

# ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

**ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS**  
**A QUALITATIVE APPROACH WITH APPLICATIONS**

**D. K. ARROWSMITH,**  
**C. M. PLACE**

**Westfield College**  
**University of London**

**Chapman and Hall**  
**London New York**  
**1982**

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА**

**ВВОДНЫЕ КУРСЫ**

Д. ЭРРОУСМИТ  
К. ПЛЕЙС

# **ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

**КАЧЕСТВЕННАЯ  
ТЕОРИЯ  
С ПРИЛОЖЕНИЯМИ**

Перевод с английского  
Т. Д. ВЕНЦЕЛЬ

под редакцией  
Н. Х. РОЗОВА



МОСКВА  
«МИР»  
1986

ББК 22.161.6  
Э81  
УДК 517.9

Эрроусмит Д., Плейс К.

Э81 Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями: Пер. с англ. — М.: Мир, 1986. — 243 с.

Книга английских математиков, дающая краткое введение в качественную теорию дифференциальных уравнений и ее приложений к системам, зависящим от времени. Авторы знакомят читателей с методами получения результатов и показывают, как их применять. Помимо классических приложений в области механики и электротехники приведены примеры из области экологии, экономики, медицины.

Для математиков-прикладников, преподавателей, аспирантов и студентов вузов.

Э  $\frac{1702050000 - 152}{041 (01) - 86}$  24 — 86, ч. 1

ББК 22.161.6

*Редакция литературы по математическим наукам*

© 1982 D. K. Arrowsmith and C. M. Place  
© перевод на русский язык, «Мир», 1986

## НЕСКОЛЬКО СЛОВ К ЧИТАТЕЛЮ

Книги серий «Современная математика. Популярная серия» (таких книг насчитывается шестнадцать) и «Современная математика. Вводные курсы» (читатель держит в руках 11-й выпуск) знакомы всем, кто хоть в какой-то мере интересуется математической литературой. Среди книг этих серий еще не было ни одной, посвященной обыкновенным дифференциальным уравнениям. Книги по геометрии и теории чисел, по логике и топологии, по алгебре и теории вероятностей, даже по машинной математике — были, а по дифференциальным уравнениям не было. Случайно ли это? Видимо, нет.

Причина здесь прежде всего заключается в том, что «введение» в перечисленные разделы математики можно (хотя, конечно, далеко не просто!) написать без громоздких аналитических вычислений и независимо от математических познаний читателя и его уровня владения математической техникой. Чтение и, главное, усвоение такой книги — дело не легкое, но вполне посильное читателю даже и с небольшим математическим багажом. В дифференциальных уравнениях — разделе, принципиально аналитическом — уже само первоначальное ознакомление с предметом представляется невозможным без свободного владения результатами анализа и других глав математики, без сухих и кропотливых цепочек преобразований. Во всяком случае, именно такую мысль навевают многие из имеющихся у нас книг и учебников, в том числе и адресованные широкому кругу читателей.

Авторы настоящей книги предприняли попытку разрушить это мнение. Они отошли от традиционной манеры изложения, нестандартно отобрали материал, нашли «изюминку», которая, бесспорно, увлечет заинтересованного читателя. В результате им действительно удалось интересно и в то же время содержательно рассказать об обыкновенных

дифференциальных уравнениях на уровне, вполне доступном младшекурсникам наших университетов и инженерных вузов.

Поскольку речь идет не об учебнике, а о книге для первого знакомства с предметом, авторы отказались от излишней общности, от воспроизведения многих аналитических результатов, от скрупулезных доказательств, требующих сложных преобразований и логических построений. Основное их внимание сконцентрировано на концептуальных вопросах. Фундаментальным понятиям, ведущим идеям и основополагающим результатам авторы постоянно стараются дать не только (и не столько) формальное описание, но и интуитивные разъяснения, геометрическую трактовку, реальные интерпретации. Они не скупаются на разнообразные примеры, многочисленные поясняющие чертежи. Множество удачных и весьма полезных рисунков — большое достоинство книги.

В наши дни в дифференциальных уравнениях развивается новый стиль и язык изложения, все чаще используются новые терминология и обозначения, ведущую роль начинают играть понятия, еще недавно мало популярные, — оператор сдвига вдоль траектории (оператор эволюции), качественная эквивалентность, поток, грубость, бифуркация и др. Ко всем таким нововведениям надо привыкать как можно раньше. Важному делу их пропедевтики с успехом послужит эта книга.

«Изюминка» рассматриваемой книги, ее нетривиальная отличительная особенность, — обстоятельное описание разнообразных реальных проблем, для изучения которых привлекаются обыкновенные дифференциальные уравнения, и подробный качественный анализ соответствующих математических моделей. Такая богатая коллекция прикладных задач из самых разных областей в популярной книге на русском языке появляется, по-видимому, впервые.

Спора нет, все признают и ценят огромное значение дифференциальных уравнений как одного из основных орудий исследования естественно-научных, научно-технических и даже многих социально-экономических вопросов. Но присмотримся внимательнее к содержанию многих книг учебного характера по дифференциальным уравнениям, к содержанию программ для вузов и втузов. Что мы там

видим? Методы интегрирования нескольких классов уравнений, педантичное доказательство теоремы существования и единственности, набор формул для решения линейных уравнений с постоянными коэффициентами, фазовые портреты линейных стационарных двумерных систем и (в лучшем случае) формальное определение устойчивости по Ляпунову. А как же приложения? О их существовании, как правило, лишь упоминается, да приводятся банальные примеры (вроде математического маятника, радиоактивного распада или бассейна с двумя трубами — через одну вода вливается, через другую выливается...).

Трактовка курса обыкновенных дифференциальных уравнений просто как абстрактного раздела «чистой» математики плоха не только тем, что убивает интерес студентов к прикладным задачам. Протекающий на наших глазах процесс интенсивной математизации знаний все более настоятельно требует от математиков умения не только проводить качественное или численное исследование готовой модели, но и самому переходить от содержательного представления о явлении к его формально-математическому описанию. Иначе говоря, студентов должно учить фактически осуществлять математическое моделирование (или, как стали говорить в последнее время, модельное обеспечение). И курс обыкновенных дифференциальных уравнений — один из самых подходящих и удобных поводов для ознакомления с этим искусством.

Заслуга авторов настоящей книги в том, что они как раз и пытаются продемонстрировать читателю образцы математического моделирования ряда конкретных явлений.

Знакомство с обыкновенными дифференциальными уравнениями часто традиционно связывают с освоением техники интегрирования различных, в том числе довольно экзотических, классов таких уравнений. В настоящей книге о методах интегрирования уравнений речь не идет вовсе (за исключением нескольких упражнений), все внимание — как в теории, так и в приложениях — сосредоточено на качественных рассуждениях, на алгебро-геометрических подходах. Это в целом соответствует тому смещению акцентов, которое сейчас наблюдается в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

В этой связи нельзя не упомянуть, что современные компьютеры все более успешно осваивают тонкости проведения аналитических преобразований. Еще вчера многие были готовы биться об заклад, что машина в принципе не сможет оперировать с алгебраическими (буквенными) выражениями. А уже сегодня известны результаты первых экспериментов: компьютер успешно решил примерно 95 % уравнений, собранных в известном справочнике Э. Камке, причем в нескольких случаях обнаружил там ошибки.

Отметим, что особенно педантичный читатель выскажет претензии по поводу точности некоторых утверждений из этой книги — и он будет прав. Переводчице Т. Д. Вентцель неоднократно приходилось вносить исправления мелких неточностей, возникших, видимо, из-за торопливости авторов книги. Но добиваться изысканной строгости абсолютно всех фраз книги мы сочли нецелесообразным. Мелкие внесенные в текст исправления, как правило, не оговариваются, несколько содержащих ошибки фрагментов были просто исключены.

Итак, серия «Современная математика. Вводные курсы» пополнилась еще одной книгой. Будем надеяться, что многие начинающие математики, познакомясь с ней, выберут дифференциальные уравнения своей специальностью или по крайней мере почувствуют вкус к прикладным задачам.

*Н. Розов*



## ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга является введением в качественную теорию обыкновенных дифференциальных уравнений и знакомит с их применением к моделированию зависящих от времени систем. Затрагиваемые в ней математические идеи представляют собой удивительное переплетение идей из анализа, алгебры и геометрии, так что читателю придется использовать весь набор приобретенных математических навыков. Разнообразность является также характерной особенностью как областей применения, так и рассматриваемых типов динамических систем — от более традиционных задач механики и теории электричества до моделей, используемых в экологии, экономике и онкологии.

Книга в первую очередь предназначена студентам второго года обучения; предполагается, что читатель овладел начальными понятиями теории функций многих переменных и линейной алгебры. Конкретнее, считаются известными такие понятия, как непрерывность, дифференцируемость, линии уровня и критические точки функций двух переменных. Читатель должен иметь опыт обращения с некоторыми алгебраическими понятиями — базами, линейными преобразованиями, их собственными значениями и собственными векторами и их подобием, однако знание жордановых форм матриц не обязательно. Необходимые результаты из этой последней области только формулируются и иллюстрируются. Наша методическая установка на протяжении всего изложения состоит в том, чтобы всюду, где это возможно, разъяснить смысл излагаемых теорем на соответствующих примерах. Мы стремимся убедить читателей, что эти теоремы эффективны, и показываем, как они применяются. Таким образом, мы надеемся не только передать знания, необходимые для построения и анализа конкретных моделей, но также пробудить интерес к более глубокому пониманию математических результатов как таковых.

Книга состоит из пяти глав. В гл. 1 развивается подход к изучению пространства состояний дифференциальных уравнений, содержащих только одну действительную независимую переменную. Элементарные технические приемы из анализа для решения таких дифференциальных уравнений отнесены в упражнения, а основное внимание сосредоточено на геометрической интерпретации решений. В этой связи вводятся понятия автономного уравнения, фазового портрета и качественной эквивалентности. Далее в этой главе обсуждается, как эти понятия можно распространить на системы дифференциальных уравнений, и приводится краткий обзор содержания последующих глав. Глава 2 посвящена линейным системам, причем особое внимание уделено парам связанных дифференциальных уравнений. Здесь же приводится независимое изложение жордановых форм действительных матриц 2-го порядка, рассчитанное на то, чтобы читатель увязал его со своими алгебраическими познаниями. Глава 3 содержит некоторые основные результаты о нелинейных системах. Материал этой главы был отобран специально с учетом возможностей студентов второго года обучения. Здесь приводится теорема о линеаризации и обсуждается различие между локальным и глобальным исследованием решений. Глава заканчивается знакомством с предельными циклами и элементами теории Пуанкаре — Бендиксона. В гл. 4 мы демонстрируем роль качественных методов при исследовании моделей, а в гл. 5 собраны некоторые избранные темы более сложного характера. Эта последняя глава, вероятно, больше подходит для студентов третьего года обучения, хотя идея функции Ляпунова могла бы появиться и раньше. В конце каждой главы помещены упражнения, цель которых — закрепить развитые в тексте идеи и побудить читателя критически осмысливать то, что было изложено. Даются также краткие советы по решению упражнений.

В заключение мы хотели бы выразить благодарность профессорам Брауну и Истэму, а также докторам Ноулсу и Смиту за прочтение и обсуждение рукописи книги. Мы также благодарны миссис Плейс за тщательное печатание рукописи и помощь в выполнении рисунков.

*Д. К. Эрроусмит, С. М. Плейс*

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе мы показываем, что такое качественный подход к дифференциальным уравнениям, и вводим некоторые ключевые понятия, такие как фазовый портрет и качественная эквивалентность.

### 1.1. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ИДЕИ

#### 1.1.1. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ

**Определение 1.1.1.** Пусть  $X(t, x)$  — действительнoзначная функция действительных переменных  $t$  и  $x$  с областью определения  $D \subseteq \mathbb{R}^2$ . Функция  $x(t)$ , где  $t$  принадлежит некоторому интервалу  $I \subseteq \mathbb{R}$ , для которой всюду на  $I$  выполняется равенство

$$\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt} = X(t, x(t)), \quad (1.1)$$

называется *решением дифференциального уравнения (1.1)*.

Чтобы функция  $x(t)$  была решением, необходимо выполнение условия  $(t, x(t)) \in D$  для любого  $t \in I$ ; таким образом, область  $D$  ограничивает как область определения, так и область значений функции  $x(t)$ .

Если функция  $x(t)$  с областью определения  $I$  есть решение (1.1), то любое ее ограничение на интервал  $J \subset I$  также является решением. Во избежание каких-либо неясностей мы всегда будем брать в качестве  $I$  максимальный интервал, на котором  $x(t)$  удовлетворяет уравнению (1.1). Решения, обладающие таким свойством, называются *максимальными решениями*. Таким образом, если не оговорено противное, мы будем употреблять слово «решение» в смысле «максимальное решение»<sup>1)</sup>. Рассмотрим несколько примеров уравнений вида (1.1) и их решений. В каждом случае мы задаем

$$\dot{x} = X(t, x), \quad D, \quad x(t), \quad I,$$

---

<sup>1)</sup> В русской литературе употребляется термин «непродолжимое решение». — *Прим. перев.*

а  $C$  и  $C'$  обозначают некоторые действительные числа:

$$(a) \dot{x} = x - t, \quad \mathbb{R}^2, \quad 1 + t + Ce^t, \quad \mathbb{R};$$

$$(b) \dot{x} = x^2, \quad \mathbb{R}^2, \quad (C - t)^{-1}, \quad (-\infty, C);$$

$$0, \quad \mathbb{R};$$

$$(C' - t)^{-1}, \quad (C', \infty);$$

$$(c) \dot{x} = -x/t, \quad \{(t, x) | t \neq 0\}, \quad C/t, \quad (-\infty, 0);$$

$$C'/t, \quad (0, \infty);$$

$$(d) \dot{x} = 2x^{1/2}, \quad \{(t, x) | x \geq 0\}, \quad \begin{cases} 0, & (-\infty, C); \\ (t - C)^2, & (C, \infty); \end{cases}$$

$$0, \quad \mathbb{R};$$

$$(e) \dot{x} = 2xt, \quad \mathbb{R}^2, \quad Ce^{t^2}, \quad \mathbb{R};$$

$$(f) \dot{x} = -x/\operatorname{th} t, \quad \{(t, x) | t \neq 0\}, \quad C/\operatorname{sh} t, \quad (-\infty, 0);$$

$$C'/\operatorname{sh} t, \quad (0, \infty).$$

Существование решений определяется свойствами функции  $X$ . Следующее предложение формулируется без доказательства (см. Петровский, 1984).

**Предложение 1.1.1.** Если функция  $X$  непрерывна в открытой области  $D' \subseteq D$ , то для любой точки  $(t_0, x_0) \in D'$  существует решение  $x(t)$ ,  $t \in I$ , уравнения  $\dot{x} = X(t, x)$  такое, что  $t_0 \in I$  и  $x(t_0) = x_0$ .

Рассмотрим, например, уравнение

$$\dot{x} = 2|x|^{1/2}, \quad (1.2)$$

где  $D = \mathbb{R}^2$ . Любую точку  $(t_0, x_0)$ ,  $x_0 \geq 0$ , можно представить как  $(t_0, x(t_0))$ , где  $x(t)$  — решение:

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \in (-\infty, C), \\ (t - C)^2, & t \in (C, \infty), \end{cases} \quad (1.3)$$

а  $C = t_0 - \sqrt{x_0}$ . Точно так же можно найти решение и для точек  $(t_0, x_0)$ ,  $x_0 < 0$ .

Заметим, что предложение 1.1.1 не исключает случая, когда  $x(t_0) = x_0$  более чем для одного решения  $x(t)$ . Например, для (1.2) бесконечно много решений  $x(t)$  удовлетворяют условию  $x(t_0) = 0$ : именно ему удовлетворяет любое решение вида (1.3) с  $C > t_0$ , а также решение  $x(t) \equiv 0$ .

Следующее предложение дает достаточное условие, при котором каждой точке из  $D'$  соответствует только одно решение.

**Предложение 1.1.2.** Если  $X$  и  $\partial X/\partial x$  непрерывны в некоторой открытой области  $D' \subseteq D$ , то для любой заданной точки  $(t_0, x_0) \in D'$  существует *единственное* решение  $x(t)$  уравнения  $\dot{x} = X(t, x)$  такое, что  $x(t_0) = x_0$ .

Заметим, что, хотя функция  $X = 2|x|^{1/2}$  непрерывна в  $D (= \mathbb{R}^2)$ , ее производная  $\partial X/\partial x (= |x|^{-1/2}$  для  $x > 0$  и  $-|x|^{-1/2}$  для  $x < 0$ ) непрерывна только в области  $D' = \{(t, x) | x \neq 0\}$ ; в нуле она не определена. Мы уже отмечали, что точка  $(t_0, 0)$ ,  $t_0 \in \mathbb{R}$ , принадлежит бесконечному множеству решений уравнения  $\dot{x} = 2|x|^{1/2}$ .

С другой стороны, функция  $X(t, x) = x - t$  и  $\partial X/\partial x = 1$  непрерывны на всей области  $D = \mathbb{R}^2$ . Любая точка  $(t_0, x_0)$  принадлежит одному и только одному решению уравнения  $\dot{x} = x - t$ , а именно

$$x(t) = 1 + t + Ce^t, \quad (1.4)$$

где  $C = (x_0 - t_0 - 1)e^{-t_0}$ .

Имеются и более слабые достаточные условия существования и единственности (Петровский, 1984). Однако предложения 1.1.1 и 1.1.2 разъясняют характер условий, налагаемых на  $X(t, x)$ .

### 1.1.2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

Решение  $x(t)$  уравнения  $\dot{x} = X(t, x)$  представляется геометрически графиком функции  $x(t)$ . Этот график определяет *интегральную кривую* на плоскости  $t, x$ .

Если  $X$  непрерывна в  $D$ , то предложение 1.1.1 утверждает, что интегральные кривые заполняют область  $D$  плоскости  $t, x$ . Это следует из того, что каждая точка  $D$  должна лежать по крайней мере на одной интегральной кривой. Таким образом, решения дифференциального уравнения представляются *семейством интегральных кривых* в  $D$  (см. рис. 1.1—1.8).

Если обе функции  $X$  и  $\partial X/\partial x$  непрерывны в  $D$ , то из предложения 1.1.2 следует, что существует единственная интегральная кривая, проходящая через каждую точку  $D$  (см. рис. 1.1—1.6).

Заметим, что семейства интегральных кривых на рис. 1.2 и 1.6 имеют между собой большое сходство. Любая интегральная кривая на одном рисунке имеет соответствующую ей кривую на другом; они похожи по форме, у них те же самые асимптоты, но они не идентичны. Соотношение между этими двумя семействами интегральных кривых является примером того, что мы будем называть *качественной эквивалентностью* (см. п. 1.3, 2.4 и 3.3). Мы будем говорить, что *качественное поведение* интегральных кривых на рис. 1.2 такое же, как на рис. 1.6.

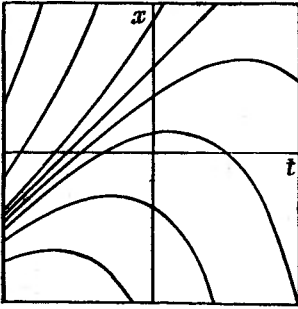


Рис. 1.1.  $\dot{x} = x - t$ .

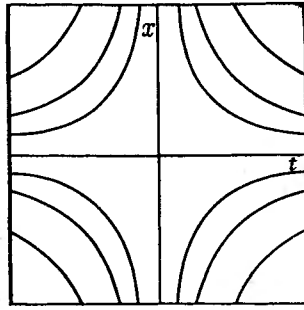


Рис. 1.2.  $\dot{x} = -x/t, t \neq 0$ .

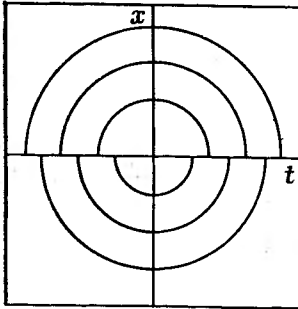


Рис. 1.3.  $\dot{x} = -t/x$ .

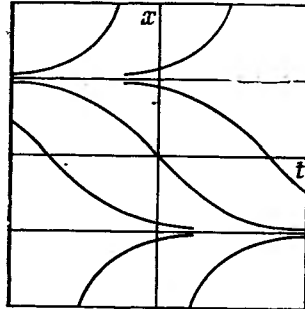


Рис. 1.4.  $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ .

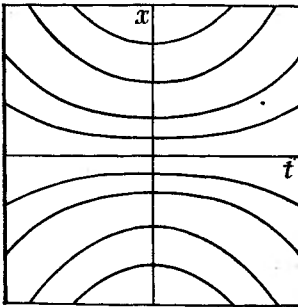


Рис. 1.5.  $\dot{x} = 2xt$ .

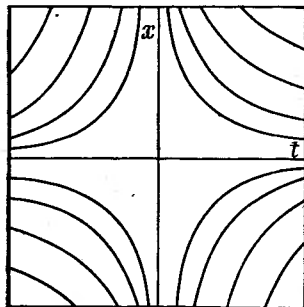


Рис. 1.6.  $\dot{x} = -x/th, t \neq 0$ .

Для определения качественного поведения интегральных кривых не всегда обязательно их аккуратно вычерчивать; часто бывает достаточно наброска. Иногда мы можем сде-

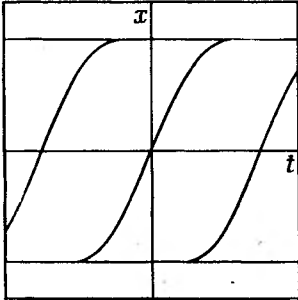


Рис. 1.7.  $\dot{x} = \sqrt{1-x^2}$ ,  $|x| \leq 1$ .

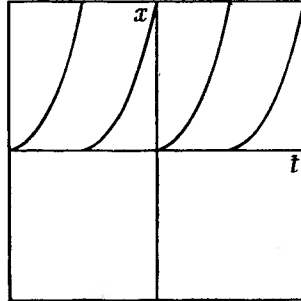


Рис. 1.8.  $\dot{x} = 2x^{1/2}$ ,  $x \geq 0$ .

лать набросок интегральных кривых непосредственно по дифференциальному уравнению.

**Пример 1.1.1.** Сделать набросок интегральных кривых уравнения

$$\dot{x} = t + t/x \quad (1.5)$$

в области  $D$  плоскости  $t, x$ , где  $x \neq 0$ .

**Решение.** Сделаем следующие замечания.

(а) Дифференциальное уравнение задает наклон интегральных кривых (т. е. угловой коэффициент касательных к ним) во всех точках области  $D$ . Так, в частности, в точках пересечения с кривой  $t + t/x = k$  (где  $k$  — некоторая постоянная) интегральные кривые имеют наклон  $k$ . Такая кривая называется *изоклиной* наклона  $k$ . Множество изоклин, которое получается, когда мы придаем  $k$  различные действительные значения, — это семейство гипербол

$$x = \frac{t}{k-t} \quad (1.6)$$

с асимптотами  $x = -1$  и  $t = k$ . Некоторые из этих изоклин изображены на рис. 1.9.

(б) Знак  $\ddot{x}$  определяет, в каких точках  $D$  интегральные кривые выпуклы, а в каких вогнуты. Если  $\ddot{x} > 0$  ( $< 0$ ), то функция  $\dot{x}$  возрастает (убывает) при возрастании  $t$  и интегральная кривая *вогнута* (*выпукла*). Таким образом, область  $D$  можно разбить на два подмножества, на каждом из которых интегральные кривые либо выпуклы, либо вогнуты; эти

множества разделяются кривой  $\ddot{x} = 0$ . Для уравнения (1.5) мы получаем

$$\ddot{x} = x^{-3}(x+1)(x-t)(x+t), \quad (1.7)$$

и  $D$  разбивается на области  $P(\ddot{x} > 0)$  и  $N(\ddot{x} < 0)$ , как это показано на рис. 1.10.

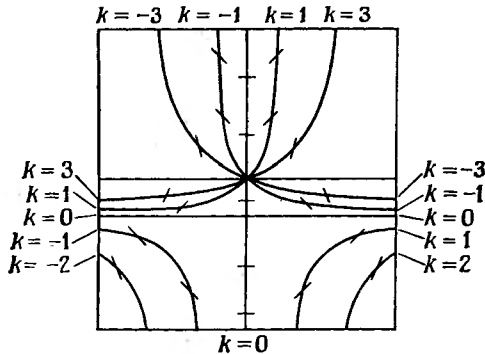


Рис. 1.9. Некоторые изоклины для уравнения  $\dot{x} = t + t/x$ . Короткие отрезки на изоклинах имеют наклон  $k$  и показывают, как интегральные кривые пересекают изоклины.

(с) Изоклины расположены симметрично относительно прямой  $t = 0$ , и, следовательно, интегральные кривые тоже должны быть относительно нее симметричны. Функция

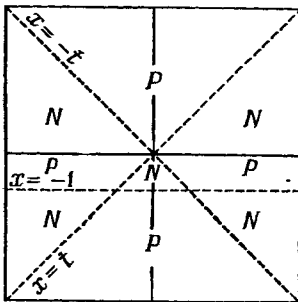


Рис. 1.10. Области выпуклости ( $N$ ) и вогнутости ( $P$ ) интегральных кривых уравнения  $\dot{x} = t + t/x$ .

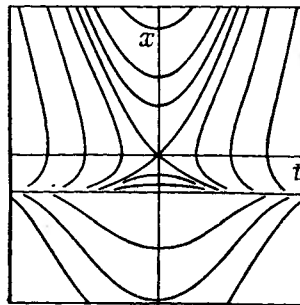


Рис. 1.11. Интегральные кривые дифференциального уравнения  $\dot{x} = t + t/x$ .

$X(t, x) = t + t/x$  удовлетворяет соотношению  $X(-t, x) = -X(t, x)$ , из которого следует, что если  $x(t)$  — решение уравнения  $\dot{x} = X(t, x)$ , то  $x(-t)$  тоже является решением (см. упр. 6).

Эти три замечания позволяют нам сделать набросок интегральных кривых для уравнения (1.5) (см. рис. 1.11). Мы



видим, что обе функции  $X(t, x) = t + t/x$  и  $\partial X/\partial x = -t/x^2$  непрерывны в  $D = \{(t, x) | x \neq 0\}$ , так что через каждую точку проходит единственная интегральная кривая.

Решения

$$\dot{x} = t + t/x \quad (1.8)$$

можно найти с помощью разделения переменных (см. упр. 1.2). Семейство интегральных кривых состоит из кривых, заданных уравнением

$$x - \ln|x + 1| = \frac{1}{2}t^2 + C, \quad (1.9)$$

где  $C$  — постоянная, и решения  $x(t) \equiv -1$ . Однако нарисовать интегральные кривые непосредственно по уравнению (1.9) труднее, чем по самому дифференциальному уравнению (1.5).

Сказанное выше приводит к двум важным идеям:

1. Два различных дифференциальных уравнения могут иметь решения с одинаковым качественным поведением.

2. Качественное поведение решений определяется функцией  $X(t, x)$ .

Теперь мы объединим эти две идеи и проиллюстрируем качественный подход к дифференциальным уравнениям на примере уравнений специального вида  $\dot{x} = X(x)$ . Мы увидим, что эти уравнения можно расклассифицировать на качественно эквивалентные типы.

## 1.2. АВТОНОМНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 1.2.1. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ КРИВЫЕ И ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ

Дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in S \subseteq \mathbb{R}, \quad (D = \mathbb{R} \times S) \quad (1.10)$$

называется *автономным*. Это название оправдано тем, что  $\dot{x}$  определяется одним только  $x$ , и, таким образом, решение само управляет своим изменением.

Решения автономных уравнений обладают следующим важным свойством. Если  $\xi(t)$  — решение уравнения (1.10) с областью определения  $I$  и областью значений  $\xi(I)$ , то  $\eta(t) = \xi(t + C)$  при любом действительном  $C$  также является решением с той же областью значений и с областью определения  $\{t | t + C \in I\}$ . Это следует из того, что

$$\dot{\eta}(t) = \dot{\xi}(t + C) = X(\xi(t + C)) = X(\eta(t)). \quad (1.11)$$

Интегральная кривая  $x = \xi(t)$  получается из интегральной кривой  $x = \eta(t)$  *сдвигом* по  $t$  в положительном направлении на величину  $C$ .

Кроме того, если через каждую точку полосы  $D' = \mathbb{R} \times \xi(I)$  проходит только одна интегральная кривая, то *все* решения в полосе  $D'$  получаются сдвигами  $x = \xi(t)$ . Таким образом,

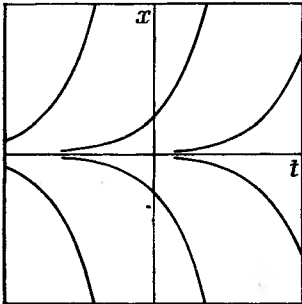


Рис. 1.12.  $\dot{x} = x$ : полосы  $D'$  — это полуплоскости  $x < 0$  и  $x > 0$ .

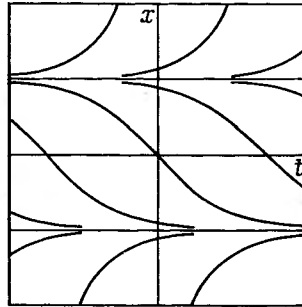


Рис. 1.13.  $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ : полосы  $D'$  имеют вид  $\mathbb{R} \times \xi(I)$ , где  $\xi(I) = (-\infty, -1)$ ,  $(-1, 1)$  и  $(1, \infty)$ .

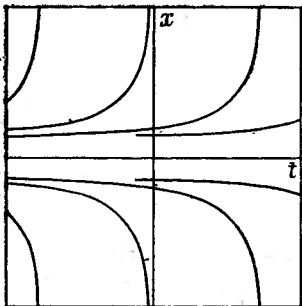


Рис. 1.14. Интегральные кривые для уравнения  $\dot{x} = x^3$ .

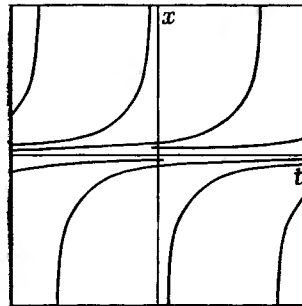


Рис. 1.15. Интегральные кривые для уравнения  $\dot{x} = x^2$ .

область  $D$  разделяется на полосы, в которых интегральные кривые получаются из какой-нибудь одной кривой посредством сдвига вдоль оси  $t$  (см. рис. 1.12—1.15).

Например, уравнение

$$\dot{x} = x \quad (1.12)$$

имеет решения

$$\xi(t) = e^t, \quad I = \mathbb{R}, \quad \xi(I) = (0, \infty); \quad (1.13)$$

$$\xi(t) = 0, \quad I = \mathbb{R}, \quad \xi(I) = \{0\}; \quad (1.14)$$

$$\xi(t) = -e^t, \quad I = \mathbb{R}, \quad \xi(I) = (-\infty, 0). \quad (1.15)$$

Все интегральные кривые в полосе  $D' = \{(t, x) \mid x \in (0, \infty), t \in \mathbb{R}\}$  получаются сдвигами кривой  $x = e^t$ . Аналогично интегральные кривые в  $D' = \{(t, x), x \in (-\infty, 0), t \in \mathbb{R}\}$  получаются сдвигами кривой  $x = -e^t$ .

Для таких семейств интегральных кривых, в которых кривые получаются одна из другой сдвигами, качественное поведение семейства определяется качественным поведением каждого индивидуального решения, а оно в свою очередь определяется функцией  $X(x)$ . Если  $X(x) \neq 0$ , то решения либо возрастают, либо убывают; если же  $X(c) = 0$ , то существует решение  $x(t) \equiv c$ .

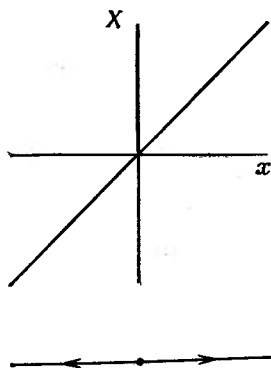


Рис. 1.16.  $\dot{x} = x$ ,  $x = 0$  — неподвижная точка.

