holda

$$Z = e^{-(x^2+y^2)}\left(2x^2 + 3y^2\right) = e^{-4}\left[2\left(x^2 + y^2\right) + y^2\right] = e^{-4}\left(8 + y^2\right).$$

Bundan $x^2 + y^2 = 4$ bo'lganda quyidagi tengsizlik kelib chiqadi

$$8 \cdot e^{-4} \le z = e^{-4}\left(8 + y^2\right) \le e^{-4} \cdot 12,$$

ya'ni $z(\pm 2,0) = \dfrac{8}{e^4}$ va $z(0,\pm 2) = \dfrac{12}{e^4}$ sonlar funksiyaning $\overline{S}(0,2)$ shar chegarasidagi eng kichik va eng katta qiymatlarini beradi.

Berilgan funksiyaning $\bar{S}(0,2)$ yopiq shardagi global ekstremumlari, ya'ni uning eng katta va eng kichik qiymatlarini topish uchun funksiyaning $S(0,2)$ ochiq shardagi va chegaradagi maksimumlari ichidan eng kattasini olsak va shuningdek $S(0,2)$ ochiq shardagi va chegaradagi minimumlar ichidan eng kichigini olsak, mos ravishda global maksimum va global minimumlarni hosil qilamiz. Qaralayotgan holda funksiya $(0, \pm 1)$ nuqtada $z(0,\pm 1) = \frac{3}{e}$ lokal maksimumga erishadi. Chegaradagi maksimum qiymat esa $z(0,\pm 2) = \frac{12}{e^4}$ ga teng. $\frac{12}{e^4} < \frac{3}{e}$ bo'lgani uchun, funksiya $\bar{S}(0,2)$ shardagi eng katta qiymatga $(0, \pm 1)$ nuqtada erishdi va $z_{max} = \frac{3}{e}$.

$S(0,2)$ ochiq sharda funksiya $(0, 0)$ nuqtada minimumga erishadi va $z(0, 0) = 0$. Chegaraviy nuqtalardagi minimum $z(\pm 2,0) = \frac{8}{e^4} > 0$ bo'lgani uchun, funksiya $\bar{S}(0,2)$ sharda eng kichik qiymatga $(0, 0)$ nuqtada erishadi va $z_{min} = 0$.

4.6. Shartli ekstremumlar

Ko'p hollarda berilgan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumlarini, uning argumentlari ma'lum shartlarni qanoatlantirishi asosida topish masalasi qo'yiladi. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar uchun shartli ekstremumlar deb nomlanuvchi tushuncha umumiy holda quyidagicha bayon etiladi.

$Z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m})$ $n+m$ o'zgaruvchili funksiyaning ushbu, bog'lovchi tenglamalar deb nomlanuvchi,

$$\phi_i(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}) = 0$$
$$i = 1, 2, \ldots, m$$

tenglamalarni qanoatlantiruvchi $x = (x_1 x_2 \ldots x_{n+m})$ nuqtalar ichidan topilgan ekstremumlari uning shartli ekstremumlari deyiladi.

17-ta'rif. Agar $z=f(x_1,x_2,...,x_{n+m})$ ko'p o'zgaruvchili funksiya $x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...x_{n+m}^{(0)}\right)$ nuqtaning biron-bir atrofida aniqlangan bo'lib, bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi barcha x nuqtalar uchun $f(x)\le f(x_0)$ $(f(x)\ge f(x_0))$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda x_0 nuqtada shartli maksimumga (minimumga) erishadi deyiladi.

Berilgan $z=f(x_1,x_2,...,x_{n+m})$ funksiyaning bog'lovchi tenglamalarni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini topish uchun Lagranjning noma'lum koeffitsientlar usulini keltiramiz. Buning uchun quyidagi yordamchi funksiyani kiritamiz

$$F(x)=f(x)+\lambda_1\phi_1(x)+\cdots+\lambda_m\phi_m(x),$$

bu yerda $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ noma'lum ko'paytuvchilar deb nomlanuvchi sonlardan iborat. Kiritilgan $F(x)$ funksiyaning shartsiz ekstremumi (ya'ni avval kiritilgan ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumi ma'nosida), biz qarayotgan $z=f(x_1,x_2,...,x_n)$ funksiyaning shartli ekstremumi bo'ladi. Biz qidirayotgan $x_0=\left(x_1^{(0)},x_2^{(0)},...x_{n+m}^{(0)}\right)$ nuqtani va $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m$ sonlarni topish uchun $\begin{cases}\phi_i(x)=0, & i=1,2,...,m\\ \dfrac{\partial F(x)}{\partial x_j}=0, & j=1,2,...\ n+m\end{cases}$

tenglamalar sistemasini yechish yetarli bo'ladi, chunki noma'lumlarning umumiy soni va sistemadagi tenglamalar soni $n+2m$ ga teng.

Quyidagi misolni ko'raylik. $z=xy$ funksiyaning $x^2+y^2=2$ tenglikni qanoatlantiruvchi shartli ekstremumini toping. Buning uchun yordamchi

$$F(x,y)=xy+\lambda\cdot\left(x^2+y^2\right)$$

funksiyani kiritib, bu funksiyaning shartsiz ekstremumini topamiz. λ noma'lum ko'paytuvchi va ekstremum nuqtasi uchun quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz

$$\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x}=y+2\lambda x=0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial y}=x+2\lambda y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ (x-y)(1-2\lambda)=0 \\ (x+y)(1+2\lambda)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=2 \\ \lambda=\dfrac{1}{2},\ x=-y \\ x=y,\ \lambda=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \lambda=\dfrac{1}{2},(1,-1),(-1,1) \\ (1,1),(-1,-1),\lambda=-\dfrac{1}{2} \end{array} \right.$$

Demak, $\lambda = \frac{1}{2}$ bo'lganda

$$F(x,y) = xy + \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right).$$

$(1,-1)$ va $(-1,1)$ statsionar nuqtalarda funksiyani tekshiramiz, bu nuqtalarda:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 1, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 1$$

va $d^2F = (dx + dy)^2 \geq 0$ bo'lgani uchun, $F(x,y)$ funksiya $(1,-1)$ va $(-1,1)$ nuqtalarda minimumga erishadi, u holda $z = xy$ funksiya esa shu nuqtalarda shartli minimumga erishadi va $z_{min} = -1$.

Agar $\lambda = -\frac{1}{2}$ bo'lsa, $F(x,y) = xy - \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$ funksiya $(1,1)$ va $(-1,-1)$ statsionar nuqtalarda maksimumga erishadi, u holda $z = xy$ funksiya esa bu nuqtalarda shartli maksimumga erishadi va $z_{max} = 1$.

4.7. Ko'p o'zgaruvchili funksiyalarning iqtisodiyotga tatbiqlai

Iqtisodiyotda kelib chiqadigan ko'p o'zgaruvchili funksiyaning ekstremumini topish masalasini qaraymiz.

Tovarning har xil turlarini ishlab chiqarishdan daromad olish.

Faraz qilaylik $x_1, x_2, \ldots, x_m$ –ishlab chiqarilayotgan m turdagi turli xil tovarning miqdori, ularning birlik miqdordagi narxi mos ravishda $P_1, P_2, ... P_m$ bo'lsin. Bu tovarlarni ishlab chiqarishga ketadigan xarajat funksiyasi berilgan bo'lsin:

$$C = C(x_1, x_2, ... x_m).$$

U holda qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi.

$$\Pi = P_1x_1 + P_2x_2 + ... + P_mx_m - C(x_1, x_2, ..., x_m) \qquad (1)$$

Tabiiyki, qo'shimcha qiymat maksimumini izlash, (1)-ko'p o'zgaruvchili funksiyaning $x_i \geq 0$ da (boshqa cheklanishlar qo'yilmaganda) lokal ekstremumini izlash kabidir:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, ..., m.$$

Bu shart x_i o'zgaruvchilarga nisbatan algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$P_i - \frac{\partial C}{\partial x_i} = 0, \ i = 1, 2, ..., m, \qquad (2)$$

(3.12) tenglamalar sistemasi iqtisodiyotning ma'lum qoidasini amalga oshiradi: tovarning oxirgi qiymati (narxi) bu tovarni ishlab chiqarishga sarflangan xarajatlarga teng.

Shuni ta`kidlash kerakki, (2) tenglamalar sistemasini yechish jarayoni xarajat funksiyasining ko'rinishiga bog'liq va ancha murakkab bo'lishi mumkin.

Misol. Faraz qilaylik korxonada ikki xil tovar ishlab chiqariladi, ularning hajmi x va y bo'lsin $p_1 = 8$ va $p_2 = 10$ mos ravishda bu tovarlarning birlik miqdordagi narxi, C-xarajat funksiyasi, $C = x^2 + xy + y^2$ ko'rinishda bo'lsin.

U holda (1) ga asosan $x_1 = x, x_2 = y$ da foyda ikki o'zgaruvchining funksiyasi bo'ladi:

$$\Pi(x, y) = 8x + 10y - x^2 - xy - y^2$$

Lokal ekstremum sharti chiziqli algebraik tenglamalar sistemasiga olib keladi:

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

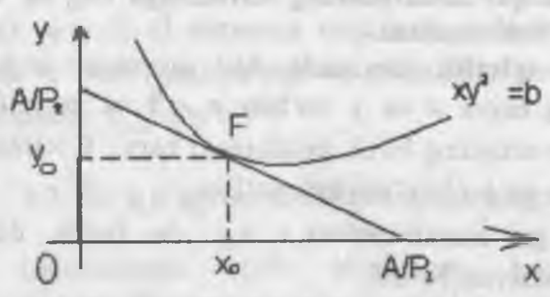
Buning yechimi (2,4) nuqtadan iborat. Modomiki $a_{11}=-2<0$, $\Delta=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=3>0$, u holda topilgan nuqta qo'shimcha qiymat funksiyasining lokal maksimumini aniqlaydi va $\prod_{max}=28$

Resurslarni eng yaxshi natija beradigan qilib taqsimlash. Faraz qilaylik X va Y resurslarning xarajat funksiyasi $u=p_1x+p_2y$ ko'rinishga ega bo'lsin, bu yerda p_1 va p_2 - mos ravishda bu faktorlarning bahosi. Ishlab chiqarish funksiyasi $u=a_0xy^2$ bo'lganda resurslarni optimal taqsimlash masalasini qaraylik, a_0 -?

Resurslarni optimal taqsimlashni aniqlaydigan $F(x_0, y_0)$ nuqtada xarajat va chiqarish funksiyalari urinadi.

Bu chiziqlar mos ravishda $a_0xy^2=c$, $p_1x+p_2y=A$ yoki $y=(b/x)^{1/2}$, $y=-(p_1/p_2)x+A/p_2$ tenglamalar bilan aniqlanadi, bu yerda C>0 va A>0 – o'zgarmas sonlar, $b=c/a_0$.
Bu chiziqlarning urinish sharti quyidagi tenglama bilan beriladi:

$$\left[\left(b/x\right)^{1/2}\right]'\Big|_{x_0}=-p_1/p_2$$



Bu tenglamadan $x_0=b^{1/3}(p_2/2\,p_1)^{1/3}$ qiymat topiladi. U holda chiqarish funksiyasidagi $y_0=\left(b/x_0\right)^{1/2}=b^{1/3}\left(2\,p_1/p_2\right)^{1/6}$

qiymat topiladi. Demak, resurslarnig optimal taqsimlanishi x_0 / y_0, $p_1 : 2p_2$ munosabat orqali aniqlanar ekan.

Mahsulot ishlab chiqarishning qo'shimcha qiymatini maksimallashtirish

Qo'shimcha qiymat funksiyasi odatda quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\Pi(K,L) = pF(K,L) - WL - kK, \qquad (3)$$

bu yerda $F(K,L)$- ishlab chiqarish funksiyasi, p- mahsulot bahosi. W va k-mos ravishda mehnatga va kapital xarajatlarga faktor narxlar, L va K mos ravishda mehnat resurslari va kapitalning xarajatlari. Qo'shimcha qiymat maksimumini aniqlashga doir ikkita misol qaraymiz.

1. Agar (K_0, L_0) nuqtada qo'shimcha qiymat funksiyasi (3) maksimal qiymatni qabul qilsa, (K_0, L_0) nuqta optimal reja deyiladi. Optimal reja F da ishlab chiqarish funksiyasi F ni o'rniga qo'yib oxirgi normasini toping.

Lokal ekstremum nuqtasida qo'shimcha qiymat funksiyasi $\Pi(K,L)$ ning birinchi hosilalari nolga teng, ya'n'

$$pF'_K(K_0, L_0) - k = 0,$$
$$pF_L(K_0, L_0) - W = 0.$$

Ma'l'mki, almashtirishning oxirgi normasi $\mu = -F'_l / F'_k$ formula bo'yicha hisoblanadi, bundan optimal reja uchun $\mu = -W/k$ kelib chiqadi.

2. Agar $F(K,L) = 2(KL)^{1/3}$ bo'lsa, qo'shimcha qiymat funksiyasi (3) ning maksimumi va optimal rejani toping.

Qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\Pi(K,L) = 2p(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Buning yechimi (2,4) nuqtadan iborat. Modomiki $a_{11} = -2 < 0$, $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 3 > 0$, u holda topilgan nuqta qo‘shimcha qiymat funksiyasining lokal maksimumini aniqlaydi va $\prod_{max} = 28$

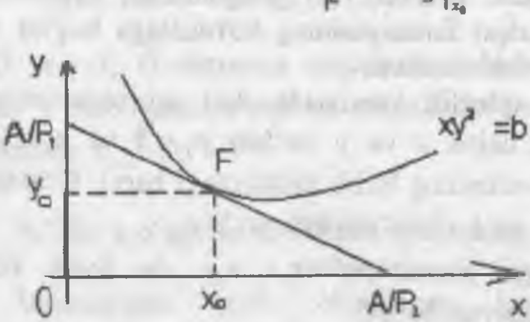
Resurslarni eng yaxshi natija beradigan qilib taqsimlash. Faraz qilaylik X va Y resurslarning xarajat funksiyasi $u = p_1x + p_2y$ ko‘rinishga ega bo‘lsin, bu yerda p_1 va p_2 - mos ravishda bu faktorlarning bahosi. Ishlab chiqarish funksiyasi $u = a_0xy^2$ bo‘lganda resurslarni optimal taqsimlash masalasini qaraylik, a_0 -?

Resurslarni optimal taqsimlashni aniqlaydigan $F(x_0, y_0)$ nuqtada xarajat va chiqarish funksiyalari urinadi.

Bu chiziqlar mos ravishda $a_0xy^2 = c$, $p_1x + p_2y = A$ yoki $y = (b/x)^{1/2}$, $y = -(p_1/p_2)x + A/p_2$ tenglamalar bilan aniqlanadi, bu yerda C>0 va A>0 – o‘zgarmas sonlar, $b = c/a_0$.

Bu chiziqlarning urinish sharti quyidagi tenglama bilan beriladi:

$$\left[\left(b/x\right)^{1/2}\right]'\Big|_{x_0} = -p_1/p_2$$



Bu tenglamadan $x_0 = b^{1/3}(p_2/2\,p_1)^{1/3}$ qiymat topiladi. U holda chiqarish funksiyasidagi $y_0 = \left(b/x_0\right)^{1/2} = b^{1/3}\left(2\,p_1/p_2\right)^{1/6}$

qiymat topiladi. Demak, resurslarnig optimal taqsimlanishi x_0 / y_0, $p_1 : 2p_2$ munosabat orqali aniqlanar ekan.

Mahsulot ishlab chiqarishning qo'shimcha qiymatini maksimallashtirish

Qo'shimcha qiymat funksiyasi odatda quyidagi formula bilan ifodalanadi:

$$\Pi(K,L) = pF(K,L) - WL - kK, \qquad (3)$$

bu yerda $F(K,L)$- ishlab chiqarish funksiyasi, p- mahsulot bahosi. W va k-mos ravishda mehnatga va kapital xarajatlarga faktor narxlar, L va K mos ravishda mehnat resurslari va kapitalning xarajatlari. Qo'shimcha qiymat maksimumini aniqlashga doir ikkita misol qaraymiz.

1. Agar (K_0, L_0) nuqtada qo'shimcha qiymat funksiyasi (3) maksimal qiymatni qabul qilsa, (K_0, L_0) nuqta optimal reja deyiladi. Optimal reja F da ishlab chiqarish funksiyasi F ni o'rniga qo'yib oxirgi normasini toping.

Lokal ekstremum nuqtasida qo'shimcha qiymat funksiyasi $\Pi(K,L)$ ning birinchi hosilalari nolga teng, ya'n'

$$pF'_K(K_0, L_0) - k = 0,$$
$$pF'_L(K_0, L_0) - W = 0.$$

Ma'l'mki, almashtirishning oxirgi normasi $\mu = -F'_l / F'_k$ formula bo'yicha hisoblanadi, bundan optimal reja uchun $\mu = -W/k$ kelib chiqadi.

2. Agar $F(K,L) = 2(KL)^{1/3}$ bo'lsa, qo'shimcha qiymat funksiyasi (3) ning maksimumi va optimal rejani toping.

Qo'shimcha qiymat funksiyasi quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi

$$\Pi(K,L) = 2p(KL)^{1/3} - WL - RK.$$

Lokal ekstremum shartlari optimal rejaning K_0 va L_0 koordinatalariga nisbatan, ikkita chiziqli tenglamalar sistemasiga olib keladi.

$$\begin{cases} \frac{2}{3}hL_0^{\frac{1}{3}}K_0^{\frac{2}{3}} = k \\ \frac{2}{3}PK_0^{\frac{1}{3}}L_0^{-\frac{2}{3}} = W \end{cases}$$

Bundan optimal rejaning koordinatalarini topamiz:

$$K_0 = \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \Big/ \left(\frac{R^2}{W}\right), \quad L_0 = \left(\frac{2P}{3}\right)^3 \Big/ \left(RW^2\right)$$

Bu qiymatlarni qo'shimcha qiymat funksiyasiga qo'ysak П funksiya maksimumini hosil qilamiz:

$$\Pi_{max} = \left(\frac{2p}{3}\right)^3 \Big/ (R\,W)$$

4.8. Eng kichik kvadratlar usuli

Eng kichik kvadratlar usuli approksimatsiya yoki funksiyani ayrim nuqtalarda ma'lum qiymatlari bo'yicha taxminan tiklash masalasiga tegishlidir. Tajribada ko'pincha formulalarni eng yaxshi yo'l bilan empirik tanlash masalasi kelib chiqadi. Masala quyidagicha ifodalanadi: y noma'lum kattalikning n ta nuqtalarda kuzatishlari berilgan:

$$M_1, M_2, \ldots, M_n \qquad (4)$$

va mos qiymatlar olingan

$$U_1, U_2, \ldots, U_n \qquad (5)$$

Shunday $U = f(M)$ funksiyani tanlab olish kerakki, u o'lchanadigan kattalik Y ning o'lchash nuqtalari $\{M_i\}$ va natijalari $\{U_i\}$ orasidagi bog'liqlikni imkoni boricha aniq ifoda etsin.

Shunday qilib, empirik formulalarni topish masalasi ikki bosqichdan iborat:

1) $f(M)$ bog'lanishning umumiy ko'rinishini topish yoki f funksiyaning o'zgarmas parametrlari (koeffitsientlari) aniqlik darajasini ko'rsatish;

2) noma'lum koeffitsientlar (4)-kuzatish nuqtalarida shunday tanlab olinadiki, $f(M)$ funksiya berilgan (5)-qiymatlarga iloji boricha aniq javob bersin.

Faraz qilaylik, 1-bosqichda empirik formula o'z ichiga ma'lum baza funksiyalar majmuini hosil qilsin.

$$y_1(M),\ y_2(M),\dots,y_m(M) \tag{6}$$

ya'ni empirik formula quyidagi ko'rinishga ega bo'ladi:

$$f(M)=a_1y_1(M)+a_2y_2(M)+\dots+a_my_m(M) \tag{7}$$

bu yerda,

$$a_1,a_2,\dots,a_m \tag{8}$$

empirik funksiyaning noma'lum parametrlari.

2-bosqich noma'lum parametrlar (8) ni aniqlashdan iborat. Ularni shunday tanlab olish kerakki, (7) funksiyaning qiymatlari (4) nuqtalarda (5) o'lchangan qiymatlardan iloji boricha kam farq qilsin.

Eng kichik kvadratlar usuli $\delta_i=U_i-f(M)$ xatoliklarining kvadratlari yig'indisini minimallashtirishdan iborat. Demak, (7) funksiya uchun, ushbu

$$S(a_1,a_2,\dots,a_m)=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^2=\sum_{i=1}^{n}(U_i-f(M_i))^2=\sum_{i=1}^{n}\left(U_i-\sum_{k=1}^{m}a_ky_k(M_i)\right) \tag{9}$$

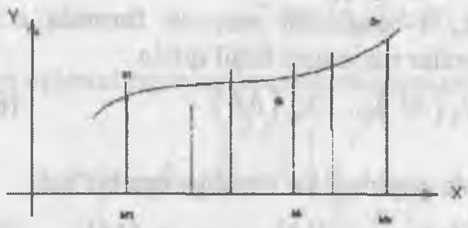
funksiya barcha m argumenti bo'yicha xususiy hosilalarni topish kerak va ularni 0 ga tenglash lozim. Bundan m ta noma'lum $a_1,a_2,\dots,a_m$ parametrlarga nisbatan m ta chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi hosil bo'ladi:

$$A_{j1}a_1+A_{j2}a_2+\dots+A_{jm}a_m=B_j,\ \ j=1,2,\dots,m. \tag{10}$$

Bu tenglamaning koeffitsientlari va ozod hadlari quyidagi formulalar bo'yicha aniqlanadi:

$$A_{jk}=A_{kj}=\sum_{j=1}^{n} y_j(M_i)y_k(M_i), \quad B_j=\sum_{i=1}^{n} U_i y_i(M_i),$$

$$j,k=1,2,...m$$



$S(a_1,..,a_n)$ (9) funksiya musbat, botiq, va chegaralangan bo‘lgani uchun, (10) tenglamalar sistemasining yechimi, S-funksiyaning lokal maksimumi nuqtasining koordinatalaridan iborat bo‘ladi.

Iqtisodiy statistikada ma'lumotlarni qayta tekshirishda empirik formulaga yaqinlashish masalasini hal etishda $U=f(M)$ funksiyani bir o‘zgaruvchining chiziqli funksiyasi ko‘rinishida izlash keng tarqalgan. Bu holda (4) o‘lchash nuqtalarining majmui $x_1 ... x_n$ qiymatlaridan iborat bo‘lib, (6) funksiyalar majmui esa, ikkita funksiya, $y_1(x)=x$ va $y_2(x)=x$ dan iborat.

Empirik formula (7) ning ko'rinishi quyidagicha bo‘ladi:

$$y=ax+b.$$

No'malum parametrlar a va b uchun ushbu chiziqli tenglamalar sistemasi hosil bo‘ladi:

$$\begin{cases} A_{11}\ a+A_{12}\ b=B_1 \\ A_{21}\ a+A_{22}\ b=B_2 \end{cases};$$

bu yerda koeffitsient va ozod hadlar quyidagi tengliklar bilan topiladi.

$$A_{11}=\sum_{i=1}^{n}x_i^2\ ,\ A_{12}=A_{21}=\sum_{i=1}^{n}x_i\ ,\ A_{22}=n\ .$$

$$B_1=\sum_{i=1}^{n}U_ix_i\ ,\ B_2=\sum_{i=1}^{n}U_i\ .$$

Xulosa

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasidagi asosiy ta'rif va teoremalar bayon etilgan. Har bir ta'rif va teoremaga misollar keltirilgan.

Ko'p o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi bir o'zgaruvchili funksiyalar nazariyasi bilan taqqoslanib ifoda etilgan.

Tayanch iboralari

Ko'p o'zgaruvchili funksiya, takroriy va o'lchov bo'yicha limit, xususiy hosila, yo'nalish bo'yicha hosila, gradient, differentsial, to'la differentsial, kvadratik matritsa, ekstremum, shartli ekstremum, lokal ekstremum, global ekstremum.

Takrorlash uchun savollar

1. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ta'rifini ayting va misollar keltiring.
2. Ko'p o'zgaruvchili funksiya limiti ta'rifini ayting.
3. Ko'p o'zgaruvchili uzluksiz funksiya ta'rifini ayting.
4. Xususiy hosila qanday topiladi?
5. Ko'p o'zgaruvchili funksiya differentsiali qanday topiladi?
6. Yo'nalish bo'yicha hosila qanday aniqlanadi?
7. Ko'p o'zgaruvchili funksiya ekstremumining zaruriy shartini ayting.
8. Ekstremumning yetarli shartini ayting.
9. $Z=x^3-y^3+3xy$ funksiyani ekstremumga tekshiring.
10. Shartli ekstremumning ta'rifini ayting.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O‘zbekiston, 2001.
3.Jo‘rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O‘zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O‘qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma’ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G‘., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o‘quv qo‘llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to‘plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang‘ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

5-bob. BOSHLANG'ICH FUNKSIYA VA INTEGRAL

5.1. Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral

1-ta'rif. Agar barcha $x \in (a,b)$ lar uchun

$$F'(x) = f(x)$$

tenglik o'rinli bo'lsa, u holda $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaga boshlang'ich funksiya deyiladi.

Masalan: $F_1(x) = \frac{x^2}{2}$ funksiya $(-\infty,+\infty)$ oraliqda $f(x) = x$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki

$$\left(\frac{x^2}{2}\right)' = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$$

tenglik barcha $x \in (-\infty,+\infty)$ lar uchun o'rinlidir.

Berilgan $f(x)$ funksiya bir nechta boshlang'ich funksiyaga ega bo'lishi mumkin. Masalan, $F_1(x) = \frac{x^2}{2} + 1$ funksiya $f(x) = x$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'ladi.

Umumiy holda, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ uchun boshlang'ich funksiya bo'lsa, istalgan o'zgarmas $c = const$ uchun $F(x) + c$ funksiya ham $f(x)$ ga boshlang'ich funksiya bo'ladi, chunki

$$(F(x) + c)' = F'(x) = f(x)$$

Aksincha, berilgan $f(x)$ funksiyaning istalgan ikkita boshlang'ich funksiyasi o'zgarmas songa farq qilishini ko'rsatish mumkin. Haqiqatan ham $F_1(x)$ va $F_2(x)$ funksiyalar (a,b) da $f(x)$ ga boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$[F_1(x)-F_2(x)]' = F_1'(x)-F_2'(x)=f(x)-f(x)=0, \quad x\in(a,в)$$

U holda Lagranj teoremasi natijasiga ko'ra $F_1(x)-F_2(x)=C=const$. Xulosa qilib shuni aytish mumkinki, agar $F(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, u holda $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi istalgan boshlang'ich funksiyasi $F(x)+C$, $(C=\text{const})$ ko'rinishda bo'lar ekan.

2-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning (a,b) intervaldagi barcha boshlang'ich funksiyalari

$$\int f(x)dx$$

ko'rinishda belgilanib, bu ifoda $f(x)$ funksiyaning aniqmas integrali deb ataladi. Bu yerda $f(x)$ integral osti funksiyasi, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda deb ataladi.

Demak, agar $F(x)$ funksiya $f(x)$ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\int f(x)dx = \{F(x)+C:\ C\in R\}$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Bu tenglik qisqalik uchun

$$\int f(x)dx = F(x)+C$$

kabi ifoda etiladi. Masalan,

$$\int xdx = \frac{x^2}{2}+C$$

Berilgan funksiya uchun uning boshlang'ich funksiyasini, ya'ni uning aniqmas integralini topish, funksiyani integrallash deb ataladi.

Aniqmas integral xossalari va uni hisoblash usullari:

1. Aniqmas integral hosilasi integral ostidagi funksiyaga teng bo'ladi, ya'ni

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Chunki, agar $F(x)$-funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa,

$$\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x)+c)' = F'(x) = f(x)$$

2. Aniqmas integralning differensiali integral ostidagi ifodaga teng bo'ladi, ya'ni

$$d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx$$

Haqiqatan ham,

$$d\left(\int f(x)dx\right) = d(F(x)+c) = dF(x) = F'(x)dx = f(x)dx$$

3. Biron bir funksiya differensialining aniqmas integrali shu funksiyadan o'zgarmas songa farq qiladi, ya'ni

$$\int dF(x) = F(x) + C$$

Agar biz $F(x)$ ni biron bir $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi deb qarasak, ya'ni $F'(x) = f(x)$ bo'lsa, u holda $dF(x) = f(x)dx$ va $\int dF(x) = \int f(x)dx = F(x) + C$.

4. Agar a o'zgarmas son bo'lsa, u holda

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Hosila xossasiga ko'ra

$$\left(a\int f(x)dx\right)' = a\left(\int f(x)dx\right)' = a \cdot f(x)$$

Demak, $a\int f(x)dx$ funksiya $a \cdot f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi, ya'ni

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$

5. Funksiyalar yig'indisining integrali, qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

Hosila xossasiga ko'ra,

$$\left(\int f(x)dx \pm \int g(x)dx\right)' = \left(\int f(x)dx\right)' \pm \left(\int g(x)dx\right)' = f(x) \pm g(x)$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan.

6. Agar $\int g(t)dt = G(t) + C$ o'rinli bo'lsa, u holda $t = \varphi(x)$ uchun

$$\int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

Haqiqatan ham, $G'(t) = g(t)$ bo'lgani uchun va $G(\varphi(x))$ murakkab funksiya hosilasiga asosan

$$(G(\varphi(x)))'_x = G'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = g(\varphi(x))\varphi'(x),$$

demak, $G(\varphi(x))$ funksiya $g(\varphi(x))\varphi'(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi ekan.

Bu xossadan foydalanib, aniqmas integralni yangi o'zgaruvchi kiritib, yoki o'rniga qo'yish usuli bilan hisoblash mumkin. Agar $\int f(x)dx$ integralda, integral ostidagi ifodani quyidagicha ifodalash mumkin bo'lib,

$$f(x)dx = g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = g(\varphi(x))d\varphi(x), \quad \text{va} \quad \int g(t)dt = G(t) + C$$

bo'lsa, u holda

$$\int f(x)dx = \int g(\varphi(x))\varphi'(x)dx = G(\varphi(x)) + C$$

Misol tariqasida quyidagi aniqmas integralni hisoblaylik,

$$\int \sin^4 x \cos x \, dx$$

Bu yerda $t = \sin x$ deb olsak,

$$\sin^4 x \cdot \cos x \, dx = \sin^4 x d(\sin x) = t^4 dt$$

tenglikni hosil qilamiz va

$$\int t^4 dt = \frac{t^5}{5} + C$$

tenglikka ko'ra,

$$\int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{\sin^5 x}{5} + C$$

7. Agar $\int f(t)dt = F(t) + c$ bo'lsa, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

Agar $t = ax + b$ deb olsak

$$f(ax+b)dx = \frac{1}{a}f(ax+b)d(ax+b) = \frac{1}{a}f(t)dt$$

tenglik o'rinli bo'ladi, u holda

$$\int f(ax+b)dx = \frac{1}{a}\int f(t)dt = \frac{1}{a}F(t) + c = \frac{1}{a}F(ax+b) + c$$

8.Quyidagi, bo'laklab integrallash formulasi deb nomlanuvchi formula o'rinli bo'ladi:

$$\int u dv = u \cdot v - \int v du$$

Differensiallanuvchi u va v funksiyalar uchun, ko'paytmaning differensiali

$$d(uv) = vdu + udv$$

bo'lgani uchun, quyidagini hosil qilamiz:

$$udv = d(uv) - vdu$$

Bundan esa

$$\int udv = \int d(uv) - \int vdu = uv - \int vdu$$

tenglik kelib chiqadi.

Masalan, $\int x \cos x\, dx$ integralni bo'laklab integrallaylik. Buning uchun

$$u = x, \qquad dv = \cos x\, dx = d(\sin x)$$

deb olsak, $du = dx$ va $v = \sin x$ bo'ladi. Bulardan

$$\int x\ \cos x\, dx = x\cdot\sin x - \int \sin x\, dx = x\ \sin x + \cos x + c$$

Aniqmas integral ta'rifiga, elementar funksiyalar hosilasi jadvaliga asoslanib va tenglikning o‘ng tarafidan hosila olish orqali quyidagi elementar funksiyalarning aniqmas integrallar jadvalini tuza olamiz:

1. $\int 0dx = C$
2. $\int 1\cdot dx = \int dx = x + c$
3. $\int x^{\alpha} dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \quad \alpha \neq -1$
4. $\int \dfrac{1}{x} dx = \int \dfrac{dx}{x} = \ell n|x| + c$
5. $\int \dfrac{1}{1+x^2} dx = \int \dfrac{dx}{1+x^2} = arc\ tgx + c$
6. $\int \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arc\ \sin x + c$
7. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ell na} + c, \qquad \int e^x dx = e^x + c$
8. $\int \sin x\, dx = -\cos x + c$
9. $\int \cos x\, dx = \sin x + c$
10. $\int \dfrac{1}{\sin^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + c$
11. $\int \dfrac{1}{\cos^2 x} dx = \int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + c$

Aniqmas integrallarni hisoblash qoidalari va usullarini qo‘llab, ayrim aniqmas integrallarni topaylik.

1). $\int \dfrac{dx}{x-a} = \int \dfrac{d(x-a)}{x-a} = \ell n|x-a| + c, \qquad (x-a=t);$

2). $\int \dfrac{dx}{(x-a)^m} = \int \dfrac{d(x-a)}{(x-a)^m} = \int (x-a)^{-m} d(x-a) = \dfrac{(x-a)^{-m+1}}{-m+1} + c = -\dfrac{1}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + c,$

$m \neq 1;$

$$3).\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=arc\sin\frac{x}{a}+C,\qquad a>0,\qquad (\frac{x}{a}=t)$$

$$4).\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\left(\frac{x}{a}=t\right)=\frac{1}{a}arc\,tg\frac{x}{a}+C$$

$$5).\int\frac{dx}{x^2-a^2}=\frac{1}{2a}\int\left(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\right)dx=\frac{1}{2a}\left(\int\frac{dx}{x-a}-\int\frac{dx}{x+a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2a}(\ell n|x-a|-\ell n|x+a|)+C=\frac{1}{2a}\ell n\left|\frac{x-a}{x+a}\right|+C,\qquad a\neq 0$$

$$6).\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a}}=\left(\sqrt{x^2+a}=t-x\Rightarrow x^2+a=t-2tx+x^2\Rightarrow x=\frac{t^2-a}{2t}\Rightarrow\right.$$

$$\left.\Rightarrow\sqrt{x^2+a}=t-\frac{t^2-a}{2t}=\frac{t^2+a}{2t},\,dx=\frac{t^2+a}{2t^2}dt\right)=\int\frac{dt}{t}=\ell n|t|+C=$$

$$=\ell n\left|x+\sqrt{x^2+a}\right|+C$$

$$7).\int\frac{dx}{(x+a)(x+b)}=\frac{1}{a-b}\int\left[\frac{1}{x+b}-\frac{1}{x+a}\right]dx=\frac{1}{a-b}[\ell n|x+b|-\ell n|x+a|]+$$

$$+C=\frac{1}{a-b}\ell n\left|\frac{x+b}{x+a}\right|+C$$

Endi bo'laklab integrallashga doir misollarni qaraymiz:

$$8).\int \ln x\,dx=\begin{pmatrix} u=\ln x \\ dv=dx \\ du=\frac{1}{x}dx \\ v=x \end{pmatrix}=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}dx=x\ln x-x+C=x\cdot(\ln x-1)+C$$

$$9).\int x\sin x\,dx=\begin{pmatrix} u=x,\ du=dx \\ dv=\sin x\,dx \\ v=-\cos x \end{pmatrix}=-x\cos x+\int \cos x\,dx=-x\cos x+\sin x+C$$

$10).\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}$, $m-$natural son. Agar $m=1$ bo'lsa, u holda

$$\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\ arc\,tg\frac{x}{a}+C$$

tenglik avval isbot qilingan edi. Quyidagi belgilashni kiritamiz:

$$\Im_m=\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}$$

Bu integralda bo'laklab integrallashni qo'llaymiz:

$$u=\frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^m},\quad du=-\frac{2mx\ dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}$$

$$dv=dx,\qquad v=x$$

u holda,

$$\Im_m=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m}+\int\frac{2m\,x^2}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}dx=\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{x^2+a^2-a^2}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}dx=$$

$$\frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^m}+2m\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^m}-2a^2m\int\frac{dx}{\left(x^2+a^2\right)^{m+1}}$$

Bu yerdan

$$\Im_m=\frac{x}{\left(a^2+a^2\right)^m}+2m\Im_m-2a^2m\Im_{m+1}\ \text{va}$$

$$\Im_{m+1}=\frac{x}{2a^2m\left(x^2-a^2\right)^m}+\frac{2m-1}{2a^2m}\Im_m. \qquad (1)$$

Bu formula $(m+1)$- integralni m- integral orqali ifoda etyapti. Bunday formulalar matematikada rekkurent formulalar deb ataladi. Rekkurent formulani ketma-ket qo'llash natijasida $\Im_{m+1}$- integralni hisoblash $\Im_1$ integralni hisoblashga olib kelinadi. $\Im_1$ integral esa avval hisoblangan

$$\Im_1 = \frac{1}{a} arc\,tg \frac{x}{a} + C.$$

Masalan, (1)-formulada $m=1$ desak,

$$\Im_2 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{2-1}{2a^2} \cdot \Im_1 = \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)} + \frac{1}{2a^3} arctg \frac{x}{a} + C$$

Agar (1)- da $m=2$ deb $\Im_2$ yordamida $\Im_3$ ni topa olamiz

$$\Im_3 = \frac{1}{a^2 \cdot 2} \cdot \frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{2 \cdot 2-1}{2a^2 \cdot 2} \cdot \Im_2 = \frac{x}{4a^2(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \cdot \frac{x}{x^2+a^2} +$$

$$+ \frac{3}{8a^5} arctg \frac{x}{a} + C$$

11). $\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m}$ ko'rinishdagi integralni $p^2-4q<0$ uchun hisoblaylik. Ushbu tenglikda

$$x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \frac{4q-p^2}{4}$$

$4q-p^2>0$ bo'lgani uchun, $\frac{4q-p^2}{4} = a^2$ deb belgilash mumkin. Yuqoridagi integralda $x+\frac{p}{2}=t$ desak

$$\int \frac{dx}{(x^2+px+q)^m} = \int \frac{d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + a^2\right]^m} = \int \frac{dt}{(t^2+a^2)^m}$$

Demak, qaralayotgan integral 10) ko'rinishga ega.

12). $\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+px+q\right)^m}$ - ko'rinishdagi integralni $p^2-4q<0$ bo'lgan hol uchun hisoblaylik. $x+\frac{p}{2}=t$ va $\frac{4q-p^2}{4}=a^2$ belgilashlarni kiritib quyidagini hosil qilamiz.

$$\int \frac{x\,dx}{\left(x^2+px+g\right)^m}=\int \frac{\left(x+\frac{p}{2}-\frac{p}{2}\right)d\left(x+\frac{p}{2}\right)}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\frac{4g-p^2}{4}\right]^m}=\int \frac{t\,dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}-$$

$$-\frac{p}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}=\frac{1}{2}\int \frac{d\left(t^2+a^2\right)}{\left(t^2+a^2\right)^m}-\frac{p}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}=-\frac{1}{2(m-1)}\,\frac{1}{\left(t^2+a^2\right)^{m-1}}-$$

$$-\frac{p}{2}\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^m}$$

Qaralayotgan integral yana 10) ko'rinishga kelar ekan.

5.2. Ratsional ifodalarni integrallash

Ratsional ifoda deb ko'phadlar nisbati ko'rinishida ifodalangan funksiyaga aytiladi, ya'ni $P_n(x)$ va $Q_m(x)$ ko'phadlar bo'lsa, ratsional ifoda ushbu $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ko'rinishda bo'ladi. Agar $P_n(x)$ ko'phad darajasi $Q_m(x)$ ko'phad darajasidan katta bo'lsa, ya'ni $n>m$ bo'lsa $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ni quyidagi ko'rinishda ifoda etish mumkin:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=L_{n-m}(x)+\frac{R_k(x)}{Q_m(x)},$$

bu yerda $L_{n-m}(x)$ va $R_k(x)$ mos ravishda $n-m$ va k-darajali ko'phad bo'lib, $k \le m$, ya'ni $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ to'g'ri kasrdan iborat bo'ladi.

Ushbu

$$P_n(x) = b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n$$

ko'phad ko'rinishdagi funksiyaning aniqmas integrali quyidagicha hisoblanadi:

$$\int P_n(x)dx = \int \left(b_0 x^n + b_1 x^{n-1} + \cdots + b_{n-1} x + b_n\right)dx =$$

$$= \frac{b_0}{n+1} x^{n+1} + \frac{b_1}{n} x^n + \cdots + \frac{b_{n-1}}{2} \cdot x^2 + b_n x + C$$

Demak, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ ning aniqmas integralini hisoblash uchun, bu ratsional ifodani ko'phad va to'g'ri kasrning yig'indisi deb qarashimiz mumkin. Bundan tashqari, to'g'ri kasrni qisqarmaydigan kasr deb hisoblaymiz.

Istalgan $Q_m(x)$ ko'phadni quyidagi ko'rinishda ifoda qilish mumkin:

$$Q_m(x) = a \cdot (x-a_1)^{k_1} \cdot (x-a_2)^{k_2} \cdots (x-a_n)^{k_n} \cdot$$
$$\cdot \left(x^2 + p_1 x + q_1\right)^{m_1} \cdot \left(x^2 + p_2 x + q_2\right)^{m_2} \cdots \left(x^2 + p_s x + q_s\right)^{m_s} \qquad \textbf{(2)}$$

bu yerda $a, a_1, \ldots, a_n, p_1, q_1, \ldots, p_s, q_s$ lar haqiqiy sonlar, $k_1, k_2, \ldots, k_n$, $m_1, m_2, \ldots, m_s$, lar esa natural sonlardan iborat bo'lib, $p_i^2 - 4q_i < 0$, $i = 1, 2, \ldots, s$ shart o'rinli bo'ladi.

Agar $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ -qisqarmaydigan to'g'ri kasr bo'lib, $Q_m(x)$ uchun (2) yoyilma o'rinli bo'lsa, bu kasrni quyidagicha ifoda etish mumkin

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{1}{a}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{A_{i1}}{(x-a_i)}+\frac{A_{i2}}{(x-a_i)^2}+\cdots+\frac{A_{ik_i}}{(x-a_i)^{k_i}}\right)+\right.$$

$$\left.+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{B_{j1}x+C_{j1}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{B_{j2}x+C_{j2}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\cdots+\frac{B_{jm_j}x+C_{jm_j}}{(x^2+p_jx+q_j)^{m_j}}\right)\right]$$

yoki

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k}\frac{A_{i\ell}}{(x-a_i)^{\ell}}+\sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{m_j}\frac{B_{j\ell}x+C_{j\ell}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\ell}}\right)$$

(3)

Bu tenglikda qatnashayotgan

$$\frac{A}{(x-a)^{\ell}} \quad ва \quad \frac{Bx+C}{(x^2+px+q)^{\ell}}, \qquad p^2-4q<0$$

ko‘rinishdagi kasrlar sodda kasrlar deb nomlanadi. Biz bunday kasrlarning aniqmas integralini 1),2),11) va 12)- misollarda hisoblagan edik.

Demak, $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$- qisqarmaydigan to‘g‘ri kasrning aniqmas integrali uchun ushbu tenglikni yoza olamiz:

$$\int\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}dx=\frac{1}{a}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{k_i}\int\frac{A_{i\ell}}{(x-a_i)^{\ell}}dx+\sum_{j=1}^{s}\sum_{\ell=1}^{m_j}\int\frac{B_{j\ell}x+C_{j\ell}}{(x^2+p_jx+q_j)^{\ell}}dx\right)$$

$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ uchun (3) tenglikdagi $A_{i\ell}$, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ larning qiymatlarini topish uchun noma'lum koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. (3)- tenglikning o‘ng ta'rafidagi kasrlarni umumiy maxrajga keltirsak, bu maxraj $Q_m(x)$ ga teng bo‘lib, uning suratida $A_{i\ell}$, $B_{j\ell}$ va $C_{j\ell}$ koeffitsientlar qatnashgan, darajasi

$Q_m(x)$ ning darajasidan oshmaydigan $\widetilde{P}_n(x)$ polinomni hosil qilamiz. Agar biz (3)- tenglikni ayniyat deb qarasak tenglikning ikki tarafidagi maxrajlar bir xil, ya'ni $Q_m(x)$ bo'lgani sababli, $P_n \equiv \widetilde{P}_n(x)$ ayniyatni hosil qilamiz. Bu ayniyatda x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirish natijasida A_{il}, B_{jl} va C_{jl} noma'lum koeffitsientlar uchun chiziqli tenglamalar sistemasini hosil qilamiz. Bu sistemani yechib, (3) ayniyatdagi A_{il}, B_{jl} va C_{jl} larning qiymatlarini topamiz.

Misol tariqasida ushbu aniqmas integralni hisoblaylik:

$$\int \frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx.$$

Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko'ra, quyidagi ayniyatni yoza olamiz

$$\frac{3x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{A_1}{x-1} + \frac{A_2}{(x-1)^2} + \frac{A_3}{(x-1)^3} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$$

Bu tenglikning o'ng tarafini umumiy maxrajga keltirib, so'ngra maxrajini tashlab yuborish natijasida, quyidagi ayniyatni hosil qilamiz:

$$3x^2+x+3 = A_1\cdot(x-1)^2(x^2+1) + A_2(x-1)(x^2+1) + A_3(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)^3$$

Demak,

$$3x^2+x+3 = (A_1+B)x^4 + (-2A_1+A_2-3B+C)x^3 + (2A_1-A_2+A_3+3B-3C)x^2 +$$
$$+(-2A_1-B+3C)x + (A_1-A_2+A_3-C)$$

Bu ayniyatdagi x larning bir xil darajalari oldidagi koeffitsientlarni tenglashtirib, quyidagi tenglamalar sistemasini hosil qilamiz:

$$\begin{cases} A_1 + B = 0 \\ -2A_1 + A_2 - 3B + C = 0 \\ 2A_1 - A_2 + A_3 + 3B - 3C = 3 \\ -2A_1 + A_2 - B + 3C = 1 \\ A_1 - A_2 + A_3 - C = 3 \end{cases}$$

Bu sistemani Gauss usuli bilan yechamiz:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{array}\right)$$

Natijada $A_1 = -\frac{1}{4}$, $A_2 = 0$, $A_3 = \frac{7}{2}$, $B = \frac{1}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ ekanligini hosil qilamiz, ya'ni

$$\frac{3x^2 + x + 3}{(x-1)^3(x^2+1)} = -\frac{1}{4(x-1)} + \frac{7}{2(x-1)^3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{x+1}{x^2+1}.$$

Nihoyat, quyidagi tengliklarga ega bo'lamiz:

$$\int \frac{2x^2+x+3}{(x-1)^3(x^2+1)}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} + \frac{7}{2}\int \frac{dx}{(x-3)^3} + \frac{1}{4}\int \frac{x+1}{x^2+1}dx =$$

$$= -\frac{1}{4}\ell n|x-1| + \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{(-2)(x-1)^2} + \frac{1}{4}\int \frac{x\,dx}{x^2+1} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x^2+1} =$$

$$= -\frac{1}{4}\ell n|x-1| - \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{8}\int \frac{d(x^2+1)}{x^2+1} + \frac{1}{4}\, arc\, tgx + C =$$

$$= -\frac{1}{4}\ell n|x-1| - \frac{7}{4(x-1)^2} + \frac{1}{8}\ell n(x^2+1) + \frac{1}{4}\, arc\, tgx + C =$$

$$= \frac{1}{8}\ell n\frac{x^2+1}{(x-1)^2} - \frac{7}{4}\cdot\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{4}arc\, tgx + C$$

5.3. Ayrim irratsional ifodalarni integrallash

Irratsional ifodalarda o'zgaruvchi qandaydir darajadagi ildiz ostida qatnashishini eslatib o'tamiz.