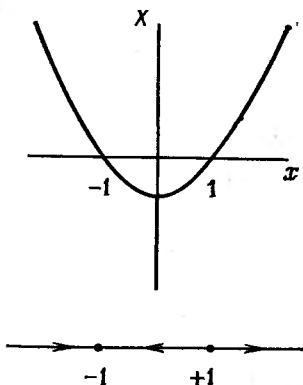


Рис. 1.17.  $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ ,  $x = \pm 1$  — неподвижные точки.

Эти свойства решений удобнее изображать на оси  $x$ , чем на плоскости  $t, x$ . Если  $X(x) \neq 0$  для  $x \in (a, b)$ , то на этом интервале рисуется стрелка, показывающая направление изменения  $x$ . Если  $X(c) = 0$ , то решение  $x(t) \equiv c$  изображается точкой  $x = c$ . Такие решения называются *неподвижными точками*<sup>1)</sup> уравнения, так как  $x = c$  для всех значений  $t$ . Это геометрическое изображение качественного поведения решений уравнения  $\dot{x} = X(x)$  называется *фазовым портретом*<sup>2)</sup>. Несколько фазовых портретов для конкретных функций  $X$  изображено на рис. 1.16—1.19. Соответствующие семейства интегральных кривых изображены на рис. 1.12—1.15.

Если решение  $x$  нестационарное, то оно должно быть либо возрастающим, либо убывающим; таким образом, если число неподвижных точек конечно, то может существовать

<sup>1)</sup> Употребляются и другие эквивалентные термины: «стационарная точка», «особая точка», «положение равновесия». — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Ось  $x$  называется при этом фазовой прямой, а точка  $x(t)$  — фазовой точкой. — *Прим. перев.*

только конечное число «различных» фазовых портретов. Под словом «различные» мы подразумеваем «отличающиеся набором областей, в которых  $x$  возрастает или убывает». Например, рассмотрим случай одной неподвижной точки  $x = c$  (см. рис. 1.20). На каждой из получаемых полупрямых

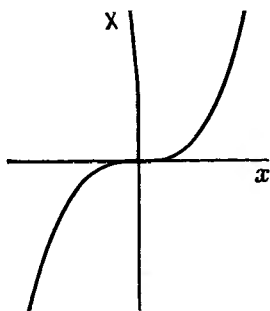


Рис. 1.18.  $\dot{x} = x^3$ ,  $x = 0$  — неподвижная точка.

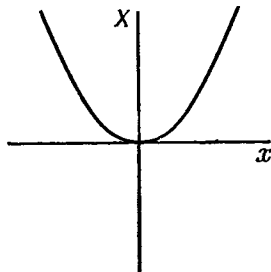


Рис. 1.19.  $\dot{x} = x^2$ ,  $x = 0$  — неподвижная точка.

( $x < c$ ,  $x > c$ ) функция  $X$  может быть либо положительной, либо отрицательной. Следовательно фазовый портрет должен соответствовать одному из четырех случаев, изображенных на рис. 1.20. Это значит, что качественное поведение

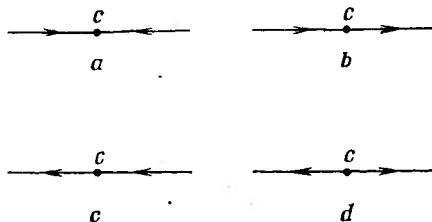


Рис. 1.20. Четыре возможных фазовых портрета для одной изолированной неподвижной точки. Неподвижная точка называется *аттрактором* в случае (a), *шунтом* в случаях (b) и (c) и *репеллером* в случае (d).

любого автономного дифференциального уравнения с одной неподвижной точкой должно соответствовать одному из фазовых портретов на рис. 1.20 при некотором значении  $c$ . Например, фазовые портреты для уравнений  $\dot{x} = x$ ,  $\dot{x} = x^3$ ,  $\dot{x} = x - a$ ,  $\dot{x} = (x - a)^3$ ,  $\dot{x} = \text{sh } x$ ,  $\dot{x} = \text{sh}(x - a)$  соответствуют случаю (d) с  $c = 0$  или  $c = a$ .

Различные дифференциальные уравнения с одной неподвижной точкой, имеющие *один и тот же* фазовый портрет, считаются *качественно эквивалентными*.

Заметим, что отображения, которые использовались при получении рис. 1.20, сохраняют свою силу, если точка  $x = c$  — одна из многих неподвижных точек на фазовом портрете. Другими словами, качественное поведение  $x$  в окрестности любой неподвижной точки должно быть таким же, как в одном из случаев на рис. 1.20. Говорят, что это поведение *определяет характер* (вид, природу) неподвижной точки, и для его описания применяют термины, приведенные в подписи к рис. 1.20.

Сейчас мы сделали важный шаг, так как из сказанного следует вывод, что фазовый портрет любого автономного уравнения полностью определяется видом его неподвижных точек. Введем следующее определение.

**Определение 1.2.1.** Два дифференциальных уравнения вида  $\dot{x} = X(x)$  качественно эквивалентны, если они имеют равное количество неподвижных точек одинакового характера, расположенных в одинаковом порядке на фазовой прямой.

Например, уравнение  $\dot{x} = (x+2)(x+1)$  эквивалентно уравнению  $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ . Оба уравнения имеют по две неподвижные точки, одна из которых аттрактор, а другая репеллер, причем аттрактору соответствует меньшее значение  $x$ . Уравнение  $\dot{x} = -(x+2)(x+1)$  не является качественно эквивалентным уравнению  $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ , потому что аттрактор и репеллер идут в обратном порядке.

**Пример 1.2.1.** Распределить следующие дифференциальные уравнения на группы качественно эквивалентных:

- (1)  $\dot{x} = \operatorname{ch} x$ ;      (2)  $\dot{x} = (x - a)^2$ ;      (3)  $\dot{x} = \sin x$ ;  
 (4)  $\dot{x} = \cos x - 1$ ;    (5)  $\dot{x} = \operatorname{ch} x - 1$ ;    (6)  $\dot{x} = \sin 2x$ ;  
 (7)  $\dot{x} = e^x$ ;      (8)  $\dot{x} = \operatorname{sh}^2(x - b)$ .

**Решение.** Уравнения (1) и (7) не имеют неподвижных точек; в обоих случаях  $X(x) > 0$  для всех  $x$ . Оба они имеют фазовый портрет, показанный на рис. 1.21(a), и, следовательно, качественно эквивалентны.

Уравнение (2) имеет единственную неподвижную точку — шунт при  $x = a$ , причем  $X \geq 0$  для всех  $x$ . Еще одно уравнение с единственной неподвижной точкой — это (5); оно имеет такой же шунт при  $x = 0$ . Уравнение (8) также имеет единственный шунт при  $x = b$ , и опять  $X \geq 0$  для всех  $x$ . Эти уравнения образуют вторую группу качественно эквивалентных уравнений с фазовым портретом, изображенным на рис. 1.21(b).

Остальные уравнения — (3), (4) и (6) — имеют бесконечно много неподвижных точек: для (3) — это точки  $x = n\pi$ , для (4) — это  $x = 2n\pi$  и для (6) — это  $x = n\pi/2$ , при  $n \in \mathbb{Z}$ . Однако для уравнения (4)  $X(x) \leq 0$  для всех  $x$ , так что все неподвижные точки — шунты, а уравнения (3) и (6) имеют чередующиеся аттракторы и репеллеры (см. рис. 1.21 (с) и

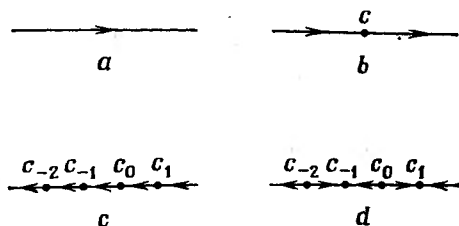


Рис. 1.21. Фазовые портреты для качественно эквивалентных групп уравнений в примере 1.2.1. В случае (b)  $c = a$  для (2),  $c = 0$  для (5) и  $c = b$  для (8). В случае (c)  $c_n = 2n\pi$  для (4), а в случае (d)  $c_n = n\pi$  для (3) и  $c_n = n\pi/2$  для (6).

(d)). Так что из этих уравнений качественно эквивалентны только (3) и (6).

Пример 1.2.1 обращает наше внимание на тот факт, что «качественная эквивалентность» является отношением эквивалентности на множестве всех автономных дифференциальных уравнений. Следовательно, мы можем разбить это множество на непересекающиеся классы качественно эквивалентных уравнений. Однако, если мы требуем только, чтобы выполнялось условие единственности решений, проходящих через определенную точку, таких классов будет бесконечно много. Это так потому, что может быть сколь угодно много неподвижных точек.

Если мы наложим на  $X$  некоторые дополнительные ограничения, то может оказаться, что существует лишь конечное число классов. Например, предположим, что функция  $X$  линейная, т. е.  $X(x) = ax$  с действительным  $a$ . Для любого  $a \neq 0$  имеется только одна неподвижная точка при  $x = 0$ . Если  $a > 0$ , то эта точка — репеллер, а если  $a < 0$  — аттрактор. Для особого случая  $a = 0$  все точки оси  $x$  являются неподвижными. Таким образом, множество уравнений  $\{\dot{x} = X(x) \mid X(x) = ax\}$  может быть разбито на три класса в соответствии с качественным поведением решений.

Для нелинейных функций  $X$  каждая неподвижная точка должна принадлежать одному из возможных типов, указанных на рис. 1.20. Таким образом, хотя может существовать бесконечно много различных фазовых портретов, они содержат не более четырех различных видов неподвижных точек.

Это ограничение связано тем, что уравнение  $\dot{x} = X(x)$  содержит только одну действительную переменную  $x$ . Поэтому возникает одномерный фазовый портрет, на котором  $x$  в каждой нестационарной точке может только возрастать или убывать.

### 1.2.2. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ И ДИНАМИКА

В различных приложениях дифференциальное уравнение  $\dot{x} = X(x)$  моделирует изменение какого-нибудь параметра  $x$  некоторой физической системы в зависимости от времени. Мы говорим, что *состояние системы* определяется значением величины  $x$ . Например, уравнение

$$\dot{p} = ap; \quad p, a > 0, \quad (1.16)$$

моделирует рост популяции  $p$  некоторого изолированного вида. В рамках этой модели состояние вида в момент времени  $t$  задается количеством индивидуумов  $p(t)$ , существующих в момент  $t$ . Другой пример — это закон Ньютона для остывания тел. Температура  $T$  тела, остывающего в среде с температурой  $\tau$ , подчиняется уравнению

$$\dot{T} = -a(T - \tau), \quad a > 0. \quad (1.17)$$

Здесь считается, что состояние тела определяется его температурой.

Мы можем изобразить состояние  $x(t_0)$  нашей модели в любой момент времени  $t_0$  точкой на фазовой прямой уравнения  $\dot{x} = X(x)$ . С увеличением времени состояние системы изменяется, и изображающая это состояние точка движется по фазовой прямой со скоростью  $\dot{x} = X(x)$ . Таким образом, динамика физической системы представляется движением фазовой точки по фазовой прямой.

Фазовый портрет фиксирует только *направление* скорости фазовой точки и, следовательно, отражает лишь качественную картину динамики. Такая качественная информация может оказаться полезной при построении моделей. Например, рассмотрим (1.16) — модель роста изолированной популяции. Заметим, что  $\dot{p} > 0$  для *всех*  $p > 0$ , и фазовый портрет на рис. 1.22 показывает, что популяция растет неограниченно. Это свойство выглядит неправдоподобно: та среда, в которой живет этот вид, имеет свои ограничения и не может обеспечить ресурсами неограниченно растущую популяцию.

Предположим, что окружающая среда может обеспечивать существование популяции  $p_e$ . Как надо изменить уравнение (1.16) с учетом этого обстоятельства? Очевидно, неограниченный рост  $p$  должен быть чем-то остановлен. Одна из возможностей — ввести аттрактор  $p_e$ , как показано на

рис. 1.22(b). Это значит, что популяции, большие чем  $p_e$ , уменьшаются, меньшие чем  $p_e$ , растут, а равновесие достигается при  $p = p_e$ . Чтобы могли существовать две неподвижные точки при  $p = 0$  и  $p = p_e$ , функция  $X(p)$  в (1.16) должна быть нелинейной.

Уравнение

$$\dot{p} = p(a - bp) \quad (1.18)$$

хорошо тем, что при  $b = 0$  оно сводится к (1.16); в противном случае оно имеет неподвижную точку  $p_e = a/b$ .

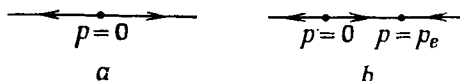


Рис. 1.22. Фазовые портреты для уравнений: (a)  $\dot{p} = ap$ ; (b)  $\dot{p} = p(a - bp)$ ,  $p_e = a/b$ . В обоих случаях нас интересует только поведение неотрицательных популяций ( $p \geq 0$ ). Уравнение (b) называется *логистическим законом* роста популяции. [Слагаемое  $-bp$  в правой части (b) называется также фактором тесноты. — *Перев.*]

Конечно, часто в моделях физических систем состояние системы определяется более чем одной переменной. Если мы хотим применять качественные идеи к исследованию и таких систем, то мы должны изучить автономные уравнения с более чем одной переменной.

### 1.3. АВТОНОМНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad (1.19)$$

где  $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$  — вектор в  $\mathbb{R}^2$ . Такое уравнение эквивалентно системе двух связанных уравнений:

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2), \quad (1.20)$$

причем  $\mathbf{X}(\mathbf{x}) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2))$ , так как  $\dot{\mathbf{x}} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2)$ . Решение уравнения (1.19) является парой функций  $(x_1(t), x_2(t))$ ,  $t \in I \subseteq \mathbb{R}$ , удовлетворяющих системе уравнений (1.20).

Вообще говоря, решение  $x_1(t), x_2(t)$  содержит две произвольные постоянные, так что возникает двухпараметрическое семейство решений.

Качественное поведение этого семейства определяется тем, как ведут себя  $x_1$  и  $x_2$  с увеличением времени. Вместо того чтобы просто указывать на фазовой прямой, увеличивается или уменьшается величина  $x$ , мы должны показать,



как изменяется положение точки  $x$  на фазовой плоскости. Поэтому фазовый портрет будет двумерным, а качественное поведение определяется семейством кривых с указанием направления движения по этим кривым при возрастании  $t$ . Такие кривые называются *траекториями* или *орбитами*.

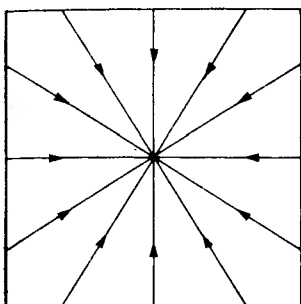


Рис. 1.23.  $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_2$ .

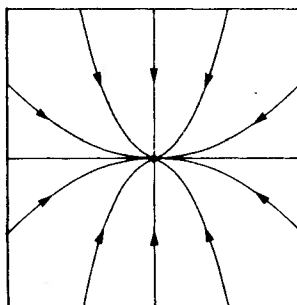


Рис. 1.24.  $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -2x_2$ .

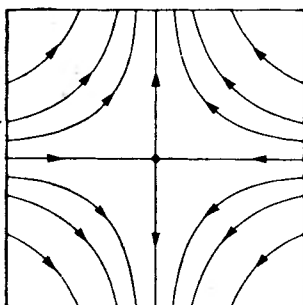


Рис. 1.25.  $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = x_2$ .

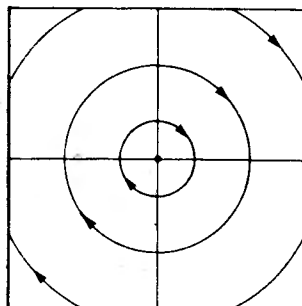


Рис. 1.26.  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = -x_1$ .

Качественное исследование уравнений на плоскости мы начнем (как и в п. 1.2) с изучения неподвижных точек уравнения (1.19). Неподвижным точкам соответствуют решения вида  $x(t) \equiv c = (c_1, c_2)$ , и они возникают в случае, когда

$$X_1(c_1, c_2) = 0, \quad X_2(c_1, c_2) = 0. \quad (1.21)$$

Соответствующая траектория — это точка  $(c_1, c_2)$  на фазовой плоскости. В п. 1.2 «характер» этой особой точки определял фазовый портрет.

Рассмотрим некоторые примеры изолированных неподвижных точек на плоскости с целью определения их характера. На рис. 1.23—1.32 показаны некоторые из возникающих возможностей.

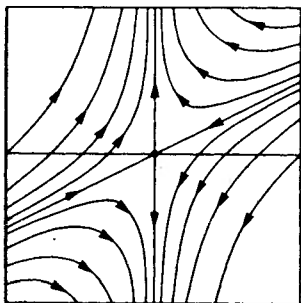


Рис. 1.27.  $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = -x_1 + x_2$ .

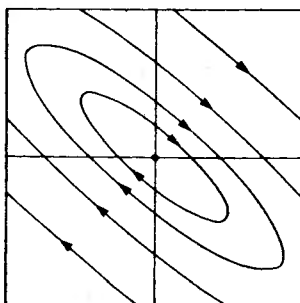


Рис. 1.28.  $\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2, \dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2$ .

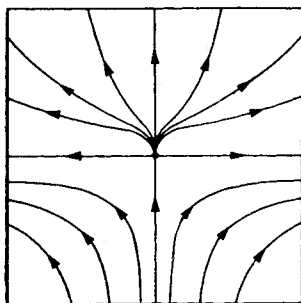


Рис. 1.29.  $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = x_2^2$ .

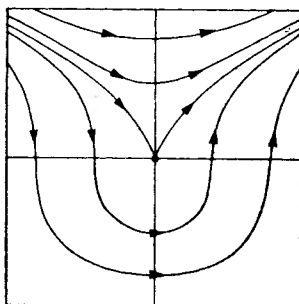


Рис. 1.30.  $\dot{x}_1 = x_2^2, \dot{x}_2 = x_1$ .

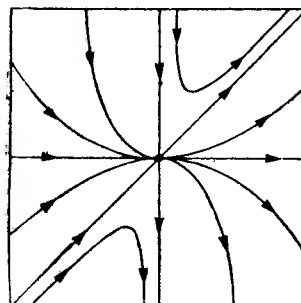


Рис. 1.31.  $\dot{x}_1 = x_1^2, \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2)$ .

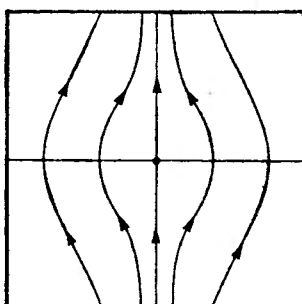


Рис. 1.32.  $\dot{x}_1 = -x_1x_2, \dot{x}_2 = x_1^2 + x_2^2$ .

Рассмотрим рис. 1.23; система

$$\dot{x}_1 = -x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \quad (1.22)$$

имеет неподвижную точку  $(0, 0)$  и решения

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{-t}, \quad (1.23)$$

где  $C_1, C_2$  — некоторые действительные постоянные. Любое решение из семейства (1.23) при  $K = C_2/C_1$  удовлетворяет для всех  $t$  уравнению

$$x_2(t) = Kx_1(t). \quad (1.24)$$

Таким образом, каждая траектория семейства (1.23) лежит на некоторой прямой, проходящей через начало координат<sup>1)</sup>. Из уравнений (1.23) видно, что при любых ненулевых  $C_1$  и  $C_2$  значения  $|x_1(t)|$  и  $|x_2(t)|$  убывают при возрастании  $t$  и стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . На рисунке это показано с помощью стрелок на траекториях; если  $(x_1(t), x_2(t))$  представляет собой положение фазовой точки  $x$  в момент  $t$ , то с ростом времени  $t$  она движется по направлению к началу координат. Чтобы изобразить это, достаточно нарисовать направленный луч. На рис. 1.24

$$x_2 = Kx_1^2;$$

это изменяет форму траекторий. Однако они по-прежнему направлены к неподвижной точке в начале координат.

На рис. 1.25 показана еще одна возможность. Здесь при возрастании  $t$  величина  $|x_1(t)|$  убывает, а  $|x_2(t)|$  возрастает. Действительно, система  $\dot{x}_1 = -x_1, \dot{x}_2 = x_2$  имеет решения

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^t, \quad (1.25)$$

где  $C_1, C_2$  — действительные числа. Тогда

$$x_2 = Kx_1^{-1} \quad (1.26)$$

с  $K = C_1 C_2$ . В этом случае только две траектории стремятся к неподвижной точке  $(0, 0)$ , а все остальные от нее рано или поздно уходят, причем  $|x_2| \rightarrow \infty$  при  $|x_1| \rightarrow 0$ , и наоборот. Качественное поведение здесь сильно отличается от того, что представлено на рис. 1.23 и 1.24.

На рис. 1.26 траектории замкнуты, поэтому одни и те же точки плоскости  $t, x$  с возрастанием времени проходятся снова и снова. В п. 1.4 мы покажем, что система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 \quad (1.27)$$

<sup>1)</sup> Траектории с  $C_1 = 0$  лежат на прямой  $x_1 = 0$ . — *Прим. перев.*

имеет решения

$$x_1(t) = C_1 \cos(-t + C_2), \quad x_2(t) = C_1 \sin(-t + C_2), \quad (1.28)$$

откуда следует, что

$$x_1^2 + x_2^2 = C_1^2, \quad (1.29)$$

так что траектории — это семейство концентрических окружностей с центром в неподвижной точке  $(0, 0)$ . Это, очевидно, еще один новый вид качественного поведения. Замкнутость траекторий является отражением того факта, что  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  — периодические функции с одним и тем же периодом.

Эти примеры показывают, что качественно различные решения приводят к траекториям с различными геометрическими свойствами. Проблема выделения различных видов неподвижных точек сводится к проблеме выделения различных геометрических конфигураций, составленных траекториями. Как и в п. 1.2, мы должны принять решение относительно того, что следует подразумевать под словом «различные». При этом мы можем по своему выбору применять разные критерии.

Например, на рис. 1.23 и 1.24 все траектории направлены к началу координат. Разумно было бы считать это определяющим качественным свойством, а различия форм траекторий полагать несущественным. Тогда мы могли бы утверждать, что характер неподвижной точки в том и в другом случае одинаков. Конечно, ее характер радикально изменился бы, если бы мы заменили  $\dot{x}_1$  на  $-\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  на  $-\dot{x}_2$ . В таком случае все траектории были бы направлены от начала координат (см. упр. 22), и качественное поведение решений было бы совсем другим.

Сопоставим рис. 1.25 и 1.27. Имеют ли неподвижные точки на них одинаковый характер? В обоих случаях  $|x_1(t)|$  стремится к нулю, когда  $|x_2(t)|$  стремится к бесконечности и только две отдельные траектории приближаются к неподвижной точке. Да, можно считать, что неподвижные точки одинаковы. Изменится ли характер неподвижной точки в этих примерах, если обратить ориентацию траекторий как в предыдущем примере? Изменение ориентации означало бы, что оси  $x_1$  и  $x_2$  поменялись местами. Однако свойства, выделяющие рис. 1.25 и 1.27 из остальных, при этом сохраняются, и можно заключить, что характер неподвижной точки не меняется. Аналогично можно сказать, что рис. 1.26, 1.28 и те, что получаются из них при изменении ориентации траекторий, все имеют в начале координат неподвижную точку одного и того же вида.

Интуитивный подход, примененный нами при рассмотрении этих примеров, позволил выделить семь различных типов

неподвижных точек на рис. 1.23—1.32. На самом деле существует бесконечно много различных фазовых портретов на

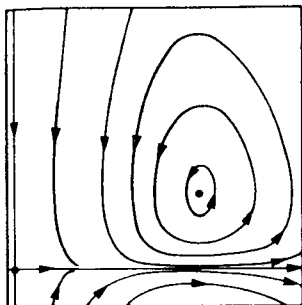


Рис. 1.33. Фазовый портрет для системы  $\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2)$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2(c - dx_1)$ ;  $a, b, c, d > 0$ . неподвижные точки  $-(0, 0)$  и  $(c/d, a/b)$ .

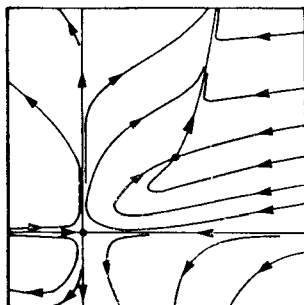


Рис. 1.34. Фазовый портрет для системы  $\dot{x}_1 = -x_1[1 - 3x_2^{2/3}(1 - x_1)/(1 + x_1)]$ ,  $\dot{x}_2 = x_2 - 3x_1x_2^{2/3} \times (1 + x_1)$ ;  $x_1, x_2 \geq 0$ . неподвижные точки  $-(0, 0)$  и  $(\frac{1}{2}, 1)$ .

плоскости, имеющих только одну неподвижную точку. Некоторые примеры фазовых портретов с более чем одной непо-

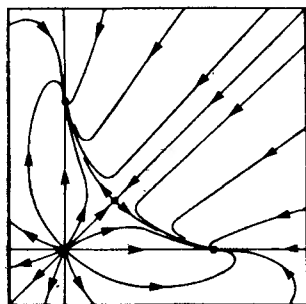


Рис. 1.35. Фазовый портрет для системы  $\dot{x}_1 = (2 - x_1 - 2x_2)x_1$ ,  $\dot{x}_2 = (2 - 2x_1 - x_2)x_2$ . неподвижные точки  $-(0, 0)$ ;  $(2, 0)$ ;  $(0, 2)$ ;  $(2/3, 2/3)$ .

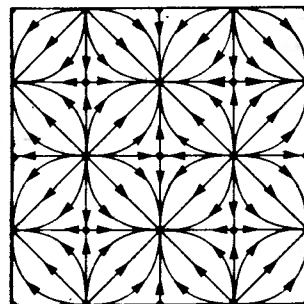


Рис. 1.36. Фазовый портрет для системы  $\dot{x}_1 = \sin x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -\sin x_2$ . неподвижные точки  $-(n\pi, m\pi)$ ;  $n, m \in \mathbb{Z}$ .

движной точкой показаны на рис. 1.33—1.36. Как видно, довольно легко можно получить достаточно сложные семейства траекторий.

#### 1.4. ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ НА ПЛОСКОСТИ

Методы, применяющиеся для исследований траекторий систем вида

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2); \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in S \subseteq \mathbb{R}^2,$$

являются прямым обобщением идей, которые использовались в п. 1.1.

##### 1.4.1. ПОЛУЧЕНИЕ ЯВНЫХ ФОРМУЛ

В п. 1.3 нам удалось построить траектории, изображенные на рис. 1.23—1.25, решая уравнения системы поодиночке. Это оказалось возможным потому, что  $\dot{x}_1$  зависело только от  $x_1$ , а  $\dot{x}_2$  — только от  $x_2$ . Такая система, в которой каждое уравнение содержит только одну переменную, называется *распадающейся*. Как правило, системы этим свойством не обладают, и, чтобы свести систему к такому виду, приходится находить новые переменные, в которых система распадается.

**Пример 1.4.1.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad (1.30)$$

фазовый портрет которой изображен на рис. 1.26. Перейти к полярным координатам на плоскости по формулам

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta, \quad (1.31)$$

соответственно переписать (1.30) и затем получить  $x_1$  и  $x_2$  как функции  $t$ .

**Решение.** Заметим, что

$$r^2 = x_1^2 + x_2^2, \quad \operatorname{tg} \theta = x_2/x_1, \quad x_1 \neq 0, \quad (1.32)$$

и продифференцируем эти выражения по  $t$ . Получим

$$2r\dot{r} = 2x_1\dot{x}_1 + 2x_2\dot{x}_2, \quad \sec^2 \theta \dot{\theta} = x_1^{-2} (\dot{x}_2 x_1 - \dot{x}_1 x_2). \quad (1.33)$$

Подставляя значения  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  из (1.30), мы видим, что

$$\dot{r} = 0 \quad \text{и} \quad \dot{\theta} = -1. \quad (1.34)$$

Эти уравнения можно решать по отдельности и получить  $r(t) \equiv C_1$  и  $\theta(t) = -t + C_2$ , где  $C_1$  и  $C_2$  — некоторые действительные постоянные. Окончательно, согласно (1.31), мы имеем

$$x_1(t) = C_1 \cos(-t + C_2), \quad x_2(t) = C_1 \sin(-t + C_2). \quad (1.35)$$

Иногда решения удается найти и в случае, когда только одна из переменных отделяется в одном из уравнений. Такие системы называются *частично распадающимися*.

**Пример 1.4.2.** Найти решения системы

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2 \quad (1.36)$$

и изобразить ее фазовый портрет.

**Решение.** Систему (1.36) можно решить, не вводя новых переменных. Первое уравнение имеет решения

$$x_1(t) = C_1 e^t, \quad (1.37)$$

где  $C_1$  — действительное число. Подстановка  $x_1$  во второе уравнение дает

$$\dot{x}_2 = x_2 + C_1 e^t, \quad (1.38)$$

а решения (1.38) имеют вид

$$x_2(t) = e^t(C_1 t + C_2) \quad (1.39)$$

(см. упр. 1.1).

Чтобы нарисовать фазовый портрет, рассмотрим формулы (1.37) и (1.39) и заметим следующее:

(а) Для  $C_1 = K > 0$  функция  $x_1(t)$  строго возрастает и принимает все положительные значения при возрастании  $t$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

(б) Для  $C_1 = K > 0$  функция  $x_2(t) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow -\infty$ ;  $x_2(t) < 0$  для  $C_1 t + C_2 < 0$ ;  $x_2(t) = 0$  при  $C_1 t + C_2 = 0$  и  $x_2(t) \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$ .

(с) Для  $C_1 = 0$  мы получаем решение

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = C_2 e^t. \quad (1.40)$$

(д) Если  $C_1 = -K < 0$ , то соответствующая траектория симметрична одной из траекторий, соответствующих случаю (а), (б), относительно начала координат.

Заметим, что изменение знака  $x_2$ , приводящее к результату (б), можно непосредственно увидеть из второй формулы (1.36) — из нее следует, что  $\dot{x}_2 = 0$ , когда  $x_2 = -x_1$ . Кроме того, симметрия, отмеченная в (д), также усматривается из вида системы (1.36), так как она инвариантна относительно преобразования  $x_1 \rightarrow -x_1$ ,  $x_2 \rightarrow -x_2$  (см. упр. 26). Наконец, мы даем эскиз фазового портрета на рис. 1.37.

В п. 1.3 мы иногда исключаем  $t$  из уравнений для  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  и получаем уравнение траекторий в непараметрической форме. Уравнения траекторий часто можно найти, решая уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{\dot{x}_2}{\dot{x}_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)}. \quad (1.41)$$

**Пример 1.4.3.** Рассмотрим систему

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1. \quad (1.42)$$

Определить  $dx_2/dx_1$ , чтобы найти траектории, и нарисовать затем фазовый портрет для системы.

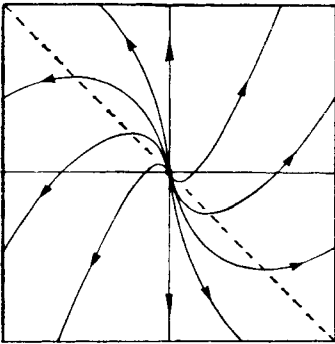
**Решение.** Для системы (1.42)

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1}{x_2}, \quad x_2 \neq 0, \quad (1.43)$$

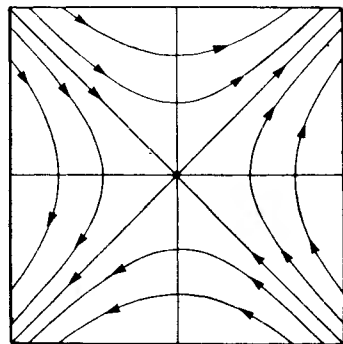
откуда

$$x_1^2 - x_2^2 = C, \quad (1.44)$$

где  $C$  действительное. Это семейство гипербол легко изобразить и установить их ориентацию в соответствии с (1.42). За-



**Рис. 1.37.** Фазовый портрет для системы  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$ . Пунктиром показана линия  $x_2 = -x_1$ , на которой  $\dot{x}_2 = 0$ . Начало координат — неподвижная точка.