Agar $R(u,v)$-ifoda u va v lardan to'rt arifmetik amallar va songa ko'paytirishdan hosil bo'lgan funksiya bo'lsa u holda bu ifoda u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi deyiladi. Masalan, quyidagi ifoda

$$R(u,v) = u^2 + 3v^2 - \frac{2u - 5v + u\cdot v}{4 - u^3 + v^5}$$

u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'ladi. Ikki o'zgaruvchili $R(u,v)$ ratsional funksiya uchun ushbu

$$\int R\left(x, \sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx$$

aniqmas integralni, a,b,c va d lar haqiqiy sonlar bo'lib, $ad-bc \neq 0$ va m- natural son bo'lgan holda qanday hisoblash mumkinligini ko'rsatamiz. Buning uchun

$$t=\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}},\quad t^m=\frac{ax+b}{cx+d},$$

yangi o‘zgaruvchi kiritsak,

$$x=\varphi(t)=\frac{dt^m-b}{a-ct^m} \text{ va } dx=\varphi'(t)dt=\frac{(ad-bc)\cdot m\cdot t^{m-1}}{(a-ct^m)^2}dt$$

Bundan

$$\int R\left(x,\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)dx=\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt$$

tenglikni hosil qilamiz. $\varphi(t)$ va $\varphi'(t)$ funksiyalar t ning ratsional funksiyalari bo‘lgani uchun

$$R(\varphi(t),t)\cdot\varphi'(t)$$

funksiya ham t ning ratsional funksiyasi bo‘ladi. U holda $\int R(\varphi(t),t)\varphi'(t)dt$ integralni hisoblab, so‘ngra t o‘zgaruvchi o‘rniga $\sqrt[m]{\frac{ax+b}{cx+d}}$ ni qo‘yib dastlabki integralni topamiz.

Quyidagi integralni hisoblaylik:

$$\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}=\int\frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5+\left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]}$$

Bu yerda $\sqrt[10]{x}=t$ deb, yangi o‘zgaruvchi kiritamiz. Demak,

$$x=t^{10} \text{ va } dx=10t^9dt$$

bo‘lgani uchun,

$$\int\frac{dx}{x\left[\left(\sqrt[10]{x}\right)^5+\left(\sqrt[10]{x}\right)^4\right]}=\int\frac{10\cdot t^9dt}{t^{10}\left(t^5+t^4\right)}=10\int\frac{dt}{t^5(t+1)}$$

Noma'lum koeffitsientlar usuliga ko‘ra

$$\frac{1}{t^5(t+1)}=\frac{A_1}{t}+\frac{A_2}{t^2}+\frac{A_3}{t^3}+\frac{A_4}{t^4}+\frac{A_5}{t^5}+\frac{A_6}{t+1}$$

$$1=A_1t^4(t+1)+A_2t^3(t+1)+A_3t^2(t+1)+A_4t\cdot(t+1)+A_5(t+1)+A_6\cdot t^5=$$
$$(A_1+A_6)t^5+(A_1+A_2)t^4+(A_2+A_3)t^3+(A_3+A_4)t^2+(A_4+A_5)t+A_5$$

Bu yerda A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 va A_6 koeffitsientlar uchun quyidagi tenglamalar sistemasi kelib chiqadi

$$\left.\begin{array}{r} A_1+A_6=0 \\ A_1+A_2=0 \\ A_2+A_3=0 \\ A_3+A_4=0 \\ A_4+A_5=0 \\ A_5=1 \end{array}\right\}, \text{ ya'ni } A_5=1,\ A_4=-1, A_3=1,\ A_2=-1,\ A_1=1, A_6=-1$$

Demak,

$$10\int\frac{dt}{t^5(t+1)}=10\left(\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t^2}+\int\frac{dt}{t^3}-\int\frac{dt}{t^4}+\int\frac{dt}{t^5}-\int\frac{dt}{t+1}\right)=$$

$$=10\left[\ell n\left|\frac{t}{t+1}\right|+\frac{1}{t}-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{3t^3}-\frac{1}{4t^4}\right]+C$$

u holda, $t=\sqrt[10]{x}$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\int\frac{dx}{x\left(\sqrt{x}+\sqrt[5]{x^2}\right)}=\ell n\frac{|x|}{\left(1+\sqrt[10]{x}\right)^{10}}+\frac{10}{\sqrt[10]{x}}-\frac{5}{\sqrt[5]{x}}+\frac{10}{3\sqrt[10]{x^3}}-\frac{5}{2\sqrt[5]{x^2}}+C$$

$\int R\left(x,\ \sqrt{ax^2+bx+c}\right)dx$ ko'rinishdagi integrallarni hisoblashda Eyler almashtirishlari deb nomlanuvchi almashtirishlar qo'llaniladi. Bular quyidagilardan iborat:

1-hol. Agar $a>0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=t\pm\sqrt{a}\cdot x$.

2-hol. Agar $c>0$ bo'lsa, $\sqrt{ax^2+bx+c}=xt\pm\sqrt{c}$.

3-hol. Agar $\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}$ bo'lsa, $\sqrt{a(x-x_1)(x-x_2)}=t\cdot(x-x_1)$.

Masalan,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}$$

integralni hisoblaylik. 1-holga ko‘ra quyidagilarga ega bo‘lamiz:

$$\sqrt{x^2+x+1}=t-x \Rightarrow x^2+x+1=t^2-2tx+x^2 \Rightarrow x=\frac{t^2-1}{2t+1},$$

$$dx=\frac{2t(2t+1)-2\cdot\left(t^2-1\right)}{(2t+1)^2}dt=\frac{2t^2+2t+2}{(2t+1)^2}dt$$

Bundan,

$$\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2+x+1}}=\int \frac{2\left(t^2+t+1\right)}{t\cdot(2t+1)^2}dt=\frac{3}{2(2t+1)}+\frac{1}{2}\ell n\frac{t^4}{|2t+1|}+C=$$

$$=\frac{3}{2\left(2x+2\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}+\frac{1}{2}\ell n\frac{\left(x+\sqrt{x^2+x+1}\right)^4}{\left|2x+2\sqrt{x^2x+1}+1\right|^3}+C$$

Binomial integral deb nomlanuvchi integralni, ya'ni ushbu

$$\int x^m\left(a+bx^n\right)^p dx$$

integralni hisoblaylik. Bu yerda m, n va p ratsional sonlar bo‘lib, quyidagi hollarda bu integralni hisoblash ratsional ifodani integrallashga olib kelinadi.

1-hol. Agar p butun bo‘lib, N son m va n larning umumiy maxraji bo‘lsa $t=\sqrt[N]{x}$ almashtirish qo‘llaniladi.

2-hol. Agar m butun son bo‘lib, N son p ning maxraji bo‘lsa, $t=\sqrt[N]{a+bx^n}$ almashtirish qo‘llaniladi.

3-hol. Agar $m+p$ - butun son bo‘lib, $N-p$ ning maxraji bo‘lsa, $t=\sqrt[N]{\frac{a+bx^n}{x^n}}$ almashtirish qo‘llaniladi.

Masalan, ushbu

$$\int \frac{\sqrt{x}}{\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^2}dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx$$

integral uchun, $m=\dfrac{1}{2}$, $n=\dfrac{1}{3}$, $p=-2$ ekanligi kelib chiqadi. Demak, bu integralni hisoblash 1- holga tushar ekan. $\dfrac{1}{2}$ va $\dfrac{1}{3}$ larning umumiy maxraji $N=6$ shuning uchun $t=\sqrt[6]{x}$ almashtirishni bajaramiz, ya'ni

$$x=t^6,\ dx=6t^5dt$$

tengliklarga ko'ra

$$\int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^{-2}dx = \int t^3\left(1+t^2\right)^{-2}6\cdot t^5dt = 6\int \frac{t^8}{\left(1+t^2\right)^2}dt\ .$$

Ammo, $\left(t^2+1\right)^2=t^4+2t^2+1$ bo'lgani uchun, t^8 ko'phadni t^4+2t^2+1 ko'phadga bo'lib, $\dfrac{t^8}{\left(1+t^2\right)^2}$ ratsional kasrning, to'g'ri kasr qismini ajratib olamiz:

$$\begin{array}{l|l}
t^8 & t^4+2t^2+1 \\
\underline{-\,t^8+2t^6+t^4} & \overline{t^4-2t^2+3} \\
-2t-t^4 & \\
\underline{-2t^6-4t^4-2t^2} & \\
\quad 3t^4\,2t^2 & \\
\underline{\quad -\,3t^4+6t^2+3} & \\
\qquad -4t^2-3 &
\end{array}$$

ya'ni

$$\frac{t^8}{\left(t^2+1\right)}=t^4-2t^2+3-\frac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}.$$

Lekin $\dfrac{4t^2+3}{\left(t^2+1\right)^2}=\dfrac{4\left(t^2+1\right)-1}{\left(t^2+1\right)^2}=\dfrac{4}{t^2+1}-\dfrac{1}{\left(t^2+1\right)^2}$ bo'gani uchun, 10)–integralga asosan quyidagini hosil qilamiz

$$6\int\frac{t^8}{\left(1+t^2\right)^2}dt=6\left[\int\left(t^4-2t^2+3\right)dt-4\int\frac{dt}{t^2+1}+\int\frac{dt}{\left(t^2+1\right)^2}\right]=$$

$$=6\left[\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+3t-4arc\ tg\ t+\frac{1}{2}\cdot\frac{t}{t^2+1}+\frac{1}{2}arctg\ t\right]+C=$$

$$=\frac{6}{5}t^5-4t^3+18t-21\ arctg\,t+\frac{3t}{t^2+1}+C$$

Dastlabki integral uchun quyidagi hosil bo'ladi:

$$\int\frac{\sqrt{\delta}}{\left(1+\sqrt[3]{\delta}\right)^2}dx=\frac{6}{5}\sqrt[6]{\delta^5}-4\sqrt{\delta}+18\sqrt[6]{\delta}-21arctg\sqrt[6]{\delta}+\frac{3\sqrt[6]{\delta}}{\sqrt[3]{\delta}+1}+\tilde{N}$$

5.4. Trigonometrik funksiyalarni integrallash

$R(u,v)$-ifoda u va v o'zgaruvchilarning ratsional funksiyasi bo'lsin. $\int R(\sin x,\cos x)dx$ integralni hisoblaylik. Bunday integralda $t=tg\dfrac{x}{2}$ universal almashtirishni bajarib $R(\sin x,\cos x)dx$ ifodani t-o'zgaruvchining ratsional ifodasiga olib kelish mumkin. Haqiqatan ham

$$\sin x=\frac{2t\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}=\frac{2t}{1+t^2},\ \cos x=\frac{1-tg^2\dfrac{x}{2}}{1+tg^2\dfrac{x}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x=2arctg\ t,\quad dx=2\frac{1}{1+t^2}dt$$

bo'lgani uchun

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = 2\int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{1}{1+t^2}dt$$

bu yerda $R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{1}{1+t^2}$ ifoda $-t$ ning ratsional funksiyasi bo'lgani uchun, ushbu integralni hisoblab, t ning o'rniga $tg\frac{x}{2}$ ni qo'yib, dastlabki integralni topamiz.

Agar $R(-\sin x, \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, integralda $\cos x = t$, agar $R(\sin x - \cos x) \equiv -R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, $\sin x = t$ almashtirishni bajarish mumkin.

Agar $R(-\sin x - \cos x) \equiv R(\sin x, \cos x)$ bo'lsa, $tgx = t$ almashtirishni bajarish orqali integralni ratsional funksiyani integrallashga olib kelsa bo'ladi.

Masalan, $\int\frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5}$ integralni hisoblaylik.

Buning uchun $t = tg\frac{x}{2}$ almashtirishdan foydalanamiz:

$$\int\frac{dx}{2\sin x - \cos x + 5} = \int\frac{2}{\frac{4t}{1+t^2} - \frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{dt}{1+t^2} = \int\frac{2dt}{4t - 1 + t^2 + 5 + 5t^2} =$$

$$= \int\frac{2dt}{6t^2 + 4t + 4} = \int\frac{dt}{3t^2 2t + 2} = \int\frac{dt}{3\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{5}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3}\int\frac{d\left(t + \frac{1}{3}\right)}{\left(t + \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)^2} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{5}}{3}}arctg\frac{t + \frac{1}{3}}{\frac{\sqrt{5}}{3}} + C = \frac{1}{\sqrt{5}}arctg\frac{3tg\frac{x}{2} + 1}{\sqrt{5}} + C$$

Endi, $\int\frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x + \cos^3 x}$ integralni hisoblaylik. Bu yerda $R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x)$ bo'lgani uchun $t = tgx$ almashtirishni bajaramiz. Natijada

$$\int \frac{\sin x\, dx}{\sin^3 x+\cos^3 x}=\int \frac{\sin x\, dx}{\cos^3 x\cdot\left(tg^3 x+1\right)}=\int \frac{tgx\cdot d(tgx)}{tg^3 x+1}=$$

$$\int \frac{tdt}{t^3+1}=-\frac{1}{6}\ell n\frac{(\sin+\cos x)^2}{1-\sin x\cdot\cos x}-\frac{1}{\sqrt{3}}arc\ tg\ \frac{2\cos x-\sin x}{\sqrt{3}\cdot\sin x}+C$$

tenglikni hosil qilamiz.

Yana bir misol, $\int \frac{dx}{(2+\cos x)\sin x}$ integralda $R(-\sin x, \cos x)=-R(\sin x,\ \cos x)$ tenglik o'rinli bo'lgani uchun, $t=\cos x$ almashtirishni bajaramiz. Natijada

$$\int \frac{dx}{(2+\cos x)\cdot\sin x}=\int \frac{\sin x dx}{(2+\cos x)\cdot\sin^2 x}=-\int \frac{d(\cos x)}{(2+\cos x)\left(1-\cos^2 \delta\right)}=\int \frac{dt}{(2+t)\left(1+t^2\right)}=$$

$$\frac{1}{6}\ell n\frac{(1-\cos x)(2+\cos x)^2}{(1+\cos x)^3}+\tilde{N}$$

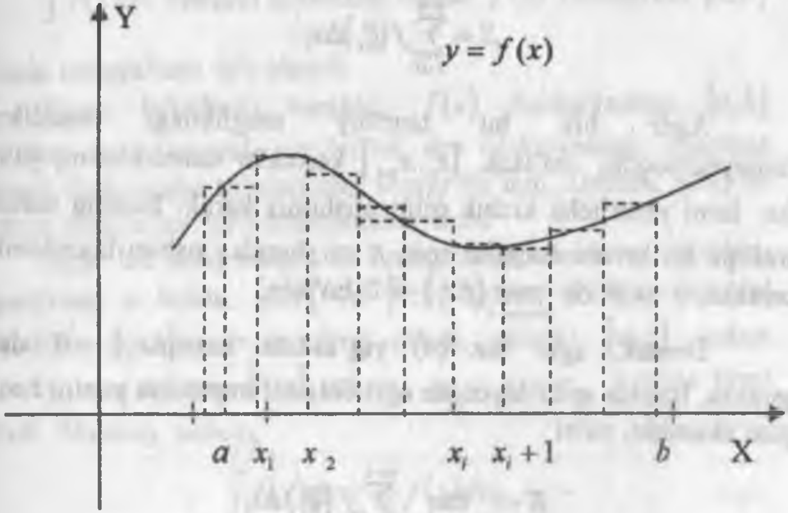
Shuni ta'kidlash lozimki, har doim ham berilgan integralni analitik usulda hisoblab bo'lmaydi.

Masalan, $\int \ell^{-x^2}dx,\quad \int \sin x^2\, dx,\quad \int \frac{\sin x}{x}dx,\quad \int \frac{dx}{\ell nx}$

integrallar mavjud bo'lishligiga qaramasdan, ularni analitik usulda integrallab bo'lmaydi. Buning sababi hosilasi berilgan integral ostidagi funksiyaga teng bo'lgan elementar funksiya mavjud emasligidir.

5.5. Aniq integral tushunchasi

Quyidagi egri chiziqli trapetsiya deb nomlanuvchi figuraning yuzasini topish masalasini ko'raylik.



Bu figura yuqoridan manfiy bo'lmagan $y = f(x)$ funksiya grafigi bilan, quyidan OX o'q, yon tomonlardan $x = a$ va $x = b$ to'g'ri chiziqlar bilan chegaralangan. Buning uchun $[a,b]$ oraliqni $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ nuqtalar bilan, $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0,1,\ldots n-1$, kichik oraliqlarga bo'lamiz. Har bir oraliqdan biron-bir $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ nuqta olib, $x_{i+1} - x_i = \Delta x_i$, $i = 0,1,\ldots,n-1$, belgilash kiritib, quyidagi yig'indini tuzib olamiz.

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\cdot \Delta x_i \qquad (4)$$

Bu yig'ndida $f(\xi_i)\cdot \Delta x_i$ qo'shiluvchini biz qaralayotgan figuraning $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi bo'lagining yuzasini, balandligi $f(\xi_i)$ va asosi Δx_i ga teng bo'lgan to'g'ri to'rtburchak yuzasiga taqriban teng deb qarasak, u holda yuqoridagi yig'indini biz egri chiziqli trapetsiya yuzasining taqribiy qiymati deb qarashimiz mumkin. S ni egri chiziqli trapetsiya yuzasi deb olsak,

$$S \approx \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Agar biz bu taqribiy tenglikdagi xatolikni kamaytirmoqchi bo'lsak, $[x_i, x_{i+1}]$ kesmalar uzunliklarini, ya'ni Δx_i larni yetarlicha kichik qilib olishimiz kerak. Buning uchun oraliqni bo'luvchi nuqtalar soni n ni shunday oshira borishimiz kerakki, $n \to \infty$ da $\max\limits_{0 \le i \le n-1} \{\Delta x_i\} \to 0$ bo'lsin.

Demak, agar biz (4) yig'indida $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ deb qarasak, limitda qidirilayotgan egri chiziqli trapetsiya yuzini hosil qilar ekanmiz, ya'ni

$$S = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

3-ta'rif. $[a,b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ uchun, shu oraliqni kichik bo'lakchalarga bo'luvchi $a = x_0 < x_1, \ldots, < x_n = b$ va $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ nuqtalar uchun (4) yig'indi integral yig'indi deb ataladi.

4-ta'rif. $[a,b]$ oraliqda berilgan $y = f(x)$ funksiya uchun $\max\{\Delta x_i\} \to 0$ da (4) integral yig'indining chekli limiti mavjud bo'lib, bu limit bo'linish nuqtalari $x_0, x_1, \ldots, x_n$ va oraliqlardan olinayotgan $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ nuqtalarga bog'liq bo'lmasa, $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi va limitning qiymati uning aniq integrali deyilib, bu limit quyidagicha belgilanadi:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max\{\Delta x_i\} \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

Bu yerda $f(x)$ integral ostidagi funksiya, $f(x)dx$ - integral ostidagi ifoda, a - integralning quyi chegarasi, b - integralning yuqori chegarasi deyiladi.

$\int_a^b f(x)dx$ integral qiymatini topish $f(x)$ funksiyani $[a,b]$ oraliqda integrallash deb ataladi.

Shuni ta'kidlash kerakki, $f(x)$ funksiyaning $[a,b]$ oraliqdagi aniq integrali son bo'lsa, shu funksiyaning aniqmas integrali funksiyalar to'plamidan iborat bo'ladi. Demak, aniq va aniqmas integrallar turli tushunchalar ekan.

Agar biz aniq integralda uning chegaralarining tartibini o'zgartirsak, u holda, $[a,b]$ va $[b,a]$ uchun tuzilgan integral yig'indilar ishorasi bilan farq qiladi, chunki $[a,b]$ uchun $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ bo'lsa, $[b,a]$ uchun $-\Delta x_i = x_i - x_{i+1}$ ayirma hosil bo'ladi. Shuning uchun,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

Yuqorida aytilganidek, aniq integralning geometrik ma'nosini manfiy bo'lmagan $y = f(x)$ funksiya hosil qilgan egri chiziqli trapetsiyaning yuzi deb tushunish mumkin ekan.

Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini anglash uchun, $y = f(t)$ funksiya biron bir ishlab chiqarishda mehnat unumdorligining vaqt davomida o'zgarishini aniqlasin deb qaraymiz. U holda $[0,T]$ vaqt oralig'ida mahsulot miqdori hajmi u ni hisoblash uchun $[0,T]$ oraliqni $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} <= T$ nuqtalar bilan kichik bo'lakchalarga bo'lib, $[t_i, t_{i+1}]$ kichik oraliqda mehnat unumdorligini taqriban o'zgarmas $f(\xi_i)$ ga $(\xi_i \in [t_i, t_{i+1}])$ teng deb $[t_i, t_{i+1}]$ oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot hajmi $\Delta u_i \approx f(\xi_i) \cdot \Delta t_i$ $(\Delta t_i = t_{i+1} - t_i)$ ekanligini hisobga olib, butun $[0,T]$ oraliqda ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori u uchun quyidagi taqribiy tenglikni hosil qilamiz:

$$u=\sum_{i=0}^{n-1}\Delta u_i\approx\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)\Delta t_i$$

Bu tenglikda aniqlikni oshirish uchun $\max\Delta t_i\to 0$ da limitga o'tishimiz lozim. U holda,

$$u=\int_0^T f(t)dt.$$

Bu tenglik $[0,T]$ vaqt davomida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdorining hajmi u, $f(t)$- mehnat unumdorligi funksiyasi $f(t)$ ning aniq integrali orqali ifoda yetilar ekan. Bu integral son jihatidan $f(t)$ funksiya va $[0,T]$ oraliqlar hosil qilgan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo'ladi.

$y=f(x)$ funksiya uchun $\int_a^b f(x)dx$ integral qaysi shartlarda mavjud bo'lishligini qaraymiz.

1-teorema (Aniq integral mavjudligining yetarli sharti). Agar $y=f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, bu funksiya shu oraliqda integrallanuvchi bo'ladi.

Isbot. $\overline{S_i}=\max\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{f(x)\}$ *va* $\underline{S_i}=\min\limits_{x\in[x_i,x_{i+1}]}\{f(x)\}$ belgilashlarni kiritaylik. U holda

$$\overline{S}'=\max_{x\in[x',x'']}\{f(x)\}\le\overline{S}_i,\quad \underline{S}'=\min_{x\in[x',x'']}\{f(x)\}\ge\underline{S}_i\ ,\qquad (5)$$

bu yerda $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$ oraliqdan olingan istalgan nuqtadir. Agar $[x',x'']\subset[x_i,x_{i+1}]$ bo'lganda

$$\overline{S}'=\max_{x\in[x',x'']}\{f(x)\}\le\overline{S}_i,\quad \underline{S}'=\min_{x\in[x',x'']}\{f(x)\}\ge\underline{S}_i$$

ekanligini e'tiborga olsak, $\max\Delta x_i\to 0$ da $[a,b]$ oraliqni bo'lakchalarga bo'lishda, keyingi qadamdagi kichik bo'lakchalar avvalgi qadamdagi bo'lakchalarning ichida yotadi deb hisoblashimiz mumkin. U holda (5) tengsizlikda $\sum_{i=0}^{n-1}\underline{S}_i\Delta x_i$

o'suvchi ketma-ketlik $\sum_{i=0}^{n-1} \overline{S}_i \Delta x_i$ kamayuvchi ketma-ketlik ekanligi kelib chiqadi. Agar $\lim\limits_{\max \Delta x_i \to 0} \max\left(\overline{S}_i - \underline{S}_i\right) = 0$ ekanligini e'tiborga olsak

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \underline{S}_i \Delta x_i = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \overline{S}_i \Delta x_i = I$$

U holda (5) tengsizlikka ko'ra

$$\lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = I.$$

Demak, $\int_a^b f(x)dx$ mavjud va

$$\int_a^b f(x)dx = I.$$

Quyidagi teorema aniq integral mavjudligining zaruriy shartini ifoda etadi.

2-teorema. Agar $y = f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsa, u holda bu funksiya shu oraliqda chegaralangan bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiya $[a,b]$ da chegaralangan bo'lmasin, masalan, yuqoridan chegaralanmagan deb faraz qilsak, $[a,b]$ ni bo'laklarga ajratishda $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ uchun $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ larni shunday tanlab olish mumkin bo'ladiki, oldindan berilgan har qanday $K > 0$ son uchun

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i > K$$

tengsizlikni o'rinli qilib olish mumkin ya'ni,

$$\sup_{\substack{\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] \\ i=0,1,\ldots,n-1}} \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right) = +\infty.$$

Demak, $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi emas. Bu esa bizning farazimiz noto'g'ri ekanligini ko'rsatadi, ya'ni $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo'lar ekan.

Aniq integral xossalari

1. Istalgan o'zgarmas k son uchun

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx.$$

2. Funksiyalar yig'indisining integrali qo'shiluvchilar integrallarining yig'indisiga teng, ya'ni

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

3. Istalgan a,b va c $(a<c<в)$ sonlar uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b g(x)dx.$$

4. Agar $a<b$ bo'lib, $[a,b]$ oraliqda $f(x)\le g(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

Xususan, $[a,b]$ oraliqda $m\le f(x)\le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsa, u holda

$$m(b-a)\le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

tengsizliklar o'rinli bo'ladi.