**Рис. 1.38.** Фазовый портрет для системы  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = x_1$ . Начало координат — неподвижная точка. траектории являются гиперболоми;

метим, что  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$  при  $x_1, x_2 > 0$  возрастают с ростом  $t$ . Это позволяет установить направление всех траекторий при  $x_2 > -x_1$ . Аналогично, если  $x_1, x_2 < 0$ , то и  $\dot{x}_1, \dot{x}_2 < 0$ , что позволяет получить ориентацию в полуплоскости  $x_2 < -x_1$ . Фазовый портрет изображен на рис. 1.38.

#### 1.4.2. ИЗОКЛИНЫ

Как и в п. 1.1, иногда необходимо получить фазовый портрет, когда невозможно записать обозримые явные формулы для решений. Это можно сделать, обобщив метод изоклин на случай плоскости. Во всех точках плоскости, где задана векторная функция  $X: S \rightarrow \mathbb{R}^2$ , она задает вектор  $x$  (векторное



поле). Для качественного исследования обычно достаточно знать направление  $X(x)$ . Это направление постоянно на изоклинах уравнения (1.41). Особенно интересны точки, где  $dx_2/dx_1$  обращается в нуль или в бесконечность, т. е. изоклины, где  $\dot{x}_2 = 0$  или  $\dot{x}_1 = 0$ .

Если для любой точки  $x_0 \in S$  и любого  $t_0 \in \mathbf{R}$  существует единственное решение  $x(t)$  уравнения (1.19) такое, что

$$x(t_0) = x_0, \quad (1.45)$$

то через каждую точку  $x_0 \in S$  проходит в точности одна траектория. Все примеры, которые мы до сих пор рассматривали в п. 1.3 и 1.4, были именно такими. Если же возникает неединственность, то обычно она бывает сосредоточена на некоторых линиях в  $S$ , и только в их окрестности поведение траекторий не сразу можно определить по виду функции.

**Пример 1.4.4.** Найти решения системы

$$\dot{x}_1 = 3x_1^{2/3}, \quad \dot{x}_2 = 1 \quad (1.46)$$

и показать, что через любую точку  $(0, c)$  ( $c$  — произвольное действительное число) проходит более чем одно решение. Что означает этот результат для фазового портрета (1.46)?

**Решение.** Система (1.46) распадается. Находим явный вид решений:

$$x_1(t) = (t + C_1)^3, \quad x_2(t) = t + C_2. \quad (1.47)$$

Кроме того, функция  $x_1(t) \equiv 0$  является решением первого уравнения, так что система имеет еще решения вида

$$x_1(t) \equiv 0, \quad x_2(t) = t + C_2. \quad (1.48)$$

Если в (1.47) мы положим  $C_2 = 0$ , а  $C_1 = -c$ , то  $(x_1(c), x_2(c)) = (0, c)$ . Если же в (1.48)  $C_2 = 0$ , то снова  $(x_1(c), x_2(c)) = (0, c)$ . Так как решения (1.47) и (1.48) различны, то точка  $(0, c)$  лежит более чем на одном решении.

Фазовый портрет получаем, изобразив траектории (1.47) и (1.48) на рис. 1.39.

Заметим, что все траектории, заданные уравнениями (1.47), касаются оси  $x_2$ , которая сама является траекторией, соответствующей уравнениям (1.48). Направление на ней указано стрелками. Теперь уже неясно, что именно мы должны подразумевать под отдельной траекторией, так как

$$x_1(t) = \begin{cases} (t-a)^3, & t < a, \\ 0, & a \leq t \leq b, \\ (t-b)^3, & t > b, \end{cases} \quad x_2 = t + C, \quad (1.49)$$

также удовлетворяет системе (1.46).

В оставшейся части книги мы будем заниматься только системами, обладающими свойством единственности. В п. 1.1.1 мы указали полезное достаточное условие для выполнения теоремы существования и единственности — непрерывную дифференцируемость функции  $X(x)$ .

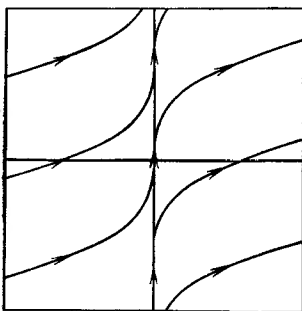


Рис. 1.39. Фазовый портрет для  $\dot{x}_1 = 3x_1^{2/3}$ ,  $\dot{x}_2 = 1$ . У этой системы нет неподвижных точек и траектории касаются оси  $x_2$ .

**Пример 1.4.5.** Нарисовать фазовый портрет системы

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2), \quad (1.50)$$

не находя явных формул для траекторий.

**Решение.** Рассмотрим систему (1.50) и заметим следующие ее особенности:

(а) имеется единственная неподвижная точка — начало координат;

(б) векторное поле системы (1.50),  $X(x) = (x_1^2, x_2(2x_1 - x_2))$ , удовлетворяет условию  $X(x) = X(-x)$ . Это значит, что ее траектории инвариантны относительно преобразования  $x_1 \rightarrow -x_1$ ,  $x_2 \rightarrow -x_2$  (см. упр. 26). Поэтому мы сосредоточим свое внимание на полуплоскости  $x_1 \geq 0$ ;

(с) изоклина  $\dot{x}_1 = 0$  совпадает с осью  $x_2$ , и для  $x_2 \neq 0$  на ней выполняется соотношение  $\dot{x}_2 = -x_2^2 < 0$ . Поэтому существует траектория, совпадающая с положительной полуосью  $x_2$  и направленная от начала координат.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2(2x_1 - x_2)}{x_1^2}, \quad x_1 \neq 0. \quad (1.51)$$

Уравнение изоклины, соответствующей наклону  $C$ , имеет вид

$$x_2(2x_1 - x_2) = x_1^2 - (x_1 - x_2)^2 = Cx_1^2$$

или

$$x_2 = x_1(1 \pm (1 - C)^{1/2}), \quad C \leq 1. \quad (1.52)$$

Это уравнение позволяет нам найти наклон на некоторых выбранных изоклинах. Например,

- (а)  $C = 0$  на прямых  $x_2 = 0$  и  $x_2 = 2x_1$ ;
- (б)  $C = 1$  на  $x_2 = x_1$ ;
- (в)  $C = \frac{1}{2}$  на  $x_2 = (1 \pm 1/\sqrt{2})x_1$ ;
- (г)  $C = -3$  на  $x_2 = -x_1$  и  $x_2 = 3x_1$ ;
- (д)  $C = -2$  на  $x_2 = (1 \pm \sqrt{3})x_1$ .

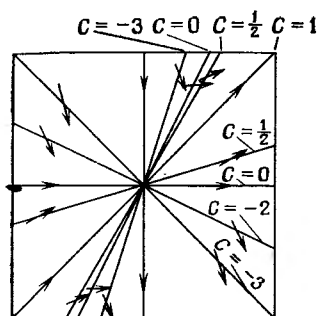


Рис. 1.40. Информация о системе  $\dot{x}_1 = x_1^2$ ,  $\dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2)$ . Заметим, что  $C = 1$  на  $x_2 = x_1$ ; отсюда следует, что на этой прямой лежат траектории, как показано на рисунке.

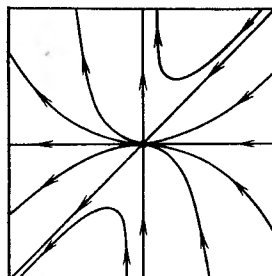


Рис. 1.41. Эскиз фазового портрета для системы (1.50). Знак кривизны траекторий между прямыми  $x_2 = 0$  и  $x_2 = x_1$  следует из того, что при  $x_2 > 0$  значение  $C$  возрастает с ростом  $x_1$ .

Ориентация траекторий определяется тем, что  $\dot{x}_1 > 0$  при  $x_1 \neq 0$ . Полученная информация позволяет изобразить изоклины на рис. 1.40 и нарисовать фазовый портрет (рис. 1.41).

## 1.5. ПОТОКИ И ЭВОЛЮЦИЯ

Уравнению

$$\dot{x} = X(x), \quad x \in S \subseteq \mathbb{R}, \quad (1.53)$$

можно дать динамическую интерпретацию: считать  $\dot{x}$  скоростью точки на фазовой прямой (см. п. 1.2.2). Это позволяет взглянуть на дифференциальное уравнение и его решения с новой точки зрения. Можно считать, что уравнение (1.53) задает поток фазовых точек на фазовой прямой. Функция  $X$  задает скорость этого потока при каждом значении  $x \in S$ .

Решение  $x(t)$  уравнения (1.53), удовлетворяющее условию  $x(t_0) = x_0$ , определяет эволюцию фазовой точки, которая в момент  $t = t_0$  занимала положение  $x_0$ , т. е. ее прошлые

(при  $t < t_0$ ) и будущие (при  $t > t_0$ ) положения. Эту идею можно формализовать, введя функцию  $\varphi_t: S \rightarrow S$ . Такая функция называется *фазовым потоком* или *оператором эволюции*.

Термин «оператор эволюции» обычно употребляется в приложениях, где  $\varphi_t$  описывает изменение состояния некоторой реальной физической системы во времени. Термин «поток» чаще употребляется в случае, когда изучается динамика в целом, а не эволюция данной конкретной точки.

Функция  $\varphi_t$  переводит точку  $x_0 \in S$  в точку  $\varphi_t(x_0)$ , полученную из  $x_0$  за время  $t$  продвижением по интегральной кривой уравнения (1.53), проходящей через  $x_0$ . Ясно, что для того, чтобы функция  $\varphi_t$  была определена, необходимо, чтобы

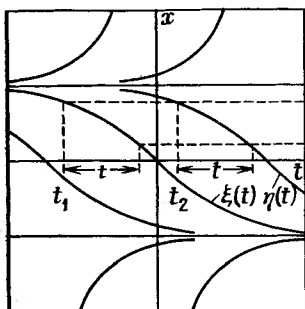


Рис. 1.42. Интегральные кривые для  $\dot{x} = \frac{1}{2}(x^2 - 1)$ . Заметим, что решения  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  удовлетворяют условиям  $\xi(t_1) = \eta(t_2) = x_0$ ,  $\xi(t_1 + t_1) = \eta(t_2 + t_2) = \varphi_t(x_0)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ .

для уравнения была справедлива теорема существования и единственности. Точка  $\varphi_t(x_0)$  для любого решения  $x(t)$  уравнения (1.53), обращающегося в  $x_0$  для  $t = t_0$ , совпадает с  $x(t + t_0)$ . Это свойство проиллюстрировано на рис. 1.42; оно связано с тем, что решения автономного уравнения можно получить одно из другого сдвигом вдоль оси  $t$ . Таким образом, решение уравнения  $\dot{x} = X(x)$  такое, что  $x(t_0) = x_0$ , задается формулой

$$x(t) = \varphi_{t-t_0}(x_0). \quad (1.54)$$

Решение уравнения  $\dot{x} = ax$  представляет собой простейший пример формулы (1.54). В этом случае

$$x(t) = \exp(a(t - t_0))x_0, \quad (1.55)$$

так что действие оператора  $\varphi_{t-t_0}$  заключается просто в умножении на  $\exp(a(t - t_0))$ . Однако такой простой вид оператор эволюции имеет только для линейных уравнений. Действительно, знание оператора  $\varphi_t$  эквивалентно умению решать уравнение (1.53), и поэтому определение оператора встречает такие же трудности.

Оператор  $\varphi_t$  обладает следующими простыми свойствами, вытекающими непосредственно из определения. Из свойства

единственности мы получаем, что

$$\varphi_{s+t}(x) = \varphi_s(\varphi_t(x)); \quad s, t \in \mathbb{R}, \quad (1.56)$$

если только и левая, и правая части равенства определены. В частности,

$$\varphi_t(\varphi_{-t}(x)) = \varphi_{-t}(\varphi_t(x)) = \varphi_0(x) = x, \quad (1.57)$$

т. е.

$$\varphi_t^{-1} = \varphi_{-t}. \quad (1.58)$$

Для потока, заданного формулой (1.55), соотношения (1.56) и (1.58) немедленно следуют из свойств экспоненты. Однако бывает, что эти соотношения не столь очевидны.

**Пример 1.5.1.** Найти оператор эволюции  $\varphi_t$  для уравнения

$$\dot{x} = x - x^2. \quad (1.59)$$

Проверить для этого примера свойство (1.56).

**Решение.** Решения уравнения (1.59) задаются формулой

$$\int \frac{dx}{x - x^2} = \ln \left| \frac{x}{x-1} \right| = t + C \quad (1.60)$$

для  $x \neq 0$ ,  $x \neq 1$ . Тогда

$$\frac{x}{x-1} = Ke^t,$$

где  $K = \pm e^C$ , и, таким образом,

$$x(t) = Ke^t / (Ke^t - 1). \quad (1.61)$$

Если мы положим  $x = x_0$  при  $t = 0$ , то из (1.61) получим, что  $K = x_0 / (x_0 - 1)$  и

$$x(t) = \varphi_t(x_0) = x_0 e^t / (x_0 e^t - x_0 + 1) \quad (1.62)$$

для всех действительных  $t$  и  $x_0 \neq 0$ ,  $x_0 \neq 1$ . В формуле (1.60) точки  $x = 0$  и  $x = 1$  исключаются, так как для интервалов, включающих эти точки, интеграл не определен. Однако из (1.59) видно, что эти точки являются неподвижными точками уравнения, т. е. что

$$\varphi_t(0) = 0, \quad \varphi_t(1) = 1 \quad (1.63)$$

для всех  $t \in \mathbb{R}$ . Поток  $\varphi_t$  записанный в виде (1.62), также обладает этими свойствами, так что мы можем положить

$$\varphi_t(x) = xe^t / (xe^t - x + 1) \quad (1.64)$$

для всех действительных  $x$  и  $t$ .

Для проверки основного свойства (1.56) оператора эволюции заметим, что

$$\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_s(x_1), \quad (1.65)$$

где  $x_1 = \varphi_t(x)$ . Таким образом,

$$\varphi_s(\varphi_t(x)) = x_1 e^s / (x_1 e^s - x_1 + 1), \quad (1.66)$$

причем

$$x_1 = x e^t / (x e^t - x + 1). \quad (1.67)$$

Подстановка (1.67) в (1.66) дает

$$\varphi_s(\varphi_t(x)) = x e^{s+t} / (x e^{s+t} - x + 1) = \varphi_{s+t}(x). \quad (1.68)$$

В п. 1.1 мы видели, что решения уравнения  $\dot{x} = X(x)$  могут быть не определены для всех действительных  $t$ . Следующий пример показывает, как это сказывается на области определения  $\varphi_t(x)$ .

**Пример 1.5.2.** Найти оператор эволюции  $\varphi_t$  для уравнения

$$\dot{x} = x^2 \quad (1.69)$$

и для всех действительных  $x$  указать интервал изменения  $t$ , на котором он определен.

**Решение.** Решения (1.69) даются формулой

$$\int x^{-2} dx = -x^{-1} = t + C, \quad (1.70)$$

где  $C$  — постоянная; это равенство выполняется на любом интервале, не содержащем  $x = 0$ . Если  $x = x_0$  при  $t = 0$ , то  $C = -x_0^{-1}$ , и мы получаем

$$x(t) = x_0 / (1 - x_0 t), \quad t \neq x_0^{-1}. \quad (1.71)$$

В терминах оператора эволюции равенство (1.71) означает, что

$$\varphi_t(x) = x / (1 - xt), \quad (1.72)$$

для ненулевых значений  $x$ . Как и в примере 1.5.1, оператор  $\varphi_t(x)$ , заданный формулой (1.72), действует также при  $x = 0$ , т. е.

$$\varphi_t(0) = 0 \text{ для всех действительных } t. \quad (1.73)$$

Справедливость выражения (1.73) видна из уравнения (1.69), для которого  $x = 0$  — неподвижная точка. Таким образом, формула (1.72) справедлива для всех действительных  $x$ .

Однако оператор  $\varphi_t(x)$  определен не для всех  $t$ ; рассмотрим, например, (1.72) для  $t = x^{-1}$ . На самом деле интервал, где определен оператор  $\varphi_t(x)$ , следующим образом определяется по значению  $x$ :

(а)  $x > 0$ : вся эволюция точки  $x$  определяется формулой (1.72) для  $-\infty < t < x^{-1}$ ;

(б)  $x = 0$ : из (1.73) видно, что  $\varphi_t(0)$  существует для  $-\infty < t < \infty$ ;

(с)  $x < 0$ : снова эволюция описывается формулой (1.72), но для  $x^{-1} < t < \infty$ .

В случае (а)  $\varphi_t(x)$  возрастает от сколь угодно малых значений при больших отрицательных  $t$ ; принимает значение  $x$  при  $t = 0$  и стремится к бесконечности при  $t \rightarrow x^{-1}$ . Аналогично в случае (с)  $\varphi_t(x)$  принимает сколь угодно большие отрицательные значения при  $t$ , близких к  $x^{-1}$ ; с ростом  $t$  величина  $\varphi_t(x)$  строго возрастает и стремится к нулю при  $t \rightarrow \infty$  (см. рис. 1.15).

Такую же роль играет оператор эволюции на плоскости. Из автономности уравнения (1.19) и в этом случае следует, что решения можно получить одно из другого сдвигом вдоль оси  $t$ ; оператор  $\varphi_t(x)$  переводит точку  $x$  в точку, полученную движением по траекториям уравнения (1.19) за время  $t$ , т. е.  $\varphi_t: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ . С этой точки зрения траектория, проходящая через точку  $x$ , есть множество точек  $\{\varphi_t(x): t \in \mathbb{R}\}$ , ориентированное по возрастающим  $t$ . Как мы увидим в гл. 3 и 5, такое описание решений может оказаться более целесообразным.

В п. 2.5 дадим общий метод получения оператора эволюции для линейных систем на плоскости; этот оператор задается  $2 \times 2$ -матрицей. Например, решения системы  $\dot{x}_1 = -x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -2x_2$ , которые имеют вид

$$x_1(t) = C_1 e^{-t}, \quad x_2(t) = C_2 e^{-2t}, \quad (1.74)$$

можно записать как

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}, \quad (1.75)$$

откуда следует, что

$$\varphi_t = \begin{bmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{bmatrix} \quad (1.76)$$

является оператором эволюции для данной системы.

## УПРАЖНЕНИЯ

К п. 1.1

1. Показать, что дифференциальное уравнение

$$\dot{x} + p(t)x = q(t)$$

можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(xe^{P(t)}) = q(t)e^{P(t)},$$

где  $P(t) = \int p(t) dt$ . Функция  $e^{P(t)}$  называется интегрирующим множителем для этого уравнения.

Применить это преобразование для решения следующих уравнений:

(a)  $\dot{x} = x - t$ ; (b)  $\dot{x} = x + e^t$ ;

(c)  $\dot{x} = -x \operatorname{ctg} t + 5e^{\cos t}$ ,  $t \neq n\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

2 Дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = f(x)g(t)$$

называется уравнением с разделяющимися переменными, так как решение, проходящее через точку  $(t_0, x_0)$  плоскости  $t, x$ , задается формулой

$$\int_{x_0}^x \frac{du}{f(u)} = \int_{t_0}^t g(s) ds$$

(если только эти интегралы существуют). В этом соотношении переменные  $x$  и  $t$  разделены. Применить эту формулу к решению уравнений:

(a)  $\dot{x} = xt$ ;

(b)  $\dot{x} = -x/t$ ,  $t \neq 0$ ;

(c)  $\dot{x} = -t/x$ ,  $x \neq 0$ ; (d)  $\dot{x} = -x/\operatorname{th} t$ ,  $t \neq 0$ .

3. Дифференциальное уравнение вида

$$M(t, x) + N(t, x)\dot{x} = 0$$

называется уравнением в полных дифференциалах, если существует функция  $F(t, x)$  с непрерывными производными до второго порядка такая, что  $\partial F/\partial t = M(t, x)$ ,  $\partial F/\partial x = N(t, x)$ . Показать, что для существования такой функции необходимо, чтобы

$$\frac{\partial M}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial t},$$

и что любое решение дифференциального уравнения удовлетворяет соотношению

$$F(t, x) = \text{const.}$$

Показать, что уравнение

$$\frac{x}{t} + [\ln(xt) + 1]\dot{x} = 0, \quad t, x > 0,$$

является уравнением в полных дифференциалах. Найти  $F(t, x)$  и начертить несколько интегральных кривых.



4. Найти путем интегрирования решения следующих дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} (a) \dot{x} &= x^2; & (b) \dot{x} &= \frac{1}{2} x^3; \\ (c) \dot{x} &= \frac{1}{2} (x^2 - 1); & (d) \dot{x} &= 3x^{2/3}; \\ (e) \dot{x} &= \sqrt{1-x^2}, \quad |x| \leq 1; & (f) \dot{x} &= 2x^{1/2}, \quad x \geq 0. \end{aligned}$$

Уравнения (e) и (f) определены в замкнутых областях  $D = \{(t, x) \mid |x| \leq 1\}$  и  $D = \{(t, x) \mid x \geq 0\}$  соответственно. В силу предложения 1.1.1 их решения обязаны существовать в открытых областях  $D' = \{(t, x) \mid |x| < 1\}$  и  $D' = \{(t, x) \mid x > 0\}$ . Существуют ли решения, которые вы нашли, на границе областей  $D$ ?

5. Показать, как можно построить бесконечно много решений, удовлетворяющих начальному условию  $x(0) = 0$ , для уравнений (d) и (f) упр. 4. Можно ли сделать то же самое для решений упр. 4(e), удовлетворяющих начальным условиям: (a)  $x(0) = 1$ , (b)  $x(0) = -1$ ? Объясните ваш ответ.

6. Пусть дифференциальное уравнение  $\dot{x} = X(t, x)$  обладает свойством  $X(t, x) = X(-t, -x)$ . Доказать, что если  $x = \xi(t)$  — решение, то  $x = -\xi(-t)$  — также решение. Получить аналогичные результаты о симметрии решений для случаев: (a)  $X(t, x) = -X(-t, x)$ , (b)  $X(t, x) = -X(t, -x)$ . Какие из указанных видов симметрии встречаются на рис. 1.1—1.8?

7. Дифференциальное уравнение вида

$$\dot{x} = h(t, x) \quad (1)$$

называется *однородным*, если для функции  $h(t, x)$  выполняется тождество  $h(\alpha t, \alpha x) \equiv h(t, x)$  при всех действительных  $\alpha$ . Показать, что изоклинами такого уравнения всегда являются прямые, проходящие через начало координат на плоскости  $t, x$ . Использовать этот результат для изображения интегральных кривых уравнения

$$\dot{x} = e^{x/t}, \quad t \neq 0, \quad (2)$$

Показать, что замена переменных  $x = ut$  позволяет свести (1) к уравнению с разделяющимися переменными (упр. 2) относительно функции  $u$  при  $t \neq 0$ . Можно ли с помощью этого результата получить семейство интегральных кривых для (2)?

8. Нарисовать семейство интегральных кривых решений

$$\dot{x} = ax - bx^2, \quad x > 0, \quad a, \quad b > 0.$$

Определить вид интегральных кривых непосредственно из дифференциального уравнения. Доказать, что  $x$  возрастает при  $0 < x < a/2b$  и убывает при  $a/2b < x < a/b$ . Как ведет себя  $\dot{x}$  при  $a/b < x < \infty$ ?

9. Показать, что подстановка  $y = x^{-1}$ ,  $x \neq 0$ , позволяет привести уравнение

$$\dot{x} = ax - bx^2$$

к виду, описанному в упр. 1. Решить это уравнение и показать, что

$$x(t) = ax_0 / \{bx_0 + (a - bx_0) \exp(-a(t - t_0))\},$$

где  $x(t_0) = x_0$ . Проверить, согласуется ли чертеж, полученный в упр. 8, с этой формулой. Можно ли из нее получить какие-нибудь качественные

свойства решений, которые не получаются непосредственно из вида дифференциального уравнения?

10. Начертить интегральные кривые для дифференциальных уравнений:

(a)  $\dot{x} = x^2 - t^2 - 1$ ; (b)  $\dot{x} = t - t/x$ ,  $x \neq 0$ ;

(c)  $\dot{x} = (2t + x)/(t - 2x)$ ,  $t \neq 2x$ . (d)  $\dot{x} = x^2 + t^2$ .

пользуясь изоклинами и областями выпуклости и вогнутости.

11. Не находя явного вида решений, построить изоклины и нарисовать семейство решений следующих дифференциальных уравнений:

(a)  $\dot{x} = x + t$ ; (b)  $\dot{x} = x^3 - x$ ;

(c)  $\dot{x} = xt^2$ ; (d)  $\dot{x} = x \ln x$ ,  $x > 0$ ;

(e)  $\dot{x} = \operatorname{sh} x$ ; (f)  $\dot{x} = t(x + 1)/(t^2 + 1)$ .

Какие общие геометрические свойства имеют решения уравнений (b), (d) и (e)? Наконец, проверить полученные результаты, найдя явный вид решений.

*K n. 1.2*

12. Найти неподвижные точки следующих автономных дифференциальных уравнений:

(a)  $\dot{x} = x + 1$ ; (b)  $\dot{x} = x - x^3$ ; (c)  $\dot{x} = \operatorname{sh}(x^2)$ ;

(d)  $\dot{x} = x^4 - x^3 - 2x^2$ ; (e)  $\dot{x} = x^2 + 1$ .

Определить характер этих неподвижных точек (аттрактор, репеллер, шунт) и построить фазовый портрет для каждого уравнения.

13. Какие дифференциальные уравнения из приведенного ниже списка имеют одинаковый фазовый портрет?

(a)  $\dot{x} = \operatorname{sh} x$ ; (b)  $\dot{x} = ax$ ,  $a > 0$ ; (c)  $\dot{x} = \begin{cases} x \ln |x|, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0; \end{cases}$

(d)  $\dot{x} = \sin x$ ; (e)  $\dot{x} = x^3 - x$ ; (f)  $\dot{x} = \operatorname{th} x$ .

Объяснить своими словами, что значит, что два дифференциальных уравнения имеют одинаковый фазовый портрет.

14. Рассмотреть дифференциальное уравнение, зависящее от параметра  $\lambda$ :

$$\dot{x} = (x - \lambda)(x^2 - \lambda), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Найти все возможные фазовые портреты, которые можно получить для этого уравнения, а также интервалы изменения параметра  $\lambda$ , соответствующие каждому из портретов.

15. Сколько различных качественных типов фазовых портретов существует на фазовой прямой для дифференциального уравнения с тремя неподвижными точками? Какова формула для числа различных фазовых портретов в случае  $n$  неподвижных точек?

16. Показать, что фазовый портрет уравнения

$$\dot{x} = (a - x)(b - x)$$

качественно такой же, как и для уравнения

$$\dot{y} = y(y - c)$$

для всех действительных  $a, b, c, a \neq b, c \neq 0$ . Показать, что тем не менее преобразование вида  $y = kx + l$ , переводящее первое уравнение во второе, существует, только если  $c = b - a$  или  $c = a - b$ .

17. Рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\dot{x} = x^3 + ax - b.$$

Показать, что на плоскости  $a, b$  существует кривая  $C$ , разделяющая плоскость на две области  $A$  и  $B$  такие, что при  $(a, b) \in A$  фазовый портрет имеет один репеллер, а если  $(a, b) \in B$ , то он имеет два репеллера и один аттрактор между ними. Пусть зафиксировано некоторое  $a < 0$ ; описать изменения в конфигурации неподвижных точек, когда  $b$  меняется от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

18. Вещество  $\gamma$  образуется в результате химической реакции между веществами  $\alpha$  и  $\beta$ . В этой реакции один грамм вещества  $\gamma$  возникает при соединении  $p$  граммов  $\alpha$  и  $q = 1 - p$  граммов  $\beta$ . Скорость образования  $\gamma$  в любой момент времени  $t$  равна произведению масс  $\alpha$  и  $\beta$ , не вступивших еще в этот момент в реакцию. Показать, что если в момент  $t = 0$  соединить  $a$  граммов  $\alpha$  и  $b$  граммов  $\beta$ , то количество  $x(t)$  вещества  $\gamma$  при  $t > 0$  будет удовлетворять уравнению

$$\dot{x} = (a - px)(b - qx).$$

В предположении, что  $a/p > b/q$ , построить фазовый портрет для этого уравнения. Какое наибольшее количество вещества  $\gamma$  может возникнуть в результате этого эксперимента?

### К п. 1.3

19. Найти неподвижные точки следующих систем дифференциальных уравнений на плоскости:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \dot{x}_1 &= x_1(a - bx_2), & \text{(b)} \quad \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -x_2(c - dx_1), & \dot{x}_2 &= -\sin x_1; \\ a, b, c, d &> 0; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(c)} \quad \dot{x}_1 &= x_2, & \text{(d)} \quad \dot{x}_1 &= x_1(2 - x_1 - 2x_2), \\ \dot{x}_2 &= x_2(1 - x_1^2) - x_1; & \dot{x}_2 &= x_2(2 - 2x_1 - x_2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(e)} \quad \dot{x}_1 &= \sin x_1, \\ \dot{x}_2 &= \cos x_2. \end{aligned}$$

20. Нарисовать следующие семейства кривых на плоскости, заданные параметрически:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad (x_1, x_2) &= (a \cos t, a \sin t); & \text{(b)} \quad (x_1, x_2) &= (a \cos t, 2a \sin t); \\ \text{(c)} \quad (x_1, x_2) &= (ae^t, be^{-2t}); & \text{(d)} \quad (x_1, x_2) &= (ae^t + be^{-t}, ae^t - be^{-t}); \\ \text{(e)} \quad (x_1, x_2) &= (ae^t + be^{2t}, be^{2t}); \end{aligned}$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$ . Найти системы дифференциальных уравнений на плоскости, для которых эти семейства дают фазовый портрет.

21. По чертежам, сделанным для упр. 20, расклассифицировать семейства кривых (а)—(е) по группам, имеющим в начале координат на плоскости  $x_1, x_2$  неподвижные точки одинакового типа.

22. Рассмотреть фазовый портрет для системы

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2). \quad (1)$$

Показать, что система вида

$$\dot{y}_1 = -X_1(y_1, y_2), \quad \dot{y}_2 = -X_2(y_1, y_2)$$

имеет в качестве траекторий те же самые кривые, но с противоположной ориентацией. Проверить этот результат, построив решения для

$$(a) \dot{x}_1 = x_1, \quad (b) \dot{x}_1 = x_1,$$

$$\dot{x}_2 = x_2; \quad \dot{x}_2 = 2x_2$$

и сравнить чертежи с рис. 1.23 и 1.24.

*К п. 1.4*

23. Показать, что система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

превращается в распадающуюся, если сделать замену переменных

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2.$$

Построить фазовый портрет для этой системы.

24. Показать, что решение системы дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = -2x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2,$$

удовлетворяющее начальным условиям  $x_1(0) = 1$ ,  $x_2(0) = 2$ , дается формулами

$$x_1(t) = e^{-2t}, \quad x_2(t) = e^{-2t}(t + 2).$$

Доказать единственность этого решения.

25. Рассмотреть систему нелинейных дифференциальных уравнений первого порядка.

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2). \quad (1)$$

Сделать замену переменных  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$  и показать, что система (1) эквивалентна системе

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1. \quad (2)$$

Решить систему (2) с начальными условиями  $r(0) = r_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$  и получить решения

$$r(t) = r_0 / [r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}]^{1/2}, \quad \theta(t) = t + \theta_0.$$

26. (a) Пусть автономная система

$$\dot{x} = X(x) \quad (1)$$

инвариантна относительно преобразования  $x \rightarrow -x$ . Показать, что если  $\xi(t)$  удовлетворяет (1), то и  $\eta(t) = -\xi(t)$  также удовлетворяет этой системе.

(b) Пусть теперь  $X$  удовлетворяет условию  $X(x) = X(-x)$ . Показать, что в этом случае, если  $\xi(t)$  является решением (1), то  $\eta(t) =$

$= -\xi(-t)$  — также решение. Проиллюстрировать результаты для случаев (a) и (b) на примере траекторий  $\xi(t)$  и  $\eta(t)$  для систем;

$$(i) \dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2; \quad (ii) \dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = x_2^4.$$

27. (a) Рассмотреть неавтономное уравнение

$$\dot{x} = X(t, x), \quad (1)$$

которое уже встречалось в п. 1.1. Сделать замену  $x_1 = t$ ,  $x_2 = x$  и показать, что (1) эквивалентно автономной системе

$$\dot{x}_1 = 1, \quad \dot{x}_2 = X(x_1, x_2).$$

(b) Сделать замену переменных  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  и показать, что любое уравнение второго порядка  $\ddot{x} = F(x, \dot{x})$  эквивалентно автономной системе

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = F(x_1, x_2).$$

Воспользоваться этими соображениями и привести следующие уравнения к эквивалентным автономным системам первого порядка:

$$(i) \dot{x} = x - t; \quad (ii) \dot{x} = xt; \quad (iii) \ddot{x} + \sin x = 0;$$

$$(iv) \ddot{x} + 2a\dot{x} + bx = 0; \quad (v) \ddot{x} + f(x)\dot{x} + g(x) = 0.$$

Показать, что в случае (b) указанная замена не единственно возможная, сведя уравнения (iv) и (v) к системам заменой

$$\dot{x}_1 = x_2 - \int f(x_1) dx_1, \quad \dot{x}_2 = -g(x_1).$$

28. Привести следующие уравнения к автономным системам первого порядка с соответствующим числом переменных:

$$(a) \ddot{x} + x = 1, \quad \ddot{y} + \dot{y} + y = 0; \quad (b) \dot{x} + t = x, \quad \dot{y} + y^3 = t;$$

$$(c) \ddot{x} + tx + 1 = 0, \quad \ddot{y} + t^2 \dot{x}^2 + x + y = 0.$$

29. С помощью метода изоклин нарисовать фазовые портреты следующих систем:

$$(a) \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2; \quad (b) \dot{x}_1 = x_2^3, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2^2;$$

$$(c) \dot{x}_1 = \ln x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2, \quad x_1 > 0.$$

30. Каждая из приведенных ниже систем дифференциальных уравнений на плоскости имеет одну неподвижную точку. Найти эту неподвижную точку и с помощью метода изоклин определить, какие из этих систем не имеют замкнутых траекторий на своем фазовом портрете:

$$(a) \dot{x}_1 = x_2 - 1, \quad (b) \dot{x}_1 = x_1 + x_2, \quad (c) \dot{x}_1 = x_1 - x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -(x_1 - 2), \quad \dot{x}_2 = x_1; \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2$$

Проверить полученные результаты, решив уравнения  $dx_2/dx_1 = \dot{x}_2/\dot{x}_1$ .

31. Рассмотреть дифференциальное уравнение

$$\ddot{x} + \dot{x}^2 + x = 0. \quad (1)$$

Применить результаты упр. 27 (b) и свести его к системе первого порядка. Показать, что изоклина наклона  $k$

$$\mathcal{G}_k = \{(x_1, x_2) \mid \dot{x}_2 = k\dot{x}_1\}$$

является параболой с вершиной  $(k^2/4, -k/2)$  и эти вершины лежат на параболе  $x_2^2 = x_1$ . Сделать замену  $x_2^2 = w$  и найти  $x_2$  как функцию  $x_1$ , а затем нарисовать фазовый портрет уравнения (1).

К п. 1.5

32. Показать, что оператор эволюции дифференциального уравнения  $\dot{x} = x - x^3$  при  $x > 1$  дается формулой

$$\varphi_t(x) = xe^t / \sqrt{x^2 e^{2t} - x^2 + 1}.$$

Проверить свойство  $\varphi_s(\varphi_t(x)) = \varphi_{s+t}(x)$ .

33. Найти операторы эволюции для дифференциальных уравнений:

(a)  $\dot{x} = \text{th } x$ ; (b)  $\dot{x} = x \ln x$ ,  $x > 0$ .

34. Найти операторы эволюции для следующих систем:

(a)  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 - x_2$ ; (b)  $\dot{x}_1 = x_1 x_2$ ,  $\dot{x}_2 = x_2^2$ .

Найти интервалы времени, на которых эти операторы определены, и проверить свойство  $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$ , если  $t$ ,  $s$  и  $t+s$  принадлежат одному и тому же интервалу определенности.

35. Пусть оператор  $\varphi_t$  описывает некоторый поток на плоскости. Изобразить фазовые портреты на плоскости, имеющие не более двух неподвижных точек и удовлетворяющие следующим условиям:

(a)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x) = 0$  для всех точек  $x$  на плоскости;

(b) существует точка  $x_0$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x_0) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x_0) = 0$ ;

(c)  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x) = 0$  для всех точек  $x$  на плоскости;

(d) существует траектория, проходящая через некоторую точку  $x_0$  такая, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x_0) = 0$ , и траектория, проходящая через точку  $x'_0$  такая, что

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \varphi_t(x'_0) = 0.$$

36. Пусть задано дифференциальное уравнение  $\dot{x} = xt$ ,  $x, t \geq 0$ ; доказать, что в этом случае эволюция точки, находящейся в положении  $x_0$  в момент  $t_0$ , зависит не только от  $x_0$  и  $t - t_0$ , как в автономном случае, а задается формулой

$$\varphi(t, t_0, x_0) = x_0 e^{(t-t_0)(t+t_0)/2}.$$

## 2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ

Система  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , называется *линейной системой* размерности  $n$ , если отображение  $\mathbf{X}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  линейно. Мы покажем, что для линейных систем существует только конечное число качественно различных фазовых портретов. Чтобы установить это, мы сначала изучим, как на такую систему влияет линейная замена переменных.

### 2.1. ЛИНЕЙНАЯ ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ

Линейное отображение  $\mathbf{X}: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , где  $\mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}$ , можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} X_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ X_n(x_1, \dots, x_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

Соответственно дифференциальное уравнение  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$  принимает вид

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{A}$  — матрица коэффициентов. Каждая компонента  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) производной  $\dot{\mathbf{x}}$  является линейной функцией переменных  $x_1, \dots, x_n$ . Эти переменные, конечно, являются просто координатами точки  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$  относительно канонического базиса в  $\mathbb{R}^n$ , т. е.  $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1}^n$ , где  $\mathbf{e}_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)$  с единицей на  $i$ -м месте. Следовательно,

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \quad \text{и} \quad \mathbf{X}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n X_i(\mathbf{x}) \mathbf{e}_i. \quad (2.3)$$

Чтобы сделать замену переменных, мы должны каждую координату  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) представить как функцию новых переменных. Посмотрим, какое влияние на уравнение (2.2) окажет линейная замена переменных

$$\mathbf{x}_i = \sum_{j=1}^n m_{ij} y_j \quad (i = 1, \dots, n) \quad \text{или} \quad \mathbf{x} = \mathbf{M}\mathbf{y}, \quad (2.4)$$

где  $m_{ij} \in \mathbb{R}$  для всех  $i$  и  $j$ . Конечно, одному набору старых координат  $(x_1, \dots, x_n)$  должен соответствовать один набор новых координат  $(y_1, \dots, y_n)$  и наоборот. Это значит, что отображение (2.4) должно быть взаимно однозначным, и, следовательно,  $M$  должна быть обратимой матрицей. Отсюда следует, что столбцы  $m_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , матрицы  $M$  должны быть линейно независимы. Из формулы (2.4) вытекает, что

$$x = \sum_{i=1}^n y_i m_i, \quad (2.5)$$

и мы видим, что  $y_1, \dots, y_n$  — это координаты точки  $x \in \mathbb{R}^n$  относительно нового базиса  $\{m_i\}_{i=1}^n$ . Уравнение (2.2) легко можно записать через новые переменные; получим

$$\dot{x} = My = AMy, \quad (2.6)$$

так что

$$y = By, \quad (2.7)$$

где

$$B = M^{-1}AM. \quad (2.8)$$

Таким образом, матрица коэффициентов  $B$  подобна  $A$ .

**Пример 2.1.1.** Система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \quad (2.9)$$

преобразуется в распадающуюся систему

$$\dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = -y_2 \quad (2.10)$$

заменой переменных

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 - y_2. \quad (2.11)$$

Проверить на этом примере уравнение (2.8).

**Решение.** Запишем системы в матричной форме:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \text{ и} \\ \begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}.$$

Таким образом,

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Из равенства  $AM = MB$  следует (2.8).



**Пример 2.1.2.** Найти матричную форму системы

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_2 \quad (2.12)$$

в результате замены переменных

$$x_1 = y_1 + 2y_2, \quad x_2 = y_2. \quad (2.13)$$

В каком базисе  $y_1, y_2$  являются координатами точки  $x$ ?

**Решение.** Замену переменных (2.13) можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

так что

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

Система (2.12) имеет матричную форму

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x = Ax. \quad (2.16)$$

Уравнения (2.7), (2.8) дают

$$B = M^{-1}AM \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } \dot{y} = By; \quad (2.17)$$

это и является искомой матричной формой. Базис, в котором  $y_1$  и  $y_2$  являются координатами, состоит из столбцов матрицы  $M$ , т. е. из векторов  $\{(1, 0); (2, 1)\}$ .

Подобие является отношением эквивалентности между  $n \times n$ -матрицами (см. упр. 2); отсюда следует, что множество таких матриц по этому отношению распадается на *классы эквивалентности*. Для любых двух матриц  $A$  и  $B$ , принадлежащих одному классу эквивалентности, системы  $\dot{x} = Ax$  и  $\dot{y} = By$  связаны соотношением  $x = My$ , где  $M^{-1}AM = B$ . Таким образом, если одна из этих систем решена, то можно получить решения для любой системы с матрицей того же класса.

В п. 1.4.1 мы видели, что можно легко решить распадающиеся и полураспадающиеся системы; естественно поставить вопрос, каждый ли класс эквивалентности содержит по крайней мере одну относительно простую, т. е. диагональную или треугольную, матрицу. Ответ на этот алгебраический вопрос известен; в следующем параграфе мы его проиллюстрируем для  $n = 2$ .

## 2.2. КЛАССЫ ПОДОБИЯ ДЛЯ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ $2 \times 2$ -МАТРИЦ

Для каждого целого положительного числа  $n$  существует бесконечно много классов подобия. Эти классы можно сгруппировать в конечное число типов. В следующем предложении мы укажем эти типы для  $n = 2$ .

**Предложение 2.2.1.** Пусть  $A$  — действительная  $2 \times 2$ -матрица. Тогда существует действительная неособая матрица  $M$  такая, что  $J = M^{-1}AM$  принадлежит одному из нижеперечисленных типов:

$$(a) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \lambda_1 > \lambda_2; \quad (b) \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix};$$

$$(c) \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}; \quad (d) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \beta > 0;$$
(2.18)

где  $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

Матрица  $J$  называется *жордановой формой* матрицы  $A$ . Собственные значения матрицы  $A$  (и  $J$ ) — это значения  $\lambda$ , для которых

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\lambda + \det A = 0. \quad (2.19)$$

Здесь  $\operatorname{tr} A = a_{11} + a_{22}$  — след матрицы  $A$ , а  $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$  — ее определитель. Таким образом, собственными значениями являются

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A + \sqrt{\Delta}), \quad \lambda_2 = \frac{1}{2}(\operatorname{tr} A - \sqrt{\Delta}), \quad (2.20)$$

где

$$\Delta = (\operatorname{tr} A)^2 - 4\det A. \quad (2.21)$$

Именно характер собственных значений определяет тип, к которому относится матрица  $J$ . Жорданова форма  $J$  зависит от вида собственных значений, являются ли они действительными различными ( $\Delta > 0$ ), действительными совпадающими ( $\Delta = 0$ )<sup>1)</sup> или комплексными ( $\Delta < 0$ ).

(а) *Действительные различные собственные значения* ( $\Delta > 0$ )

Собственные векторы  $u_1, u_2$  матрицы  $A$  определяются из уравнений

$$Au_i = \lambda_i u_i \quad (i = 1, 2), \quad (2.22)$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) — различные собственные значения. Пусть

$$M = [u_1 \mid u_2] \quad (2.23)$$

<sup>1)</sup> При  $\Delta = 0$  возможны две разные жордановы формы: (b) и (c). — Прим. перев.

— матрица, столбцами которой являются собственные векторы. Тогда

$$AM = [Au_1 \mid Au_2] = [\lambda_1 u_1 \mid \lambda_2 u_2] = MJ, \quad (2.24)$$

где

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

В случае различных действительных собственных значений собственные векторы  $u_1$  и  $u_2$  линейно независимы и, следовательно, матрица  $M$  неособая. Так что

$$M^{-1}AM = J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}. \quad (2.25)$$

(b) *Совпадающие собственные значения ( $\Delta = 0$ )*

Из уравнения (2.20) получаем, что  $\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A = \lambda_0$ . В этом случае мы должны рассмотреть две возможности.

(i) *Матрица  $A$  диагональная*

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \lambda_0 I, \quad (2.26)$$

что соответствует случаю (2.18(b)). Здесь для любой неособой матрицы  $M$  мы имеем  $M^{-1}AM = A$ . Следовательно,  $A$  подобна только самой себе и является единственной в своем классе эквивалентности.

(ii) *Матрица  $A$  недиагональная*

В этом случае, так как  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ ,  $\operatorname{rank}(A - \lambda_0 I) = 1$  и не существует двух линейно независимых собственных векторов. Пусть  $u_0$  — некоторый собственный вектор  $A$ . Если мы положим  $m_1 = u_0$  и выберем  $m_2$  так, чтобы матрица  $M = [u_0 \mid m_2]$  была неособой, то

$$AM = [\lambda_0 u_0 \mid Am_2] = M [\lambda_0 e_1 \mid M^{-1}Am_2], \quad (2.27)$$

где  $e_1$  — первый столбец единичной матрицы  $I$ .

Матрицы  $A$  и  $M^{-1}AM$  имеют одинаковые собственные значения, так что

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_0 & C \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}, \quad (2.28)$$

где  $C \neq 0$ . Однако простой переход от  $M$  к

$$M_1 = M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & C^{-1} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

дает

$$M_1^{-1}AM_1 = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

что соответствует случаю (2.18(c)).

(с) *Комплексные собственные значения* ( $\Delta < 0$ )

Мы можем обозначить  $\lambda_1 = \alpha + i\beta$ ,  $\lambda_2 = \alpha - i\beta$ , где  $\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{tr} A$ ,  $\beta = \frac{1}{2} \sqrt{-\Delta}$ . Мы хотим показать, что существует неособая матрица  $M[m_1 | m_2]$  такая, что  $M^{-1}AM$  имеет вид (2.18(d)), или, что равносильно,

$$AM = M \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.30)$$

Записав матрицу  $M$  через ее столбцы, получим

$$[Am_1 | Am_2] = [\alpha m_1 + \beta m_2 | -\beta m_1 + \alpha m_2],$$

или

$$[(A - \alpha I)m_1 - \beta Im_2 | \beta Im_1 + (A - \alpha I)m_2] = [O | O]. \quad (2.31)$$

Это матричное уравнение можно записать как систему четырех линейных однородных уравнений относительно неизвестных элементов матрицы  $M$ :

$$\left[ \begin{array}{c|c} A - \alpha I & -\beta I \\ \hline \beta I & A - \alpha I \end{array} \right] \begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} O \\ \vdots \\ O \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

Пусть  $P$  — матрица коэффициентов в (2.32), а

$$Q = \left[ \begin{array}{c|c} A - \alpha I & \beta I \\ \hline -\beta I & A - \alpha I \end{array} \right]. \quad (2.33)$$

Заметим, что

$$PQ = \left[ \begin{array}{c|c} p_A(A) & O \\ \hline O & p_A(A) \end{array} \right], \quad (2.34)$$

где  $p_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\alpha\lambda + (\alpha^2 + \beta^2)$  — характеристический полином матрицы  $A$ . По теореме Кэли — Гамильтона (Хартли, Хокс, 1970) (см. также (Кострикин, 1977\*) — Перев.)  $p_A(A) = O$  (см. упр. 7), так что

$$PQ = O; \quad (2.35)$$

здесь  $O$  — нулевая  $4 \times 4$ -матрица. Таким образом, столбцы матрицы  $Q$  являются решениями уравнения (2.32). Первый

столбец  $Q$  дает

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} - \alpha & -\beta \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Заметим, что дискриминант  $\Delta$  уравнения  $p_A(\lambda) = 0$  имеет вид

$$\Delta = (a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}a_{21}. \quad (2.37)$$

Если  $\Delta < 0$ , то  $a_{12}a_{21} \neq 0$  и, следовательно,  $a_{21} \neq 0$ . Тогда и  $\beta = \frac{1}{2}\sqrt{-\Delta} \neq 0$ , и мы получаем, что  $\det M = \beta a_{21} \neq 0$ . Таким образом (2.36) дает неособую матрицу  $M$  такую, что  $M^{-1}AM$  имеет вид (2.18(d)).

Любая действительная  $2 \times 2$ -матрица  $A$  попадает в один, и только один, из указанных в (2.18) классов (см. упр. 6), и предложение 2.2.1 доказано.

Рассмотрим некоторые простые примеры, иллюстрирующие этот результат.

**Пример 2.2.1.** Найти жорданову форму для каждой из следующих матриц:

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

**Решение.** Собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  для матриц (a) — (c) равны  $(1 + \sqrt{2}, 1 - \sqrt{2})$ ,  $(3 + i, 3 - i)$  и  $(2, 2)$  соответственно. Это значит, что жордановы формы имеют вид

$$\begin{aligned} (a) \quad & \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}; \\ (b) \quad & \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}; \\ (c) \quad & \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Заметим, что для (2.38(c)) мы взяли вид (2.18(c)), так как исходная матрица — недиагональная.

**Пример 2.2.2.** Найти матрицу  $M$ , которая каждую матрицу из примера 2.2.1 приводит к соответствующей ей жордановой форме.

**Решение.** Матрица (a) имеет различные действительные собственные значения, так что в качестве столбцов  $M$  можно взять два соответствующих им собственных вектора. Вектор  $u_1 = (u_{11}u_{21})^T$  ( $T$  — знак транспонирования) удовлетворяет

уравнению  $[A - (1 + \sqrt{2})I]u_1 = O$ , откуда  $u_{11}\sqrt{2} = 2u_{21}$ . Мы можем взять  $u_1 = (\sqrt{2}, 1)^T$ . Аналогично в качестве вектора, соответствующего  $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$ , можно выбрать  $(-\sqrt{2}, 1)^T$ . Таким образом,

$$M = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ и } M^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 1 + \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 - \sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Матрица (b) имеет комплексно сопряженные собственные значения  $3 + i$ ,  $3 - i$  и уравнение (2.36) дает явный вид  $M$ . В нашем случае

$$M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

и можно проверить, что

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} M = M \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Наконец, матрица (c) имеет равные собственные значения, и единственный собственный вектор  $(1, 1)^T$  можно получить из уравнения

$$\left\{ \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \begin{bmatrix} u_{10} \\ u_{20} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Это дает нам первый столбец матрицы  $M$ . Если второй столбец  $M$  выбран так, что она неособая, то с ее помощью матрицу (c) можно привести к треугольному виду. Например, положим

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

в этом случае  $\det M = 1$  и

$$M^{-1} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Эта матрица не является жордановой формой, указанной в (2.38(c)); однако, если мы заменим  $M$  на  $M_1$ , как это сделано в (2.29), т. е.

$$M_1 = M \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

то мы получим нужный результат с  $J = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ .

Жорданову форму матриц размерности, большей чем 2, мы рассмотрим в п. 2.7, но сначала постараемся понять значение полученных результатов для систем на плоскости. Мы можем сделать следующие выводы:

(а) любую двумерную линейную систему

$$\dot{x} = Ax \quad (2.39)$$

можно свести к эквивалентной ей канонической системе

$$\dot{y} = Jy, \quad (2.40)$$

где  $J = M^{-1}AM$  — жорданова форма матрицы  $A$  и

$$x = My, \quad (2.41)$$

(б) жорданова матрица  $J$  должна принадлежать одному из четырех типов, указанных в предложении 2.2.1.

Теперь мы можем найти решения для любой системы вида (2.39), если мы решим соответствующую каноническую систему (2.40) и применим преобразование (2.41).

### 2.3. ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ ДЛЯ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ПЛОСКОСТИ

Линейная система  $\dot{x} = Ax$  называется *простой*, если матрица  $A$  неособая, т. е.  $\det A \neq 0$  и  $A$  не имеет нулевых собственных значений. Тогда единственным решением уравнения

$$Ax = 0 \quad (2.42)$$

является  $x = 0$  и система имеет единственную изолированную неподвижную точку в начале координат фазовой плоскости. Каноническая система, соответствующая простой линейной системе, также является простой, так как  $A$  и  $J$  имеют одинаковые собственные значения.

#### 2.3.1. ПРОСТЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

(а) *Различные действительные собственные значения*

В этом случае  $J$  задается формулой (2.18(а)) с ненулевыми  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$ . Тогда

$$\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \lambda_2 y_2, \quad (2.43)$$

и, следовательно,

$$y_1(t) = C_1 e^{\lambda_1 t}, \quad y_2(t) = C_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (2.44)$$

где  $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ .

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  *одного знака*, то фазовые портреты имеют вид, изображенный на рис. 2.1 (а) и (б). Неподвижная точка в начале координат плоскости  $y_1, y_2$  называется *узлом*. Если все траектории направлены к началу координат (от него), то

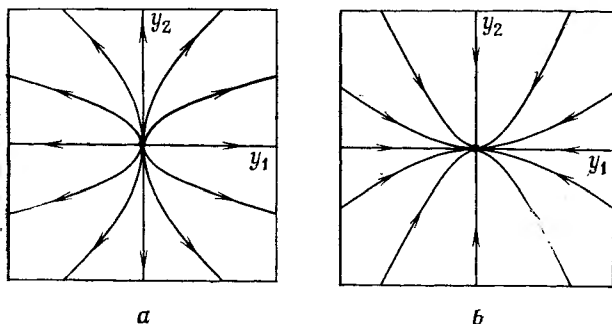


Рис. 2.1. Различные действительные собственные значения одного знака порождают узлы: (а) — неустойчивый ( $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ ); (б) — устойчивый ( $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ ).

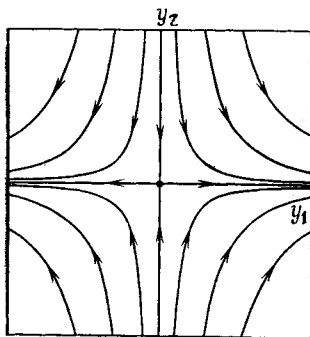


Рис. 2.2. Действительные собственные значения противоположных знаков ( $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ ) порождают седло.

узел называется *устойчивым (неустойчивым)*. Форма траекторий определяется отношением  $\gamma = \lambda_2/\lambda_1$ . Заметим, что из (2.43), (2.44) следует уравнение

$$\frac{dy_2}{dy_1} = Ky_1^{\gamma-1}, \quad (2.45)$$

где  $K = \gamma C_2/C_1$ . Следовательно, при  $y_1 \rightarrow 0$

$$\frac{dy_2}{dy_1} \rightarrow \begin{cases} 0, & \text{если } \gamma > 1, \\ \infty, & \text{если } \gamma < 1. \end{cases} \quad (2.46)$$

Если  $\lambda_1$  и  $\lambda_2$  имеют *противоположные знаки*, то возникает фазовый портрет, изображенный на рис. 2.2. На осях координат



нат (исключая начало) лежат особые траектории, которые называются *сепаратрисами*. Это единственные траектории, имеющие вид радиальных лучей. На одной координатной оси лежат две сепаратрисы (напомним, что начало координат также является отдельной траекторией). Эти сепаратрисы направлены к началу координат (от него), если соответствующее собственное значение отрицательно (положительно). Остальные траектории имеют сепаратрисы в качестве асимптот; сначала они подходят к некоторой фиксированной точке при возрастании  $t$  от  $-\infty$ ; проходят через точку, лежащую ближе всего к началу координат, и наконец снова удаляются. В таком случае начало координат называется *седлом* или *седловой точкой*.

(b) *Равные собственные значения*

Если матрица  $J$  диагональная, то каноническая система задается формулой (2.44) с  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0 \neq 0$ . Таким образом, случай (2.18(b)) соответствует узлу специального вида,

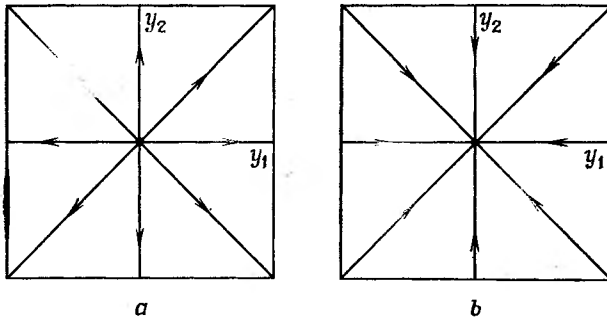


Рис. 2.3. Равные собственные значения  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  в случае диагональной матрицы  $A$  порождают звездные узлы: (a) — неустойчивый; (b) — устойчивый.

который называется *звездным узлом*<sup>1)</sup>. Этот узел устойчив при  $\lambda_0 < 0$ , неустойчив при  $\lambda_0 > 0$ ; все его нетривиальные траектории являются радиальными лучами (см. рис. 2.3).

Если матрица  $J$  недиагональная, т. е. имеет вид (2.18(c)), то мы должны решить систему

$$\dot{y}_1 = \lambda_0 y_1 + y_2, \quad \dot{y}_2 = \lambda_0 y_2; \quad \lambda_0 \neq 0. \quad (2.47)$$

Эта система имеет решения

$$y_1(t) = (C_1 + tC_2) e^{\lambda_0 t}; \quad y_2(t) = C_2 e^{\lambda_0 t}, \quad (2.48)$$

<sup>1)</sup> В русской литературе принят термин «диркритический узел». — Прим. перев.

и фазовый портрет имеет вид, указанный на рис. 2.4 (см. пример 1.4.2).

В этом случае начало координат называется *вырожденным узлом* (*improper node*); он устойчив при  $\lambda_0 < 0$  и неустойчив при  $\lambda_0 > 0$ . Кривая, на которой траектории меняют

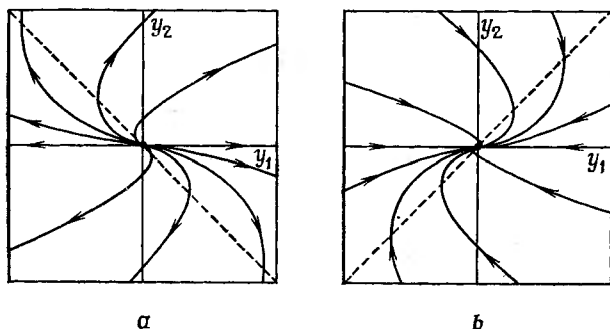


Рис. 2.4. В случае недиагональной матрицы  $\mathbf{A}$  собственные значения  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$  порождают вырожденный узел; (а) — неустойчивый ( $\lambda_0 > 0$ ); (б) — устойчивый ( $\lambda_0 < 0$ ).

свое направление, — геометрическое место точек экстремума для  $y_1$ . Оно задается уравнением  $\dot{y}_1 = 0$ , т. е.

$$y_2 = -\lambda_0 y_1. \quad (2.49)$$

### (с) Комплексные собственные значения

Жорданова матрица задается в этом случае формулой (2.18(d)), так что каноническая система имеет вид

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1 - \beta y_2; \quad \dot{y}_2 = \beta y_1 + \alpha y_2. \quad (2.50)$$

Систему такого вида можно решить, перейдя к полярным координатам на плоскости:  $y_1 = r \cos \theta$ ,  $y_2 = r \sin \theta$ . Как и в примере 1.4.1, мы получим

$$\dot{r} = \alpha r, \quad \dot{\theta} = \beta, \quad (2.51)$$

и решениями будут

$$r(t) = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta(t) = \beta t + \theta_0. \quad (2.52)$$

Возможные типы фазовых портретов даны на рис. 2.5.

Если  $\alpha \neq 0$ , то начало координат называется *фокусом* (устойчивым при  $\alpha < 0$ , неустойчивым при  $\alpha > 0$ ). Иногда говорят, что фазовый портрет состоит из *притягивающей* (*attracting*) (или *отталкивающей* (*repelling*)) спирали. Параметр  $\beta > 0$  определяет угловую скорость точки на спирали.

Если  $\alpha = 0$ , то начало координат называется *центром* и фазовый портрет состоит из континуума concentрических кругов. Это единственный случай, когда в линейных системах возникает повторяющееся, или периодическое, движение. Каждая точка (за исключением начала координат) снова

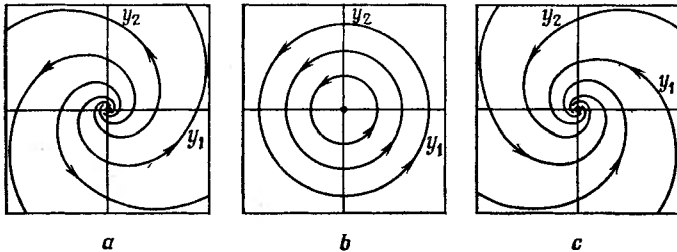


Рис. 2.5. Комплексные собственные значения порождают: (а) — неустойчивый фокус ( $\alpha > 0$ ); (б) — центр ( $\alpha = 0$ ); (с) — устойчивый фокус ( $\alpha < 0$ ).

проходится через время  $T = 2\pi/\beta$ . Координаты периодичны по  $t$  с периодом  $T$  и определяются формулами

$$y_1 = r_0 \cos(\beta t + \theta_0), \quad y_2 = r_0 \sin(\beta t + \theta_0). \quad (2.53)$$

Другой, тривиальный случай периодических решений для линейных систем — это неподвижные точки. В некотором смысле это предельный случай периодического решения; точка снова проходится мгновенно с периодом, равным нулю.

### 2.3.2. НЕПРОСТЫЕ КАНОНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ

Линейная система  $\dot{x} = Ax$  называется непростой, если  $A$  — сингулярная матрица, т. е.  $\det A = 0$ , и, следовательно, хотя бы одно из собственных значений  $A$  равно нулю. Отсюда следует, что существуют нетривиальные решения уравнения  $Ax = 0$  и что кроме  $x = 0$  система имеет и другие неподвижные точки. Для линейных систем на плоскости существуют только две возможности: или ранг  $A$  равен единице, или  $A$  — нулевая матрица. В первом случае имеется прямая, состоящая из неподвижных точек, проходящая через начало координат; во втором случае все точки плоскости являются неподвижными точками. Ранг  $A$  равен рангу  $J$ , так что то же самое справедливо для канонической системы. На рис. 2.6 показаны два примера, когда ранг  $J$  равен единице.

В остальной части этой главы мы сосредоточим свое внимание на простых линейных системах. Эти системы играют основную роль для понимания характера неподвижных точек для нелинейных систем (см. п. 3.3).

Результаты, полученные в настоящем параграфе, на рис. 2.7 сведены в систему; каждому типу фазового портрета

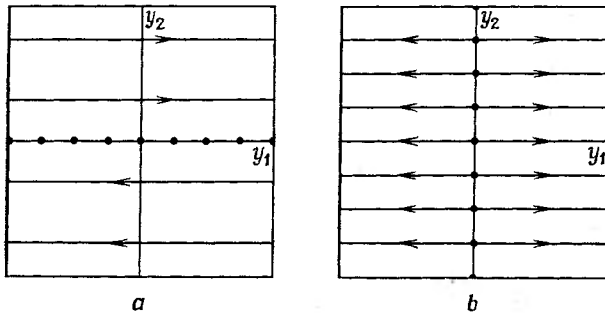


Рис. 2.6. (a)

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ т. е. } \lambda_0 = 0;$$

все точки оси  $y_1$  являются неподвижными точками; это предельный случай рис. 2.4 (a) при  $\lambda_0 \rightarrow 0$ .