Bu xossalar isboti to'g'ridan-to'g'ri aniq integral ta'rifdan kelib chiqadi.

3-teorema. (O'rta qiymat haqidagi teorema). Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]\,(a<b)$ oraliqda integrallanuvchi bo'lib, bu oraliqda $m\le f(x)\le M$ tengsizliklar o'rinli bo'lsa, u holda

shunday μ son mavjudki, uning uchun $m \le \mu \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lib,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \mu \cdot (b-a)$$

Isbot. 4- xossaga ko'ra

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

Agar

$$\mu = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}$$

belgilashni kiritsak, $m \le \mu \le M$ o'rinli bo'lib,

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a)$$

tenglik kelib chiqadi.

$f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi bo'lsin, u holda istalgan $x \in [a,b]$ uchun, $f(x)$ funksiya $[a,x]$ oraliqda ham integrallanuvchi bo'ladi. Shuning uchun $[a,b]$ oraliqda berilgan quyidagi funksiyani aniqlay olamiz:

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

Bu $\Phi(x)$ funksiya yuqori chegarasi o'zgaruvchi integral deyiladi. Ushbu $\Phi(x)$ funksiya xossalari bilan tanishib chiqamiz.

4-teorema. $[a,b]$ oraliqda integrallanuvchi $f(x)$ funksiya uchun $\Phi(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ chegaralangan funksiya bo'lgani uchun, $[a,b]$ oraliqda $m \le f(x) \le M$ tengsizlik o'rinli bo'lsin deb olishimiz mumkin, u holda $\Delta x > 0$ uchun

$$\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx=\int_a^x f(x)dx+\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx-$$
$$-\int_a^x f(x)dx=\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx$$

tenglikdan va quyidagi

$$m\cdot\Delta x\le\int_x^{x+\Delta x} f(x)dx\le M\cdot\Delta x$$

tengsizlikdan,

$$m\cdot\Delta x\le\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\le M\cdot\Delta x$$

tengsizliklarni hosil qilamiz. Demak,

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x))=0$$

ya'ni $\Phi(x)$ funksiya x nuqtada uzluksiz ekanligi kelib chiqadi.

5-teorema Agar $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lsa, u holda $\Phi(x)$ funksiya (a,b) intervalda $f(x)$ funksiya uchun boshlang'ich funksiya bo'ladi, ya'ni (a,b) intervalda

$$\Phi'(x)=f(x)$$

tenglik o'rinli bo'ladi.

Isbot. $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lgani uchun $\min\limits_{t\in[x,x+\Delta x]}\{f(t)\}=m(x)$ va $\max\limits_{t\in[x,x+\Delta x]}\{f(t)\}=M(x)$ desak,

$$\lim_{\Delta x\to 0} m(x)=\lim_{\Delta x\to 0} M(x)=f(x)$$

Bundan

$$m(x)\Delta x\le\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)\le M(x)\cdot\Delta x,$$

ya'ni

$$m(x)\le\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}\le M(x)$$

tengsizlikdan, ushbu

$$\Phi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)}{\Delta x}=f(x)$$

tenglik kelib chiqadi.

Bu teoremadan $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan har qanday funksiyaning boshlang'ich funksiyasi mavjud bo'lishligi kelib chiqar ekan.

6-teorema. (N'yuton-Leybnits formulasi) $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lib, $F(x)$ uning istalgan boshlang'ich funksiyasi bo'lsin, u holda

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a),$$

bu tenglik N'yuton-Lebnits formulasi deyilib, ko'pincha $F(b) - F(a) = F(x)\big|_a^b$ belgilash qo'llaniladi.

Isbot. $F(x)$ funksiya $f(x)$ ning boshlang'ich funksiyasi bo'lsin. U holda $\Phi(x) = \int_a^x f(x)dx$ funksiya, ham $f(x)$ uchun (a,b) oraliqda boshlang'ich funksiya bo'lgani uchun, shunday C o'zgarmas son mavjud bo'ladiki, bunda

$$F(x) = \Phi(x) + C$$

tenglik o'rinli bo'ladi. Demak,

$$F(b) - F(a) = \hat{O}(b) + C - \hat{O}(a) - C = \hat{O}(b) - \hat{O}(a) =$$

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Endi aniq integralni hisoblash usullari bilan tanishamiz.

7-teorema. (Yangi o'zgaruvchi kiritib integrallash). Agar $\varphi(t)$ funksiya $[\alpha,\beta]$ oraliqda uzluksiz hosilaga ega bo'lib, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ bo'lsa, $[a,b]$ oraliqda uzluksiz bo'lgan $f(x)$ funksiya uchun

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$

tenglik o'rinlidir.

Isbot. $F(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasi bo'lsa, ya'ni

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

bo'lsa, u holda aniqmas integral xossalariga ko'ra

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(t)) + C$$

Bundan esa,

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

va

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a)$$

tenglikdan teorema isboti kelib chiqadi.

8-teorema. (Bo'laklab integrallash usuli). $u = u(x)$ va $v = v(x)$ funksiyalar $[a,b]$ oraliqda uzluksiz hosilalarga ega bo'lsa, quyidagi tenglik o'rinli bo'ladi:

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

Isbot. Ushbu

$$\int_a^b (uv)'\,dx = uv\Big|_a^b$$

tenglikka ko'ra aniq integral xossalariga asoslanib,

$$\int_a^b (uv)'\,dx = \int_a^b uv'dx + \int_a^b vu'dx = \int_a^b udv + \int_a^b vdu$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, bu yerdan

$$\int_a^b udv + \int_a^b vdu = uv\Big|_a^b$$

ya'ni

$$\int_a^b udv = uv\Big|_a^b - \int_a^b vdu$$

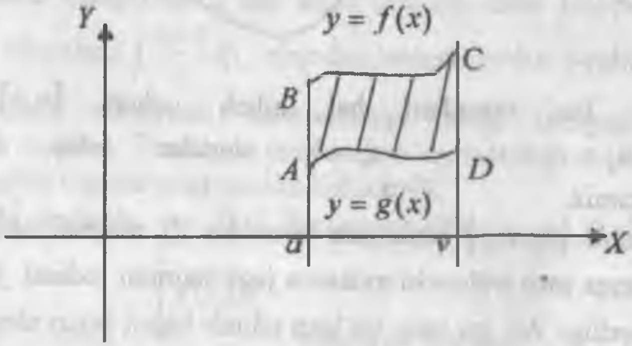
tenglik kelib chiqadi.

Endi aniq integralning ayrim tadbiqlarini ko'rib chiqaylik.

$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ va $g(x)$ funksiyalar uzluksiz bo'lib, $g(x) \le f(x)$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. $x = a$ *ва* $x = b$ to'g'ri chiziqlar hamda $f(x)$ va $g(x)$ funksiya grafiklari bilan chegaralangan S-yuzani hisoblash uchun, quyidagi formula o'rinlidir:

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

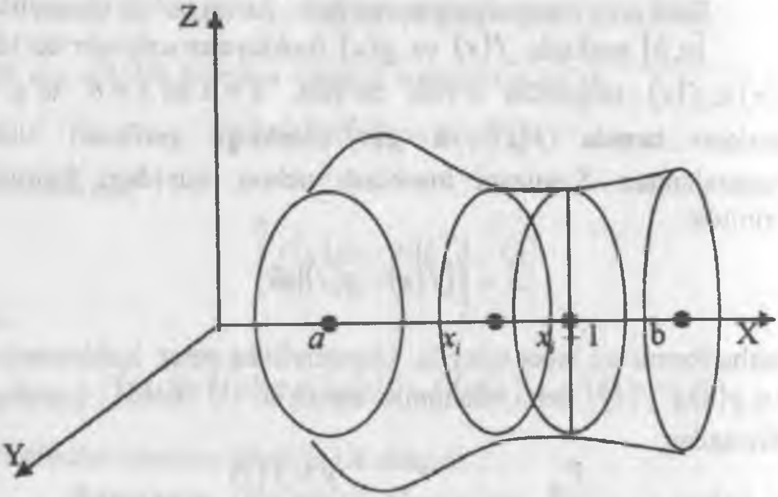
Ushbu formulani isbot qilaylik. Umumiylikka zarar keltirmasdan $0 \le g(x) \le f(x)$ deb olishimiz mumkin. U holda quyidagi chizmadan



$$S = \int_{ABCD} = \int_{aBCb} - \int_{aADb} = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$

tenglikni hosil qilamiz.

$[a,b]$ oraliqda $f(x)$ funksiya uzluksiz bo'lib, $f(x) \ge 0$ tengsizlik o'rinli bo'lsin. Biz $y = f(x)$ funksiya grafigini OX o'q atrofida aylanitirishdan, hamda $OXYZ$ fazodagi $x=a$ va $x = b$ tekisliklar bilan chegaralangan aylanma jismning V hajmini topish masalasini qaraymiz $[a,b]$



Bu masalani hal qilish uchun $[a,b]$ oraliqni $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ nuqtalar bilan bo'laklarga ajratamiz.

So'ngra $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqdan biron bir ξ_i nuqtani olib, $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi aylanma jism hajmini radiusi $f(\xi_i)$ ga va balandligi Δx_i ga teng bo'lgan silindr hajmi bilan almashtiramiz. Ma'lumki, $\Delta x_i \to 0$ da bu almashtirishdagi xatolik kamayib boradi. $[x_i, x_{i+1}]$ ga mos keluvchi silindr hajmi $\pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$ ekanligini e'tiborga olsak, quyidagi taqribiy tenglikni hosil qilamiz.

$$V \approx \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i$$

Natijada ushbu

$$V = \lim_{\max \Delta x \to 0} \sum_{i=0}^{n-1} \pi f^2(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

tenglikni hosil qilamiz. Demak, aylanma jism hajmi uchun quyidagi formula o'rinlidir:

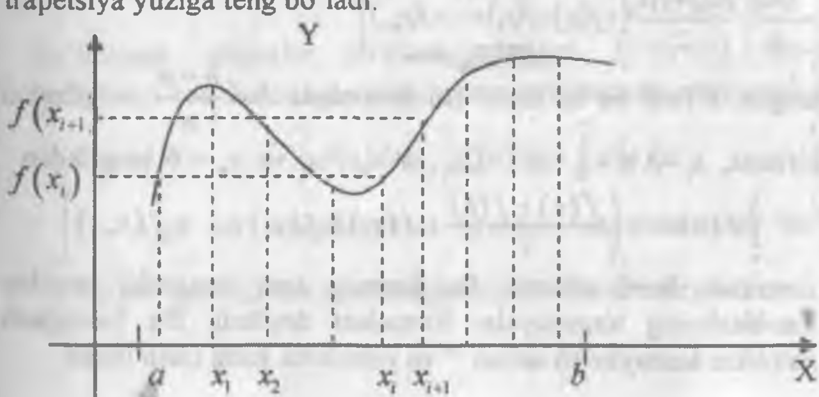
$$V = \int_a^b \pi f^2(x)dx$$

Endi aniq integralni taqribiy hisoblash masalasini qaraymiz.

Shuni ta'kidlash lozimki, uzluksiz bo'lgan har qanday funksiya uchun N'yuton-Leybnits formulasini qo'llay olmaymiz, chunki bu formulani qo'llash uchun, $y = f(x)$ funksiyaning boshlang'ich funksiyasini bilishimiz zarur. Lekin uzluksiz bo'lgan ko'pgina funksiyalarning boshlang'ich funksiyalarini, ya'ni aniqmas integrallarini har doim analitik usul bilan topa olmaymiz. Masalan, $\int \frac{\sin x}{x} dx$ shunday integrallardan biridir.

Bunday murakkab ko'rinishdagi aniq integrallarni hisoblashda taqribiy hisoblash usullaridan foydalanish mumkin. Biz quyidagida trapetsiyalar usulini keltiramiz.

$[a,b]$ oraliqda $y = f(x)$ funksiya uzluksiz va $f(x) \geq 0$ bo'lsin. U holda $\int_a^b f(x)dx$ integral qiymati $y = f(x)$, $x = a$, $x = b$ va $y = 0$ chiziqlar bilan chegaralangan egri chiziqli trapetsiya yuziga teng bo'ladi.



$\int_a^b f(x)dx$ integralni hisoblashda $[x_i, x_{i+1}]$ bo'lakka mos keluvchi $y = f(x)$ egri chiziq bo'lagini, $(x_i, f(x_i))$ va $(x_{i+1}, f(x_{i+1}))$ nuqtalarni birlashtiruvchi kesma bilan almashtirsak, $[x_i, x_{i+1}]$ oraliqqa mos keluvchi egri chizqli trapetsiya yuzini ushbu oraliqqa mos keluvchi trapetsiya bilan almashtirgan bo'lamiz. Bu trapetsiya yuzini S_i desak,

$$S_i = \frac{f(x_i) + f(x_{i+1})}{2} \cdot (x_{i+1} - x_i)$$

x_i nuqtalarni shunday tanlab olaylikki $[a, b]$ oraliq bu nuqtalar bilan teng n ta bo'lakka bo'linsin, ya'ni $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$ bo'lsin.

U holda,

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_0 + S_1 + S_2 + \cdots + S_{n-1}$$

Demak,

$$\int_a^b f(x)dx \approx S_0 + S_1 + \cdots + S_{n-1} = \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_1)}{2} + \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} + \cdots + \frac{f(x_{n-1})+f(x_n)}{2}\right] =$$

$$= \frac{b-a}{n}\left[\frac{f(x_0)+f(x_n)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \cdots + f(x_{n-1})\right]$$

tenglik o'rinli bo'lar ekan. Bu formulada $h = \frac{b-a}{n}$ belgilashni kiritsak, $x_0 = a, x_i = x_0 + ih, i = 1, 2, \ldots, n$ $x_0 = a$ va $x_n = b$ tenglikdan

$$\int_a^b f(x)dx \approx \left(\frac{f(a)+f(b)}{2} + f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})\right)$$

formulani hosil qilamiz. Bu formula aniq integralni taqribiy hisoblashning trapetsiyalar formulasi deyiladi. Bu formulada xatolikni kamaytirish uchun n ni yetarlicha katta olish lozim.

5.6. Xos bo‘lmagan integrallar

$[a,b]$ oraliqda $y=f(x)$ funksiya uchun kiritilgan aniq integral tushunchasida $f(x)$ funksiya $[a,b]$ oraliqda chegaralangan bo‘lishi zarur edi.

Cheksiz oraliq uchun aniq integral tushunchasi. $f(x)$ funksiya $[a,+\infty)$ cheksiz oraliqda berilgan bo‘lib, istalgan $a \le t$ uchun $f(x)$ funksiya $[a,t]$ oraliqda integrallanuvchi bo‘lsin. U holda istalgan $a \le t$ uchun $\Phi(t)=\int_a^t f(x)dx$ funksiya aniqlangan bo‘ladi.

5-ta'rif. $f(x)$ funksiyaning $[a,+\infty)$ oraliqdagi xos bo‘lmagan integrali $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ deb ushbu $\lim\limits_{t \to +\infty} \Phi(t)$ limitga aytiladi, ya'ni

$$\int_a^{+\infty} f(x)dx = \lim_{t \to +\infty} \int_a^t f(x)dx.$$

Agar bu limit mavjud va chekli bo‘lsa, xos bo‘lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Xuddi shuningdek, $\int_{-\infty}^{a} f(x)dx$ ko‘rinishdagi xos bo‘lmagan integralni ta'riflash mumkin. $(-\infty,+\infty)$ cheksiz oraliqdagi xos bo‘lmagan integral esa quyidagicha aniqlanadi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_a^{+\infty} f(x)dx.$$

Agar bu integrallardan birontasi uzoqlashuvchi bo‘lsa $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ xos bo‘lmagan integral uzoqlashuvchi deyiladi.

Masalan,

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x^2}dx=\lim_{t\to+\infty}\left(1-\frac{1}{t}\right)=1 .$$

Endi $[a,b]$ oraliqda chegaralanmagan funksiya uchun xos bo'lmagan integral tushunchasini kiritamiz. $y=f(x)$ funksiya $[a,b)$ yarim ochiq oraliqda uzluksiz bo'lib, $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$ bo'lsin.

6-ta'rif. $\lim\limits_{\delta\to+0}\int\limits_a^{b-\delta}f(x)dx$ limit qiymati $y=f(x)$ funksiyaning $[a,b)$ yarim ochiq oraliqdagi xos bo'lmagan integrali deyiladi. Agar bu limit mavjud va chekli bo'lsa, xos bo'lmagan integral yaqinlashuvchi, aks holda uzoqlashuvchi deyiladi.

Limit qiymati $\int\limits_a^b f(x)dx$ shaklda belgilanadi, ya'ni

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\delta\to+0}\int_a^{b-\delta}f(x)dx$$

Xuddi shunga o'xshash ushbu $(a,b]$ yarim ochiq oraliqda uzluksiz va $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ bo'lgan $y=f(x)$ funksiya uchun ham xos bo'lmagan integral ta'riflanadi. (a,b) intervalda uzluksiz, $\lim\limits_{x\to a+0}f(x)=\infty$ va $\lim\limits_{x\to b-0}f(x)=\infty$ bo'lgan funksiya uchun $\int\limits_a^b f(x)dx$ xos bo'lmagan integral quyidagi tenglik orqali ifodalanadi:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx ,$$

bu yerda c son $a<c<b$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi bironta son.

Misollar,

1. $$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^\alpha}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{dx}{x^\alpha}=\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{t^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}+\infty, & agar\ \alpha<1\\ \dfrac{1}{\alpha-1}, & agar\ \alpha>1\end{cases}$$

Demak, $\alpha<1$ da integral uzoqlashuvchi, $\alpha>1$ bo'lsa yaqinlashuvchidir. $\alpha=1$ da

$$\int_1^{+\infty}\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+\infty}\int_1^t\frac{1}{x}dx=\lim_{t\to+\infty}\ln x=+\infty$$

bo'lgani uchun, yuqoridagi integral $\alpha\le 1$ da uzoqlashuvchi.

$$\int_0^1\frac{1}{(1-x)^\alpha}dx=\lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta}\frac{1}{(1-x)^\alpha}dx=\lim_{\delta\to+0}\frac{1}{\alpha-1}\left(\frac{1}{\delta^{\alpha-1}}-1\right)=\begin{cases}+\infty, & agar\ \alpha>1\\ \dfrac{1}{1-\alpha}, & agar\ \alpha<1\end{cases}$$

Demak, $\alpha>1$ bo'lganda xos bo'lmagan integral uzoqlashuvchi va $\alpha<1$ da yaqinlashuvchi. $\alpha=1$ da

$$\int_0^1\frac{1}{1-x}dx=\lim_{\delta\to+0}\int_0^{1-\delta}\frac{1}{1-x}dx=\lim_{\delta\to+0}(-\ln\delta)=+\infty$$

bo'lgani uchun, yuqoridagi integral $\alpha\ge 1$ da uzoqlashuvchidir.

Xulosa

Boshlang'ich funksiya va aniqmas integral nazariyasi to'la keltirilgan. Asosiy integrallash qoidalari berilgan. Ba'zi tipik integrallarni hisoblash usullari bayon etilgan. Aniq integral ta'rifi va xos bo'lmagan integral ta'rifi keltirilgan. Ularni hisoblash qoidalari berilgan. Asosiy xossalar isbotlangan. Aniq integrallarning ba'zi tadbiqlari bayon etilgan.

Tayanch iboralar

Boshlang'ich funksiya, aniqmas integral. Aniq integral, chegara, soha yuzasi, xosmas integral.

Takrorlash uchun savollar

1. Boshlang'ich funksiya deb nimaga aytiladi?
2. Aniqmas integral deb nimaga aytiladi?
3. Aniqmas integralning xossalarini yozing.
4. Aniqmas integral jadvalini keltiring va ba'zilarini isbotlang.
5. $\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^m}$ integral qanday hisoblanadi?
6. Ratsional ifodalar qanday integrallanadi?
7. Irratsional ifodalarni integrallashga misollar keltiring.
8. Trigonometrik ifodalarni integrallashga misollar keltiring.
9. Binominal integrallar nazariyasini keltiring.
10. Elementar funksiyalar bilan ifodalanmaydigan integrallarga misollar keltiring
11. Aniq integral qanday ta'riflanadi?
12. Aniq integralning iqtisodiy ma'nosini ayting
13. Aniq integralning mavjudligi va yetarli shartini ayting.
14. Aniq integral xossalarini ayting.
15. N'yuton-Leybnits formulasini yozing.
16. Aniq integral bilan yuzalarni hisoblash formulasini yozing.
17. Aniq integralni taqribiy hisoblash formulasini yozing.
18. Xos bo'lmagan integral turlarini ayting.
19. Cheksiz oraliq uchun yaqinlashuvchi bo'lgan xos bo'lmagan integralga misol keltiring.
20. Maxsus nuqtali yaqinlashuvchi xos bo'lmagan integralga misol keltiring.

Adabiyotlar

1. Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2. Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3. Jo'rayv T.J., Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4. Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5. Обший курс высший матeматике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.

6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалавриата.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma'ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

6-bob. DIFFERENSIAL TENGLAMALAR

6.1. Birinchi tartibli differensial tenglamalar

Differensial tenglamalar haqida umumiy ma'lumotlar.

Differensial tenglamalar matematikada alohida o'rin egallab, tabiiy jarayonlarni tekshirish, jamiyatdagi ayrim qonuniyatlarni o'rganish, differensial tenglamalarni o'z ichiga olgan matematik modellarga keladi.

1-ta'rif. Differensial tenglama deb erkli o'zgaruvchilar, noma'lum funksiya va bu funksiya hosilalari yoki differenstiallarini bog'lovchi tenglamaga aytiladi.

Agar izlanayotgan funksiya bir o'zgaruvchili bo'lsa, tenglama oddiy differensial tenglama, ko'p o'zgaruvchili bo'lsa-xususiy hosilali differensial tenglama deyiladi.

Differensial tenglamaning tartibi deb unda qatnashayotgan hosilalarning eng yuqori tartibiga aytiladi.

Umumiy holda n-tartibli oddiy differensial tenglama quyidagicha ifodalanadi:

$$F\left(x, y, y', \cdots y^{(n)}\right) = 0$$

Jumladan, 1- tartibli oddiy differensial tenglamalarning umumiy ko'rinishi

$$F\left(x, y, y'\right) = 0 \qquad \textbf{(1*)}$$

kabidir.

Agar (1*) tenglamani hosilaga nisbatan yechish mumkin bo'lsa, quyidagiga ega bo'lamiz:

$$y' = f(x, y) \qquad \textbf{(1)}$$

Bu holda tenglama hosilaga nisbatan yechilgan, deyiladi.

Misollar:

$y' = 7x^3$, $\quad (y')^3 y^2 + 5x = 0$, $\quad y' = x^4 \cos y$.

2-ta'rif. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglamaning yechimi deb (a,b) oraliqda (1*) (xususan (1)) tenglamani ayniyatga aylantiruvchi $y=\varphi(x)$ funksiyaga aytiladi.

Yechimning grafigi integral egri chiziq deyiladi. Differensial tenglamalar nazariyasida asosiy masala yechimning mavjudligi va yagonaligidir.

Bu masala (1) tenglama uchun Koshi teoremasi orqali ifodalanadi.

1-teorema. (Koshi teoremasi). Agar $f(x,y)$ funksiya va uning xususiy hosilasi $f'_y(x,y)$ OXY tekislikning biror D sohasida uzluksiz bo'lsa, u holda ixtiyoriy $(x_0,y)\in D$ nuqtaning biror atofida (1) tenglamaning $x=x_0$ da $y=y_0$ shartni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagonadir.

(1) tenglamaning $y_{|x=x_0}=y_0$ boshlang'ich shartni (Koshi shartini) qanoatlantiruvchi yechimini topish masalasi Koshi masalasi deb ataladi. Buning geometrik ma'nosi integral egri chiziqlar oilasidan D sohaning berilgan (x_0,y_0) nuqtasidan o'tuvchi bittasini tanlab olinadi.

3-ta'rif. (1) tenglamaning umumiy yechimi deb c o'zgarmasning ixtiyoriy qiymatida bu tenglamani qanoatlantiruvchi $y=\varphi(x,c)$ funksiyalar majmuiga aytiladi.

4-ta'rif. $\{\varphi(x,c)\}$-(1) tenglamaning umumiy yechimi bo'lsin. (1) tenglamaning D sohasidagi xususiy yechimi deb $c=c_0$ o'zgarmas qiymatda olingan $y=\varphi(x,c_0)$ funksiyaga aytiladi.

O'zgaruvchisi ajraladigan tenglamalar

5-ta'rif. Ushbu

$$y'=f_1(x)f_2(y) \qquad (2)$$

ko'rinishdagi tenglamalar o'zgaruvchisi ajralgan differensial tenglamalar deyiladi, bu yerda $f_1(x)$, $f_2(y)$- uzluksiz funksiyalar.

Bu tenglamani yechish uchun «o'zgaruvchini ajratish usuli»ni qo'llaymiz: y' hosilani uning ekvivalient formasi dy/dx ga almashtirib, tenglikning ikkala tomonini $\dfrac{dx}{f_2(y)}$ ga ko'paytiriladi $\left(f_2(y) \neq 0\right)$:

$$\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)dx$$

Tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$\int dy/f_2(y) = \int f_1(x)dx + C,$$

bu yerda C-o'zgarmas kattalik.

Misol: $y' = \dfrac{x\left(\sqrt{y^2+1}\right)}{y}$ tenglamaning $(0,1)$ nuqtadan o'tuvchi xususiy yechimini toping.

Yechish: O'zgaruvchilarni ajratamiz:

$$ydy/\sqrt{y^2+1} = xdx$$

Bundan, $\int ydy/\sqrt{y^2+1} = \int xdx + C,$

Demak, $\sqrt{y^2+1} = \dfrac{x^2}{2} + c \qquad y^2+1 = (\dfrac{x^2}{2}+c)^2$

$y = \sqrt{(\dfrac{x^2}{2}+c)^2 - 1}$

$(0,1)$ nuqtadan o'tuvchi yechim izlanayotgani uchun $C = \pm\sqrt{2}$ topiladi. Demak,

$$y = \sqrt{\left(x^2/2 + \sqrt{2}\right)^2 - 1}$$

Birinchi tartibli chiziqli tenglamalar

6-ta'rif. Birinchi tartibli chiziqli tenglama deb

$$y' + p(x)y = q(x) \qquad (3)$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda $p(x), q(x)$-uzluksiz funksiyalar. Bu tenglamani «o'zgarmasni variatsiyalash usuli» bilan yechamiz.

Dastlab, (3) ga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi topiladi:

$$y' + p(x)y = 0$$

Bu o'zgaruvchilari ajraladigan tenglamadir. Shuning uchun $y \neq 0$ deb faraz qilib, ushbuga ega bo'lamiz:

$$\frac{dy}{y} = -p(x)dx \qquad (4)$$

$$y = c\, e^{-\int p(x)dx}$$

C -ixtiyoriy o'zgarmas son.

Endi (4) da C ni x ning funksiyasi, deb qaraymiz:
ya'ni

$$y = c(x)e^{-\int p(x)dx}, \qquad (5)$$

(«o'zgarmasni variatsiyalash» deb shu jarayon ko'zda tutiladi).

(5) ni (3) ga qo'yib soddalashtirsak,

$$c'(x) = q(x)\, e^{\int p(x)dx}.$$

Ushbu tenglikning ikkala tomonini integrallasak,

$$c(x) = \int q(x)e^{\int p(x)dx}dx + c_1, \qquad (6)$$

hosil bo'ladi, bu yerda C_1 -ixtiyoriy o'zgarmas son.

(6) ni (5) ga qo'ysak, (3) tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$y(x) = c_1 e^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}\int q(x)e^{\int p(x)dx}dx. \qquad (7)$$

Ba'zi bir chiziqli bo'lmagan tenglamalar ayrim almashtirishlar yo'li bilan chiziqli tenglamaga keltiriladi.

Bunday tenglamalar qatoriga Bernulli tenglamasini kiritish mumkin:

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = const \tag{8}$$

Agar $n = 0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n = 1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n \neq 0$, $n \neq 1$ deb faraz qilinadi.

Yangi $z(x) = z(y(x))$ funksiya kiritamiz:

$$z = y^{1-n}, \tag{9}$$

u holda,

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \tag{10}$$

(8) tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo'lamiz:

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q \tag{11}$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $(1-n)$ ga ko'paytirib, (9), (10)-tengliklarni hisobga olgan holda $z(x)$ ga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz.

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q \tag{12}$$

1-misol.

$$y' + xy = xy^3$$

Yechish. Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n = 3$. $z = y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda $z' = -2y^{-3}y'$.

(12) da asosan:

$$z' + (-2)xz = -2x$$

(7) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$z(x) = Cx^2 + 1$$

Natijada ushbu

$$y = \pm\left(Cx^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

yechimni olamiz.

6.2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

7-ta'rif. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb,

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda x - erkli o'zgaruvchi, y -izlanayotgan funksiya, y', y'' -birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar.

Misol sifatida:

$$y'' + yy' - xy^2 - \cos x = 0$$

$$y^2 y'' + xy' + x^2 \cos y = 0$$

kabi tenglamalarni keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

Ikkinchi tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

2-teorema. (Koshi teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x, y, y')$ va uning xususiy hosilalari f'_y va f''_y (x, y, y') o'zgaruvchilar fazosining D sohasida uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy ichki $M_0(x_0, y_0, y_0^1) \in D$ nuqta uchun (2) tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona:

$$x = x_0,\ y_{(x_0)} = y_0,\ y'_{(x_0)} = y'_0 \qquad (3)$$

Geometrik nuqtai nazardan bu teorema OXY koordinata tekisligining (x_0, y_0) nuqtasi orqali o'tuvchi va burchak koeffitsientda y'_0 bo'lgan yagona integral chiziq mavjudligini anglatadi.

(3) shartlar boshlang'ich shartlar deyiladi, (2) tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

D sohada (2) tenglamaning umumiy yechimi deb shunday $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular c_1, c_2 o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatida (2) tenglamani qanoatlantirib (3) boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.

(2) tenglamaning xususiy yechimi deb c_1, c_2 o'zgarmaslarning tayin c_1^0, c_2^0 qiymatlaridagi $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ funksiyasiga aytiladi.

$$y' + p(x)y = q(x)y^n, \quad n = const \tag{8}$$

Agar $n = 0$ bo'lsa, chiziqli, bir jinsli bo'lmagan, $n = 1$ da chiziqli, bir jinsli tenglama hosil bo'ladi. Shuning uchun (8) da $n \neq 0$, $n \neq 1$ deb faraz qilinadi.

Yangi $z(x) = z(y(x))$ funksiya kiritamiz:

$$z = y^{1-n}, \tag{9}$$

u holda,

$$z' = (1-n)y^{-n}y' \tag{10}$$

(8) tenglamaning ikkala tomonini y^n ga bo'lamiz:

$$y^{-n}y' + py^{1-n} = q \tag{11}$$

Bu tenglamaning ikkala tomonini $(1-n)$ ga ko'paytirib, (9), (10)-tengliklarni hisobga olgan holda $z(x)$ ga nisbatan chiziqli, bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamani olamiz.

$$z' + (1-n)pz = (1-n)q \tag{12}$$

1-misol.

$$y' + xy = xy^3$$

Yechish. Bu tenglama Bernulli tenglamasidir $n = 3$. $z = y^{-2}$ almashtirishni bajaramiz. U holda $z' = -2y^{-3}y'$.

(12) da asosan:

$$z' + (-2)xz = -2x$$

(7) ga ko'ra tenglamaning umumiy yechimini topamiz:

$$z(x) = Cx^2 + 1$$

Natijada ushbu

$$y = \pm\left(Cx^2 + 1\right)^{-\frac{1}{2}}$$

yechimni olamiz.

6.2. Ikkinchi tartibli differensial tenglamalar

7-ta'rif. Ikkinchi tartibli oddiy differensial tenglama deb,

$$F(x, y, y', y'') = 0 \tag{1}$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi, bu yerda x - erkli o'zgaruvchi, y -izlanayotgan funksiya, y', y'' -birinchi va ikkinchi tartibli hosilalar.

Misol sifatida:

$$y'' + yy' - xy^2 - \cos x = 0$$

$$y^2 y'' + xy' + x^2 \cos y = 0$$

kabi tenglamalarni keltirish mumkin.

Ikkinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilgan tenglamani quyidagicha yozish mumkin:

$$y'' = f(x, y, y') \qquad (2)$$

Ikkinchi tartibli tenglama uchun ham mavjudlik va yagonalik teoremasi o'rinli.

2-teorema. (Koshi teoremasi). Faraz qilaylik, $f(x, y, y')$ va uning xususiy hosilalari f'_y va f''_y (x, y, y') o'zgaruvchilar fazosining D sohasida uzluksiz bo'lsin. U holda ixtiyoriy ichki $M_0(x_0, y_0, y_0^1) \in D$ nuqta uchun (2) tenglamaning quyidagi shartlarni qanoatlantiruvchi yechimi mavjud va yagona:

$$x = x_0,\ y_{(x_0)} = y_0,\ y'_{(x_0)} = y'_0 \qquad (3)$$

Geometrik nuqtai nazardan bu teorema OXY koordinata tekisligining (x_0, y_0) nuqtasi orqali o'tuvchi va burchak koeffitsientda y'_0 bo'lgan yagona integral chiziq mavjudligini anglatadi.

(3) shartlar boshlang'ich shartlar deyiladi, (2) tenglamaning berilgan boshlang'ich shartlar bilan yechimini qidirish masalasi Koshi masalasi deyiladi.

D sohada (2) tenglamaning umumiy yechimi deb shunday $y = \varphi(x, c_1, c_2)$ funksiyalar to'plamiga aytiladiki, ular c_1, c_2 o'zgarmaslarning ixtiyoriy qiymatida (2) tenglamani qanoatlantirib (3) boshlang'ich shartlarga bo'ysunsa.

(2) tenglamaning xususiy yechimi deb c_1, c_2 o'zgarmaslarning tayin c_1^0, c_2^0 qiymatlaridagi $y = \varphi(x, c_1^0, c_2^0)$ funksiyasiga aytiladi.

Misol uchun $y''=0$ tenglamani qaraylik. Ikki marta integrallab bu tenglama umumiy yechimi topiladi:

$$y=c_1x+c_2$$

bu yerda c_1, c_2 -ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Endi $y''=0$ tenglamaning $y|_{x=1}=2$, $y'|_{x=1}=1$ boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi xususiy yechimini topamiz. Ya'ni M (1, 2) nuqtadan o'tuvchi burchak koeffitsienti 1 ga teng bo'lgan to'g'ri chiziqni topamiz.

Boshlang'ich shartlarni umumiy yechimga qo'yib, c_1, c_2 ga nisbatan tenglamalar sistemasini olamiz.

$$c_1+c_2=2$$

$$c_1=1$$

Bundan $c_2=1$.

Shunday qilib, xususiy yechim $y=x+1$ to'g'ri chiziqdan iborat ekan.

O'zgarmas koeffitsientli ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglamalar

8-ta'rif. Ikkinchi tartibli chiziqli differensial tenglama deb

$$y''+p(x)y'+q(x)y=f(x) \tag{4}$$

ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi. Bu yerda y-izlanayotgan funksiya, $p(x), q(x), f(x)$- biror (a,b) intervalda aniqlangan, uzluksiz funksiyalar.

Agar $f(x)\neq 0$ bo'lsa, u holda (4) ikkinchi taribli, chiziqli, bir jinsli tenglama deyiladi. Agar $f(x)\neq 0$ bo'lsa, u bir jinsli bo'lmagan chiziqli tenglama deyiladi. (4) tenglama ikkinchi tartibli hosilaga nisbatan yechilsa, u holda (4) tenglama (2) tenglamaning xususiy holidir. Demak, bu holda Koshi teoremasini qo'llashimiz mumkin.

Biz (4) tenglamada $p(x)$ va $q(x)$ funksiyalar o'zgarmas bo'lgan holini qaraymiz. Bunday tenglamalar o'zgarmas koeffitsientli chiziqli tenglamalar deyiladi.

Demak,

$$y'' + py' + qy = f(x) \tag{5}$$

ko'rinishdagi tenglamalarni qaraymiz, bu yerda p va q-ixtiyoriy haqiqiy sonlar.

Ikkinchi tartibli bir jinsli tenglamalar

Ushbu chiziqli bir jinsli

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{6}$$

tenglamani qaraymiz, p va q - haqiqiy sonlar.

Ikkinchi tartibli chiziqli tenglamalar 1-teoremaga asosan cheksiz ko'p yechimlarga ega bo'lishi mumkin. Lekin umumiy yechimni ifodalash uchun asosiy yechimlar ajratib olinadi.

Ikkinchi tartibli tenglama uchun asosiy yechimlar ikkitadir.

9-ta'rif. Agar (6) tenglama $y_1(x), y_2(x)$ yechimlarning chiziqli kombinatsiyasi:

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{7}$$

faqat $c_1 = c_2 = 0$ bo'lgan holdagina o'rinli bo'lsa, u holda ular chiziqli erkli, aks holda chiziqli bog'liq deyiladi.

3-teorema. $y_1(x)$ va $y_2(x)$ (6) tenglamaning (a,b) oraliqdagi chiziqli erkli yechimlari bo'lsin. U holda

$$y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) \tag{8}$$

(c_1, c_2 - ixtiyoriy o'zgarmaslar) bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bo'ladi.

(6) tenglamaning yechimini $y = e^{kx}$ ko'rinishda qidiramiz, bu yerda k-o'zgarmas son. Bu funksiyani (6) ga qo'ysak, quyidagi tenglamaga ega bo'lamiz:

$$k^2e^{kx} + pke^{kx} + qe^{kx} = 0$$

Tenglamaning ikkala tomonini e^{kx} ga qisqartirib, k ga nisbatan kvadrat tenglamaga ega bo'lamiz:

$$k^2 + pk + q = 0 \qquad (9)$$

Uning ildizi k bo'lsin, u holda $y = e^{kx}$ funksiya (6) tenglamaning xususiy yechimi, (9) esa (6) differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi deyiladi.

k_1 va k_2 - (9) tenglamaning yechimlari bo'lsin. U holda quyidagi teorema o'rinlidir.

4-teorema. a) Agar (9) xarakteristik tenglamaning ildizlari haqiqiy va $k_1 \neq k_2$ bo'lsa, u holda (6) differensial tenglamaning umumiy yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$y = c_1 e^{k_1 x} + c_2 e^{k_2 x}$$

b) Agar (9) tenglamaning ildizlari haqiqiy va teng bo'lsa ($k_1 = k_2 = k$), u holda (6) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1 e^{kx} + c_2 x e^{kx}$$

ko'rinishda bo'ladi.

c) Agar xarakteristik tenglamaning ildizlari kompleks sonlar bo'lsa

$$\left(k_1 = a + ib, k_2 = a - ib, i = \sqrt{-1},\ a, b - haqiqiy\ sonlar\right),$$

u holda, (6) tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda

$$a = -\frac{p}{2}, \quad b = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

Uchchala holda ham c_1 va c_2 – ixtiyoriy sonlar.

1-misol. $y'' - 5y' + 4y = 0$

Yechish: Bu differensial tenglamaning xarakteristik tenglamasi ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$k^2 - 5k + 4 = 0$$

Ildizlari haqiqiy va turlicha $k_1 = 1,\ k_2 = 4$. Demak, bu tenglamaning umumiy yechimi

$$y = c_1e^x + c_2e^{4x}$$

2-misol. $y'' - 6y' + 9y = 0$.

Yechish. Xarakteristik tenglama $k^2 6k + 9 = 0$ yoki $(k-3)^2 = 0$, ya'ni karrali yechimga ega: $k_1 = k_2 = k = 3$. Bu bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi

$$y = e^{3x}(c_1 + c_2x)$$

3-misol. $y'' - 2y' + 2y = 0$

Yechish. Ushbu tenglamani xarakteristik tenglamasi

$$k^2 - 2k + 2 = 0$$

bo'lib, yechimlari: $k_1 = 1 + i, k_2 = 1 - i$, bu yerda $i = \sqrt{-1}$ - mavhum birlik. Umumiy yechimning ko'rinishi esa

$$y = e^x(c_1 \sin x + c_2 \cos x)$$

Ikkinchi tartibli bir jinsli bo'lmagan tenglamalar

O'zgarmas koeffitsientli bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamalarning yechimini topish quyidagi fundamental teoremaga asoslanadi.

5-teorema. Bir jinsli bo'lmagan (5) differensial tenglamaning umumiy yechimi, uning xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.

4-misol. $y'' - 5y' + 4y = 8$.

Yechish: Unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimini topamiz: $y = c_1e^x + e_2c^{4x}$ (1-misol)ga qarang.

O'ng tomonning ko'rinishidan kelib chiqib, ushbu bir jinsli bo'lmagan differensial tenglamaning xususiy yechimini $\tilde{y} = c$ ko'rinishda qidiramiz. Bu ifodani tenglamaga qo'ysak $c = 2$ bo'ladi.

Demak, berilgan bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'lar ekan:

$$y(x)=c_1e^x+c_2e^{4x}+2$$

5-misol. $y''-6y'+9y=9x$

Yechish: Bu bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimini topish uchun aniqmas koeffitsientlar usulidan foydalanamiz. $\tilde{y}$ xususiy yechimni darajasi o'ng tomonning darajasiga teng bo'lgan ko'phad ko'rinishda izlaymiz, ya'ni $\tilde{y}=Ax+B$, bu yerda A va B - noma'lum koeffitsientlar. U holda

$$-6A+9Ax+9B=9x$$

Bir xil darajalar oldidagi koeffitsientlarni tenglaymiz:

$9A=9,-6A+9B=0$. Natijada, $A=1,B=\frac{2}{3}$, bo'ladi, ya'ni $y=x+\frac{2}{3}$.

Bu yechimni mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bilan qo'shib, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimini olamiz:

$$y(x)=e^{3x}(c_1+c_2x)+x+2/3$$

6-misol. $y''-2y'+2y=2e^{2x}$.

Bu holda xususiy yechimni $\tilde{y}=ce^{2x}$ ko'rinishda qidiramiz. Bu funksiyani berilgan tenglamaga qo'yib $c=1$ ni olamiz. Buni bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi bilan birlashtirib,

$$y(x)=e^x(c_1\sin x+c_2\cos x)+e^{2x}$$

umumiy yechimni olamiz.

1-eslatma. Umumiy holda xarakteristik tenglama s karrali nol ildizni o'z ichiga olsa va bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni n-darajali $P_n(x)$ ko'phad bo'lsa, tenglamaning xususiy yechimi $Q_n(x)x^s$ ko'rinishda qidiriladi. Bu yerda $Q_n(x)$ n - darajali o'zgarmas koeffitsientli ko'phad.

2-eslatma. Umumiy holda bir jinsli bo'lmagan tenglamaning o'ng tomoni $P_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda bo'lsa, uning xususiy yechimi $\bar{y}(x)=x^s Q_n(x)e^{\alpha x}$ ko'rinishda qidiriladi, α -(9) xarakteristik tenglamaning ildizi, s uning karraligi.

Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun chegaraviy masala

Ilgari ko'rib o'tilganidek, ikkkinchi tartibli

$$y'' = f(x, y, y') \qquad \textbf{(10)}$$

tenglama uchun mavjudlik va yagonalik teoremasining asosida Koshi masalasining yechimi aniqlangan, bunda $x = x_0$ nuqtada noma'lum funksiya va uning hosilasining qiymatlari berilgan bo'lishi lozim:

$$x = x_0, y = y_0, \ y' = y_0' \qquad \textbf{(11)}$$

Agar 1-teoremaning shartlari bajarilsa, u holda (10), (11) Koshi masalasi xususiy yechimini bir qiymatli aniqlaydi.

Lekin ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun boshqa turdagi masala ham mavjud: noma'lum funksiyaning qiymati ikkita turli nuqtada beriladi. Boshqacha aytganda, (10) tenglamani (a, b) oraliqda yechish uchun chegaraviy shartlarni ancha sodda ko'rinishda, oraliq chetlarida qaraymiz: $x_1 \in (a;b)$, $x_2 \in (a;b)$

$$x = x_1, \ y(x_1) = y_1, \ x = x_2, y(x_2) = y_2 \qquad \textbf{(12)}$$

Bu holda (10) tenglama (12) shartlar bilan birgalikda ikkinchi tartibli tenglama uchun birinchi chegaraviy masala deyiladi.

Ixtiyoriy o'zgarmas c_1 va c_2 ga nisbatan chiziqli algebraik tenglamalar sistemasi

$$\begin{cases} c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_1) + \tilde{y}(x_1) = y_1 \\ c_2 y_1(x_2) + c_2 y_2(x_2) + \tilde{y}(x_2) = y_2 \end{cases} \qquad \textbf{(13)}$$

ning determinanti noldan farqli bo'lsa, u holda (12) shartlar bilan (5) differensial tenglamaning chegaraviy masalaning xususiy yechimini bir qiymatli aniqlaydi.

Bu yerda 4-teoremaga asosan $\widetilde{y}(x)$ bir jinsli bo'lmagan tenglamaning xususiy yechimi, $y_1(x)$ va $y_2(x)$ chiziqli erkli yechimlar.

6.3. Yuqori tartibli chiziqli differensial tenglamalar

n-tartibli chiziqli differensial tenglama deb quyidagi ko'rinishdagi tenglamaga aytiladi:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x) \qquad \textbf{(1*)}$$

bu yerda $f(x), p_0(x), \ldots, p_{n-1}(x) - (a,b)$ da berilgan uzluksiz funksiyalar.

(1*) ning chap tomonini $L[y]$ deb belgilasak, qisqacha ushbu tenglamani hosil qilamiz:

$$L[y] = f(x) \qquad \textbf{(1)}$$

Unga mos bir jinsli tenglama esa:

$$L[y] = 0 \qquad \textbf{(2)}$$

ko'rinishda bo'ladi.

6-teorema. (1) tenglama (a,b) da

$$y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0',\ \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

boshlang'ich shartlarni qanoatlantiruvchi yagona yechimga ega.

7-teorema. Agar $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ funksiyalar (2) tenglamaning yechimlari bo'lsa, ularning chiziqli kombinatsiyasi

$$c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_my_m(x)$$

(2) ning umumiy yechimi bo'ladi.

10-ta'rif. (2) ning fundamental yechimlar sistemasi deb uning n ta $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ chiziqli erkli yechimlar sistemasiga aytiladi.

Demak, (2) tenglamaning umumiy yechimini topish uchun uning fundamental yechimlar sistemasini aniqlash yetarlidir.

(1) tenglamaning umumiy yechimi esa uning biror xususiy yechimi va (2) ning umumiy yechimi yig'indisidan iborat bo'ladi.

11-ta'rif. Agar $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_m(x)$ funksiyalar $(m-1)$ tartibgacha hosilalarga ega bo'lsa, u holda ushbu m-tartibli determinant

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_m'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(m-1)} & y_2^{(m-1)}(x) & \cdots & y_m^{(m-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Vronskiy determinanti (vronskian) deyiladi va $W(x)$ yoki $W[y_1, \cdots, y_m]$ kabi belgilanadi.

8-teorema. (2) tenglamaning $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ yechimlari chiziqli erkli bo'lishi uchun ulardan tuzilgan Vronskiy determinanti noldan farqli bo'lishi zarur va yetarlidir.

Natija. Agar (a,b) ning bitta x_0 nuqtasida $W(x_0) \neq 0$ bo'lsa, ular (a,b) da chiziqli erkli sistemani tashkil etadi.

Misollar. 1) $1, x, \ldots, x^{m-1}$ funksiyalar ixtiyoriy (a,b) da chiziqli erklidir.

2) $e^{k_1 x}, \ldots, e^{k_m x}$ funksiyalar turli $k_1, k_2, \ldots, k_m$ sonlarda ixtiyoriy (a,b) da chiziqli erkli sistema tashkil etadi.

3) $e^{kx}, xe^{kx}, \ldots, x^{m-1}e^{kx}$ funksiyalar ixtiyoriy (a,b) da chiziqli erklidir.

n-tartibli chiziqli bir jinsli o'zgarmas koeffitsientli differensial tenglamalar

Bunday tenglamalarning umumiy ko'rinishi quyidagicha:

$$L_n[y] = y^{(n)} + p_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + p_1 y' + p_0 y = 0 \qquad (3)$$

bu yerda $p_i = i = 0,1,\ldots,n-1$-o'zgarmas sonlar, (a,b).

(3) tenglamani yechish uchun uning fundamental yechimlari sistemasi, ya'ni n ta chiziqli erkli $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$ yechimlarni topish kerak. U holda (3) ning umumiy yechimi

$$y = c_1 y_1(x) + \cdots + c_n y_n(x)$$

ko'rinishda bo'ladi, bu yerda $c_i, i = 1,2,\ldots,n$, ixtiyoriy o'zgarmas sonlar.