(b) 
$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \text{ т. е. } \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0;$$

все точки оси  $y_2$  являются неподвижными точками; это предельный случай рис. 2.1 (a) при  $\lambda_2 \rightarrow 0$ .

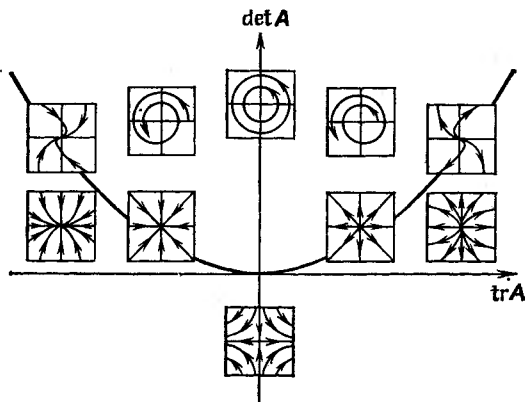


Рис. 2.7. Характер зависимости фазовых портретов системы  $\dot{x} = Ax$  от следа и определителя матрицы  $A$ .

соответствует некоторое множество точек на плоскости  $\text{tr } A - \det A$ . Каждой точке этой плоскости соответствует определенная пара собственных значений  $A$  и, следовательно, определенная каноническая система.

## 2.4. КЛАССИФИКАЦИЯ ПРОСТЫХ ЛИНЕЙНЫХ ФАЗОВЫХ ПОРТРЕТОВ НА ПЛОСКОСТИ

### 2.4.1. ФАЗОВЫЙ ПОРТРЕТ ПРОСТОЙ ЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ

Фазовый портрет произвольной линейной системы  $\dot{x} = Ax$  можно получить из фазового портрета для канонической системы  $\dot{y} = Jy$  с помощью преобразования  $x = My$ . Рассмотрим, как меняется фазовый портрет в результате такого преобразования. Например, каноническая система

$$\dot{y}_1 = y_1; \quad \dot{y}_2 = -y_2 \quad (2.54)$$

имеет фазовый портрет, изображенный на рис. 2.8(a). На рис. 2.8(b) — (f) показаны фазовые портреты для некоторых систем, каноническая система которых совпадает с (2.54).

Как видно из формулы (2.6),  $y_1$  и  $y_2$  являются координатами точки  $x$  относительно базиса  $\{m_1, m_2\}$ , составленного из столбцов матрицы  $M$ . Таким образом, оси  $y_1$  и  $y_2$  — это прямые, проходящие через начало координат на плоскости  $x_1, x_2$  и имеющие соответственно направления векторов  $m_1$  и  $m_2$ .

Направления векторов  $m_1$  и  $m_2$  называются *главными направлениями*. Рассматриваемое отображение является взаимно однозначным, так что каждая точка плоскости  $y_1, y_2$  имеет единственный образ на плоскости  $x_1, x_2$  и обратно. Кроме того,  $x$  является непрерывной функцией  $y$ , поэтому траектории переходят в траектории. Ориентация на траекториях также сохраняется. В частности, направления сепаратрис на плоскости  $x_1, x_2$  создаются собственными векторами  $A$ .

Из этих свойств преобразования  $x = My$  следует, что, хотя фазовый портрет искажен, начало координат по-прежнему является седловой точкой. Фазовые портреты на рис. 2.8(a) — (f) типичны для любых систем  $\dot{x} = Ax$ , для которых матрица  $A$  имеет собственные значения  $+1$  и  $-1$ ; все они имеют седло в начале координат. Другими словами, линейные преобразования сохраняют качественное поведение решений.

**Пример 2.4.1.** Нарисовать фазовый портрет системы

$$\dot{y}_1 = 2y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2 \quad (2.55)$$

и соответствующие фазовые портреты на плоскости  $x_1, x_2$ , где

$$x_1 = y_1 + y_2, \quad x_2 = y_1 + 2y_2 \quad (2.56)$$

и

$$x_1 = y_1, \quad x_2 = -y_1 + y_2 \quad (2.57)$$

соответственно.

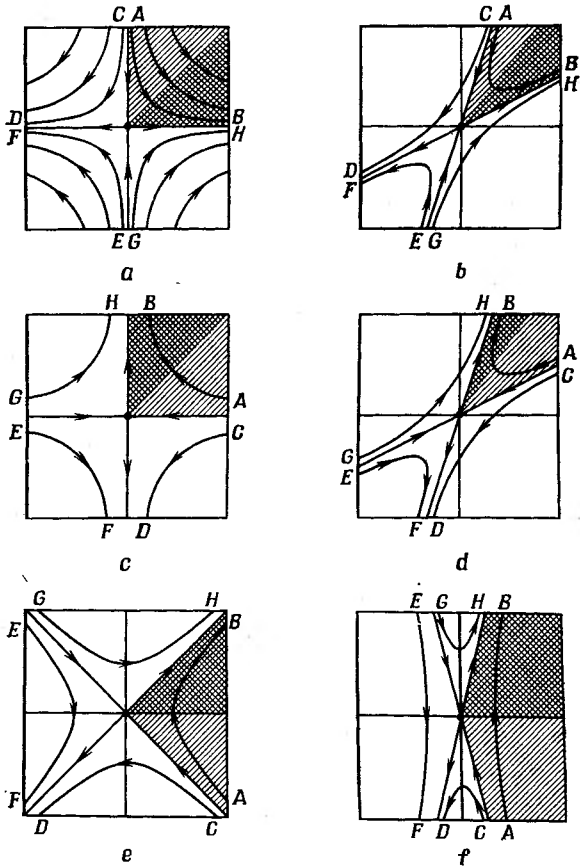


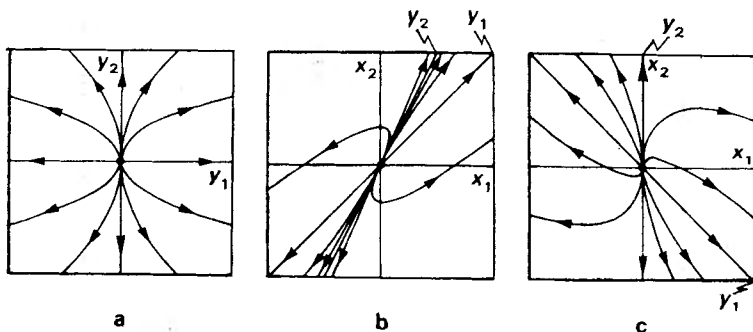
Рис. 2.8. Влияние различных линейных преобразований вида  $x = My$  на фазовый портрет канонической системы  $\dot{y}_1 = y_1, \dot{y}_2 = -y_2$ . (a) Каноническая система  $\dot{y}_1 = y_1, \dot{y}_2 = -y_2$ ; (b)  $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ ; (c)  $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; (d)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ ; (e)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ; (f)  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -4 \end{bmatrix}$ .

**Решение.** Фазовый портрет системы (2.55) изображен на рис. 2.9(a).

Заметим, что замены переменных, заданные формулами (2.56) и (2.57), можно записать в матричной форме  $x = My$  с

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

соответственно. Базисы, в которых  $y_1$  и  $y_2$  являются координатами, — это  $\{(1, 1)^T, (1, 2)^T\}$  для (2.56) и  $\{(1, -1)^T, (0, 1)^T\}$



**Рис. 2.9** Фазовый портрет для канонической системы (2.55): (a) — на плоскости  $y_1, y_2$ ; (b), (c) — на плоскости  $x_1, x_2$ ; где  $x$  связано с  $y$  формулами (2.56) и (2.57) соответственно.

для (2.57). Направления координатных осей  $y_1$  и  $y_2$  указаны на рис. 2.9 (b) и (c) вместе с соответствующим образом трансформированным фазовым портретом из рис. 2.9 (a).

#### 2.4.2. ТИПЫ КАНОНИЧЕСКИХ СИСТЕМ И КАЧЕСТВЕННАЯ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬ

Две жордановы матрицы с разными собственными значениями друг другу не эквивалентны, и, следовательно, их решения не связаны друг с другом линейным преобразованием. Однако особая точка в начале координат для любой простой нелинейной системы принадлежит одному из небольшого числа типов, а именно она может быть узлом, фокусом, седлом и т. д.

Как связаны друг с другом системы с особыми точками одного типа? Рассмотрим, например, каноническую систему

$$\dot{y}_1 = \alpha y_1 - \beta y_2, \quad \dot{y}_2 = \beta y_1 + \alpha y_2, \quad (2.58)$$

где  $\alpha, \beta > 0$ , и систему

$$\dot{z}_1 = z_1 - z_2, \quad \dot{z}_2 = z_1 + z_2. \quad (2.59)$$

Фазовые портреты для обеих систем — неустойчивые фокусы (см. рис. 2.10). Траектории даются уравнениями

$$r = r_0 e^{\alpha t}, \quad \theta = \beta t + \theta_0 \quad (2.60)$$

и

$$R = R_0 e^t, \quad \varphi = t + \varphi_0 \quad (2.61)$$

соответственно; здесь  $(r, \theta)$  и  $(R, \varphi)$  — полярные координаты на плоскостях  $y_1, y_2$  и  $z_1, z_2$ . Траекторию, проходящую через

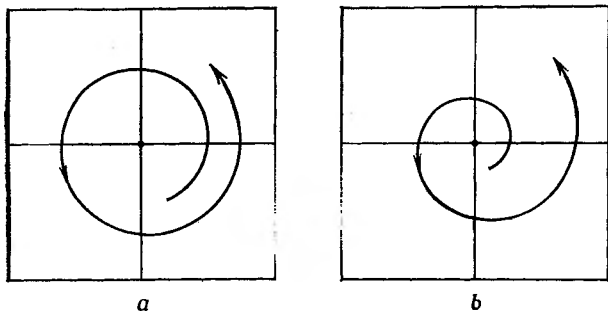


рис. 2.10. Соотношение между фазовыми портретами канонических систем: (а) — на плоскости  $y_1, y_2$  траектория системы (2.60), проходящая через точку  $r_0, \theta_0$ ; (б) — на плоскости  $z_1, z_2$  траектория системы (2.61), проходящая через точку  $R_0, \varphi_0$ .

точку  $(r_0, \theta_0)$ ,  $r_0 \neq 0$ , на плоскости  $y_1, y_2$ , можно отобразить на траекторию, проходящую через  $(R_0, \varphi_0)$  на плоскости  $z_1, z_2$ , с помощью преобразования

$$R = R_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^{1/\alpha}, \quad \varphi = \frac{\theta - \theta_0}{\beta} + \varphi_0. \quad (2.62)$$

Это преобразование позволяет отобразить фазовый портрет на рис. 2.10(а) — траекторию за траекторией — на фазовый портрет рис. 2.10(б). Преобразование (2.62) взаимно однозначно, непрерывно и сохраняет ориентацию траекторий. Однако оно не является линейным преобразованием плоскости  $y_1, y_2$  на плоскость  $z_1, z_2$ , за исключением случая  $\alpha = \beta = 1$ .

В пп. 2.4.1 и 2.4.2 мы более подробно рассмотрели соотношение между системами, имеющими одинаковое качественное поведение (см. также упр. 17). Мы уточним интуитивные идеи п. 1.3 в следующем определении.

**Определение 2.4.1.** Две системы дифференциальных уравнений первого порядка называются *качественно эквивалентными*, если существует непрерывное взаимно однозначное пре-



образование, которое переводит фазовый портрет одной системы в фазовый портрет другой, так что сохраняется ориентация траектории<sup>1)</sup>.

### 2.4.3. КЛАССИФИКАЦИЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ

В этой главе мы проиллюстрировали тот факт, что любая (простая. — *Перев.*) линейная система на плоскости качественно эквивалентна одной из систем, фазовые портреты которых изображены на рис. 2.11. Десять изображенных там

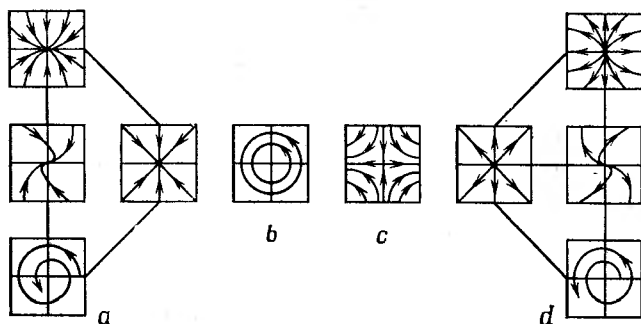


Рис. 2.11. Различные качественные типы фазовых портретов для линейных систем: (а) — устойчивые; (б) — центр; (с) — седло; (д) — неустойчивые. Показано, как они объединяют алгебраические типы, рассмотренные в п. 2.3.

фазовых портретов представляют *алгебраические типы*<sup>2)</sup> линейных систем.

Качественная эквивалентность дает менее подробную классификацию. Можно показать, что все устойчивые (неустойчивые) узлы, вырожденные узлы, фокусы эквивалентны друг другу в смысле определения 2.4.1. Это означает, что классы *алгебраически эквивалентных систем* можно далее группировать в классы *качественно (или топологически) эквивалентных*. В таком смысле существует только четыре типа качественного поведения: устойчивость, центр, седло и неустойчивость.

<sup>1)</sup> Качественная эквивалентность, введенная в определении 2.4.1, называется также топологической эквивалентностью. См., например, Арнольд (1975), § 22. В § 21 того же учебника рассматриваются и другие виды эквивалентности; см. также (Арнольд, 1978\*), гл. 3, разд. 10, Б. — *Прим. перев.*

<sup>2)</sup> Алгебраически эквивалентные системы — это линейно эквивалентные системы в смысле книги (Арнольд, 1975), § 22. — *Прим. перев.*

## 2.5. ОПЕРАТОР ЭВОЛЮЦИИ

В п. 1.5 мы говорили, что траектории линейной системы на плоскости можно описать с помощью матрицы эволюции. Теперь мы остановимся на этом более подробно.

Для любой действительной  $n \times n$ -матрицы  $P$  мы определим экспоненту  $e^P$  формулой

$$e^P =: \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P^k}{k!}; \quad (2.63)$$

здесь  $P^0 = I_n$  — единичная  $n \times n$ -матрица. Пусть  $Q$  — действительная  $n \times n$ -матрица такая, что  $PQ = QP$ ; тогда из (2.63) следует, что

$$e^{P+Q} = e^P e^Q \quad (2.64)$$

(см. упр. 24). Этот результат позволяет заключить, что

$$e^P e^{-P} = e^{-P} e^P = e^0 = I_n, \quad (2.65)$$

так что

$$(e^P)^{-1} = e^{-P}. \quad (2.66)$$

Если мы положим  $P = At$  и продифференцируем (2.63) по  $t$ , то получим<sup>1)</sup>

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At}A. \quad (2.67)$$

Это значит, что

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}\mathbf{x}) = e^{-At}\dot{\mathbf{x}} - e^{-At}A\mathbf{x} = e^{-At}(\dot{\mathbf{x}} - A\mathbf{x}) \equiv \mathbf{0}, \quad (2.68)$$

где  $\mathbf{x}$  удовлетворяет системе  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ . Если нам задано начальное значение  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ , то, интегрируя (2.68) от  $t_0$  до  $t$ , получаем

$$e^{-At}\mathbf{x}(t) = e^{-At_0}\mathbf{x}_0, \quad (2.69)$$

и, следовательно,

$$\mathbf{x}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0 = \varphi_{t-t_0}(\mathbf{x}_0) \quad (2.70)$$

(здесь применено равенство (2.66)). Таким образом, оператор эволюции для системы  $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$  задается матрицей  $e^{A(t-t_0)}$ .

Конечно, чтобы воспользоваться формулой (2.70), мы должны знать  $e^{A(t-t_0)}$ . Для простых канонических систем на

<sup>1)</sup> Доказательство сходимости ряда (2.63) и возможность его дифференцирования при  $P = At$  см., например, в книге (Арнольд, 1975), с. 72, 73. — *Прим. перев.*

плоскости мы можем получить  $e^{Jt}$  из явного вида решений, выписанных в п. 2.3.1. Получаем из (2.44)

$$e^{Jt} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{bmatrix} \text{ для } J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

(включая случай  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ ); из (2.48)

$$e^{Jt} = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ для } J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}; \quad (2.72)$$

из (2.52)

$$e^{Jt} = e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} \text{ для } J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}. \quad (2.73)$$

Эти результаты можно получить непосредственно из (2.63) (см. упр. 25).

Из формул (2.71)–(2.73) можно получить  $e^{At}$  для любой неособой  $2 \times 2$ -матрицы  $A$ , используя соотношение между  $A$  и ее жордановой формой  $J$ . Напомним, что

$$x(t) = My(t) = Me^{Jt}y(0) = (Me^{Jt}M^{-1})x(0), \quad (2.74)$$

поэтому

$$e^{At} = Me^{-1}e^{Jt}M. \quad (2.75)$$

Это дает вполне обозримый способ получения  $e^{At}$ , но применять его на практике не всегда удобно. Можно также использовать общий метод Сильвестра (Барнетт, 1975) вычисления функций от матриц (см. также: Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1966. — Перев.). Мы рассмотрим этот метод для  $n = 2$ .

Пусть действительная  $2 \times 2$ -матрица  $A$  имеет два различных действительных или комплексных собственных значения  $\lambda_1, \lambda_2$ . Определим матрицы  $Q_1, Q_2$  (может быть, комплексные) следующим образом:

$$Q_1 = \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2}, \quad Q_2 = \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \quad (2.76)$$

и заметим, что  $A = \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2$ . Можно показать, что  $Q_1 Q_2 = Q_2 Q_1 = O$ ,  $Q_1^2 = Q_1$ ,  $Q_2^2 = Q_2$  (см. упр. 26), и, следовательно, для любого положительного целого  $k$

$$A^k = (\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2)^k = \lambda_1^k Q_1 + \lambda_2^k Q_2. \quad (2.77)$$

Тогда

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k t^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda_1^k t^k}{k!} Q_1 + \frac{\lambda_2^k t^k}{k!} Q_2 \right) = e^{\lambda_1 t} Q_1 + e^{\lambda_2 t} Q_2. \quad (2.78)$$

Если собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$  матрицы  $A$  совпадают, положим  $Q = A - \lambda_0 I$ , где  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_0$ . В этом случае  $Q^2 = O$  и

$$A^k = (\lambda_0 I + Q)^k = \lambda_0^k I + k\lambda_0^{k-1} Q, \quad (2.79)$$

так как  $Q^k = O$  для  $k \geq 2$ . Тогда

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\lambda_0^k}{k!} I + \frac{k\lambda_0^{k-1}}{k!} Q \right) t^k = e^{\lambda_0 t} (I + t(A - \lambda_0 I)). \quad (2.80)$$

**Пример 2.5.1.** Найти  $e^{At}$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

(а) методом приведения к каноническому виду, (б) с помощью формул (2.78) или (2.80).

**Решение.** (а) Собственные значения матрицы  $A$  совпадают и  $\lambda_0 = 2$ . Собственный вектор  $u_0 = (1, 1)^T$ . Пусть

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.82)$$

тогда

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = J; \quad (2.83)$$

т. е. мы получили жорданову форму. Экспонента жордановой формы

$$e^{Jt} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

согласно (2.72), и

$$\begin{aligned} e^{At} &= Me^{Jt}M^{-1} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \\ &= e^{2t} \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.84)$$

(б) Собственные значения  $A$  уже найдены в (а). Подставим  $A$  и  $\lambda_0 = 2$  в формулу (2.80) и получим

$$e^{At} = e^{2t} \left\{ I + t \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right\} = e^{2t} \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}. \quad (2.85)$$

## 2.6. АФФИННЫЕ СИСТЕМЫ

В этом параграфе мы рассмотрим системы, для которых векторное поле имеет вид

$$X(x) = Ax + h, \quad (2.86)$$

где  $h \in \mathbb{R}^n$ . Такое отображение  $X$  называется *аффинным*. В строго алгебраическом смысле  $Ax + h$  не является линейной функцией от  $x$ , но ясно, что она тесно связана с линейными функциями. Действительно, системы  $\dot{x} = X(x)$ , где функция  $X$  имеет вид (2.86), часто называются *линейными неоднородными* системами в противоположность линейным однородным системам  $\dot{x} = Ax$ . Замена переменных

$$x = y - x_0, \quad (2.87)$$

где  $x_0$  — решение уравнения  $Ax_0 = h$ , позволяет записать (2.86) как

$$Y(y) = X(y - x_0) = A(y - x_0) + h = Ay. \quad (2.88)$$

Тем самым замена переменных (2.87) сводит аффинную систему

$$\dot{x} = Ax + h \quad (2.89)$$

к линейной системе

$$\dot{y} = Ay. \quad (2.90)$$

Но что будет, если  $h$  не принадлежит области значений оператора  $A$  или если  $h$  в формуле (2.89) заменить на вектор  $h(t)$ , зависящий от времени? Неавтономные системы такого вида часто возникают на практике (см. п. 4.2). Обе эти задачи можно решить с помощью оператора эволюции.

Изложенный ниже способ решения является матричным эквивалентом метода «интегрирующего множителя», рассмотренного в упр. 1 (гл. 1). Умножим уравнение (2.89) на  $e^{-At}$  и перепишем в виде

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}x) = e^{-At}h(t). \quad (2.91)$$

Здесь оператор эволюции играет роль «матричного интегрирующего множителя». Пусть задано начальное условие  $x(t_0) = x_0$ ; тогда можно проинтегрировать (2.91) от  $t_0$  до  $t$  и получить

$$e^{-At}x(t) - e^{-At_0}x_0 = \int_{t_0}^t e^{-As}h(s) ds.$$

Так как  $e^{At}e^{-At} = I$ , мы можем найти отсюда  $x(t)$ :

$$x(t) = x_{p. o.}(t) + x_{ч. p.}(t), \quad (2.92)$$

где

$$\mathbf{x}_{p. o.}(t) = e^{A(t-t_0)}\mathbf{x}_0, \quad (2.93)$$

а

$$\mathbf{x}_{ч. p.}(t) = e^{At} \int_{t_0}^t e^{-As} \mathbf{h}(s) ds. \quad (2.94)$$

Формула (2.92) дает решение аффинной системы независимо от того, зависит ли  $\mathbf{h}$  от  $t$ .

Первый член,  $\mathbf{x}_{p. o.}(t)$ , является решением линейной однородной системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$  и удовлетворяет начальному условию  $\mathbf{x}_{p. o.}(t_0) = \mathbf{x}_0$ . Второй член,  $\mathbf{x}_{ч. p.}(t)$ , является некоторым частным решением неоднородной системы. Легко проверить, что  $\mathbf{x}_{ч. p.}(t)$  является решением, удовлетворяющим условию  $\mathbf{x}_{ч. p.}(0) = \mathbf{0}$ , так что  $\mathbf{x}(t)$  в формуле (2.92) удовлетворяет уравнению (2.89) и условию  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ .

**Пример 2.6.1.** Рассмотреть уравнение второго порядка

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 2x = u(t). \quad (2.95)$$

Переписать его как систему первого порядка и найти решение, удовлетворяющее начальным условиям  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$ .

**Решение.** Пусть  $x_1 = x$  и  $x_2 = \dot{x}$ , тогда (2.95) переписывается как

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 - 2x_2 + u(t). \quad (2.96)$$

В матричных обозначениях (2.96) принимает вид  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{h}(t)$ , где

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \text{ и } \mathbf{h}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ u(t) \end{bmatrix} \quad (2.97)$$

Собственные значения матрицы  $\mathbf{A}$  — это  $\lambda_1 = -1 + i$ ,  $\lambda_2 = -1 - i$ , и, согласно (2.78), получаем

$$\begin{aligned} e^{At} &= e^{-t} \left\{ \frac{e^{it}}{2i} \begin{bmatrix} 1+i & 1 \\ -2 & -1+i \end{bmatrix} - \frac{e^{-it}}{2i} \begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{bmatrix} \right\} = \\ &= e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.98)$$

Заданное начальное значение —  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{0}$ , так что в (2.92)  $\mathbf{x}_{p. o.}(t) \equiv \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_{ч. p.}(t)$  и равно

$$e^{-t} \begin{bmatrix} \cos t + \sin t & \sin t \\ -2 \sin t & \cos t - \sin t \end{bmatrix} \int_0^t e^s u(s) \begin{bmatrix} -\sin s \\ \cos s + \sin s \end{bmatrix} ds. \quad (2.99)$$

Отсюда

$$x_1(t) = x(t) = e^{-t} \left\{ \sin t \int_0^t e^s u(s) \cos s ds - \right. \\ \left. - \cos t \int_0^t e^s u(s) \sin s ds \right\}. \quad (2.100)$$

## 2.7. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ В ПРОСТРАНСТВАХ РАЗМЕРНОСТИ БОЛЬШЕ ЧЕМ ДВА

### 2.7.1. ТРЕХМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Действительные жордановы формы для  $3 \times 3$ -матриц имеют вид .

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix}, \quad (2.101)$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix},$$

где  $\alpha, \beta, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$  (см. Хирш и Смейл, 1974)<sup>1)</sup>. Заметим, что все формы в (2.101), кроме последней, можно разбить на диагональные блоки размерности 1 или 2. Например, рассмотрим

$$\dot{y} = Jy, \quad J = \left[ \begin{array}{cc|c} \alpha & -\beta & 0 \\ \beta & \alpha & 0 \\ \hline 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right], \quad (2.102)$$

где  $\lambda_1 < \alpha < 0, \beta > 0$ . Блочная структура матрицы позволяет отделить уравнение для  $y_3$  от первых двух. Действительно, система (2.102) эквивалентна двум системам:

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad (2.103)$$

$$\dot{y}_3 = \lambda_1 y_3. \quad (2.104)$$

Такой процесс позволяет нам выяснить основные качественные черты трехмерного фазового портрета.

<sup>1)</sup> См. также (Кострикин, 1977\*). — Прим. перев.

Уравнение (2.103) показывает, что проекции траекторий на плоскость  $y_3 = \text{const}$  дают устойчивый (так как  $\alpha < 0$ ) фокус; притягивающаяся спираль пробегается против часовой стрелки ( $\beta > 0$ ). Так как  $\lambda_1 < 0$ , то  $|y_3(t)|$  экспоненциально убывает при возрастании  $t$ . Типичная траектория системы (2.102) изображена на рис. 2.12. Спираль, получающаяся при проекции на  $y_3 = \text{const}$ , разворачивается в нечто вроде винтовой линии с убывающим радиусом и ходом.

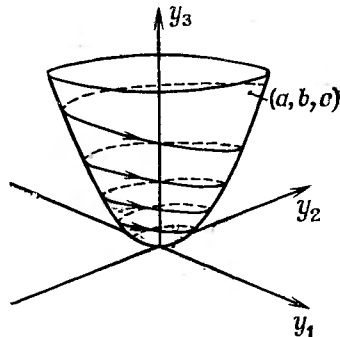


Рис. 2.12. Траектория системы (2.102), проходящая через точку  $(a, b, c)$ . Каждая траектория лежит на некоторой поверхности вида  $y_3 = K(y_1^2 + y_2^2)^{\lambda_1/2\alpha}$ .

Вернемся к жордановым формам (2.101). Последняя форма, не распадающаяся на блоки, дает систему  $\dot{y} = Jy$ , которую можно решить, найдя  $e^{Jt}$ . Оператор эволюции можно найти с помощью разложения (2.63). Заметим, что

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.105)$$

$$J = D + C.$$

Как и в упр. 24, проверяем, что  $DC = CD$  и соотношение (2.64) сводит задачу к определению  $e^{Ct}$ . В нашем случае  $C^3 = O$  и  $e^{Ct} = I + tC + \frac{1}{2}t^2C^2$ . Так что

$$e^{Jt} = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.106)$$

Пример 2.7.1. Для системы

$$\dot{x} = Jx, \quad (2.107)$$

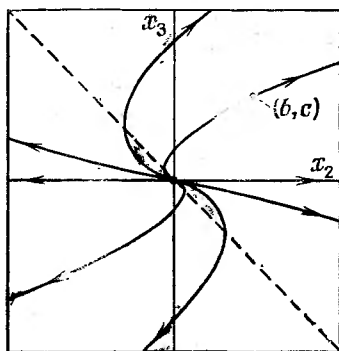


где матрица  $J$  задана формулой (2.105) с  $\lambda_0 > 0$  нарисовать траекторию, удовлетворяющую начальному условию  $x(0) = (0, b, c)$ ,  $b, c > 0$ .

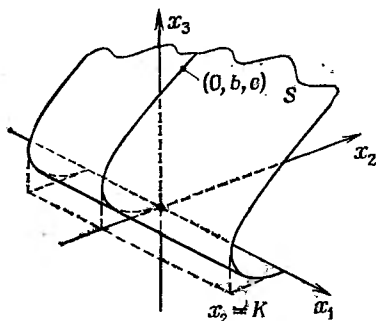
**Решение.** Заметим, что проекция (2.107) на плоскость  $x_2, x_3$ , т. е. система

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad (2.108)$$

не зависит от  $x_1$ . Значит, каждая траектория (2.107) проектируется на одну из траекторий (2.108) на плоскости  $x_2, x_3$ . Система (2.108) имеет в начале координат неустойчивый (так



**Рис. 2.13.** Проекция траекторий системы (2.107) на плоскость  $x_2, x_3$  такие, как на фазовом портрете системы (2.109); это неустойчивый вырожденный узел в начале координат. Прямая  $x_3 = -\lambda_0 x_2$ , на которой  $\dot{x}_2 = 0$ , показана пунктиром.



**Рис. 2.14.** Поверхность  $S$ , на которой лежит траектория  $\{\varphi_t(0, b, c) | t \in \mathbb{R}\}$  системы (2.107); поверхность получается параллельным переносом кривой (2.109) вдоль оси  $x_1$ .

как  $\lambda_0 > 0$ ) вырожденный узел, поэтому ее траектории имеют вид, показанный на рис. 2.13. Пусть  $\varphi_t$  — оператор эволюции для системы (2.107); тогда траектория  $\{\varphi_t(0, b, c) | t \in \mathbb{R}\}$  лежит на цилиндре  $S$  с осью, параллельной оси  $x_1$ , проходящем через траекторию

$$\begin{bmatrix} x_2(t) \\ x_3(t) \end{bmatrix} = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

(см. рис. 2.14).

Заметим, что (2.109) есть проекция кривой

$$\varphi_t(0, b, c) = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2} t^2 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ c \end{bmatrix} \quad (2.110)$$

на плоскость  $x_2, x_3$  (см. вид  $e^{Jt}$  в формуле (2.106)).

Рассмотрим теперь проекцию той же траектории на плоскость  $x_1, x_2$ . Из первого уравнения системы получаем  $\dot{x}_1 = 0$  при  $x_2 = -\lambda_0 x_1$  и  $\dot{x}_2 = 0$  для  $x_3 = -\lambda_0 x_2$ . Эта плоскость пересекает линию складки поверхности  $S$  (см. рис. 2.14). Проекция линии складки на плоскость  $x_1, x_2$  — прямая  $x_2 = K$ ,

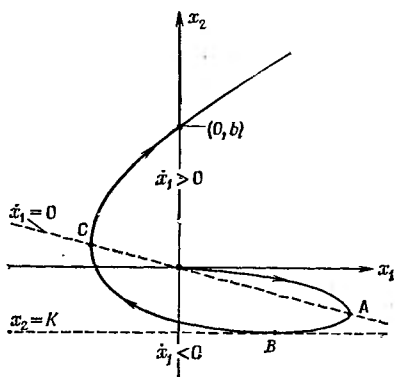


Рис. 2.15. Проекция траектории  $\{\varphi_t(0, b, c) | t \in \mathbb{R}\}$  на плоскость  $x_1, x_2$ . Через  $A, B, C$  обозначены точки, где  $\dot{x}_1 = 0$  или  $\dot{x}_2 = 0$ . Точка поворота на прямой  $x_2 = K$  лежит на проекции линии складки поверхности  $S$ , показанной на рис. 2.14.