(3) ning xususiy yechimlarini $y = e^{kx}$, $k = const$, ko'rinishda izlaymiz. U holda

$$y' = ke^{kx}, y'' = k^2 e^{kx}, \cdots, y^{(n)} = k^n e^{kx}$$

Bularni (3) ga qo'ysak,

$$L_n\left[e^{kx}\right] = e^{kx}\left[k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \cdots + p_1 k + p_0\right] = 0$$

Bu yerdan $e^{kx} \neq 0$ bo'lgani uchun

$$k^n + p_{n-1}k^{n-1} + \cdots + p_1 k + p_0 = 0. \qquad (4)$$

Demak, agar k (4) algebraik tenglamaning yechimi bo'lsa, $y = e^{kx}$ funksiya (3) ning xususiy yechimi bo'ladi.

(4) tenglama (3) ning xarakteristik tenglamasi deyiladi. Xarakteristik tenglamaning ildizlari uchun quyidagi hollar bo'lishi mumkin.

1-hol. $k_1, k_2, \ldots, k_n$ - turli haqiqiy ildizlar bo'lsin. U holda n ta

$$e^{k_1 x}, e^{k_2 x}, \ldots, e^{k_n x} \qquad (5)$$

funksiyalar (3) ning yechimlari bo'lib, $(-\infty, +\infty)$ da chiziqli erkli sistemani tashkil etadi. Shuning uchun, (3) ning umumiy yechimi, ushbu

$$y = \sum_{i=1}^{n} c_i e^{k_i x} \qquad (6)$$

funksiyadir.

Agar birorta k_j kompleks son $(k_j = \alpha + i\beta, \beta \neq 0)$ bo'lsa, qolgan sonlar orasida unga qo'shma bo'lgan $k_s = \alpha - i\beta, s \neq j$, son mavjuddir. Kompleks $e^{(\alpha+i\beta)x}, e^{(\alpha-i\beta)}$ funksiyalar (3) tenglamaning yechimi bo'lgani uchun (1-teorema,...)

$$\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha-i\beta)x}+e^{(\alpha-i\beta)x}\right]=e^{\alpha x}\cos\beta x \qquad (7)$$

$$\frac{1}{2}\left[e^{(\alpha-i\beta)x}-e^{(\alpha-i\beta)x}\right]=e^{\alpha x}\sin\beta x \qquad (8)$$

funksiyalar ham (3) ning yechimi bo'ladi (bu yerda Eyler formulasi $e^{\pm ix}=\cos x\pm i\sin x$ dan foydalaniladi).

(7) va (8) –haqiqiy funksiyalar bo'lgani uchun $e^{k_j x}$ va $e^{k_r x}$ kompleks funksiyalardan ko'ra qulayroqdir.

Bu holda

$$e^{k_1x}, e^{k_2x}, \dots, e^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, e^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, e^{k_nx}$$

yechimlar sistemasi ham chiziqli erkli ekanligini ko'rsatish mumkin.

2-hol. k_1 (4) tenglamaning m karrali ildizi bo'lsin. U holda (5) sistemada m ta bir xil funksiyalar qatnashadi (qulaylik uchun $k_1=k_2=\cdots=k_m$ deylik):

$$e^{k_1x}, e^{k_1x}, \dots, e^{k_1x} \qquad (9)$$

Natijada (5) sistema chiziqli bog'liq bo'lib qoladi. Bu holda

$$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \dots, e^{m-1}e^{k_1x} \qquad (10)$$

funksiyalar (3) ning ixtiyoriy (a,b) da chiziqli erkli yechimlari bo'ladi.

U holda (3) ning fundamental yechimlari sistemasi quyidagicha bo'ladi:

$$e^{k_1x}, xe^{k_1x}, \dots, \delta^{m-1}e^{k_1x}, e^{k_{m+1}x}, e^{k_{m+2}x}, \dots, e^{k_nx}$$

Agar $k_1 - m$ karrali kopmleks ildiz bo'lsa $(k_1=\alpha+i\beta, \beta\neq 0)$, u holda unga qo'shma bo'lgan m karrali $\overline{k_1}=\alpha-i\beta$ ildiz mavjuddir. Qo'shma $\overline{k_1}$ ildizga quyidagi yechimlar mos keladi:

$$e^{\overline{k_1}x}, xe^{\overline{k_1}x}, \dots, x^{m-1}e^{\overline{k_1}x}. \qquad (11)$$

Qulaylik uchun (10) va (11) ni qayta yozib olaylik:

$$e^{(\alpha+i\beta)x}, xe^{(\alpha+i\beta)x}, \dots, x^{m-1}e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$e^{(\alpha-i\beta)x}, xe^{(\alpha-i\beta)x}, \dots, x^{m-1}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Bularni mos ravishda qo'shib, ayirib, 2ga bo'lib, quyidagi 2 ta haqiqiy funksiyalar sistemalarini olamiz:

$$\begin{matrix} e^{\alpha x}\cos\beta x, xe^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x \\ e^{\alpha x}\sin\beta x, xe^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x \end{matrix} \qquad (12)$$

(5) sistemadagi kompleks funksiyalarni (12) funksiyalar bilan almashtirilsa yana chiziqli erkli sistema hosil bo'ladi.

1-misol. $y''' - 2y'' - y' + 2y = 0$ ning xarakteristik tenglamasi:

$$k^3 - 2k^2 - k + 2 = 0 \ \textit{ya'ni}$$

$$(k-2)(k^2-1) = 0 \ \textit{bo'ladi.}$$

Bu algebraik tenglamaning ildizlari $k_1 = 2, k_1 = 1, k_3 = -1$. Bu ildizlarga mos keluvchi yechimlar:

$$c_1e^{2x}, c_2e^{x}, c_3e^{-1}$$

Berilgan differensial tenglamaning umumiy yechimi:

$$y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{x} + c_3e^{-x}$$

ko'rinishda bo'ladi.

2-misol. $y'' + y' + y = 0$.

Xarakteristik tenglama:

$$k^2 + k + 1 = 0$$

Buning ildizlari $k_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $k_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Bu kompleks ildizlarga mos keluvchi yechimlar: $e^{\left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$, $e^{\left(-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)x}$ - kompleks funksiyalardir. Haqiqiy yechimlarni quyidagicha ifodalash mumkin:

$$e^{-\frac{x}{2}}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x, \ e^{-\frac{x}{2}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x$$

Demak, umumiy yechim ushbu ko'rinishga ega bo'ladi:

$$y = e^{-x/2}\left(c_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + c_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

6.4. Iqtisodiyotda differensial tenglamalar apparati

Differensial tenglamalar nazariyasining iqtisodiy jarayonlarning modellarida qo'llanishiga doir misollarni qaraymiz, bu yerda erkli o'zgaruvchi bo'lib t-vaqt ishtirok etadi. Bunday modellar uzoq vaqt mobaynida iqtisodiy sistemalar evolyutsiyasini tekshirishda foydalidir, ular iqtisodiy dinamikani tahlil etishning asosini tashkil etadi.

Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli

Birinchi tartibli differensial tenglamalar.

Faraz qilaylik, qandaydir mahsulot p narx bilan sotiladi, $Q(t)$ funksiya t vaqt mobaynida ishlab chiqarilgan mahsulot miqdori o'zgarishini bildiradi desak, u holda vaqt davomida $pQ(t)$ ga teng daromad olinadi. Aytaylik olingan daromadning bir qismi mahsulot ishlab chiqarish investitsiyasiga sarf bo'lsin, ya'ni

$$I(t) = mpQ(t) \qquad (1)$$

m - investitsiya normasi, o'zgarmas son va $0 < m < 1$.

Agar bozor yetarlicha ta'minlangan va ishlab chiqarilgan mahsulot to'la sotilgan degan tasavvurdan kelib chiqilsa, ishlab chiqarish tezligining yana oshishiga (akselatorga) olib keladi. Ishlab chiqarish tezligi esa investitsiyaning o'sishiga proporsional, ya'ni

$$Q' = lI(t) \qquad (2)$$

bu yerda $1/l$ -akselator normasi. (1) formulani (2) ga qo'yib

$$Q' = kQ,\ k = lmp \qquad (3)$$

ni olamiz. (3) differensial tenglama o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama. Bu tenglama umumiy yechimining ko'rinishi $Q = Ce^{kt}$, bunda C-ixtiyoriy o'zgarmas son.

Faraz qilaylik, boshlang'ich moment $t = t_0$ da mahsulot ishlab chiqarish hajmi Q_0 berilgan. U holda bu shartdan o'zgarmas C ni ifodalash mumkin:

$Q_0 = Ce^{kt_0}$, bundan $C = Q_0 e^{-kt_0}$. Natijada (3) tenglama uchun Koshi masalasining yechimini topamiz:

$$Q = Q_0 e^{k(t-t_0)} \tag{4}$$

Shunga e'tibor berish kerakki, matematik modellar umumiylik xossasiga ega. Biologik tajribalardan kelib chiqadiki, bakteriyalarning ko'payish jarayoni (4) formula bilan ifodalanadi. Radioaktiv parchalanish jarayoni ham (4) formula bilan ifodalanadigan qonuniyatga bo'ysunadi.

Raqobat sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi

Faraz qilaylik, $p = p(Q)$-kamayuvchi funksiya ya'ni mahsulot hajmining ortishi bilan bozorda uning narxi kamayadi: $dp/dQ < 0$. (1)-(3) formulalardan Q ga nisbatan chiziqli bo'lmagan, o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli differensial tenglama hosil qilamiz:

$$Q' = \alpha p(Q)Q, \alpha = lm \tag{5}$$

Tenglamaning o'ng tomonidagi barcha ko'paytuvchilar musbatligidan $Q' > 0$, ya'ni $Q(t)$ funksiya o'suvchi.

Funksiyaning o'sish xarakteri uning ikkinchi tartibli hosilasi bilan aniqlanadi. (5) tenglamadan ushbu

$$Q'' = \alpha\left[Q'p(Q) + Q\frac{dp}{dQ}Q'\right] = \alpha Q'\left(p + \frac{dp}{dQ}Q\right).$$

tenglik kelib chiqadi.

Talab elastikligini kiritib, bu tenglikning ko'rinishini o'zgartirish mumkin:

$E(p)=\frac{dQp}{dpQ}$, tenglikka ko'ra $Q''=\alpha Q'p\left(1+\frac{dpQ}{pdQ}\right)$, yoki

$\frac{dQ}{dp}<0$ bo'lgani uchun $E<0$, nihoyat

$$Q''=\alpha Q'p(1-1/|E|) \qquad \textbf{(6)}$$

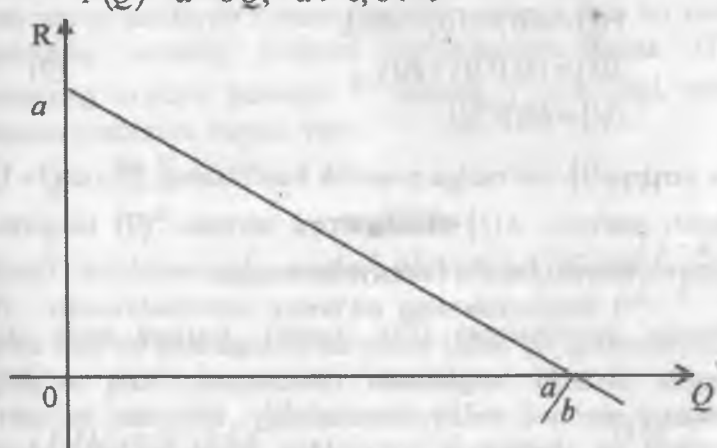
tenglik hosil bo'ladi.

(6) tenglamadan elastik talabda $Q''>0$, ya'ni $|E|>1$, ekanligi kelib chiqadi va $Q(t)$ funksiyaning grafigi pastga qavariq ekanligi ma'lum bo'ladi. Bu esa mahsulot hajmining progressiv o'sishini bildiradi.

Noelastik talabda $|E|<1$ va bu holda $Q''<0$ bo'lgani uchun $Q(t)$ funksiya yuqoriga qavariq, bu esa mahsulot hajmining sekin o'sishini (ya'ni yetarlicha ta'minlanganlikni) bildiradi.

Soddalik uchun $p(Q)$ bog'lanishni chiziqli funksiya ko'rinishida deb qabul qilamiz.

$$P(Q)=a-bQ, \quad a>0, b>0$$



U holda (5) tenglama ushbu

$$Q'=\alpha(a-bQ)Q \qquad \textbf{(7)}$$

ko'rinishda bo'ladi. Demak,

$$Q''=\alpha Q'(a-2bQ) \qquad \textbf{(8)}$$

(7) va (8) munosabatlardan: $Q' = 0$ va $Q = 0$ da $Q' = 0$; $Q > a/_{2b}$ da $Q'' < 0$. $Q = Q(t)$ funksiya grafigining egilish nuqtasi $t = Q = a/2b$. Chizmada kelitirilgan bu funksiyaning grafigi (differensial tenglamaning integral egri chiziqlaridan biri (7)) logistik egri chiziq deyiladi.

Bunday egri chiziqlar boshqa dinamik jarayonlarni ham xarakterlaydi. Masalan, organik muhitda bakteriyalarning ko'payishi, biologik organizmlarning chegaralangan muhitda epidemiyalar tarqalish dinamikasi va boshqalar.

Keynsning dinamik modeli

Dinamikaning asosiy komponentlari bo'lgan iqtisodiyotning daromad va harakatlarni bog'lovchi sodda balans modelini qaraymiz. Faraz qilaylik, $Y(t), E(t), S(t), I(t)$-mos ravishda milliy daromad, davlat xarajatlar, iste'mol va investitsiya funksiyasi bo'lsin. U holda quyidagi munosabatlar o'rinlidir:

$$\begin{aligned} &Y(t) = S(t) + I(t) + E(t), \\ &S(t) = a(t)Y(t) + b(t), \qquad (9) \\ &I(t) = k(t)Y'(t) \end{aligned}$$

bu yerda $a(t)$-iste'molga moyillik koeffitsienti $(0 < a(t) < 1), b(t)$-chekli iste'mol, $k(t)$-akseleratsiya normasi. (9) tenglamalarda ishtirok etuvchi barcha funksiyalar musbat.

(9) tenglamalarning ma'nosini oydinlashtiramiz. Barcha xarajatlarning yig'indisi milliy daromadga teng bo'lishi zarur - bu tenglik birinchi tenglamada ifodalangan. Xalq xo'jaligidagi umumiy iste'mol, milliy daromadning bir qismi bo'lgan ichki iste'mol va chegaraviy iste'moldan iborat bo'ladi. Mana shu jarayon ikkinchi tenglamada aks ettirilgan. Nihoyat investitsiya hajmi ixtiyoriy bo'lishi mumkin emas: u davlat texnologiyasi va infratuzilmasi xarakterlaydigan iqtisodiy ko'rsatkich bo'lib, akselator normasining oxirgi milliy daromadga ko'paytmasi bilan aniqlanadi, bu jarayon uchinchi tenglik bilan ifodalangan.

Faraz qilaylik, $a(t), b(t), k(t)$ va $E(t)$ funksiyalar berilgan. Bu funksiyalar davlat evolyutsiyasi va faoliyatini xarakterlaydi. Milliy daromad dinamikasini aniqlash, ya'ni t vaqtning funksiyasi bo'lgan Y ni topish masalasi asosiy iqtisodiy masalalardan biridir.

Ikkinchi tenglamadan $S(t)$ ni va uchinchi tenglamadan $I(t)$ ni birinchi tenglamaga qo'yamiz. $Y(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan birinchi tartibli differensial tenglama hosil bo'ladi:

$$Y' = \frac{1-a(t)}{k(t)}Y - \frac{b(t)+E(t)}{k(t)} \qquad (10)$$

Biz asosiy parametrlar a, b, k ni o'zgarmas sonlar deb faraz qilib, ancha sodda holni tekshiramiz. U holda (10) tenglama o'zgarmas koeffitsientli birinchi tartibli chiziqli differensial tenglamaga aylanadi:

$$Y_t' = \frac{1-a}{k}Y - \frac{b+E}{k}. \qquad (11)$$

Ma'lumki, bir jinsli bo'lmagan tenglamaning umumiy yechimi uning qandaydir xususiy yechimi va unga mos bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat. (11) tenglamaning xususiy yechimi $\widetilde{Y}$ sifatida $Y' = 0$ dagi, ya'ni muvozanat yechimini olamiz, ya'ni

$$\widetilde{y} = \frac{b+E}{1-a}. \qquad (12)$$

Bir jinsli tenglamaning umumiy yechimi $Y_0^{(t)} C \exp\left(\frac{1-a}{k}t\right)$ formula bilan beriladi. Demak, (11) tenglamaning umumiy yechimi

$$Y(t) = \frac{b+E}{1-a} + Ce^{\frac{1-a}{k}t} \qquad (13)$$

(11) tenglamaning integral egri chiziqlari chizmada ko'rsatilgan.

Agar vaqtning boshlang'ich momentida $Y_0 < Y_p$ bo'lsa, u holda $C = Y_0 - Y_p < 0$ va egri chiziqlar (12) muvozanat yechimdan pastga keladi, yani milliy daromad vaqt o'tishi bilan masalaning berilgan parametrlari a,b,k va E da kamayadi, chunki (13) da eksponenta darajasi musbat. Agar $Y_0 > Y_p$ bo'lsa, u holda $C > 0$ va vaqt o'tishi bilan milliy daromad o'sadi – integral egri chiziqlar $Y = Y_0$ muvozanat to'g'ri chizig'idan yuqoriga ketadi.

O'sishning noklassik modeli

Faraz qilaylik, $Y = F(K,L)$ milliy daromad, bu yerda F - bir jinsli birinchi tartibli ishlab chiqarish funksiyasi: $(F(tK,tL) = F(K,L))$, K – sarflangan kapital hajmi, L - mehnat sarfi hajmi. Fond qurollanish kattaligi $k = K/L$ bo'lsin. U holda ishlab chiqarish unumdorligi quyidagi formula bilan aniqlanadi:

$$f(k) = \frac{F(K,L)}{L} = F(K,1) \qquad (14)$$

Bu bo'limda qaralayotgan masalaning maqsadi fond qurollanish dinamikasini yoki uni vaqtning funksiyasi sifatida ifodalashdir.

Har qanday model ma'lum farazlarga asoslanganligi uchun biz ham ba'zi bir parametrlarni kiritishimiz zarur.

Quyidagilar bajariladi, deb faraz qilamiz:

1. Mehnat resurslari vaqtida tabiiy o'sish o'rinli

$$L' = \alpha L. \qquad (15)$$

2. Mablag' ishlab chiqarish fondiga va amortizatsiyaga sarflanadi, ya'ni

$$I = K' + \beta K$$

bu yerda β – amortizatsiya normasi.

Agar l-investitsiya (sarflangan mablag') normasi bo'lsa, u holda

$$I = lY = K' + \beta K \text{ yoki } K' = lF(K,L) - \beta K \qquad (16)$$

k- qurollanish fond ta'rifidan kelib chiqadiki, $\ell nk = \ell nK - \ell nL$.

Bu tenglikni t- bo'yicha differensiallab,

$$k' = lf(x) - (\alpha + \beta)k \qquad (17)$$

tenglamani olamiz, bu yerda $f(x)$ funksiya (14) formula bo'yicha aniqlangan.

Olingan (17) munosabat o'zgaruvchilari ajraladigan birinchi tartibli chiziqli bo'lmagan differensial tenglamani ifodalaydi. Bu tenglamaning statsionar yechimini aniqlaymiz: $k' = 0$ shartdan,

$$lf(k) - (\alpha + \beta)k = 0 \qquad (18)$$

ya'ni $k = const$ – o'zgarmas kattalik, chiziqli bo'lmagan (18) algebraik tenglamaning yechimidir.

Masala. Ishlab chiqarish funksiyasi $F(K,L) = \sqrt{KL}$ uchun (17) tenglamaning integral egri chiziqlari va statsionar yechimini toping.

14) dan $f(k) = \sqrt{k}$, u holda (17) tenglama ushbu ko'rinishda bo'ladi:

$$\frac{df}{dt} = l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k$$

Bu tenglamaning statsionar yechimi quyidagi tenglikdan kelib chiqadi: $l\sqrt{k} - (\alpha + \beta)k = 0$, bundan (17) tenglamaning nol bo'lmagan xususiy yechimi $k_{st} = l^2/(\alpha + \beta)^2$ dan iborat bo'ladi.

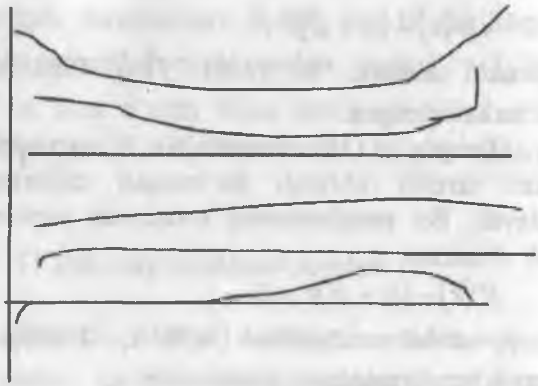
(17) differensial tenglamani "o'zgaruvchilarni ajratish" usuli bilan yechamiz:

$$\frac{dk}{\sqrt{k}\left[l - (\alpha + \beta)\sqrt{k}\right]} = dt$$

Bu tenglamada $\sqrt{k} = z$ almashtirishdan so'ng integrallab, umumiy yechimning ko'rinishini hosil qilamiz.

$$k(t) = \left[\frac{1}{\alpha + \beta} + C\exp\left(-\frac{\alpha + \beta}{2}t\right)\right]^2 \qquad (19)$$

Integral egri chiziqlar oilasi yuqoridan va pastdan statsionar yechimga yaqinlashadi, ya'ni $t \to \infty$ va $k \to k_{st}$.



Demak, o'zgarmaydigan parametrlar l, α va β da qurollanish fondi funksiyasi o'z statsionar qiymatiga boshlang'ich shartlarga bog'liqsiz ravishda turg'un barqaror intiladi. Bu statsionar nuqta $k = k_{st}$, barqaror muvozanat nuqtasi deb yuritiladi.

Oldindan aytib beriladigan narxlar asosida bozor modelini tuzish

Oldindan bashorat qilinadigan narxlar asosida bozor modelini tuzishni qaraylik. Oddiy bozor modellarida talab va taklif, odatda tovarning shu kundagi narxi bilan bog'liq bo'ladi. Lekin talab va taklif real hollarda, narxning tashkil qilinishi va narxning o'zgarishi bilan bog'liq bo'ladi. t vaqt bo'yicha uzluksiz va differensiallanuvchi funksiyalar modelida bu ko'rsatkichlar mos ravishda $p(t)$ - narx funksiyasining birinchi va ikkinchi hosilalari bilan ifodalanadi.

Faraz qilaylik, D-talab funksiyasi va S - taklif funksiyasi P - narx funksiyasi va uning hosilalari bilan quyidagi bog'lanishga ega bo'lsin:

$$\begin{aligned} D(t) &= 3p'' - p' - 2p + 18, \\ S(t) &= 4p'' + p' + 3p + 3. \end{aligned} \qquad \textbf{(20)}$$

(20) da qabul qilingan bog'lanishlar to'la realistik (amaliy): buni narx funksiyasining hosilalari qo'shiluvchilarda oydinlashtiramiz.

1. Talab narxning o'zgarishi bilan "qizdiriladi". Agar temp (narx o'sishi) davom etsa, o'ssa $(p'' > 0)$, u holda bozorning talabga qiziqishi ortadi va aksincha. Narxning tez o'sishi xaridorni qo'rqitadi, shuning uchun narx funksiyasining birinchi hosilasi minus ishora bilan kiradi.

2. Taklif yana ko'proq doirada narxning o'zgarishi bilan kuchaytiriladi, shuning uchun $S(t)$ funksiyadagi p'' ning koeffitsienti $D(t)$ dagiga nisbatan katta. Shuningdek narxning o'sishi taklifni oshiradi, shuning uchun p' ni o'z ichiga oluvchi qo'shiluvchi $S(t)$ ning ifodasiga musbat ishora bilan kiradi.

Narxning vaqt bilan bog'lanishini aniqlash talab etiladi. Bozorning muvozanat holati $D = S$ tenglik bilan xarakterlanganligi uchun (20) dagi tenglamalarning o'ng tomonlarini tenglashtiramiz va soddalashtirib, quyidagini olamiz:

$$p'' + 2p' + 5p = 15 \qquad \textbf{(21)}$$

(21) munosabat $p(t)$ funksiyaga nisbatan chiziqli bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglama. Bunday tenglamaning umumiy yechimi biror xususiy yechimi va unga mos bir jinsli

$$p'' + 2p' + 5p = 0 \qquad \textbf{(22)}$$

tenglamaning umumiy yechimi yig'indisidan iborat.

(22) uchun xarakteristik tenglama: $k^2 + 2k + 5 = 0$. Uning ildizlari qo'shma kompleks sonlar: $k_{1,2} = -1 \pm 2i$ va natijada (22) tenglamaning $\tilde{p}(t)$ umumiy yechimi quyidagi tenglik bilan aniqlanadi:

$$\tilde{p}(t) = e^{-t}(c_1 \cos 2t + c_2 \sin 2t),$$

bu yerda C_1 va C_2-ixtiyoriy o'zgarmaslar.

Bir jinsli bo'lmagan (21) tenglamaning xususiy yechimi sifatida $p = p_{st}$-narxni belgilaydigan o'zgarmas kattalikni olamiz. Buni (21) ga qo'ysak, p_{st} ning qiymatini topamiz: $p_{st} = 3$

Shunday qilib, (21) tenglama umumiy yechimi

$$P(t) = 3 + e^{-t}(C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) \qquad \textbf{(23)}$$

tenglik bilan ifodalanadi. Demak, $t \to \infty$ da $p(t) \to p_{st} = 3$, ya'ni barcha integral egri chiziqlar $p = 3$ gorizontal asimptotaga ega va uning atrofida tebranadi. Bu barcha belgilangan narxlar p_{st} narxga intilishini va uning atrofida tebranishini bildiradi, bu tebranishlarning amplitudasi vaqt o'tishi bilan o'sa boshlaydi.

Bu masalaning xususiy yechimlarini ikki xil misolda keltiramiz:

1.Koshi masalasi. Faraz qilaylik, boshlang'ich holatdagi narx va uning o'zgarish jarayoni ma'lum: $t = 0$; $p = 4$, $p' = 1$. Bu berilganlarni (23) formulaga qo'ysak $p(0) = C_1 + 3 = 4$, bundan $C_1 = 1$ ya'ni

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + C_2 \sin 2t) \qquad \textbf{(24)}$$

Buni differensiallaymiz:

$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (c_2 + 2)\sin 2t].$$

Endi Koshi masalasining ikkinchi shartini qo'llaymiz:

$p'(0) = 2C_2 - 1 = 1$, bundan $C_2 = 1$.

Nihoyat Koshi masalasi yechimining ko'rinishi quyidagicha bo'ladi:

$$p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t + \sin 2t),$$

yoki

$$p(t) = 3 + \sqrt{2}e^{-t}\cos(2t - \pi/4).$$

2.Aralash masala. Faraz qilaylik, vaqtning boshlang'ich momentida talab va taklif ma'lum: $t = 0$, $p = 4, D = 16$.

Birinchi boshlang'ich shart oldingidek bo'lgani uchun bu yerda ham yechim (24) tenglik bilan ifodalanadi. U holda,

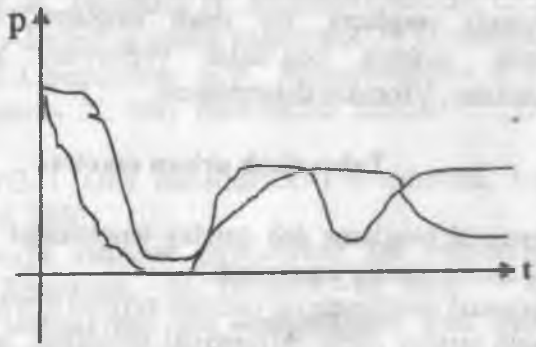
$$p'(t) = e^{-t}[(2C_2 - 1)\cos 2t - (C_2 + 2)\sin 2t],$$
$$p''(t) = -e^{-t}[(4C_2 + 3)\cos 2t - (3C_2 - 5)\sin 2t]$$

Bu yerdan $p'(0) = 2c_2 - 1$ va $p''(0) = -4c_2 - 3$.

Bu tengliklarni $D(t)$ ning (20) ko'rinishini hisobga olgan holda, masalaning ikkinchi $D(0) = 16$ shartidan foydalanib, $C_2 = -1$ ni topamiz. Shunday qilib, berilgan masala yechimining ko'rinishi $p(t) = 3 + e^{-t}(\cos 2t - \sin 2t)$ yoki

$$p(t) = 3 - \sqrt{2}e^{-t}\sin(2t - \pi/4) \qquad (25)$$

1 va 2 masalalarga mos keluvchi integral egri chiziqlar chizmada tasvirlangan.



Xulosa

Yuqorida keltirilgan tadbiqlardan ko'rinib turibdiki, differensial tenglamalar nazariyasi iqtisodiy masalalarni hal qilishda kuchli matematik apparat bo'lib hisoblanadi.

Agar matematik modellarning umumiylik xossasiga ega ekanligini hisobga olsak, differensial tenglamalarning tabiiy jarayonlarda: fizik jarayonlar, biologik, ximik va h.k. jarayonlarni o'rganishdagi roli naqadar muhimligi yanada yaqqolroq ko'zga tashlanadi.

1-2-tartibli oddiy differensial tenglamalar uchun Koshi teoremasi, umumiy va xususiy yechim tushunchalari, maxsus ko'rinishdagi tenglamalar uchun yechish usullari, "o'zgarmasni variatsiyalash" usuli, yuqori tartibli chiziqli tenglamalar va unga mos bir jinsli o'zgarmas koeffitsientli tenglamaning umumiy yechimini topish va Vronskiy determinanti tushunchasi bayon etilgan va misollar keltirilgan.

Matematikaning iqtisodiyotga tadbiq'i nuqtai nazaridan 5 ta masala o'rganilgan.

Tayanch iboralari

Differensial tenglama va uning tartibi, yechimi, integral egri chiziq, Koshi teoremasi, boshlang'ich shart, Koshi masalasi, umumiy yechim, o'zgaruvchilari ajraladigan tenglama, birinchi tartibli chiziqli tenglama, bir jinsli tenglama, o'zgarmasni variatsiyalash, chiziqli bog'liqsiz yechimlar, xarakteristik tenglama, ildizlar, Vronskiy determinanti.

Takrorlash uchun savollar

1. Differensial tenglama deb qanday tenglamaga aytiladi va uning tartibi qanday aniqlanadi?
2. Differensial tenglamaning yechimi ta'rifini ayting.
3. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun Koshi teoremasi.
4. Koshi teoremasining geometrik ma'nosi.
5. 1-tartibli differensial tenglama uchun umumiy va xususiy yechim tushunchalari.
6. Birinchi tartibli oddiy differensial tenglama uchun umumiy va xususiy integral tushunchalari.
7. O'zgaruvchilari ajraladigan differensial tenglamalar.
8. O'zgarmasni variatsiyalash usuli.
9. Ikkinchi tartibli differensial tenglama.
10. O'zgarmas koeffitsientli chiziqli bir jinsli ikkinchi tartibli differensial tenglama.

11. Chiziqli bog'liqsiz yechimlar tushunchasi.
12. Xarakteristik tenglama va uning ildizi.
13. Vronskiy determinanti.
14. Bir jinsli bo'lmagan ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning umumiy yechimi haqida teorema.
15. Ikkinchi tartibli differensial tenglama uchun birinchi chegaraviy masala.
16. Ishlab chiqarishning tabiiy o'sish modeli.
17. Konkurensiya sharoitida ishlab chiqarishning o'sishi.
18. Keynsning dinamik modeli.
19. O'sishning noklassik modeli.
20. Oldindan aytib beriladigan narx asosida bozor modelini tuzish.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалаврианта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma. –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma'ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich мoliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.

13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – М, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

7-bob. QATORLAR

7.1. Sonli qatorlar.
7.2. Funksional va darajali qatorlar.
7.3. Teylor va Makloren qatorlari.

7.1. Sonli qatorlar

1-ta'rif. Sonli $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, ketma-ketlik hadlaridan tuzilgan

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots \qquad (1)$$

ifodaga sonli qator deyiladi.

Bu yerda $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$ qator hadlari, a_n esa qatorning umumiy hadi deyiladi. Yuqoridagi ta'rifdan ko'rinadiki qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan sanoqli sondagi qo'shiluvchilar yig'indisi bilan aniqlanar ekan.

(1) qatorning dastlabki chekli sondagi hadlaridan tuzilgan ushbu

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \ldots S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

yig'indilarga, shu qatorning xususiy yig'indilari deyiladi.

Agar qator hadlari sanoqli ekanligini e'tiborga olsak $S_1, S_2, \ldots, S_n, \ldots$ xususiy yig'indilar ham o'z navbatida sonli ketma-ketlikni tashkil etishini ko'ramiz.

2-ta'rif. Agar xususiy yig'indilarning $\{S_n\}$ ketma-ketligi $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ chekli limitga ega bo'lsa u holda ushbu $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator, limit S esa qator yig'indisi deyiladi va

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S \qquad (2)$$

ko'rinishda yoziladi.

3-ta'rif. Agar $\{S_n\}$ ketma-ketlik chekli limitga ega bo'lmasa (limiti cheksiz yoki mavjud emas), u holda (1) uzoqlashuvchi qator deyiladi.

1-misol. Quyidagi

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$$

qator tekshirilsin. Avval xususiy yig'indilarni ko'raylik

$$S_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2}, \quad S_2=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=1-\frac{1}{3}$$

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

Bundan $S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\leftrightarrow S_n=\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n-1})=1<\infty$ hosil qilamiz. Demak $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi $S=1$ ekan.

2-misol. Bizga avvaldan tanish bo'lgan cheksiz geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan

$$b+bq+bq^2+\ldots+bq^{n-1}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}bq^{n-1},(b\neq 0) \qquad (3)$$

qatorni ko'raylik.

Uning dastlabki n ta hadlari yig'indisi

$$S_n=\frac{b+bq^n}{1-q}=\frac{b}{1-q}+\frac{b}{1-q}q^n$$

formula bilan aniqlanadi.

(3) qator yig'indisi uchun oldingi tasdiqlar bevosita q ga bog'liqdir.

1) agar $|q|<1$ bo'lsa, $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ bo'lgani sababli $S = \ell im_{n\to\infty} S_n = \dfrac{b}{1-q}$ chekli limitga ega bo'lamiz. Ya'ni $|q|<1$ bo'lganda (3) yaqinlashuvchi qator bo'lib, uning yig'indisi $S = \dfrac{b}{1-q}$ formula bilan hisoblanadi.

2) Agar $|q|>1$ bo'lsa $\ell im_{n\to\infty} |q|n = \infty$ ekanligi ravshan. Shu sababli, $q<-1$ da $\ell im_{n\to\infty} S_n$ mavjud bo'lmaydi, $q>1$ da $\ell im_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'lib, (3) uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

3) Agar $q=1$ desak $S_n = b+b+...+b = b\cdot n$ ko'rinishni oladi. Bu holda ham $\ell im_{n\to\infty} S_n = \infty$ bo'lgani sababli (3) uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

4) Agar $q=-1$ deb olinsa (3) qator

$$b-b+b-b+...+(-1)^{n-1}b+...$$

ko'rinishda bo'ladi. Bunday qator uchun $S_n = S_{2m} = 0,\ S_n = S_{2m+1} = b,\ (m=1,2,3...)$. Bu esa $\ell im_{n\to\infty} S_n$ mavjud emasligini bildiradi. Shuning uchun $q=-1$ bo'lgan holda ham (3) uzoqlashuvchi qator bo'ladi.

Qatorlar nazariyasini bayon qilishni yaqinlashuvchi qatorlarning ba'zi sodda xossalarning keltirishdan boshlaymiz.

Deylik, (1)-qator

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \equiv a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ...$$

berilgan bo'lsin. Uning hadlaridan tuzilgan

$$a_{m+1} + a_{m+2} + ... = \sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

ko'rinishdagi qatorga (1) qatorning m-qoldig'i deyiladi. U ham o'z navbatida qatordir.

1-teorema. Agar (1) qator yaqinlashuvchi bo'lsa, uning har qanday qoldig'i ham yaqinlashuvchi bo'ladi va aksincha, qator qoldig'i yaqinlashuvchi bo'lsa, uning o'zi ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isbot. Agar (1) qator uchun S_{m+k} xususiy yig'indi olsak

$$S_{m+k}=\sum_{n=1}^{m+k}a_n=\sum_{n=1}^{m}a_n+\sum_{n=m+1}^{m+k}a_n=S_n+S_k^*,\ S_k^*=\sum_{n=m+1}^{m+k}a_n$$

munosabat hosil bo'ladi va S_k^* ni m-qoldiq qatorning k-xususiy yig'indisi deb qaraymiz.

Teorema shartiga ko'ra (1) qator yaqinlashuvchiligidan

$$\lim_{k\to\infty}S_k^*=\lim_{k\to\infty}\left[S_{m+k}-S_m\right]=\lim_{k\to\infty}S_{m+k}-S_m=S-S_m.$$

Bundan $\sum\limits_{n=m+1}^{\infty}a_k$ qoldiq qatorning yaqinlashuvligigi kelib chiqadi.

Qoldiq qator yaqinlashuvchi bo'lsin (bu yig'indi R_m bo'lsin).

Bu holda,

$$\lim_{k\to\infty}S_n=\lim_{k\to\infty}S_{m+k}=\lim_{k\to\infty}\left[S_m+S_k^*\right]=S_m+\lim_{k\to\infty}S_k^*=S_m+R_m<\infty.$$

Demak, (1) qator yaqinlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremalarni isbotsiz keltirishni lozim topdik.

2-teorema. Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi S bo'lsa, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi, $k\cdot S$ ga teng bo'ladi.

Bu teoremani quyidagicha talqin etish mumkin.

Agar $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lsa $\sum\limits_{n=1}^{\infty}ka_n=k\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ bo'ladi, ya'ni o'zgarmas ko'paytuvchini cheksiz yig'indi belgisidan tashqariga chiqarish mumkin.

3-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ va $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi qatorlar bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ qatorlar ham yaqinlashuvchi qatorlar bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ tenglik o'rinli bo'ladi.

Qatorlar soni chekli bo'lganda ham teoremaning o'rinli ekanligini ko'rsatish mumkin.

4-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lsa, had tartib raqami cheksiz o'sib borganda qator umumiy hadi a_n nolga intiladi, ya'ni $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Isboti. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'lgani uchun, $\lim_{n\to\infty} S_n = S$. Demak,

$$\lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S.$$

Agar $S_n - S_{n-1} = a_n$ tenglikni e'tiborga olsak,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}[S_n - S_{n-1}] = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

Natija. Agar (1) qator uchun $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ shart bajarilmasa, u holda (1) qator uzoqlashuvchidir.

Misol. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)$ uzoqlashuvchi qatordir, chunki

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n^2}\right) = 1 \neq 0$$

Ta'kidlab o'tamizki $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lishi qator yaqinlashishining faqat zaruriy sharti bo'la oladi. Ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

yaqinlashuvchi bo'lsa, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Lekin $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ bo'lganda, har doim ham $\sum_{n=\infty}^{n} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lavermaydi.

Masalan, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{4} + \cdots$ garmonik qator uchun $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{n} = 0$ shart bajarilsada, bu garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. (Biz bu tasdiqning isbotini keyinroq keltiramiz).

Agar asosiy maqsadimiz yaqinlashuvchi qatorlarni va ularning yig'indisini aniqlashdadir deb hisoblasak, bundan buyon $n \to \infty$ da umumiy hadi nolga intiladigan $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ qatorlar bilan ish ko'rishligimiz ayon bo'lib chiqadi.

Agar qator yaqinlashishi va uzoqlashishi haqidagi ta'riflarga e'tibor bersak, bunday masalaga $\lim_{n\to\infty} S_n$ ni tekshirish orqali javob olishimiz mumkin. Biroq har qanday qator uchun ham S_n xususiy yig'indini tekshirish oson bajarilmaydi. Hatto, S_n ning ifodasini soddalashtirib olganda ham, ushbu $\lim_{n\to\infty} S_n$ limitni hisoblash ma'lum qiyinchiliklarga olib keladi.

Bunday qiyinchiliklardan qutilish maqsadida, qatorlar nazariyasi ishlab chiqilgan.

Musbat hadli qatorlar

Ta'rif: Agar barcha $n = 1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n > 0$ bo'lsa, $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator deyiladi.

Bizga ikkita $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ musbat hadli qatorlar berilgan bo'lsin.

5-teorema: Agar barcha $n=1,2,3,\cdots$ lar uchun $a_n \le b_n$, bo'lib $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Isboti: Qatorlarning xususiy yig'indilarini mos ravishda

$$S_{a_n} = a_1 + a_2 + \ldots\ldots + a_n$$

$$S_{b_n} = b_1 + b_2 + \ldots\ldots\ldots + b_n$$

deb belgilaylik. Teorema shartiga ko'ra $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ yaqinlashuvchi, ya'ni $\lim\limits_{n\to\infty} S_{b_n} = S_b < \infty$. Lekin, $S_{a_n} \le S_{b_n} \le S_b$ tengsizlik o'rinlidir. Bundan $\{S_{a_n}\}$ monoton o'suvchi ketma-ketlikning yuqoridan chegaralangan ekanligi kelib chiqadi. Ma'lumki, har qanday chegaralangan monoton o'suvchi ketma-ketlik chekli limitga egadir. Shu sababli, $\lim\limits_{n\to\infty} S_{a_n} = S_a < \infty$.

Demak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot qilindi.

Misol. Quyidagi:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \cdots$$

qator yaqinlashuvchi qatordir. Haqiqatdan agar:

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{2^4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots$$

qatorni olsak, bu qatorlar uchun

$$\frac{1}{n^n} \le \frac{1}{2^n}; (n = 1,2,3\cdots)$$

Ya'ni ikkinchi qator ikkinchi hadidan boshlab, birinchi hadi $\frac{1}{2^2}$ va maxraji $q = \frac{1}{2}$ bo'lgan, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig'indisidan iborat. Shu sababli, bu qator yaqinlashuvchi qator bo'lib, yig'indisi $1+\dfrac{\frac{1}{2^2}}{1-\frac{1}{2}}=1\frac{1}{2}$ ga tengdir.

6-teorema: Agar barcha $n=1,2,3,\dots$ lar uchun $a_n \le b_n$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ham uzoqlashuvchi qatordir.

Misol: Quyidagi

$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\dots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\dots$ qator tekshirilsin.

Biz $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots+\frac{1}{n}+\dots$ garmonik qatorni olaylik, $n=1,2,3,\dots$ bo'lganda $\frac{1}{n}\le\frac{1}{\sqrt{n}}$ ekanligini ko'ramiz, hamda garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir. Shuning uchun 6-teoremaga asosan, berilgan qator uzoqlashuvchidir.

Qator yaqinlashishi yoki uzoqlashishini boshqa qatorlarga taqqoslamasdan, balki uning hadlaridan tuzilgan ba'zi ko'rinishdagi ifodalarning $n\to\infty$ dagi limiti qiymatiga qarab, aniqlovchi alomatlar ishlab chiqilgan. Shulardan ba'zilarini keltirib o'tamiz.

Dalamber alomati: U holda

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ musbat hadli qator bo'lib $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=b$ limit mavjud bo'lsin.

1) agar $b<1$ bo'lsa, qator yaqinlashuvchi;
2) agar $b>1$ bo'lsa, qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Isboti: Teorema shartiga ko'ra

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=b\,.$$

Ya'ni har qanday etarlicha kichik musbat ε-son olinmasin, shunday n_0 topiladiki, undan kichik bo'lmagan n lar uchun

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}-b\right|<\varepsilon$$

tengsizlik o'rinli bo'ladi, ya'ni

$$b-\varepsilon<\frac{a_{n+1}}{a_n}<b+\varepsilon,\ n\in N,\ n\geq n_0$$

1) $b<1$ bo'lsin. Biz ε sonni shunday tanlab olamizki, bunda $b+\varepsilon<1$ shart bajariladi. Agar $b+\varepsilon=q$ desak, $0<q<1$ bo'ladi.

O'z navbatida $n\geq n_0$ lar uchun $\frac{a_{n+1}}{a_n}<q$, ya'ni $a_{n+1}<a_n q$ tengsizlikka ega bo'lamiz.

Oxirgi tengsizlikni $n=n_0,\ n_0+1,\ n_0+2,\ldots$ lar uchun yozsak, quyidagi tengsizliklar hosil bo'ladi:

$$a_{n_0+1}<a_{n_0}q$$

$$a_{n_0+2}<a_{n_0+1}q<a_{n_0}q^2$$

$$a_{n_0+3}<a_{n_0+2}q<a_{n_0}q^3$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Qaralayotgan qatorning, ushbu

$$a_{n_0+1}+a_{n_0+2}+a_{n_0+3}+\cdots$$

n- qoldig'ini qarasak, uning hadlari $C_n=a_{n_0}q^n$-geometrik progressiya hadlaridan tuzilgan ushbu

$$a_{n_0}q+a_{n_0}q^2+a_{n_0}q^3+\cdots$$

qatorning mos hadlaridan kichikdir. $\sum_{n=1}^{\infty}C_n$ qator, $0<q<1$ bo'lgani sababli yaqinlashuvchi qatordir. U holda solishtirish teoremasiga ko'ra n_0 -qoldiq qator va undan esa $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ qator yaqinlashuvchi ekanligi kelib chiqadi.

1) Endi $b>1$ bo'lsin. Biz $\varepsilon>0$ shunday tanlab olamizki $b-\varepsilon>1$ bo'ladi. U holda $n\geq n_0$ lar uchun $a_{n_0}<a_{n_0+1}<a_{n_0+2}<\cdots$.

Bu munosabatlar qarayotgan musbat qator hadlari o'sib borishligini, hamda $\lim\limits_{n\to\infty} a_n\neq 0$ ekanligini ko'rsatadi. Bu esa qator yaqinlashining zaruriy sharti bajarilmayotganligini bildiradi. Demak, $b>1$ bo'lganda $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ uzoqlashuvchi qator ekan.

Eslatma: Agar $b=1$ bo'lib qolsa, qatorlarning ba'zilar yaqinlashuvchi bo'lsa, ba'zilari uzoqlashuvchi bo'ladi.

Demak, Dalamber alomatini $b=1$ da qo'llab bo'lmaydi. Bunday xollarda qatorni boshqa alomatlar yordamida tekshirish zarur.

Misollar:

1.Ushbu $1+\frac{1\cdot 2}{1\cdot 3}+\frac{1\cdot 2\cdot 3}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$ qatorni yaqinlashuvchilikka tekshiring.

Yechish: Qatorning umumiy hadi

$$a_n=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot n}{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}=\frac{n!}{(2n-1)!!}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(2n+1)!!}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n!(n+1)}{(2n-1)!!(2n+1)}\cdot\frac{(2n-1)!!}{n!}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1$$

Demak, berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

2. Garmonik qator $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ tekshirilsin.

Yechish, bu erda:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,$$

ya'ni $b=1$. Eslatmaga asosan, bu qatorni boshqa usul bilan tekshirish kerak bo'ladi.

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n}$ qator tekshirilsin.

Yechish: Bu erda

$$a_n=\frac{3^n}{n};\ a_{n+1}=\frac{3^{n+1}}{n+1}$$

va $$\ell im_{n\to 0}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell im_{n\to\infty}\frac{3\cdot 3n}{n+1}\cdot\frac{n}{3^n}=\ell im_{n\to\infty}\frac{3n}{n+1}=3\cdot\ell im_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=3>1$$

Dalamber alomatiga ko'ra qator uzoqlashadi,

4. $\sum\frac{1}{n(n+1)}$ qator tekshirilsin.

Yechish: Bu qatorda

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)};\ a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}\text{ va}$$

$$\ell im_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\ell im_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{(n+1)(n+2)}=\ell im_{n\to\infty}\frac{n}{n+2}=\ell im_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{2}{n}}=1$$

Lekin, bu qatorning yaqinlashuvchi ekanligini, 3- ta'rifidan keyinmisol 1 da ko'rgan edik.

Koshi alomati: $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ $(a_n\geq 0)$ qator uchun $\ell im_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=q$ bo'lsin.

U holda: $q<1$ bo'lganda qator yaqinlashuvchi, $q>1$ bo'lganda qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu erda ham $q=1$ bo'lib qolsa, qator yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligi ochiq qoladi.