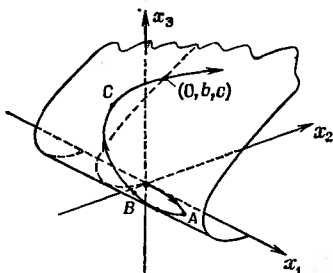


Рис. 2.16. Траектория  $\{\varphi_t(0, b, c) | t \in \mathbb{R}\}$  системы (2.107). Точки экстремума отдельных координат —  $A, B, C$ ; их проекции указаны на рис. 2.15. Кривая (2.109) на плоскости  $x_2, x_3$  обозначена пунктиром.

где  $K$  — значение  $x_2$ , при котором  $\dot{x}_2 = 0$  в (2.109). Мы можем теперь нарисовать проекцию на плоскость  $x_1, x_2$ ; она показана на рис. 2.15.

Наконец, мы можем изобразить требуемую траекторию на поверхности  $S$  (см. рис. 2.16).

### 2.7.2. ЧЕТЫРЕХМЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Жорданова форма  $4 \times 4$ -матрицы  $J$  принадлежит одному из следующих типов:

$$(a) \left[ \begin{array}{ccc|c} B & & & 0 \\ \hline & & & \\ O & & & C \end{array} \right]; \quad (2.111)$$

$$(b) \left[ \begin{array}{ccc|c} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & \lambda_1 \end{array} \right]; \quad (2.112)$$

$$(c) \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}. \quad (2.113)$$

В варианте (а) матрицы  $B$  и  $C$  являются жордановыми матрицами размером  $2 \times 2$ , нулевые внедиагональные элементы — также  $2 \times 2$ -матрицы. В случаях (b) и (c)  $\lambda_0, \lambda_1 \in \mathbb{R}$ .

В случаях (а) и (b) система  $\dot{y} = Jy$  распадается на системы меньшего числа измерений. Для (а) мы имеем

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = B \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \text{ и } \begin{bmatrix} \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = C \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (2.114)$$

а для (b)

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ и } \dot{x}_4 = \lambda_1 x_4. \quad (2.115)$$

Интегральные кривые всех подсистем уже исследовались.

Единственная новая система, которую мы еще не рассматривали, — это система типа (c). Ее траектории можно получить, обобщив метод, которым мы решали (2.106). Получим

$$x(t) = \varphi_t(x_0) = e^{\lambda_0 t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{1}{2}t^2 & \frac{1}{6}t^3 \\ 0 & 1 & t & \frac{1}{2}t^2 \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x_0. \quad (2.116)$$

Таким образом, для четырехмерной системы можно найти решения теми же способами, которые мы использовали в случае  $n = 2, 3$ .

### 2.7.3. $n$ -МЕРНЫЕ СИСТЕМЫ

Идея разложения системы на блоки, которую мы использовали для жордановых форм  $3 \times 3$ - и  $4 \times 4$ -матриц, применима и для произвольного  $n$ . Это значит, что соответствующая каноническая система  $\dot{y} = Jy$  с  $J = M^{-1}AM$  распадается на подсистемы. Эти системы могут иметь

размерность 1

$$\dot{y}_i = \lambda_i y_i, \quad \lambda_i \in \mathbb{R};$$

или размерность 2

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_i \\ \dot{y}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ y_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \beta > 0, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

или размерность  $j$ ,  $2 \leq j \leq n$ ,

$$\begin{bmatrix} \dot{y}_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dot{y}_{i+j-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{i+j-1} \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Однако, как мы видели в случаях  $n = 3$  и  $n = 4$ , все эти системы можно решить и, следовательно, можно решить всю каноническую систему. Конечно, это значит, что можно с помощью преобразования  $x = My$  найти решение для любой системы  $\dot{x} = Ax$ .

## УПРАЖНЕНИЯ

К п. 2.1 и 2.2

1. Показать, как действует каждое из приведенных ниже линейных преобразований, заштриховав образ квадрата  $\{0 \leq x_1, x_2 \leq 1\}$ :

(a)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$ ; (c)  $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ -8 & 3 \end{bmatrix}$ ; (d)  $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ .

Знание образа квадрата поможет нарисовать образы следующих множеств:

(a) окружности  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ ; (b) кривой  $x_1 x_2 = 1$ ,  $x_1, x_2 > 0$ .

2. Доказать, что отношение подобия « $\sim$ » действительных  $n \times n$ -матриц  $A, B$ , определенное как

$$A \sim B \Leftrightarrow B = M^{-1}AM,$$

где  $M$  — некоторая неособая матрица, есть отношение эквивалентности. Кроме того, показать, что все матрицы, принадлежащие одному классу эквивалентности, имеют одинаковые собственные значения. Сгруппировать в классы по этому отношению эквивалентности следующие системы:

(a)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ ; (b)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ .

(c)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 15 & -6 \end{bmatrix} x$ ; (d)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ -4 & 5 \end{bmatrix} x$ ;

(e)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} x$ ; (f)  $\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x$ .

3. Показать, что каждая из заданных систем приводится соответствующим преобразованием к каноническому виду:

$$(a) \dot{x}_1 = 4x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 2x_2, \\ y_1 = 2x_1 + x_2, \quad y_2 = x_1 + x_2;$$

$$(b) \dot{x}_1 = 12x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -26x_1 - 8x_2, \\ y_1 = 2x_1 + x_2, \quad y_2 = 3x_1 + x_2;$$

$$(c) \dot{x}_1 = 10x_1 + 2x_2, \quad \dot{x}_2 = -28x_1 - 5x_2, \\ y_1 = 7x_1 + 2x_2, \quad y_2 = 4x_1 + x_2.$$

Выписать для этих систем матрицы коэффициентов  $A$ , жордановы формы  $J$  и матрицы преобразования переменных  $M$ . Проверить, что выполняется равенство  $J = M^{-1}AM$ .

4. Для каждой из заданных ниже матриц

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & -29 \\ 58 & -41 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ -9 & -3 \end{bmatrix}$$

найти жорданову форму  $J$  и матрицу  $M$ , для которой  $J = M^{-1}AM$ .

5. Как преобразует систему

$$\dot{x}_1 = -7x_1 - 4x_2 - 6x_3,$$

$$\dot{x}_2 = -3x_1 - 2x_2 - 3x_3,$$

$$\dot{x}_3 = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3,$$

замена переменных  $y_1 = x_1 + 2x_3$ ,  $y_2 = x_2$ ,  $y_3 = x_1 + x_3$ ? Поможет ли введение этих новых переменных получить интегральные кривые системы?

6. Доказать, что никакие две различные жордановы  $2 \times 2$ -матрицы не могут быть подобными. Показать, что вследствие этого существует одна и только одна жорданова матрица, подобная заданной  $2 \times 2$ -матрице.

7. Найти характеристические полиномы для матриц

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 6 & -3 \end{bmatrix}$$

и проиллюстрировать на этих примерах теорему Кэли — Гамильтона<sup>1)</sup>.

К п. 2.3

8. Найти интегральную кривую  $x(t)$   $\dot{x} = Ax$ , удовлетворяющую условию  $x(0) = x_0$ , где в качестве  $A$  берутся матрицы из упр. 4.

9. Нарисовать фазовый портрет линейной системы

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

с заданными ниже матрицами  $A$

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix};$$

$$(d) \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; \quad (e) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}; \quad (f) \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix};$$

<sup>1)</sup> Теорема гласит: каждая матрица обращает в нуль свой характеристический полином. — *Прим. перев.*

$$(g) \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}; \quad (h) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad (i) \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(j) \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

10. Показать, как влияет преобразование координат

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

на каждую из систем упр. 9, изобразив фазовый портрет на плоскости  $y_1, y_2$ .

11. Найдите  $2 \times 2$ -матрицу  $A$  такую, чтобы система  $\dot{x} = Ax$  имела интегральную кривую

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} (\cos t + 2 \sin t) \\ e^{-t} \cos t \end{bmatrix}.$$

12. Пусть

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 2 & -4 \end{bmatrix} x$$

и  $y = x_1 + 3x_2$ . Тогда система называется «наблюдаемой», если, зная  $y(t)$ , мы можем получить интегральную кривую  $x(t)$ . Доказать, что при  $y(t) = 4e^{-2t}$  система «наблюдаема»; для этого определите  $x(0)$ .

К п. 2.4

13. Найти точку на плоскости  $\text{Tr} - \text{Det}$ , соответствующую заданным системам, и в соответствии с этим определить характер их фазовых портретов:

$$(a) \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2;$$

$$(b) \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2;$$

$$(c) \dot{x}_1 = x_1 - 4x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - x_2;$$

$$(d) \dot{x}_1 = 2x_2, \quad \dot{x}_2 = -3x_1 - x_2;$$

$$(e) \dot{x}_1 = -x_1 + 8x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_1 + 7x_2.$$

14. Преобразовать систему

$$\dot{x}_1 = -7x_1 + 3x_2; \quad \dot{x}_2 = -8x_1 + 3x_2$$

к координатам  $y_1, y_2$ , которые являются координатами точки  $x$  в базисе  $\{(1, 2), (3, 4)\}$ . Затем нарисовать фазовый портрет на плоскости  $x_1, x_2$ .

15. Пусть  $x(t)$  — траектория линейной системы  $\dot{x} = Ax$ , и пусть  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = O$ . Воспользоваться непрерывностью линейного преобразования  $y = Nx$ , где  $N$  — неособая матрица, и показать, что траектория  $y(t) = Nx(t)$  системы

$$\dot{y} = NAN^{-1}y$$

также обладает свойством

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = O.$$

Вывести из этого утверждения следующее: если система  $\dot{x} = Ax$  имеет устойчивый узел, вырожденный узел или фокус, то то же самое справедливо и для  $y = NAN^{-1}y$ .

16. Получить результат, аналогичный указанному в упр. 15, если траектория  $x(t)$  системы  $\dot{x} = Ax$  удовлетворяет условию  $\lim_{t \rightarrow -\infty} x(t) = O$ . Применяя результаты упр. 15 и 16, показать, что если система  $\dot{x} = Ax$  имеет седло в начале координат, то и система  $\dot{y} = N^{-1}ANy$  также будет иметь седло.

17. Показать, что существует линейное преобразование семейства кривых  $x_2 = Cx_1^\mu$  на семейство кривых  $y_2 = C'y_1^{\mu'}$  ( $\mu, \mu'$  — постоянные) тогда и только тогда, когда  $\mu = \mu'$  или  $\mu = 1/\mu'$ . Исходя из этого, показать, что линейное отображение траекторий системы

$$\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \quad \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2, \quad \lambda_1 \lambda_2 \neq 0,$$

на фазовый портрет системы

$$\dot{y}_1 = \nu_1 y_1, \quad \dot{y}_2 = \nu_2 y_2$$

существует тогда и только тогда, когда

$$\lambda_1/\lambda_2 = \nu_1/\nu_2 \quad \text{или} \quad \lambda_1/\lambda_2 = \nu_2/\nu_1.$$

18. Показать, что существует действительное положительное число  $k$  такое, что непрерывное взаимно однозначное преобразование плоскости

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \begin{cases} x_2^k, & x_2 \geq 0, \\ -(x_2)^k, & x_2 < 0, \end{cases}$$

переводит траектории узла  $\dot{x}_1 = \lambda_1 x_1, \dot{x}_2 = \lambda_2 x_2$  в траектории звездного узла  $\dot{y}_1 = \varepsilon y_1, \dot{y}_2 = \varepsilon y_2, \varepsilon = +1$  или  $-1$ , причем ориентация сохраняется.

19. Показать, что результаты упр. 18 можно применить к построению отображения, которое переводит траектории произвольного седла в траектории седла  $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = -x_2$ .

20. Нарисовать фазовый портрет системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = 3x_2$$

и фазовые портреты, полученные из него:

- (а) отображением относительно оси  $x_1$ ;
- (б) поворотом плоскости  $x_1, x_2$  на угол  $\pi$ ;
- (в) поворотом на  $\pi/2$  против часовой стрелки;
- (г) переменной осей  $x_1$  и  $x_2$ .

Написать для каждого из этих случаев матрицу преобразования и преобразованную систему. Проверить, соответствуют ли нарисованные фазовые портреты полученным системам.

К п. 2.5

21. Вычислить  $e^{At}$  для следующих матриц  $A$ :

(а)  $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ ; (б)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ; (в)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$ ;

(д)  $\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}$ ; (е)  $\begin{bmatrix} -4 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$ .

22. Вычислить  $e^{At}$ , если  $A$  равно

(a)  $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 3 & -8 \end{bmatrix}$ ; (b)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -2 & 6 \end{bmatrix}$ .

Применить полученные результаты к вычислению  $e^{At}$  с  $A$ , равным

(c)  $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 \\ 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ; (d)  $\begin{bmatrix} 2 & -7 & 0 & 0 \\ 3 & -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \end{bmatrix}$ ,

23. Изменить порядок переменных  $x_i$  в системе

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix} x$$

так, чтобы матрица коэффициентов приняла такой вид, как в упр. 22(d). Этим способом или иначе найди траекторию, проходящую через  $(2, 1, 0, 1)^T$  при  $t = 1$ .

24. Доказать, что если  $P$  и  $Q$  — коммутирующие  $n \times n$ -матрицы, то  $P^r Q^s = Q^s P^r$  для любых неотрицательных целых  $r$  и  $s$ .

Вывести отсюда индукцией по  $n$  или иначе соотношение

$$\sum_{k=0}^n \frac{(P+Q)^k}{k!} = \left( \sum_{k=0}^n \frac{P^k}{k!} \right) \left( \sum_{k=0}^n \frac{Q^k}{k!} \right)$$

и, следовательно,  $e^{P+Q} = e^P e^Q$ .

25. Применить формулу (2.63) к вычислению  $e^{At}$ , если

(a)  $A = \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix}$ , полагая  $A = \lambda_0 I + C$ ,  $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ;

(b)  $A = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}$ , полагая  $A = \alpha I + \beta D$ ,  $D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

26. Написать характеристическое уравнение для  $2 \times 2$ -матрицы  $A$ . Применить теорему Кэли — Гамильтона, чтобы выразить  $A^2$  через  $A$  и  $I$ . Использовать этот результат для доказательства следующего факта: если  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) — собственные значения  $A$ , то

$$\left\{ \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \right\} \left\{ \frac{A - \lambda_2 I}{\lambda_1 - \lambda_2} \right\} = O$$

и

$$\left\{ \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \right\}^2 = \left\{ \frac{A - \lambda_1 I}{\lambda_2 - \lambda_1} \right\}$$

(см. п. 2.5).

27. Пусть  $A$  —  $3 \times 3$ -матрица с собственными значениями  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 (= \lambda_0)$ . Показать, что

$$e^{At} = e^{\lambda_0 t} \left( I + tQ + \frac{1}{2} t^2 Q^2 \right)$$

где  $Q = A - \lambda_0 I$ . Обобщить этот результат на  $n \times n$ -матрицы,



## К п. 2.6

28. Там, где это возможно, найти замену переменных, переводящую заданную аффинную систему в соответствующую линейную систему:

$$(a) \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + 3;$$

$$(b) \dot{x}_1 = x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = 3;$$

$$(c) \dot{x}_1 = 2x_1 - 3x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = 6x_1 - 9x_2;$$

$$(d) \dot{x}_1 = 2x_1 - x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = 6x_1 + 3x_2;$$

$$(e) \dot{x}_1 = 2x_1 + x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_3, \quad \dot{x}_3 = x_2 + x_3 + 2;$$

$$(f) \dot{x}_1 = x_1 + x_2 + x_3 + 1, \quad \dot{x}_2 = -x_2, \quad \dot{x}_3 = x_1 + x_3 + 1.$$

Для аффинных систем, которые эквивалентны линейным, определить их алгебраический тип.

29. Найти интегральную кривую  $(x_1(t), x_2(t))$ , удовлетворяющую системе

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2$$

и начальным условиям  $x_1(0) = a, x_2(0) = b$ .

30. Какая получится система, если применить преобразование  $x = My, y \in \mathbb{R}^n$ , к аффинной системе  $\dot{x} = Ax + h$ ? Показать при  $n = 2$ , что любую аффинную систему можно свести к аффинной системе с жордановой матрицей коэффициентов. В случае, когда  $A$  имеет два действительных различных собственных значения, систему  $\dot{x} = Ax + h$  можно сделать распадающейся.

Можно ли с помощью линейного преобразования превратить аффинную систему в линейную?

31. Нарисовать фазовый портрет аффинной системы

$$(a) \dot{x}_1 = 2x_2 + 1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + 1; \quad (b) \dot{x}_1 = x_1 + 2, \quad \dot{x}_2 = 3.$$

## К п. 2.7

32. Показать, что систему

$$\dot{x}_1 = -3x_1 + 10x_2;$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + 5x_2;$$

$$\dot{x}_3 = -2x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

можно преобразовать в систему

$$\dot{y}_1 = ay_1 - by_2;$$

$$\dot{y}_2 = by_1 + ay_2;$$

$$\dot{y}_3 = cy_3,$$

где  $a, b, c$  — некоторые постоянные. Каковы их значения? Найти матрицу  $M$  вида

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

такую, что  $x = My$ .

Какой вид имеет проекция фазового портрета на плоскость  $y_1, y_2$  и на ось  $y_3$ ? Нарисовать какие-нибудь траектории преобразованной системы.

33. Найти интегральную кривую системы

$$\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2 + x_3;$$

$$\dot{x}_2 = x_2 + x_3;$$

$$\dot{x}_3 = 2x_3$$

удовлетворяющую начальным условиям  $x_1(0) = x_2(0) = 0, x_3(0) = 1$ .

34. Найти вид интегральных кривых системы  $\dot{x} = Ax, x \in \mathbb{R}^4$ , если  $A$  равно:

$$(a) \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad (b) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}; \quad (c) \begin{bmatrix} \alpha & -\beta & 0 & 0 \\ \beta & \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\delta \\ 0 & 0 & \delta & \gamma \end{bmatrix}.$$

35. Рассмотреть шестимерную систему

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix}.$$

Разбить ее на подсистемы и изобразить на фазовой плоскости поведение каждой подсистемы.

### 3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

В этой главе мы рассматриваем фазовые портреты систем  $\dot{x} = X(x)$ ,  $x \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ , где  $X$  — непрерывно дифференцируемая нелинейная функция. В отличие от пп. 1.2 и 2.3 эти фазовые портреты не всегда определяются характером неподвижных точек системы.

#### 3.1. ЛОКАЛЬНОЕ И ГЛОБАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

**Определение 3.1.1.** *Окрестностью  $N$  точки  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  называется любое подмножество  $\mathbb{R}^2$ , содержащее круг  $\{x \mid |x - x_0| < r\}$  с некоторым  $r > 0$ .*

**Определение 3.1.2.** *Часть фазового портрета системы, находящаяся в окрестности  $N$  точки  $x_0$ , называется *сужением* фазового портрета на  $N$ .*

Эти определения иллюстрируются на рис. 3.1 для простой линейной системы. При исследовании нелинейных систем нам часто приходится встречаться с сужениями полных, или *глобальных фазовых портретов* на некоторую окрестность точки  $x_0$ , которую мы можем выбирать сколь угодно малой (см. п. 3.3). Такое сужение мы будем называть *локальным фазовым портретом* в точке  $x_0$ .

Рассмотрим сужение простой линейной системы на некоторую окрестность  $N$  начала координат. Существует окрестность  $N' \subseteq N$  такая, что сужение этого фазового портрета на  $N'$  качественно эквивалентно глобальному фазовому портрету данной простой линейной системы. Другими словами, существует непрерывное взаимно однозначное соответствие между  $N'$  и  $\mathbb{R}^2$ , отображающее сужение фазового портрета на  $N'$  на полный фазовый портрет. Этот результат проиллюстрирован на рис. 3.2. В качестве окрестности  $N$  взят прямоугольник  $\{(x_1, x_2) \mid a < x_1 < b, c < x_2 < d; a, c < 0; b, d > 0\}$ . Пусть  $N'$  — внутренность критической траектории  $T$ , обозначенной на рис. 3.2(b) пунктиром. Каждую траекторию на глобальном фазовом портрете, изображенном на рис. 3.2(a), можно поставить в соответствие некоторой траектории сужения на

$N'$ , и наоборот. Если мы рассмотрим сужение устойчивого узла, показанное на рис. 3.1 (b), то результат не изменится, но в этом случае  $N' = N$ .

Именно эту качественную эквивалентность фазового портрета и его сужение мы подразумеваем, когда говорим, что фазовый портрет простой линейной системы определяется ха-

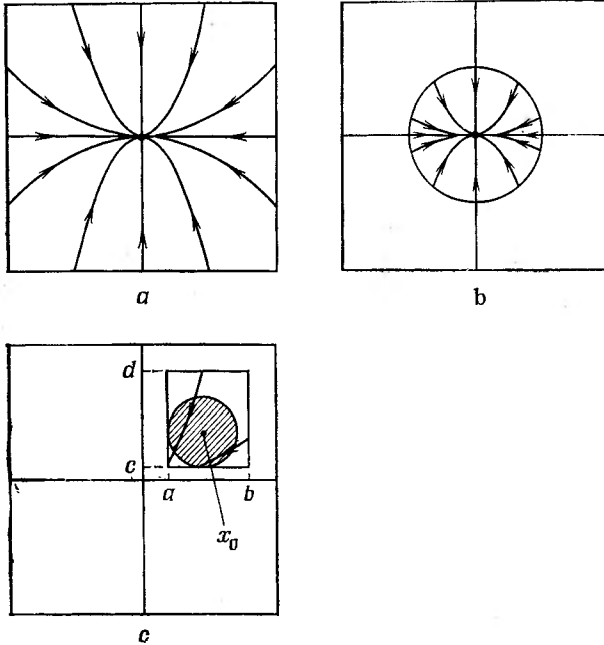


Рис. 3.1. (a) — фазовый портрет системы  $\dot{x}_1 = -x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -2x_2$ ; (b) — сужение (a) на окрестность начала координат  $N = \{x \mid |x| < a\}$ ,  $a > 0$ ; (c) — сужение (a) на окрестность  $N = \{x \mid a < x_1 < b, c < x_2 < d\}$ ,  $a, b, c, d > 0$  некоторой точки  $x_0$ , где  $x \neq 0$ . Показан заштрихованный круг с центром в  $x_0$ , лежащий в этой окрестности.

рактером особой точки. Другими словами, *локальный* фазовый портрет в начале координат качественно эквивалентен *глобальному* фазовому портрету системы.

Нелинейные системы могут иметь более одной неподвижной точки, и часто мы можем для каждой из них построить локальный фазовый портрет. Однако, как показывает рис. 3.3, локальные фазовые портреты *не всегда* определяют глобальный фазовый портрет. На рисунке изображены три качественно различных глобальных фазовых портрета, каждый из которых содержит три неподвижные точки. Локальные фазовые портреты в этих фиксированных точках во всех случаях одинаковы.

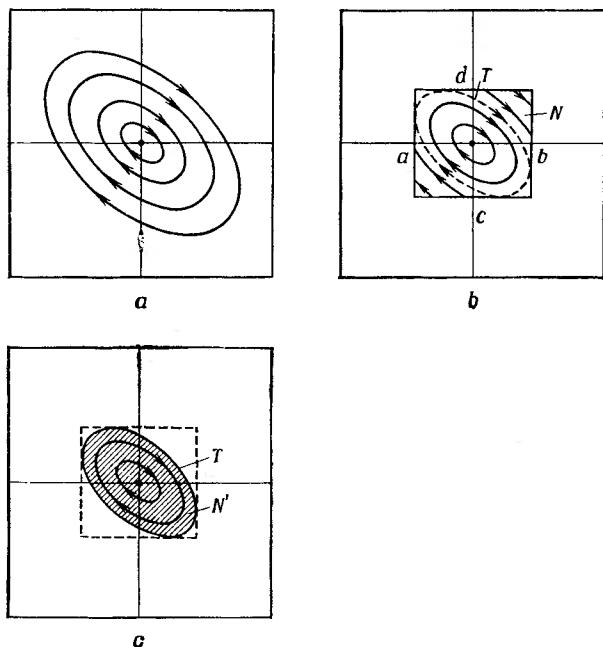


Рис. 3.2. (a) — фазовый портрет системы  $\dot{x}_1 = 3x_1 + 4x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -3x_1 - 3x_2$ ; (b) — сужение (a) на окрестность  $N = \{(x_1, x_2) \mid a < x_1 < b, c < x_2 < d, a, c < 0, b, d > 0\}$ . Критическая траектория  $T$  показана пунктиром. (c) — сужение на заштрихованную окрестность  $N' = \{x \mid x \text{ внутри } T\}$ . Это сужение качественно эквивалентно (a).

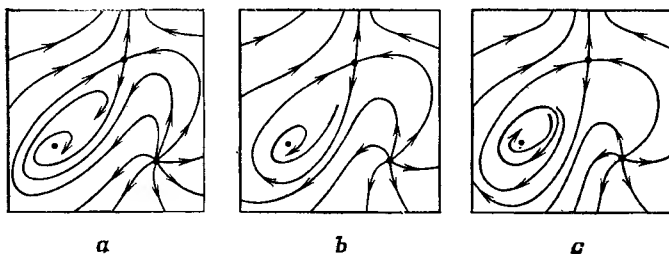


Рис. 3.3. Качественно различные фазовые портреты, совместные с заданным локальным поведением в трех неподвижных точках.

Такие фазовые портреты действительно возникают для нелинейной системы

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -\alpha x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(x_1^2 + x_2^2); \\ \dot{x}_2 &= \alpha x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2) + \beta\end{aligned}\quad (3.1)$$

при соответствующем выборе параметров  $\alpha$  и  $\beta$ .

На рис. 3.3(c) показано еще одно глобальное свойство фазовых портретов, которое не вытекает из исследования неподвижных точек. Изолированная замкнутая орбита вокруг одной из неподвижных точек называется *предельным циклом*. Нахождение предельных циклов требует глобального подхода (см. п. 3.9).

Таким образом, рассмотрение нелинейных систем требует техники, пригодной для исследования как локального, так и глобального поведения. Локальное поведение изучается в пп. 3.2—3.6.1 включительно, а дальнейшие п. 3.6.2—3.9 посвящены глобальным вопросам.

### 3.2. ЛИНЕАРИЗАЦИЯ В ОКРЕСТНОСТИ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКИ

Мы начнем с изучения нелинейных систем, имеющих неподвижную точку в начале координат.

**Определение 3.2.1.** Допустим, что систему  $\dot{y} = Y(y)$  можно записать в виде

$$\begin{aligned}\dot{y}_1 &= ay_1 + by_2 + g_1(y_1, y_2); \\ \dot{y}_2 &= cy_1 + dy_2 + g_2(y_1, y_2),\end{aligned}\quad (3.2)$$

где  $[g_i(y_1, y_2)/r] \rightarrow 0$  при  $r = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \rightarrow 0$ . Линейная система

$$\dot{y}_1 = ay_1 + by_2, \quad \dot{y}_2 = cy_1 + dy_2 \quad (3.3)$$

называется *линеаризацией* системы (3.2) (или *линеаризованной системой*, соответствующей (3.2)) в начале координат. Компоненты линейного векторного поля системы (3.3) называются *линейной частью* (3.2).

**Пример 3.2.1.** Найти линеаризацию следующих систем:

$$(a) \quad \dot{y}_1 = y_1 + y_1^2 + y_1 y_2^2, \quad \dot{y}_2 = y_2 + y_2^{3/2};$$

$$(b) \quad \dot{y}_1 = y_1^3, \quad \dot{y}_2 = y_2 + y_2 \sin y_1;$$

$$(c) \quad \dot{y}_1 = y_1^2 e^{y_2}, \quad \dot{y}_2 = y_2 (e^{y_1} - 1).$$

**Решение.** Для каждой системы составим таблицу действительных чисел  $a, b, c, d$  и функций  $g_1$  и  $g_2$ . Функции  $g_i$

( $i = 1, 2$ ) задаются в полярных координатах, чтобы легче было проверить условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} [g_1(y_1, y_2)/r] = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.4)$$

Система	a	b	c	d	$g_1$	$g_2$
(a)	1	0	0	1	$r^2 (\cos^2 \theta + r \cos \theta \sin^2 \theta)$	$r^{3/2} \sin^{3/2} \theta$
(b)	0	0	0	1	$r^3 \cos^3 \theta$	$r \sin \theta \sin (r \cos \theta)$
(c)	0	0	0	0	$r^2 \cos^2 \theta e^{r \sin \theta}$	$r \sin \theta (r \cos \theta +$ $+ \frac{1}{2} r^2 \cos^2 \theta + \dots)$

Следовательно, линеаризация имеет вид

$$\begin{aligned} (a) \quad & \dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2; \\ (b) \quad & \dot{y}_1 = 0, \quad \dot{y}_2 = y_2; \\ (c) \quad & \dot{y}_1 = 0, \quad \dot{y}_2 = 0. \end{aligned}$$

Определение 3.2.1 можно также применить к неподвижным точкам, отличным от начала координат, введя *локальные координаты*. Пусть  $(\xi, \eta)$  — неподвижная точка нелинейной системы  $\dot{x} = X(x)$ ,  $x = (x_1, x_2)$ . При замене переменных

$$y_1 = x_1 - \xi, \quad y_2 = x_2 - \eta \quad (3.5)$$

начало координат перейдет в точку плоскости  $x_1, x_2$  с координатами  $(\xi, \eta)$ . Координаты  $y_1, y_2$  называются локальными координатами в точке  $(\xi, \eta)$ . В этих координатах система имеет вид

$$\dot{y}_i = \dot{x}_i = X_i(y_1 + \xi, y_2 + \eta), \quad i = 1, 2, \quad (3.6)$$

где  $X_1, X_2$  — компоненты вектора  $X$ . Если мы положим

$$Y_i(y_1, y_2) = X_i(y_1 + \xi, y_2 + \eta), \quad (3.7)$$

то (3.6) превратится в

$$\dot{y}_i = Y_i(y_1, y_2), \quad i = 1, 2, \quad \text{или} \quad \dot{y} = Y(y). \quad (3.8)$$

Для системы (3.8) интересующая нас неподвижная точка находится в начале координат, и в ней можно строить линеаризацию в соответствии с определением 3.2.1.

**Пример 3.2.2.** Показать, что система

$$\dot{x}_1 = e^{x_1+x_2} - x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_1 x_2 \quad (3.9)$$

имеет только одну неподвижную точку. Найти линеаризацию системы (3.9) в этой точке.

**Решение.** Неподвижные точки системы удовлетворяют уравнениям

$$e^{x_1+x_2} - x_2 = 0 \quad (3.10)$$

и

$$x_1(x_2 - 1) = 0. \quad (3.11)$$

Уравнение (3.11) удовлетворяется только при  $x_1 = 0$  или  $x_2 = 1$ . Если  $x_1 = 0$ , то (3.10) превращается в уравнение  $e^{x_2} = x_2$  не имеющее действительных решений (так как  $e^{x_2} > x_2$  для всех действительных  $x_2$ ). Поэтому при  $x_1 = 0$  нет неподвижных точек. Если же  $x_2 = 1$ , то (3.10) дает  $e^{x_1+1} = 1$ , а это уравнение имеет одно действительное решение  $x_1 = -1$ . Таким образом,  $(x_1, x_2) = (-1, 1)$ , и это единственная неподвижная точка системы (3.9).

Чтобы найти линеаризованную систему в точке  $(-1, 1)$ , введем локальные координаты  $y_1 = x_1 + 1$ ,  $y_2 = x_2 - 1$ . Получим

$$\dot{y}_1 = e^{y_1+y_2} - y_2 - 1, \quad \dot{y}_2 = -y_2 + y_1 y_2. \quad (3.12)$$

Эту систему можно записать в виде (3.2), разложив  $e^{y_1+y_2}$  в степенной ряд:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 + \left\{ \frac{(y_1 + y_2)^2}{2!} + \frac{(y_1 + y_2)^3}{3!} + \dots \right\}; \\ \dot{y}_2 &= -y_2 + y_1 y_2. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Отсюда видно, что линеаризация имеет вид

$$\dot{y}_1 = y_1, \quad \dot{y}_2 = -y_2. \quad (3.14)$$

Пример 3.2.2 подсказывает стандартный способ получения линеаризаций при помощи разложения в ряд Тейлора. Если компоненты вектора  $X$ ,  $X_i(x_1, x_2)$ ,  $i = 1, 2$ , непрерывно дифференцируемы в некоторой окрестности точки  $(\xi, \eta)$ , то для каждого  $i$

$$\begin{aligned} X_i(x_1, x_2) &= X_i(\xi, \eta) + (x_1 - \xi) \frac{\partial X_i}{\partial x_1}(\xi, \eta) + \\ &+ (x_2 - \eta) \frac{\partial X_i}{\partial x_2}(\xi, \eta) + R_i(x_1, x_2). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Остаточные члены  $R_i(x_1, x_2)$  удовлетворяют условию

$$\lim_{r \rightarrow 0} [R_i(x_1, x_2)/r] = 0; \quad (3.16)$$

здесь  $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$ . Если  $(\xi, \eta)$  — неподвижная точка системы  $\dot{x} = X(x)$ , то  $X_i(\xi, \eta) = 0$  ( $i = 1, 2$ ); вводя



локальные координаты (13.5), мы получим

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_1 \frac{\partial X_1}{\partial x_1}(\xi, \eta) + y_2 \frac{\partial X_1}{\partial x_2}(\xi, \eta) + R_1(y_1 + \xi, y_2 + \eta) \\ \dot{y}_2 &= y_1 \frac{\partial X_2}{\partial x_1}(\xi, \eta) + y_2 \frac{\partial X_2}{\partial x_2}(\xi, \eta) + R_2(y_1 + \xi, y_2 + \eta). \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из соотношения (3.16) следует, что система (3.17) имеет вид (3.2), где  $g_i(y_1, y_2) \equiv R_i(y_1 + \xi, y_2 + \eta)$ ,  $i = 1, 2$ , а для линеаризованной системы в точке  $(\xi, \eta)$  имеем

$$a = \frac{\partial X_1}{\partial x_1}, \quad b = \frac{\partial X_1}{\partial x_2}, \quad c = \frac{\partial X_2}{\partial x_1}, \quad d = \frac{\partial X_2}{\partial x_2}, \quad (3.18)$$

причем значения всех производных берутся в точке  $(\xi, \eta)$ . Таким образом, линеаризованная система имеет вид  $\dot{y} = Ay$ , где

$$A = \left[ \begin{array}{cc} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} & \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} & \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \end{array} \right] \Big|_{(x_1, x_2) = (\xi, \eta)}. \quad (3.19)$$

**Пример 3.2.3.** Получить линеаризацию системы (3.9) с помощью разложения  $X_1$  и  $X_2$  в ряд Тейлора в окрестности  $(-1, 1)$ .

**Решение.** Вспомним, что

$$X_1(x_1, x_2) = e^{x_1+x_2} - x_2, \quad X_2(x_1, x_2) = -x_1 + x_1x_2.$$

Матрица  $A$  из (3.19) имеет вид

$$A = \left[ \begin{array}{cc} e^{x_1+x_2} & e^{x_1+x_2} - 1 \\ -1 + x_2 & x_1 \end{array} \right] \Big|_{(x_1, x_2) = (-1, 1)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Следовательно, линеаризация в точке  $(-1, 1)$  есть

$$\dot{y}_1 = y_2, \quad \dot{y}_2 = -y_2;$$

результат получился тот же.

### 3.3. ТЕОРЕМА О ЛИНЕАРИЗАЦИИ

Эта теорема устанавливает связь фазового портрета нелинейной системы в окрестности некоторой неподвижной точки с фазовым портретом ее линеаризации.

**Определение 3.3.1.** Говорят, что начало координат является *простой* неподвижной точкой системы  $\dot{y} = X(y)$ ,  $y \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ , если соответствующая линеаризованная система проста.

Это определение распространяет понятие простоты (см. п. 2.3) на неподвижные точки нелинейных систем. Его можно применять и в том случае, когда интересующая нас особая точка не находится в начале координат; тогда надо ввести локальные координаты, как в п. 3.2.

**Теорема 3.3.1 (теорема о линеаризации).** Пусть нелинейная система

$$\dot{y} = Y(y) \quad (3.20)$$

имеет простую неподвижную точку  $y = 0$ . Тогда в окрестности начала координат фазовые портреты этой системы и ее линеаризации качественно эквивалентны, если только неподвижная точка линеаризованной системы не является центром.

Эта важная теорема в настоящей книге не доказывается. Заинтересованный читатель может найти ее доказательство в книге (Хартман, 1964).

Теорема о линеаризации лежит в основе одного из основных методов исследования нелинейных систем — метода исследования устойчивости по линейному приближению. Однако иногда путают саму теорему и технику ее применения и поэтому недооценивают значение теоремы.

Например, можно сделать следующее ошибочное заключение: так как из определения линеаризованной системы видно, что в достаточно малой окрестности начала координат линейная часть векторного поля  $Y$  служит количественным приближением для самого поля  $Y$ , то, очевидно, качественное поведение обоих полей должно быть одинаковым. Приведенное рассуждение неправильно; в этом можно убедиться на примере системы, линеаризация которой имеет центр (именно этот случай исключается из формулировки теоремы).

**Пример 3.3.1.** Показать, что две системы:

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (3.21)$$

и

$$\dot{x}_1 = -x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (3.22)$$

имеют одну и ту же линеаризацию в начале координат, но их фазовые портреты качественно различны.

**Решение.** Обе системы (3.21) и (3.22) уже представлены в виде (3.2), так как

$$\lim_{r \rightarrow 0} [x_1(x_1^2 + x_2^2)/r] = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} [x_2(x_1^2 + x_2^2)/r] = 0.$$

Таким образом, линеаризация обеих систем имеет вид

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1; \quad (3.23)$$

эта система имеет центр в точке  $x_1 = x_2 = 0$ . Однако в полярных координатах система (3.21) принимает вид

$$\dot{r} = r^3, \quad \dot{\theta} = +1 \quad (3.24)$$

а система (3.22) — вид

$$\dot{r} = -r^3, \quad \dot{\theta} = +1. \quad (3.25)$$

Из уравнения (3.24) видно, что  $\dot{r} > 0$  для всех  $r > 0$  и что траектории (3.21) — спирали, раскручивающиеся при возрастании  $t$ . С другой стороны, (3.25) дает  $\dot{r} < 0$  при  $r > 0$

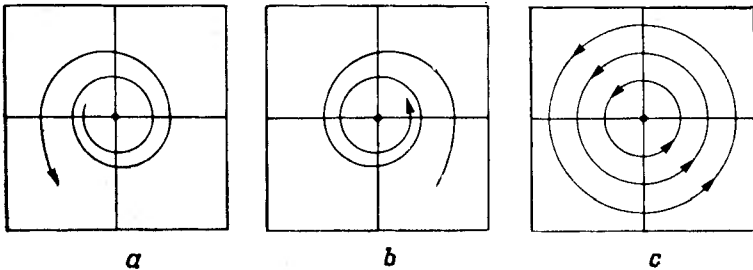


Рис. 3.4. Фазовые портреты для систем (3.21) (а) и (3.22) (b); (c) — их линеаризации (3.23).

и траектории системы (3.22) — спирали, закручивающиеся вокруг начала координат при возрастании  $t$  (см. рис. 3.4). Таким образом, неподвижная точка неустойчива для (3.21), а для (3.22) устойчива. (Определение устойчивости и неустойчивости см. на с. 97, 99. — *Перев.*) Однако векторные поля как той, так и другой системы в достаточно малой окрестности начала координат с любой заданной точностью приближаются линейным векторным полем (3.23).

Пример 3.3.1 показывает, что количественная близость векторного поля  $Y$  и его линейной части не гарантирует качественной эквивалентности нелинейной системы и ее линеаризации. Теорема о линеаризации заключается в том, что центр является *единственным* исключением. Иначе говоря, если собственные значения линеаризованной системы имеют действительную часть, отличную от нуля, то фазовые портреты нелинейной системы и ее линеаризации качественно эквивалентны в окрестности неподвижной точки. Такие неподвижные точки называются *гиперболическими*. Некоторые примеры даны на рис. 3.5.

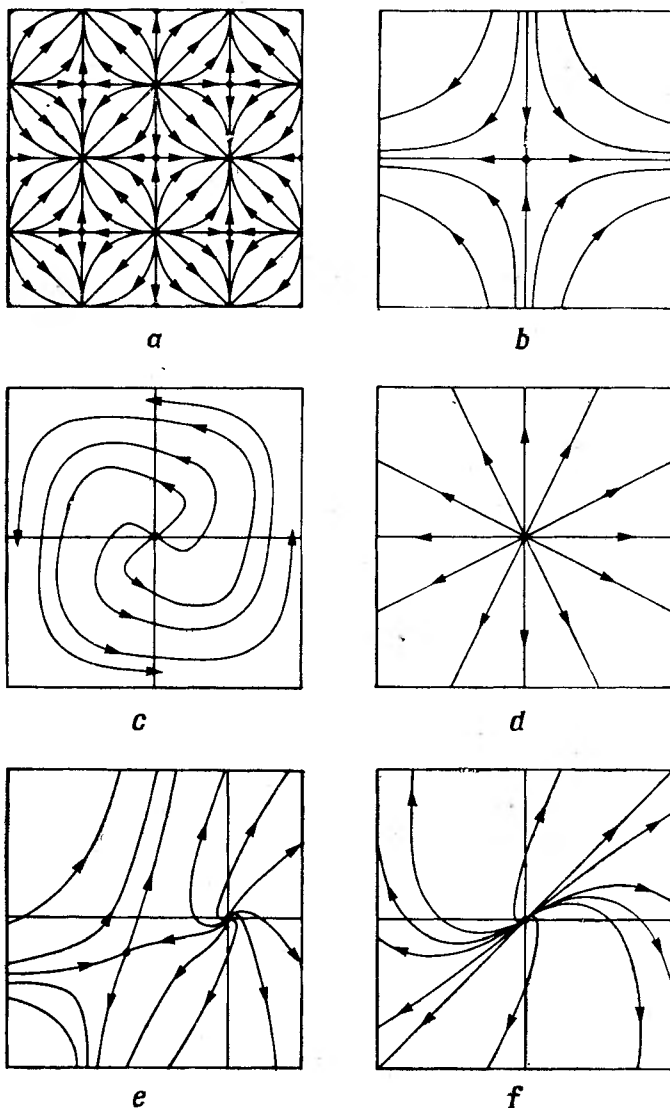


Рис. 3.5. Нелинейные фазовые портреты и их линеаризация в начале координат: (а) — нелинейная система  $\dot{x}_1 = \sin x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -\sin x_2$ ; (б) линеаризованная система для (а):  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2$ , седло; (с) — нелинейная система  $\dot{x}_1 = x_1 - x_1^3$ ,  $\dot{x}_2 = x_2 + x_1^3$ ; (д) — линеаризация системы (с):  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_2$ , неустойчивый звездный узел; (е) — нелинейная система  $\dot{x}_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + x_1^2$ ,  $\dot{x}_2 = \frac{1}{2}(3x_2 - x_1)$ ; (ф) — линеаризованная система для (е):  $\dot{x}_1 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = \frac{1}{2}(3x_2 - x_1)$ . Все эти неподвижные точки гиперболические.

Заметим, что аналогия между неподвижными точками нелинейных систем и их линеаризацией более тонкая, чем просто качественная эквивалентность, и не сводится к окончательной классификации неподвижных точек на устойчивые, седловые и неустойчивые, приведенной на рис. 2.11. Внутри устойчивых и неустойчивых классов для неподвижных точек нелинейных систем также можно определить узлы, вырожденные узлы и фокусы<sup>1)</sup> таким образом, что если неподвижная точка линеаризации является узлом, вырожденным узлом или фокусом, то такой же характер имеет неподвижная точка исходной нелинейной системы.

Это общее свойство гиперболических неподвижных точек связано со специальным видом непрерывного взаимно однозначного преобразования, связывающего нелинейную систему и ее линеаризацию. Такое отображение должно отражать количественное соотношение между  $Y$  и его линейной частью в данной неподвижной точке. В достаточно малой окрестности неподвижной точки оно должно быть в некотором смысле близко к тождественному отображению. Это свойство указанного непрерывного взаимно однозначного отображения позволяет использовать некоторую дополнительную информацию о линеаризованной системе.

*Сепаратрисой* называется траектория, которая входит в неподвижную точку (или выходит из нее), касаясь некоторого фиксированного направления. Из этого определения следует, что касательные к сепаратрисам линеаризованной системы в некоторой неподвижной точке являются касательными и к сепаратрисам нелинейной системы.

**Пример 3.3.2.** Применить теорему о линеаризации и нарисовать фазовый портрет системы

$$\dot{x}_1 = x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - x_2 e^{x_1} \quad (3.26)$$

в начале координат.

**Решение.** Компоненты векторного поля системы (3.26) дважды непрерывно дифференцируемы, и, следовательно, применима формула (3.19). Получаем при  $(x_1, x_2) = (0, 0)$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} (x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1) & \frac{\partial}{\partial x_2} (x_1 + 4x_2 + e^{x_1} - 1) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} (-x_2 - x_2 e^{x_1}) & \frac{\partial}{\partial x_2} (-x_2 - x_2 e^{x_1}) \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

<sup>1)</sup> См. (Баутин Н. Н., Леонтович Е. А., 1976\*). — Прим. перев.

откуда ясно, что линейризация имеет вид

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 4x_2, \quad \dot{x}_2 = -2x_2. \quad (3.28)$$

Это простая линейная система с седлом в начале координат ( $\det A < 0$ ).

Направления сепаратрис задаются собственными векторами  $(1, 0)^T$  и  $(1, -1)^T$  матрицы  $A$ . Они соответствуют собственным значениям  $+2$  и  $-2$ . Движение по сепаратрисе первого направления идет от начала координат (сепаратриса неустойчива), а по сепаратрисе второго направления — к на-

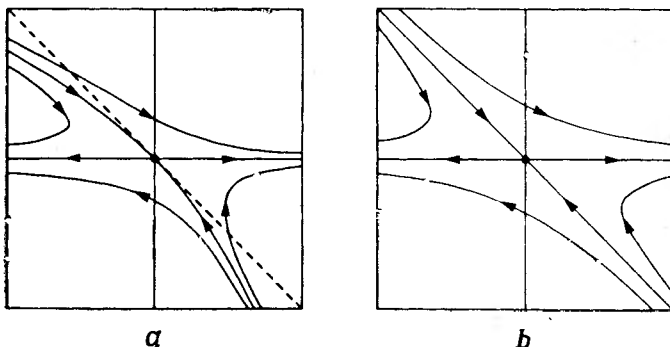


Рис. 3.6. (а) — фазовый портрет системы (3.26); (б) — ее линейризации (3.28). Заметим, что ось  $x_1$  является неустойчивой сепаратрисой для обеих систем, так как и для системы (3.26), и для системы (3.28)  $\dot{x}_2 = 0$  при  $x_2 = 0$ . Но устойчивые сепаратрисы систем (3.26) и (3.28) только касаются друг друга в начале координат.

чалу (сепаратриса устойчива). Итак, неустойчивые сепаратрисы лежат на прямой  $x_2 = 0$ , а устойчивые — на прямой  $x_2 = -x$  (см. рис. 3.6(б)).

Для системы (3.26) существует некоторая окрестность начала координат, в которой нелинейные сепаратрисы имеют вид, указанный на рис. 3.6(а). Это следует из того, что на прямой  $x_2 = -x_1$  справедливо  $dx_2/dx_1 \geq -1$  при  $x_1 \leq 0$ .

Другие примеры касания сепаратрис нелинейных систем и сепаратрис их линейризаций можно найти на рис. 3.5. Особенно интересен звездный узел на рис. 3.5(с) и (д), потому что как для линейной, так и для нелинейной системы каждая траектория является сепаратрисой<sup>1)</sup>, т. е. каждая траектория нелинейной системы при приближении к началу координат касается соответствующей ей траектории линейной системы.

<sup>1)</sup> Тот факт, что для нелинейной системы (с) получается звездный узел, здесь не доказан. — Прим. перев.

Наши примеры показывают, что при исследовании нелинейных систем существенны направления сепаратрис соответствующих линеаризаций. Они дают нам направления нелинейных сепаратрис в неподвижной точке. Эти направления называются *главными направлениями* в данной неподвижной точке и обычно (как в примере 3.3.2) получаются из линейного преобразования, связывающего линеаризованную систему с ее канонической системой.

### 3.4. НЕПРОСТЫЕ НЕПОДВИЖНЫЕ ТОЧКИ

Говорят, что неподвижная точка нелинейной системы непростая, если соответствующая линеаризованная система является непростой. Напомним, что такие линейные системы имеют целую прямую, а иногда и целую плоскость, неподвижных точек. Нелинейные члены  $g_1$  и  $g_2$  могут существенно изменить это поведение; см., например, рис. 3.7.

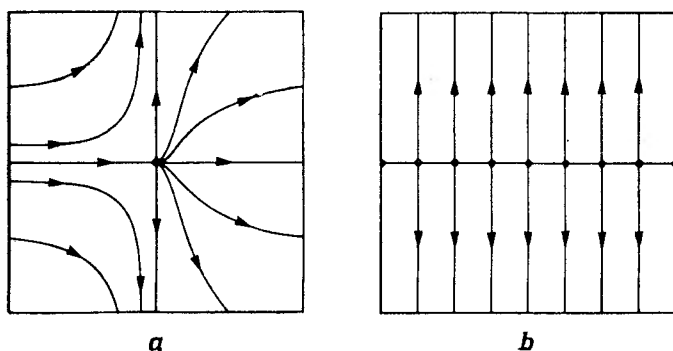


Рис. 3.7. Фазовые портреты: (а) — для системы  $\dot{x}_1 = x_1^2$ ,  $\dot{x}_2 = x_2$  и (б) — для линеаризации этой системы в точке  $(0, 0)$ :  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = x_2$ ; здесь ось  $x_1$  состоит из неподвижных точек.

Характер локального фазового портрета определяется теперь нелинейными членами. Поэтому в отличие от простых неподвижных точек, рассмотренных в п. 3.3, существует бесконечно много различных типов локальных фазовых портретов. Некоторые примеры, показывающие, что может происходить даже для полиномов небольшой степени по  $x_1$  и  $x_2$ , изображены на рис. 3.8—3.10. Линеаризации всех систем, приведенных на этих рисунках, имеют на своих фазовых портретах по крайней мере одну прямую, состоящую из неподвижных точек. Эти рисунки показывают сравнительно простые нелинейные векторные поля.

Линии, состоящие из неподвижных точек, могут возникать и в нелинейных системах; они не обязаны быть прямыми

и всегда состоят из непростых неподвижных точек. Рассмотрим, например, систему

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2^2, \quad \dot{x}_2 = x_2(x_1 - x_2^2). \quad (3.29)$$

Неподвижные точки (3.29) лежат на параболе  $x_2^2 = x_1$ . В про-

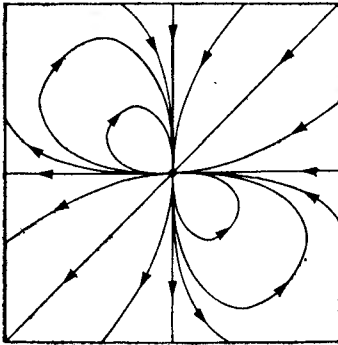


Рис. 3.8.  $\dot{x}_1 = x_1(x_1 + 2x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = x_2(2x_1 + x_2)$ ; линеаризация  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ .

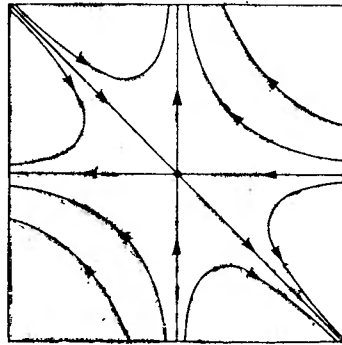


Рис. 3.9.  $\dot{x}_1 = x_1(x_1 - 2x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = x_2(2x_1 - x_2)$ ; линеаризация  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ .

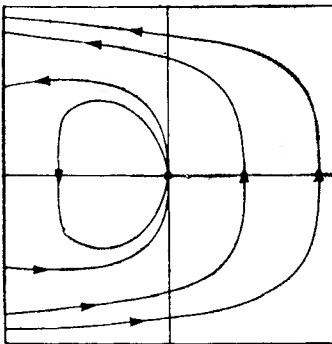


Рис. 3.10.  $\dot{x}_1 = -x_2^5$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 + x_2^2$ ; линеаризация  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = x_1$ .

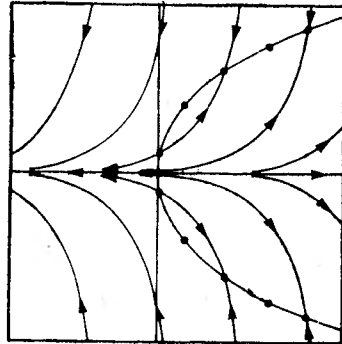


Рис. 3.11. Фазовый портрет для системы  $\dot{x}_1 = x_1 - x_2^2$ ,  $\dot{x}_2 = x_2(x_1 - x_2^2)$ ; непростые неподвижные точки лежат на параболе  $x_2^2 = x_1$ .

извольной точке  $(k^2, k)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , линеаризация имеет вид  $y = Ay$ , где

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2k \\ k & -2k^2 \end{bmatrix}. \quad (3.30)$$

Ясно, что  $\det A = 0$  для всех  $k$ , так что неподвижные точки непростые. Фазовый портрет (3.29) показан на рис. 3.11.



В силу сделанных выше замечаний неудивительно, что не существует подробной классификации непростых неподвижных точек. Однако приведенные ниже определения устойчивости (применимые как к простым, так и к непростым неподвижным точкам) позволяют дать грубую классификацию качественного поведения.

### 3.5. УСТОЙЧИВОСТЬ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК

Можно показать, что локальный фазовый портрет в окрестности произвольной неподвижной точки принадлежит одному и только одному из указанных трех типов: асимптотически устойчивому, нейтрально устойчивому или неустойчивому.

**Определение 3.5.1.** Неподвижная точка  $x_0$  системы  $\dot{x} = X(x)$  называется *устойчивой*, если для любой окрестности  $N$  точки  $x_0$  существует некоторая меньшая окрестность этой точки  $N' \subseteq N$  такая, что любая траектория, *проходящая* через  $N'$ , остается в  $N$  при возрастании  $t$ .

**Определение 3.5.2.** Неподвижная точка  $x_0$  системы  $\dot{x} = X(x)$  называется *асимптотически устойчивой*, если она устойчива и, кроме того, существует окрестность  $N$  точки  $x_0$  такая, что любая траектория, *проходящая* через  $N$ , стремится к  $x_0$  при стремлении  $t$  к бесконечности.

Этот последний тип устойчивости встречался при изучении узла, вырожденного узла и фокуса в п. 2.3. Конечно, определение 3.5.2 можно применять к простым нелинейным точкам, рассматривая соответствующую линеаризованную систему. Например, нелинейная система

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^2 \quad (3.31)$$

имеет в начале координат асимптотически устойчивую неподвижную точку. Это следует из того, что линеаризованная система

$$\dot{x}_1 = -x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 \quad (3.32)$$

имеет собственные значения  $-1 \pm i$ , так что начало координат является устойчивым фокусом. Существование такой окрестности начала координат на фазовой плоскости системы (3.31), которая требуется в определении 3.5.1, вытекает из теоремы о линеаризации.

Заметим, что любая асимптотически устойчивая неподвижная точка устойчива. Но обратное неверно.

**Пример 3.5.1.** Показать, что для системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^3 \quad (3.33)$$

начало координат устойчиво, но не асимптотически устойчиво.

**Решение.** Неподвижная точка в начале координат для системы (3.34) непростая (линеаризованная система имеет вид  $\dot{x}_1 = x_2, \dot{x}_2 = 0$ ), так что нельзя описывать фазовый портрет с помощью теоремы о линеаризации.

Однако траектории удовлетворяют уравнению

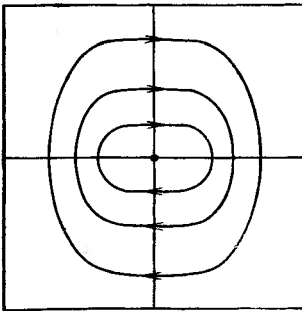
$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1^3}{x_2}, \quad (3.34)$$

для решений которого справедливо равенство

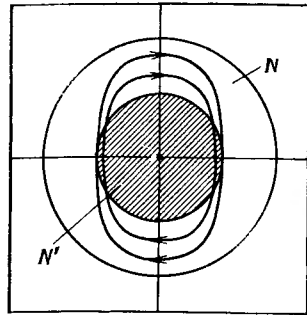
$$\frac{1}{2} x_1^4 + x_2^2 = C, \quad (3.35)$$

где  $C \in \mathbb{R}$ . Фазовый портрет изображен на рис. 3.12.

Ни одна из траекторий не стремится к началу координат при  $t \rightarrow \infty$ ; следовательно, неподвижная точка не является



**Рис. 3.12.** Фазовый портрет для системы (3.34). Траектории удовлетворяют уравнению  $\frac{1}{2} x_1^4 + x_2^2 = C$ . Ориентация такова, что  $\dot{x}_1 > 0$  при  $x_2 > 0$ .



**Рис. 3.13.** Типичные окрестности  $N$  и  $N'$  (последняя заштрихована) из определения 3.5.2. Заметим, что все траектории, проходящие через  $N'$ , остаются в  $N$ .

асимптотически устойчивой. Однако, как показано на рис. 3.13, для любого круга  $N$  с центром в начале координат существует меньший круг  $N'$  такой, что любая траектория, проходящая через  $N'$ , остается в  $N$ . Таким образом, начало координат устойчиво.

**Определение 3.5.3.** Неподвижная точка системы  $\dot{x} = X(x)$  которая устойчива, но не асимптотически устойчива, называется *нейтрально устойчивой*.

Существует много примеров нейтрально устойчивых неподвижных точек, аналогичных примеру 3.5.1. Например, нетривиальная неподвижная точка системы уравнений Вольтерра — Лотка

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \quad \dot{x}_2 = -x_2(c - dx_1), \quad (3.36)$$

где  $a, b, c, d > 0$ , нейтрально устойчива. Фазовый портрет этих уравнений изображен на рис. 1.33. Нейтральная устойчивость неподвижной точки  $(c/d, a/b)$  следует из существования окрестностей  $N$  и  $N'$ , удовлетворяющих требованиям определения 3.5.2, как это показано на рис. 3.14. Ясно, что эта неподвижная точка не является асимптотически устойчивой.

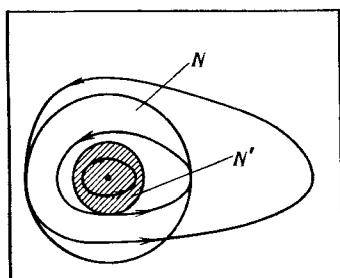


Рис. 3.14. Типичные окрестности  $N$  и  $N'$  для системы Лотка — Вольтерра, показывающие случай нейтральной устойчивости.

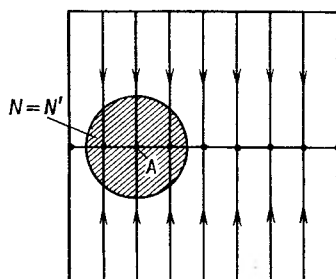


Рис. 3.15. Нейтральная устойчивость точки  $A$  для системы  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2$  получается с  $N = N'$ .

Другой пример — это непростая линейная неподвижная точка, показанная на рис. 3.15. Выделенная неподвижная точка  $A$  не является асимптотически устойчивой, так как существуют траектории, проходящие через окрестность  $N$  (см. рис. 3.15), которые не стремятся к  $A$  при  $t \rightarrow \infty$ . Однако, если  $N' = N$ , то всякая траектория, проходящая через  $N'$ , остается в  $N$ , так что точка  $A$  устойчива.

**Определение 3.5.4.** Неподвижная точка системы  $\dot{x} = X(x)$ , которая не является устойчивой, называется *неустойчивой*.

Это значит, что существует такая окрестность  $N$  неподвижной точки, что для любой окрестности  $N' \subseteq N$  имеется по крайней мере одна траектория, которая проходит через  $N'$  и не остается в  $N$ . Например, седло неустойчиво, так как существует сепаратриса, содержащая точки, сколь угодно близкие к началу координат, причем при движении по этой

сепаратрисе точка стремится к бесконечности при возрастании времени.

**Пример 3.5.2.** Каковы типы устойчивости простых линейных неподвижных точек, изученных в п. 2.3?

**Решение.** (а) Устойчивый узел, вырожденный узел и фокус обладают следующим свойством: при  $t \rightarrow \infty$  траектории стремятся к началу координат. Таким образом,  $N = \mathbb{R}^2$  удовлетворяет требованиям определения 3.5.1, и эти неподвижные точки асимптотически устойчивы.

(б) Центр не является асимптотически устойчивым, но он устойчив. Это следует из определения 3.5.2 с

$$N' = N = \{(x_1, x_2) \mid (x_1^2 + x_2^2)^{1/2} < \varepsilon, \varepsilon > 0\}. \quad (3.37)$$

Таким образом, центр нейтрально устойчив.

(с) Неустойчивые узел, вырожденный узел и фокус, а также седло неустойчивы в смысле определения 3.5.4.

### 3.6. ОБЫКНОВЕННЫЕ ТОЧКИ И ГЛОБАЛЬНОЕ ПОВЕДЕНИЕ

#### 3.6.1. ОБЫКНОВЕННЫЕ ТОЧКИ

Любая точка фазовой плоскости, которая не является неподвижной точкой системы  $\dot{x} = X(x)$ , называется *обыкновенной точкой* этой системы. Таким образом, если  $x_0$  — обыкновенная точка, то  $X(x_0) \neq 0$ , и в силу непрерывности функции  $X$  существует некоторая окрестность точки  $x_0$ , содержащая только обыкновенные точки. Это означает, что локальный фазовый портрет в обыкновенной точке не содержит неподвижных точек. Существует важный результат относительно качественной эквивалентности таких локальных фазовых портретов — теорема о выпрямлении векторного поля или *теорема о трубке траекторий* (см. Хирш и Смейл, 1974)<sup>1)</sup>.

Рассмотрим локальные фазовые портреты в типичных обыкновенных точках  $x_0$ ; эти портреты показаны на рис. 3.16—3.19. Для каждой из рассмотренных точек  $x_0$  выделена некоторая специальная окрестность, называемая трубкой траекторий. Траектории системы входят в окрестность на одном ее конце и выходят на другом; ни одна траектория не может покинуть эту окрестность через ее боковые стороны. Для каждого из фазовых портретов, изображенных на рисунках, мы можем найти такие новые координаты на плоскости, что трубка траекторий примет вид, показанный на рис. 3.16. Например, на рис. 3.17 мы перейдем к полярным координатам

<sup>1)</sup> См. также (Арнольд, 1978\*), с. 78. — *Прим. перев.*

$r, \theta$ . На плоскости  $r, \theta$  окружности ( $r = \text{const}$ ) превратятся в прямые, параллельные оси  $\theta$ , а радиальные прямые ( $\theta = \text{const}$ ) станут прямыми, параллельными оси  $r$ . Таким образом, трубка траекторий на рис. 3.17 примет в полярных координатах такой вид, как на рис. 3.16.

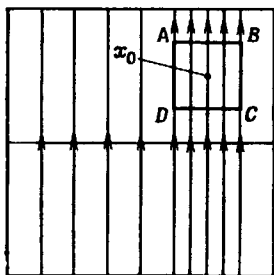


Рис. 3.16. Система  $\dot{x}_1 = 0, \dot{x}_2 = 1$  с типичной трубкой траекторий.

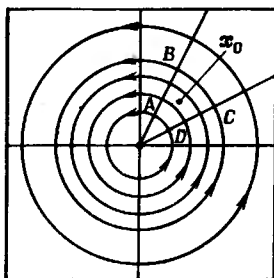


Рис. 3.17. Система  $\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = x_1$ . В полярных координатах это  $\dot{r} = 0, \dot{\theta} = 1$ .