Misollar:

1. $\frac{1}{\ell n2}+\frac{1}{\ell n^2 3}+\frac{1}{\ell n^3 4}+\cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish: Qatorning umumiy hadi.

$a_n=\frac{1}{\ell n^n(n+1)}$ ko'rinishga ega.

Bundan:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{\ell n^n(n+1)}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ell n(n+1)}=0<1,$$ demak berilgan qator yaqinlashuvchi ekan.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(4n-1)}{(n+2)}\right)^n$ qator tekshirilsin.

Yechish:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{4n-1}{n+2}=4>1,$$ ya'ni berilgan qator uzoqlashuvchi.

Koshining integral alomati. Agar $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ sonli qator berilgan bo'lsa, uning umumiy hadini natural sonlar to'plamida aniqlangan $a_n=f(n)$ funksiya deb qarash mumkin, ya'ni

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}f(n).$$

Keyinchalik $f(x)$ funksiyani $[1,\infty)$ oraliqda qaraymiz.

7-teorema. Agar $f(x)$ funksiya $x\geq 1$ bo'lganda musbat uzluksiz funksiya bo'lib, $\int_1^{\infty}f(x)dx$ xosbo'lmagan integral yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'ladi va ushbu xosbo'lmagan integral uzoqlashsa, qator ham uzoqlashuvchi bo'ladi.

Misollar: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ qatorning yaqinlashuvchi ekanligi ko'rsatilsin.

Yechish: Qator umumiy hadi. $a_n=f(n)=\frac{1}{n^2}$ ko'rinishda.

Qatorga mos keluvchi xosbo'lmagan integralni hisoblaymiz;

$$\int_1^{\infty}f(x)dx=\int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}dx=\lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{x^2}=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{x}\Big|_1^N\right]=\lim_{N\to\infty}\left[-\frac{1}{N}+1\right]=1<+\infty$$

Demak: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ yaqinlashuvchi qatordir.

2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ -garmonik qator uzoqlashuvchi qatordir.

Isbot: Qator umumiy hadi,

$$a_n = f(n) = \frac{1}{n}$$

Bunga ko'ra:

$$\int_1^{\infty} f(x)dx = \int_1^{\infty}\frac{1}{x}dx = \lim_{N\to\infty}\int_1^{N}\frac{dx}{x} = \lim_{n\to\infty}\left[\ln x\Big|_1^{N}\right] = \lim_{N\to\infty}[\ln N + 0] = \infty$$

Shunday qilib, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ - garmonik qator uzoqlashuvchi qator ekan.

Ishorasi almashuvchi qatorlar

Agar $\{a_n\}$ ketma-ketlik elementlari musbat bo'lsa

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots\ldots \quad (4)$$

ko'rinishidagi qator ishorasi almashuvchan qator deyiladi.

8-teorema (Leybnits teoremasi): Agar (4) ishorasi almashuvchan qatorda $a_1 > a_2 > a_3 > \ldots\ldots > a_n > \ldots\ldots$ bo'lib, uning umumiy hadi nolga intilsa $(\lim_{n\to\infty} a_n = 0)$, u holda (4) yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Isboti: S_n bilan (4) qator xususiy yig'indisini belgilaymiz. Agar $\lim_{n\to\infty} S_n$ chekli ekanligini ko'rsata olsak teorema isboti kelib chiqadi.

Avval: S_{2m} xususiy yig'indini olib, uni

$$S_{2m} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \cdots + (a_{2m-1} - a_{2m})$$

ko'rinishda yozib olamiz. Teorema shartidan $a_{k-1} - a_k > 0$ va $S_{2m} > 0$, hamda S_{2m} ketma-ketlik o'suvchiligini aniqlaymiz.

Shu bilan birga S_{2m} yig'indi uchun

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m}.$$

Demak, $S_{2m} < a_1$.

Shunday qilib, $\{S_{2m}\}$ yuqoridan chegaralangan monoton o'suvchi ketma-ketlik ekan. Bunday S_{2m} ketma-ketlik $m \to \infty$ da chekli S liment ega bo'ladi, ya'ni $\lim\limits_{m \to \infty} S_{2m} = S$.

Ushbu $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ tenglikdan va teoramaning $\lim\limits_{m \to \infty} a_{2m+1} = 0$ shartidan

$$\lim_{m \to \infty} S_{2m+1} = \lim_{m \to \infty} S_{2m} + \lim_{m \to \infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$$

tenglik kelib chiqadi.

Shunday qilib, $\lim\limits_{n \to \infty} S_n = S < \infty$. Demak, (4) yaqinlashuvchi qatordir.

Misollar.

1. Quyidagi

$$\frac{1}{3} - \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} - \frac{4}{3^4} + \cdots$$

qator yaqinlashuvchi qatordir.

Chunki,

1) $\frac{1}{3} > \frac{2}{9} > \frac{1}{9} > \frac{4}{81} > \cdots$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{n}{3^n} = 0$ Demak, Leybnits teoremasi shartlari bajariladi.

2. Ushbu

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

qator uchun Leybnits teoremasi shartlari bajarilgani sababli, u ham yaqinlashuvchi qator bo'ladi. Lekin bunday qatorlarning bir-biridan ajralib turuvchi xossalari borki, ularni biz keyinroq keltiramiz.

Absolyut va shartli yaqinlashuvchi qatorlar

Bizga hadlari ixtiyoriy sonlardan tashkil topgan, ushbu

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad (5)$$

qator berilgan bo'lsin. Bu qator hadlari modullaridan iborat bo'lgan, ushbu

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \cdots + |a_n| + \cdots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \qquad (6)$$

qatorni qaraymiz.

9-teorema. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchi bo'lsa, u holda $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Yordamchi

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) = (a_1 + |a_1|) + (a_2 + |a_2|) + \cdots \qquad (7)$$

qatorni qaraymiz.

Modul xossasiga ko'ra $0 < a_n + |a_n| \le 2|a_n|, n = 1,2,3,\cdots$ bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator yaqinlashuvchiligiga asosan, $\sum_{n=1}^{\infty} (2|a_n|)$ qator ham yaqinlashuvchi qator bo'ladi. O'z navbatida taqqoslash teoremasiga ko'ra (7) qator yaqinlashuvchi bo'ladi. Ushbu

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

tenglikdan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qatorning yaqinlashishi kelib chiqadi.

Teskari tasdiq o'rinli emas, ya'ni $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ yaqinlashuvchi bo'lishi shart emas.

Shunday holatlar bo'ladiki $\sum a_n$ yaqinlashuvchi, ammo $\sum |a_n|$ uzoqlashuvchidir.

Bunday hollarni tartibga keltiruvchi ayrim tushunchalarni kiritamiz.

4-ta'rif. Agar berilgan $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator hamda uning hadlari modullaridan tuzilgan $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ qator ham yaqinlashuvchi bo'lsa,u holda $\sum a_n$ absolyut yaqinlashuvchi qator deyiladi.

5-ta'rif. Agar $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ yaqinlashuvchi qator bo'lib, $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ uzoqlashuvchi bo'lsa, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ qator shartli yaqinlashuvchi qator deyiladi.

Misollar: 1) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\frac{1}{16}-\frac{1}{32}+\cdots$ qator tekshirilsin.

Yechish. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$ qator, maxraji $q=\frac{1}{2}<1$ bo'lgan cheksiz kamayuvchi geometrik progressiyaning barcha hadlari yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi qatordir. Demak,

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$$

absalyut yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\equiv\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ qator tekshirilsin.

Yechish. Bu qator ishorasi almashuvchan qator bo'lib, Leybnits teoremasining barcha shartlarini qanoatlantiradi, ya'ni yaqinlashuvchi qator.

Lekin uning hadlari modullaridan tuzilgan:

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

qator garmonik qator bo'lib, uning uzoqlashuvchi qator ekanligi bizga ma'lum.

Shu sababli, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ shartli yaqinlashuvchi qator ekan.

Mashqlar. Quyidagi qatorlarning absolyut yoki shartli yaqinlashishi aniqlansin.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2^n-1)^2}; \quad 2) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$$

7.2.Funksional va darajali qatorlar

6-ta'rif. Hadlari funksiyalardan iborat bo'lgan $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ ko'rinishdagi qatorlarga funksional qator deyiladi.

Misollar.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty} \ell n^n x = \ell nx + \ell n^2 x + \ell n^3 x + \cdots.$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2} = \sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \frac{\sin 3x}{3^2} + \cdots$$

7-ta'rif.

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots \qquad \textbf{(8)}$$

ko'rinishdagi funksional qatorga darajali qator deyiladi. Bu erda a_n - darajali qator koeffitsentlari deyiladi.

Misollar.

$$1) \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}x^n = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots;$$

$$2) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} x^{2(n-1)} = 1 + 2x^2 + 4x^4 + 8x^6 + \cdots$$

Funksional qator uchun asosiy masala uning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi ekanligini aniqlash, bu holat sonli qatornikidan farqlidir. Darajali qatorning yaqinlashuvchi yoki uzoqlashuvchi bo'lishi asosan x o'zgaruvchining qanday qiymat qabul qilishiga bevosita bog'liq bo'ladi.

8-ta'rif. Agar (8) qator $x = x_1$ bo'lganda yaqinlashsa, u holda (8) darajali qator $x = x_1$ nuqtada yaqinlashuvchi deyiladi.

9-ta'rif. x o'zgaruvchining $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator yaqinlashadigan barcha qiymatlari to'plamiga, ushbu darajali qatorning yaqinlashish sohasi deyiladi va $D(\Sigma)$ bilan belgilanadi.

Misol: $\sum_{n=1}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

darajali qator x o'zgaruvchining (-1, 1) oraliqdan olingan har bir qiymatida cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya yig'indisi sifatida yaqinlashuvchi bo'ladi. Demak bu qator uchun $D(\Sigma) = (-1, 1)$.

Ta'kidlash lozimki, ixtiyoriy darajali qatorning yaqinlashish sohasi bo'sh emas chunki har qanday darajali qator hech bo'lmaganda $x = 0$ da chekli yig'indiga ega.

10-teorema (Abel teoremasi). Agar (1) darajali qator biror $x = x_0$ da yaqinlashsa, u holda bu qator $|x| < |x_0|$ shartni qanoatlantiruvchi barcha x larda ham yaqinlashuvchi bo'ladi.

Isboti. Bu erda $x_0 \neq 0$ deb qarash kerak, chunki $x_0 = 0$ bo'lsa, $|x| < 0$ shartni qanoatlantiruvchi to'plam bo'sh to'plamdir.

Teorema shartiga ko'ra, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_0^n$ sonli qator yaqinlashuvchi. Sonli qator yaqinlashishining zaruriy shartiga asosan, $\lim_{n\to\infty} a_n x_0^n = 0$.

U holda shunday $c > 0$ sonni topa olamizki, barcha $n = 1,2,3,\ldots$ uchun $|a_n x_0^n| < c$ bo'ladi.

Endi $|x| < |x_0|$ shartli qanoatlantiruvchi ixtiyoriy x ni olib,

$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n < c\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

tengsizlikni e'tiborga olsak, cheksiz kamayuvchi geometrik progressiya hadlari yig'indisi bo'lgan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$

qator yaqinlashuvchiligidan, solishtirish teoremasiga asosan (8) qatorning yaqinlashuvchiligi kelib chiqadi. Demak, (8) darajali qator $|x|<|x_0|$ shartni bajaruvchi barcha x larda absolyut yaqinlashuvchi qator ekan. Teorema isbot bo'ldi.

Quyidagi natija ham o'rinlidir. Agar biror $x = x_0$ qiymatda (8) darajali qator uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda $|x|>|x_0|$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi barcha x larda (8) qator uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu tasdiqlar darajali qatorning yaqinlashish va uzoqlashish nuqtalari to'plamlarini aniqlashga yordam beradi.

Xususan: (8) qator $x = x_0$ da yaqinlashuvchi bo'lsa, $y(-|x_0|;|x_0|)$ intervalda yaqinlashuvchi shuningdek $x = x_0$ da uzoqlashuvchi bo'lsa, (8) qator $(-\infty;-|x_0|)$ va $(|x_0|;\infty)$ intervallarda uzoqlashuvchi bo'ladi.

Quyidagi teoremani isbotsiz keltiramiz.

11-teorema. Agar (8) darajali qator x ning ba'zi qiymatlarida yaqinlashuvchi, ba'zi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'lsa, u holda yagona shunday $M>0$ son topiladiki, (8) darajali qator x ning $|x|<M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida absolyut yaqinlashuvchi, x ning $|x|>M$ tengsizlikni qanoatlantiruvchi qiymatlarida esa uzoqlashuvchi bo'ladi.

Bu teorema yordamida topilgan M soniga (8) darajali qatorning yaqinlashish radiusi, $(-M,M)$ interval esa uning yaqinlashish intervali deyiladi.

Quyidagilarni eslatib o'tamiz.

Qatorning berilishiga qarab M chekln son yoki $R=\infty$ bo'lishi mumkin. Ya'ni shunday darajali qatorlar borki, ular $(-\infty,\infty)$ da yaqinlashuvchi qator bo'ladi.

Agar M chekli son bo'lsa, u holda darajali qatorning yaqinlashish radiusi

$M=\ell im_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ yoki $M=\ell im_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ formula bilan aniqlanadi.

Umuman darajali qatorning yaqinlashish radiusi R bilan belgilanadi $(\mu=R)$.

Agar R chekli son bo'lsa, Abel teoremasidan (8) darajali qatorning $D(\Sigma)=(-R;R)$ sohada yaqinlashishi kelib chiqsada, $x=-R$ va $x=R$ da qatorning yaqinlashishi yoki uzoqlashishi ochiq qoladi. Bu masala har bir darajali qator uchun alohida - alohida ko'rib chiqiladi.

Misollar.

1) $\sum_{n=0}^{\infty}x^n=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$

qatorning yaqinlashish radiusi aniqlansin.

Yechish. Berilgan qatorda $a_n=1,\ n=1,2,3,\ldots$

$$R=\ell im_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\ell im_{n\to\infty}1=1$$

2) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$

qatorning yaqinlashish radiusi topilsin.

Yechish. Bu erda

$$a_n=\frac{1}{n!};\quad a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

ekanligidan

$$R=\ell im_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\ell im_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\ell im_{n\to\infty}(n+1)=\infty$$

3 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n^2+1}$ qatorning yaqinlashish sohasi aniqlansin.

Yechish. Berilishiga ko‘ra

$$a_n = \frac{1}{n^2+1};\ a_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^2+1}$$

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+1}{n^2+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{n^2+2n+2}{n^2=1} = 1.$$

Abel teoremasiga ko‘ra qaralayotgan qator (-1,1) intervalda yaqinlashadi. O‘z navbatida

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n^2+1}$$

qator yaqinlashuvchi bo‘lganligi sababli, $x=-1,\ va\ x=1$ qiymatlarda qator absolyut yaqinlashuvchi qator bo‘ladi. Natijada berilgan qator $[-1,1]$ da absolyut yaqinlashuvchi, $|x|>1$ bo‘lganda esa uzoqlashuvchi qator bo‘ladi.

4 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$ qatorning yaqinlashish sohasi aniqlansin.

Yechish. Berilganiga ko‘ra $a_n = \frac{1}{n+2}$ u holda $R = \lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2} = 1.$

Agar $x=1$ desak qator

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\cdots$$

ko‘rinishni oladi. Bu qator uzoqlashuvchi qatordir.

Endi $x=-1$ deb olsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+2} = \frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots$$

ko‘rinishdagi ishorasi almashuvchan qatorga ega bo‘lamiz. Leybnits teoremasi shartlari bajarilganligi uchun bu qator yaqinlashuvchidir.

Shunday qilib qaralayotgan darajali qator (-1,1) da absolyut yaqinlashuvchi, $[-1;1)$ da yaqinlashuvchi, $|x|>1\ x\in(-\infty;-1)\bigcup[1;\infty)$ da uzoqlashuvchidir.

5 Ushbu $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n}$ qator tekshirilsin.

Yechish. Bu yerda $a_n=\frac{1}{3^n}$ yaqinlanish radiusi

$$R=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{3^n}}}=3$$

Agar $x=-3$ va $x=3$ deb olinsa, mos ravishda $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n$ va $\sum\limits_{n=0}^{\infty}1^n$ uzoqlashuvchi qatorlar hosil bo'ladi. Bu qatorlar uchun yaqinlashishning zaruriy sharti $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$ bajarilmaydi.

Demak, berilgan qator (-3,3) intervalda absolyut yaqinlashuvchi va barcha $|x|\geq 3$ qiymatlarda uzoqlashuvchi qatordir.

Darajali qatorlarni differentsiallash va integrallash

Darajali qatorlar muhim amaliy xususiyatlarga ega. Shu sababli, ularning ba'zi xossalarini o'rganamiz.

Anglash qiyin emaski, darajali qator o'zining $(-R;R)$ yaqinlashish sohasida x o'zgaruvining

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$$

funksiyasini aniqlaydi.

Bu $f(x)$ funksiya $(-R;R)$ yaqinlashish sohasida uzluksiz bo'lib, istalgan tartibli uzluksiz hosilalarga egadir. Shu bilan birga $f'(x)$ hosila yuqoridagi qator hadlarining hosilalari yig'indisiga tengdir, ya'ni

$$f'(x)=a_1+2a_2x+\cdots+na_nx^{n-1}+\cdots\equiv\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}.$$

Xuddi shuningdek,

$$f''(x)=\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} \quad f'''(x)=\sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2)a_n x^{n-3}$$

va hakazo.

Bu xossa, odatda «darajali qatorni hadma-had differensiallash» xossasi deb yuritiladi.

Shu kabi «Darajali qator yig'indisining integrali, qator hadlari integrallarining yig'indisiga tengdir» mazmundagi xossa ham o'rinlidir.

Ya'ni $(-R;R)$ oraliqdan olingan har qanday x uchun

$$\int f(x)dx = C + a_0 x + \frac{a_1}{2}x^2 + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots + \frac{a_n x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

7.3. Teylor va Makloren qatorlari.

Yuqorida $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ darajali qator, o'zining yaqinlashish sohasi $(-R,R)$ da uzluksiz $f(x)$ funksiyani ifodalab, shu oraliqda $f(x)$ funksiya istalgan tartibli hosilaga ega bo'lishi keltirilgan edi.

Endi biror oraliqda istalgan tartibli hosilaga ega bo'lgan $y=f(x)$ funksiyani darajali qatorga yoyish masalasini o'rganaylik.

"Teylor formulasi" deb ataluvchi, ushbu formula

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x) \quad (9)$$

o'rinlidir. Bu erda $R_n(x)$ qoldiq had.

10-ta'rif. Agar $y=f(x)$ funksiya $x=x_0$ nuqtaning biror atrofida istalgan tartibli hosilaga ega bo'lsa:

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

(10)

ko'rinishdagi qator $f(x)$ funksiyaning Teylor qatori deyiladi.

Agar e'tibor bersak, bu qator ma'lum qonuniyat bilan tuzilgan darajali qator ekanligini ko'ramiz. Uning koeffitsentlari

$f(x)$ funksiya va uning hosilalarining $x=x_0$ nuqtadagi qiymatlar orqali ifodalangan.

O'rni kelganda (10) ga $y=f(x)$ funksiyaning $x=x_0$ nuqta atrofidagi Teylor qatoriga yoyilmasi deb ham ataladi.

Agar (10) da $x_0=0$ deb olinsa, ushbu qator

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}x^n+\cdots$$

Makloren qatori deb ataladi.

Bu kabi qatorlardan funksiyalarning qiymatlarini hisoblashda keng foydalaniladi.

Agar funksiya uchun formal holda Teylor yoki Makloren qatori yozilgan bo'lsa, bu qator berilgan funksiyani ifodalashini isbot qilish uchun qoldiq hadining nolga intilishini isbotlash yoki bu qatorning qaralayotgan funksiyaga yaqinlashishini boshqa biror usul bilan ko'rsatish kerak bo'ladi.

Ba'zi elementar funksiyalarning Makloren qatoriga yoyilmalarini keltiramiz:

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)}+\cdots$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

Bu qatorlarning har biri uchun $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x)=0$ bo'lgani sababli, x ning har qanday qiymatida ya'ni $x\in(-\infty;\infty)$ da yaqinlashuvchi bo'lib, mos ravishda $\sin x, \cos x, e^x$ funksiyalarni ifodalaydi.

Funksiya yoyilmasini ifodalovchi Teylor yoki Makloren qatorining yaqinlashish sohasi funksiyaning aniqlashish sohasidan farqli (uning ma'lum qismi) bo'lishi mumkin.

Misollar:

1. $f(x)=\ell n(1+x)$ funksiya uchun $D(f)=(-1;+\infty)$ bo'lsada,

$$\ell n(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+(-1)\frac{x^n}{n}+\cdots$$

qator faqat (-1;1) oraliqda o'rinlidir.

2.

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots$$

yoyilma $|x|<1$ bo'lgandagina ma'noga ega bo'ladi.

Xulosa

Qatorlar musbat hadli, ishora almashinuvchi va shartli, absolyut yaqinlashuvchi qatorlarga ajratib, to'la keltirilgan va tegishli misollar bayon qilingan. Funksional va darajali qatorlar nazariyasi keltirilgan.

Tayanch iboralari

Qator, yaqinlashuvchi qator, musbat hadli qator, funksional va darajali qatorlar.

Takrorlash uchun savollar

1. Musbat hadli qatorlar yaqinlashish haqidagi solishtirish teoremalarini ayting.
2. Yaqinlashuvchi qatorlar uchun Dalamber teoremasi.
3. Koshi teoremasini ayting.
4. Koshining integral alomatini ayting.
5. Leybnits teoremasini ayting, misollar keltiring
6. Absalyut yaqinlashuvchi qatorga misol keltiring.
7. Shartli va absolyut yaqinlashishlarni tushintiring.
8. Funksional qatorlarga misollar keltiring.
9. Darajali qator nima va uning yaqinlashish radiusi qanday topiladi.
10. Darajali qatorlarni differentsiallash va integralash qoidalarini ayting.

Adabiyotlar

1.Azlarov T. A., Mansurov H. Matematik analiz.- T.: 2006.
2.Xojiyv J. Algybra va sonlar nazariyasi.-T.: O'zbekiston, 2001.
3.Jo'rayv T.J.,Sagdullaev A.S., Xudoyberganov R.X., Vorisov A.K., Mansurov X. Oliy matematika asoslari.-T.: O'zbekiston, 1999.
4.Soatov YO.U. Oliy matematika.-T.:O'qituvchi, 1-jild, 2-jild, 1994., 3-jild, 1996.
5.Обший курс высший математике для экономистов. под. ред. В. И. Ермакова. – М.: ИНФРА – М, 2006.
6.Высшая математика для экономистов. под. ред. Крамера Н.Ш.–М.: ЮНИТИ, 2006.
7.Красс М. С., Чупринов Б. П. Математике для экономического бакалавrианта.- М.: Дело, 2006.
8. Shoraxmetov Sh., Naimjonov A. Oliy matematika. Fanidan ma'ruzalar matni: T.: TDIU, 2005.
9. Nasritdinov G'., Abduraimov M., Iqtisodchilar uchun matematika o'quv qo'llanma –T. «Universitet» 2001. 124
10. Karimov M. Oliy matematika. –T.: TMI, 2005.
11. Adigamova E. B. va boshqalar. «Oliy matematika» fanidan ma`ruzalar to'plami. – T.: TMI, 2004. (II qism).
12. Saifnazarov SH. A., Ortiqova M. T., Boshlang'ich moliyaviy matematika asoslari. –T.: TDIU, 2002.
13. Общий курс высшей математики для экономистов. под. ред. Ермакова В. И. –М.: INFRA – M, 2006.

Internet ma'lumotlari

1. http//images/yandeks/ru
2. www.ibz.ru

Mundarija

SH. Sharahmetov, A. Naimjonov

IQTISODCHILAR UCHUN MATEMATIKA

Toshkent – «Fan va texnologiya» – 2007

Muharrir: *Q.Avezbayev*
Tex.muharrir: *A.Moydinov*
Musahhih: *M.Hayitova*
Kompyuterda sahifalovchi: *A.Shaxamedov*

Bosishga ruxsat etildi 22.02.2007. Bichimi 60x84 $^{1}/_{16}$.
«Times Uz» garniturasi. Ofset usulida bosildi.
Shartli bosma tabog'i 19,5. Nashr tabog'i 19,0.
Adadi 1000. Buyurtma №18.

«Fan va texnologiyalar Markazining bosmaxonasi»да chop etildi.
700003, Toshkent sh., Olmazor ko'chasi, 171-uy.