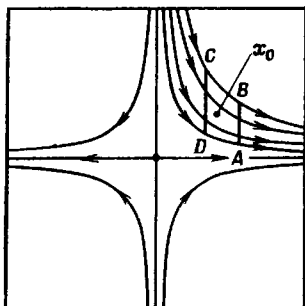


Рис. 3.18. Система  $\dot{x}_1 = x_1, \dot{x}_2 = -x_2$ . При замене переменных  $y_1 = x_1 x_2$  и  $y_2 = \ln x_1, x_1 > 0$ , она имеет вид  $\dot{y}_1 = 0, \dot{y}_2 = 1$ .

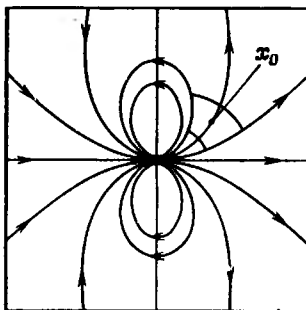


Рис. 3.19. Теорема о трубке траекторий гарантирует существование системы координат, в которых локальный фазовый портрет в точке  $x_0$  принимает вид, изображенный на рис. 3.16.

На рис. 3.18 траектории в окрестности точки  $x_0$  лежат на гиперболах  $x_1 x_2 = K > 0$ . Если мы введем переменные  $y_1 = x_1 x_2$  и  $y_2 = \ln x_1$ , то трубка траекторий будет ограничена координатными линиями  $y_1 = \text{const}, y_2 = \text{const}$  и на плоскости  $y_1, y_2$  локальный фазовый портрет снова имеет такой вид, как на рис. 3.16.

**Теорема 3.6.1 (Теорема о трубке траекторий или о выпрямлении векторного поля).** В достаточно малой окрестно-

сти обыкновенной точки  $x_0$  системы  $\dot{x} = X(x)$  существует дифференцируемая взаимно однозначная замена переменных  $y = y(x)$ , переводящая исходную систему в систему  $\dot{y} = (0, 1)^T$ .

Теорема о трубке траекторий гарантирует существование новых координат, обладающих указанным выше свойством, по крайней мере в некоторой окрестности произвольной обыкновенной точки любой системы. Таким образом, все локальные фазовые портреты в обыкновенных точках качественно эквивалентны.

### 3.6.2. ГЛОБАЛЬНЫЕ ФАЗОВЫЕ ПОРТРЕТЫ

С помощью теорем о линеаризации и о выпрямлении векторного поля можно установить вид локального фазового портрета в простейших неподвижных точках и во всех обыкновенных точках. Однако этой информации не всегда бывает достаточно для того, чтобы определить полный фазовый портрет системы.

**Пример 3.6.1.** Найти и расклассифицировать неподвижные точки системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1 - x_1^2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1x_2. \quad (3.38)$$

Попытаться выяснить, какие фазовые портреты для нее возможны.

**Решение.** Система имеет неподвижные точки  $A = (0, 0)$  и  $B = (2, 0)$ . Линеаризация системы в этих точках дает

$$\dot{x}_1 = 2x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \text{ в } A; \quad (3.39)$$

и

$$\dot{y}_1 = -2y_1, \quad \dot{y}_2 = y_2 \text{ в } B. \quad (3.40)$$

Из теоремы о линеаризации следует, что система (3.38) имеет в  $A$  и  $B$  седла. Кроме того, нелинейные сепаратрисы этих седел касаются главных направлений, которые в обеих точках совпадают с направлениями локальных координатных осей.

Этой информации недостаточно, чтобы определить качественный тип глобального фазового портрета. Например, на рис. 3.20 изображены два фазовых портрета, согласующихся с локальным поведением траекторий. Эти фазовые портреты не являются качественно эквивалентными, потому что седловые точки на рис. 3.20(a) имеют общую сепаратрису, а на рис. 3.20(b) не имеют. Это качественная разница; не суще-

стует взаимно однозначного непрерывного преобразования, переводящего такие портреты друг в друга.

Возвращаясь к системе (3.38), заметим, что  $\dot{x}_1 \equiv 0$  на прямых  $x_1 = 0$  и  $x_1 = 2$ , так что на этих линиях лежат траектории. Кроме того,  $\dot{x}_2 = 0$  при  $x_2 = 0$ . Эти замечания позво-

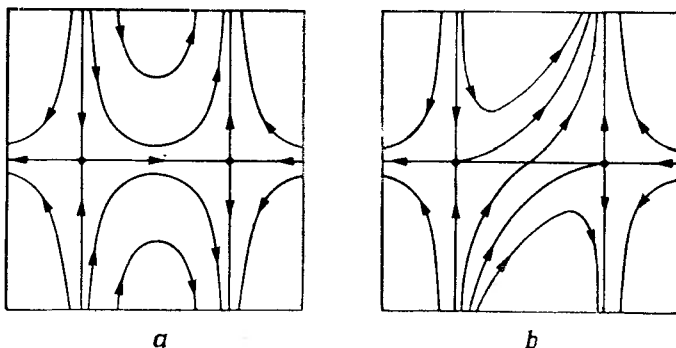


Рис. 3.20. Два качественно различных фазовых портрета, совместных с локальными фазовыми портретами, полученными с помощью теоремы о линеаризации.

ляют установить, что рис. 3.20 (а) дает качественно правильный фазовый портрет.

### 3.7. ПЕРВЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

**Определение 3.7.1.** Непрерывно дифференцируемая функция  $f: D (\subseteq \mathbb{R}^2) \rightarrow \mathbb{R}$  называется *первым интегралом* системы  $\dot{x} = X(x)$ ,  $x \in S \subseteq \mathbb{R}^2$  в области  $D \subseteq S$ , если  $f(x(t))$  постоянна на любом решении  $x(t)$  системы.

Когда первый интеграл существует, он не является единственным. Ясно, что если  $f(x)$  — первый интеграл, то  $f(x) + C$  или  $Cf(x)$ , где  $C \in \mathbb{R}$  тоже первые интегралы. Постоянная  $C$  в этом случае часто выбирается так, чтобы первый интеграл принимал нужное значение при  $x = 0$ . Тривиальные первые интегралы, тождественно равные постоянной, мы рассматривать не будем.

Тот факт, что  $f$  является первым интегралом для системы  $\dot{x} = X(x)$ , можно выразить в терминах условий на первые производные:

$$f_{x_1} \equiv \partial f / \partial x_1, \quad f_{x_2} \equiv \partial f / \partial x_2$$

(предполагается, что они существуют и непрерывны). Так как  $f(x)$  постоянна на любом решении  $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$ ,

имеем

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}(t)) = 0 = \dot{x}_1 f_{x_1}(\mathbf{x}(t)) + \dot{x}_2 f_{x_2}(\mathbf{x}(t)) = \quad (3.41)$$

$$= X_1(\mathbf{x}(t)) f_{x_1}(\mathbf{x}(t)) + X_2(\mathbf{x}(t)) f_{x_2}(\mathbf{x}(t)) = \quad (3.42)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{X}(\mathbf{x})) - f(\mathbf{x})}{h} \right\} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)}. \quad (3.43)$$

Уравнение (3.43) выполняется во всех точках области  $D$ , т. е. производная функции  $f$  по направлению векторного поля  $\mathbf{X}$  тождественно равна нулю в  $D$ .

Первые интегралы полезны в силу соотношения, которое существует между их *линиями уровня* (линии уровня определяются уравнениями  $f(\mathbf{x}) = \text{const}$ ) и траекториями системы. Рассмотрим какую-либо линию уровня  $L_C = \{\mathbf{x} | f(\mathbf{x}) = C\}$ . Пусть  $\mathbf{x}_0 \in L_C$ , и пусть  $\xi(t)$  — траектория, проходящая через точку  $\mathbf{x}_0$  фазовой плоскости. Так как  $f$  — первый интеграл,  $f(\xi(t))$  постоянна, т. е.  $f(\xi(t)) = f(\mathbf{x}_0) = C$ . Следовательно, траектория, проходящая через точку  $\mathbf{x}_0$ , лежит на линии уровня  $L_C$ .

Если  $f$  — первый интеграл, то  $f$  постоянна на любой траектории, лежащей в  $D$ , т. е. любая траектория является частью некоторой линии уровня функции  $f$ . Отсюда следует, что каждая линия уровня есть объединение траекторий. Из единственности решений  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$  следует, что это объединение непересекающихся множеств.

Первый интеграл называется так потому, что обычно он получается путем однократного интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)}, \quad (x_1, x_2) \in D' \subseteq S. \quad (3.44)$$

Если решения этого уравнения удовлетворяют равенству

$$f(x_1, x_2) = C, \quad (3.45)$$

где  $f: D' \rightarrow \mathbb{R}$ , то функция  $f$  является первым интегралом системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$  на  $D'$ . Это получается дифференцированием равенства (3.45):

$$\frac{df}{dx_1} \equiv 0 = f_{x_1} + \frac{dx_2}{dx_1} f_{x_2},$$

где  $dx_2/dx_1$  подставляется из (3.44), затем умножением на  $X_1(x_1, x_2)$ , что дает формулу (3.42). Конечно, функция  $X_1$  не должна при этом обращаться в нуль на  $D'$ ; иначе (3.44) не имеет смысла и не определяет производную  $dx_2/dx_1$ . Однако в виде (3.42) нули функции  $X_1$  не вызывают никаких затруднений. Таким образом, если функция  $f(\mathbf{x})$  непрерывно диф-



ференцируема в некоторой более широкой области  $D \supset D'$  и там выполняется равенство (3.42), то  $f$  — первый интеграл системы  $\dot{x} = X(x)$  на  $D'$ .

**Определение 3.7.2.** Если система имеет первый интеграл (нетривиальный. — *Перев.*) на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$  (т. е.  $D = \mathbb{R}^2$ ), то она называется *консервативной*.

**Пример 3.7.1.** Показать, что система

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 \quad (3.46)$$

консервативна, а система

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 \quad (3.47)$$

не консервативна.

**Решение.** Из дифференциального уравнения (3.44) для  $x_2 \neq 0$  получаем

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_1}{x_2}; \quad (3.48)$$

это уравнение имеет решения, удовлетворяющие равенству

$$x_1^2 + x_2^2 = C, \quad x_2 \neq 0, \quad (3.49)$$

где  $C$  — положительная постоянная. Однако равенство (3.42) при

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 \quad (3.50)$$

удовлетворяется для всех  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^2$ , т. е. (3.50) является первым интегралом системы (3.46) на всей плоскости и система (3.46) консервативна.

Рассмотрим теперь систему (3.47); дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0, \quad (3.51)$$

имеет решения

$$x_2 = Cx_1, \quad (3.52)$$

где  $C \in \mathbb{R}$ . В этом случае (3.42) выполнено при

$$f(x) = x_2/x_1, \quad x_1 \neq 0, \quad (3.53)$$

так что  $D'$  — это плоскость  $\mathbb{R}^2$ , из которой исключена ось  $x_2$ .

Не существует никакого способа расширить область определения функции  $f$ .

Если некоторая непрерывная функция удовлетворяет следующим условиям:

(а) она определена на всей плоскости  $x_1, x_2$ ;

(b) она постоянна на любой траектории системы (3.47) (т. е. на любом радиальном луче и в самом начале координат),

то она — тождественная постоянная. Это следует из того, что на любом радиальном луче мы легко можем найти последовательность точек  $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$  такую, что  $\lim_{i \rightarrow \infty} x_i = 0$ . Тогда по непрерывности  $f(x_i) = f(0)$  для всех  $i$  и функция  $f$  принимает одно и то же значение во всех точках всех радиальных лучей. Другими словами, условиям (a) и (b) может удовлетворять только функция, постоянная на всей плоскости  $\mathbb{R}^2$ , т. е. не существует нетривиального первого интеграла на всей плоскости и (3.47) — не консервативная система.

Консервативные системы играют важную роль в задачах механики. Уравнения движения в таких задачах выражаются через их *гамильтониан*. Например, частица, которая движется в одномерном пространстве с координатой  $x$ , моментом  $p$  и гамильтонианом  $H(x, p)$ , удовлетворяет уравнениям движения

$$\dot{x} = \frac{\partial H(x, p)}{\partial p}, \quad \dot{p} = -\frac{\partial H(x, p)}{\partial x}. \quad (3.54)$$

В этом случае  $H(x, p)$  является первым интегралом системы (3.54), так как

$$\dot{x} \frac{\partial H}{\partial x} + \dot{p} \frac{\partial H}{\partial p} = \frac{dH}{dt} \equiv 0$$

(ср. с (3.42)), и, следовательно, гамильтониан  $H$  постоянен на траекториях. Другими словами,  $H$  является сохраняемой величиной, или константой движения.

**Пример 3.7.2.** Найти гамильтониан для системы

$$\dot{x} = p, \quad \dot{p} = -x + x^3 \quad (3.55)$$

и нарисовать фазовый портрет.

**Решение.** Дифференциальное уравнение

$$\frac{dp}{dx} = \frac{-x + x^3}{p}, \quad p \neq 0, \quad (3.56)$$

имеет решения, удовлетворяющие равенству

$$x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2 = C, \quad p \neq 0, \quad (3.57)$$

где  $C$  — постоянная. Из (3.42) следует, что первым интегралом, определенным на всей плоскости, является

$$H(x, p) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2.$$

Линии уровня первого интеграла являются объединениями траекторий системы (3.55), так что мы можем получить глобальный фазовый портрет (3.55), изобразив линии уровня  $H(x, p)$ . Эти кривые показаны на рис. 3.21 (а), а фазовый портрет — на рис. 3.21 (б).

Мы можем показать, что любая линия уровня является объединением нескольких траекторий. Для этого мы рассмотрим линию уровня  $L_{1/2} = \{x \mid x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2 = \frac{1}{2}\}$  функции  $H(x, p)$ . Это множество точек показано жирной линией на рис. 3.21 (а). На рис. 3.21 (б) видно, что эта линия состоит из восьми траекторий.

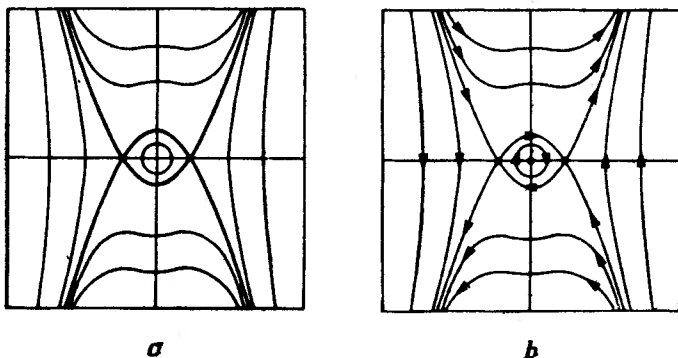


Рис 3.21. (а) — линии уровня функции  $H(x, p) = x^2 - \frac{1}{2}x^4 + p^2$ . Линия  $L_{1/2}$  отмечена жирным шрифтом. (б) — траектории системы (3.55). Ориентацию можно установить, если заметить, что  $\dot{x} > 0$  при  $p > 0$  и  $\dot{x} < 0$  при  $p < 0$ .

Заметим еще, что линеаризованная система для (3.55) имеет центр в начале координат, так что теорема о линеаризации не позволяет получить локальный фазовый портрет в этой точке. На самом деле рассмотрение первых интегралов — один из основных способов определения центров для нелинейных систем<sup>1)</sup>.

**Пример 3.7.3.** Показать, что неподвижная точка  $(1, 1)$  для системы

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_1x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_1x_2 \quad (3.58)$$

является центром.

**Решение.** Дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{-x_2 + x_1x_2}{x_1 - x_1x_2}, \quad x_1 \neq x_1x_2, \quad (3.59)$$

<sup>1)</sup> О других способах см. (Арнольд, 1978\*) или (Брюно, 1979\*). — Прим. перев.

является уравнением с разделяющимися переменными, и его решения удовлетворяют равенству

$$g(x_1)g(x_2) = K, \quad (3.60)$$

где  $g(x) = xe^{-x}$ , и  $K$  — некоторая положительная постоянная. Функция  $g$  изображена на рис. 3.22 для  $x \geq 0$ ; она имеет единственный максимум при  $x = 1$  с  $g(1) = e^{-1}$ . Отсюда следует, что точка  $(x_1, x_2) = (1, 1)$  есть точка максимума для первого интеграла  $g(x_1)g(x_2)$ . Это значит, что существует

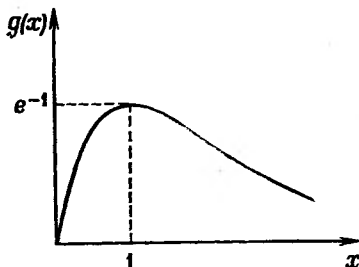


Рис. 3.22. График функции  $xe^{-x}$  при  $x \geq 0$ .

такая окрестность точки  $(1, 1)$ , в которой линии уровня функции  $g(x_1)g(x_2)$  замкнуты. Следовательно, линии уровня совпадают с траекториями (они совпадают с траекториями, так как замкнуты и не содержат неподвижных точек. — *Перев.*), и мы можем сделать вывод, что точка  $(1, 1)$  — центр.

Важно отдавать себе отчет в том, что первые интегралы еще не дают решений  $x(t)$  для системы; они позволяют только найти вид траекторий.

**Пример 3.7.4.** Показать, что системы

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 \quad (3.61)$$

и

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2), \quad \dot{x}_2 = -x_2(1 - x_2) \quad (3.62)$$

имеют один и тот же первый интеграл, и нарисовать их фазовые портреты.

**Решение.** Траектории обеих систем лежат на графиках решений уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}, \quad x_1 \neq 0, \quad (3.63)$$

и обе системы имеют первый интеграл

$$f(x) = x_1 x_2 \quad (3.64)$$

на плоскости  $\mathbb{R}^2$ . Линии уровня функции  $f$  являются гиперболами, которые для системы (3.61) могут быть ориентированы в силу того, что на координатных осях направление  $x$  известно. Получается просто линейное седло, хорошо известное по п. 2.3.

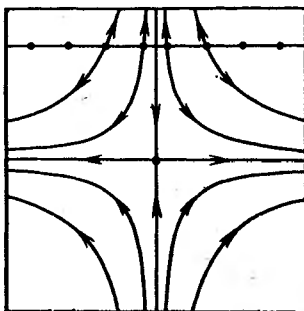


Рис. 3.23. Фазовый портрет системы (3.62). Эта система имеет тот же первый интеграл, что и линейное седло.

Система (3.62) имеет неподвижные точки в начале координат и всюду на прямой  $x_2 = 1$ . Кроме того,  $\dot{x}_2 > 0$  для  $x_2 > 1$  и  $x_2 < 0$  и  $\dot{x}_2 < 0$  для  $0 < x_2 < 1$ . Следовательно, фазовый портрет имеет вид, изображенный на рис. 3.23.

### 3.8. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ЦИКЛЫ

**Определение 3.8.1.** Замкнутая траектория  $C$  на фазовом портрете называется *предельным циклом*, если она изолирована от всех остальных замкнутых траекторий; точнее, если существует трубчатая окрестность  $C$ , не содержащая других замкнутых траекторий.

Мы можем проиллюстрировать это определение, сравнив предельный цикл с центром (см. рис. 3.24). Можно легко построить примеры предельных циклов в полярных координатах.

**Пример 3.8.1.** Показать, что система

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_1[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}], \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2[1 - (x_1^2 + x_2^2)^{1/2}]\end{aligned}\quad (3.65)$$

имеет предельный цикл  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

**Решение.** Введем полярные координаты  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ ; тогда система (3.65) примет вид

$$\dot{r} = r(1 - r), \quad \dot{\theta} = 1. \quad (3.66)$$

Ясно, что  $r(t) \equiv 1$ ,  $\theta(t) = 1$  — решение, задающее замкнутую траекторию — окружность  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ , пробегаемую против часовой стрелки с постоянной угловой скоростью  $\dot{\theta} = 1$ . Для  $0 < r < 1$  величина  $\dot{r}$  положительна, и траектории в этой области — раскручивающиеся спирали (вспомним, что  $\dot{\theta} = 1$ ), приближающиеся к  $r = 1$ . При  $r > 1$  имеем  $\dot{r} < 0$  и траектории скручиваются при возрастании  $t$ . Фазовый портрет ка-

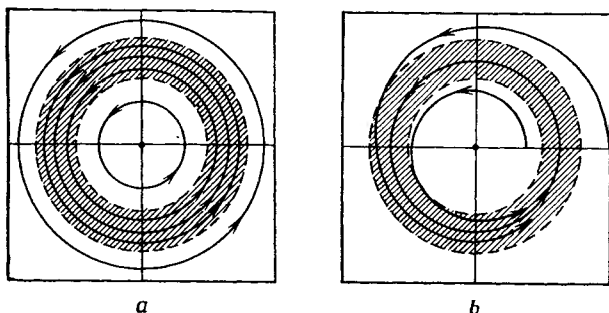


Рис. 3.24. Иллюстрация трубчатой (в двумерном случае — кольцевой) окрестности (заштрихована). Заметим, что для центра, изображенного на рис. (а), замкнутые орбиты не изолированы. Но на рис. (б) предельный цикл является единственной замкнутой орбитой, заключенной в трубчатой окрестности.

чественно эквивалентен портрету, изображенному на рис. 3.24(б), причем предельный цикл задается уравнением  $x_1^2 + x_2^2 = 1$ .

Не все предельные циклы ведут себя так же, как цикл из примера 3.8.1. Существует три типа предельных циклов:

(а) *устойчивый (притягивающий)* предельный цикл, или аттрактор, где траектории навиваются на предельный цикл с обеих сторон при  $t \rightarrow \infty$ ; см., например, рис. 3.24(б).

(б) *неустойчивый (отталкивающий)* предельный цикл, или репеллер, где траектории — спирали, удаляющиеся от предельного цикла с обеих сторон при  $t \rightarrow \infty$ ;

(с) *полуустойчивый* предельный цикл, где траектории с одной стороны навиваются на замкнутую траекторию и удаляются от нее с другой стороны.

**Пример 3.8.2.** Найти предельные циклы для следующих систем и определить их тип:

$$(a) \quad \dot{r} = r(r-1)(r-2), \quad \dot{\theta} = 1; \quad (3.67)$$

$$(b) \quad \dot{r} = r(r-1)^2, \quad \dot{\theta} = 1. \quad (3.68)$$

**Решение.**

(а) Существуют замкнутые траектории, заданные уравнениями

$$r(t) \equiv 1, \theta = t \text{ и } r(t) \equiv 2, \theta = t. \quad (3.69)$$

Кроме того,

$$\dot{r} \begin{cases} > 0, & 0 < r < 1, \\ < 0, & 1 < r < 2, \\ > 0, & r > 2. \end{cases} \quad (3.70)$$

Следовательно, система имеет два предельных цикла, имеющих вид окружностей: один устойчивый ( $r = 1$ ) и один неустойчивый ( $r = 2$ ).

(б) Система (3.68) имеет один предельный цикл в виде окружности единичного радиуса. Однако здесь  $\dot{r}$  положительно для  $0 < r < 1$  и для  $r > 1$ , так что этот предельный цикл полустойчивый.

Предельные циклы не всегда имеют вид окружностей, и не всегда их можно обнаружить, просто перейдя к полярным координатам. Например, рассмотрим уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - \dot{x}(1 - x^2) + x = 0, \quad (3.71)$$

эквивалентное системе первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2(1 - x_1^2) - x_1. \quad (3.72)$$

В полярных координатах система принимает вид

$$\begin{aligned} \dot{r} &= r \sin^2 \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta), \\ \dot{\theta} &= -1 + \cos \theta \sin \theta (1 - r^2 \cos^2 \theta). \end{aligned} \quad (3.73)$$

Эти уравнения не позволяют сразу непосредственно определить характер фазового портрета. Этот портрет имеет один притягивающий предельный цикл (см. пп. 4.3 и 5.1). В действительности задача о нахождении предельных циклов для нелинейных систем может быть трудной, и сейчас мы займемся ею подробнее.

**3.9. ТЕОРИЯ ПУАНКАРЕ — БЕНДИКСОНА**

Что характеризует фазовые портреты, содержащие предельные циклы? Например, для наличия устойчивого предельного цикла необходимо, чтобы существовала трубчатая окрестность (в двумерном случае — кольцо) такая, что все траектории, пересекающие ее границу, стремились к предельному циклу при  $t \rightarrow \infty$ . Предположим, что на фазовой

плоскости имеется кольцевая область, обладающая следующим свойством: все траектории, пересекающие границу, входят в эту окрестность. Достаточно ли этого для того, чтобы в этом кольце существовал предельный цикл? Рис. 3.25 показывает, что не достаточно: в случае, когда имеются седло и узел, может возникнуть фазовый портрет с указанными свойствами, но без предельного цикла. Однако теория, кото-

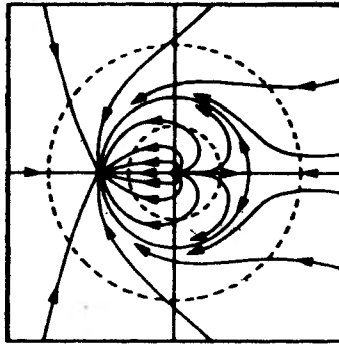


Рис. 3.25. Фазовый портрет системы  $\dot{r} = r(1 - r)$ ,  $\dot{\theta} = \sin \theta$ .

рая излагается в этом параграфе, является развитием именно такого подхода. Мы начнем с того, что сформулируем основную теорему без доказательства.

Сейчас мы укажем одно свойство фазового портрета, позволяющее получать определенные результаты относительно предельных циклов.

**Определение 3.9.1.** Пусть задана система  $\dot{x} = X(x)$  с потоком  $\varphi_t$ ; множество  $D \in \mathbb{R}^2$  называется *положительно инвариантным множеством* для этой системы, если для любой точки  $x_0 \in D$  траектория  $\varphi_t(x_0)$  остается в  $D$  для всех положительных  $t$ .

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

**Теорема 3.9.1.** Если замкнутая ограниченная область  $D$  является положительно инвариантным множеством, не содержащим неподвижных точек, то в  $D$  существует предельный цикл.

**Пример 3.9.1.** Показать, что фазовый портрет уравнения

$$\ddot{x} - \dot{x}(1 - 3x^2 - 2\dot{x}^2) + x = 0$$

содержит предельный цикл.



**Решение.** Соответствующая система первого порядка имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2(1 - 3x_1^2 - 2x_2^2); \quad (3.74)$$

в полярных координатах она превращается в

$$\dot{r} = r \sin^2 \theta (1 - 3r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin^2 \theta), \quad (3.75)$$

$$\dot{\theta} = -1 + \frac{1}{2} \sin 2\theta (1 - 3r^2 \cos^2 \theta - 2r^2 \sin^2 \theta). \quad (3.76)$$

Заметим, что

(а) Если в уравнении (3.75) положить  $r = \frac{1}{2}$ , получим

$$\dot{r} = \frac{1}{4} \sin^2 \theta \left(1 - \frac{1}{2} \cos^2 \theta\right) \geq 0, \quad (3.77)$$

причем равенство достигается только при  $\theta = 0, \theta = \pi$ . Таким образом, множество  $\{x | r > \frac{1}{2}\}$  положительно инвариантно.

(б) Из уравнения (3.75) следует, что

$$\dot{r} \leq r \sin^2 \theta (1 - 2r^2).$$

Иначе говоря, для  $r < 1/\sqrt{2}$  получается  $\dot{r} \leq 0$ , причем равенство достигается только при  $\theta = 0, \theta = \pi$ , т. е. множество  $\{x | r < 1/\sqrt{2}\}$  положительно инвариантно.

Но из (а) и (б) следует, что кольцо  $\{x | \frac{1}{2} < r < 1/\sqrt{2}\}$  является положительно инвариантным множеством, и так как единственная неподвижная точка системы — это начало координат, то мы можем сделать вывод, что в кольце имеется предельный цикл.

Следующий результат позволяет получить условие, при котором в области  $D$  нет предельных циклов.

**Теорема 3.9.2.** Пусть  $D$  — односвязная область фазовой плоскости, в которой задано векторное поле  $X(x) = (X_1(x_1, x_2), X_2(x_1, x_2))$ , и пусть выражение<sup>1)</sup>

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \quad (3.78)$$

имеет постоянный знак. Тогда система  $\dot{x} = X(x)$  не имеет замкнутых траекторий, целиком лежащих в  $D$ .

Для наших целей достаточно вспомнить, что односвязная область на плоскости — это область, не имеющая «дыр»

<sup>1)</sup> Выражение (3.78) называется дивергенцией векторного поля  $X$ . — Прим. перев.

(см. рис. 3.26). Теорема 3.9.2 следует из теоремы Грина для плоскости, которая формулируется следующим образом.

Пусть действительные функции  $P(x_1, x_2)$  и  $Q(x_1, x_2)$  имеют непрерывные частные производные первого порядка в некоторой односвязной области  $\mathcal{R}$  плоскости  $x_1, x_2$ , ограниченной простой замкнутой кривой  $\mathcal{C}$ . Тогда

$$\oint_{\mathcal{C}} P dx_1 + Q dx_2 = \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2, \quad (3.79)$$

где  $\oint_{\mathcal{C}}$  означает интегрирование по кривой  $\mathcal{C}$  против часовой стрелки.

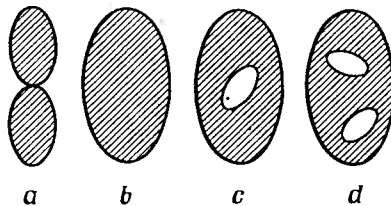


Рис. 3.26. Заштрихованные области (a) и (b) не имеют «дыр» и являются односвязными, а (c) и (d) имеют «дыры» и поэтому не односвязны.

Чтобы доказать теорему 3.9.2, предположим, что для рассматриваемой системы существует предельный цикл  $C$  периода  $T$ . В (3.79) положим  $P = -X_2$ ,  $Q = X_1$  и получим

$$\oint_C X_1 dx_2 - X_2 dx_1 = \int_0^T (X_1 \dot{x}_2 - X_2 \dot{x}_1) dt \quad (=0) \quad (3.80)$$

$$= \iint_{\mathcal{R}} \left( \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \quad (\neq 0). \quad (3.81)$$

Равенство (3.80) справедливо, так как  $C$  — интегральная кривая, а равенство (3.81) следует из (3.78). Следовательно, замкнутая траектория  $C$  не может существовать.

**Пример 3.9.2.** Доказать, что если система

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + K, \quad (3.82)$$

где  $K$  — некоторая постоянная, имеет замкнутую траекторию, то

- (a) либо эта траектория окружает начало координат;
- (b) либо она пересекает окружность  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ .

**Решение.** Выражение

$$\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 2 - 4(x_1^2 + x_2^2) \quad (3.83)$$

положительно в круге  $x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}$  и отрицательно вне его. Таким образом, замкнутая кривая не может находиться целиком в односвязной области  $\{x_1, x_2 \mid x_1^2 + x_2^2 < \frac{1}{2}\}$ . Следовательно, если замкнутая траектория существует, то она либо целиком лежит в области  $\{x_1, x_2 \mid x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}\}$ , либо пересекает окружность  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ . Если замкнутая орбита содержится в  $\{x_1, x_2 \mid x_1^2 + x_2^2 > \frac{1}{2}\}$ , то она должна окружать начало координат, так как иначе она содержала бы односвязную область, где выражение (3.83) отрицательно.

## УПРАЖНЕНИЯ

*К пп. 3.1—3.3*

1. Применить метод изоклин и нарисовать глобальные фазовые портреты следующих систем:

- (a)  $\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = \ln x_1, \quad x_1 > 0;$   
 (b)  $\dot{x}_1 = 4x_1(x_2 - 1), \quad \dot{x}_2 = x_2(x_1 + x_1^2);$   
 (c)  $\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2.$

2. Показать, что отображение  $(x_1, x_2) \rightarrow (f(r)\cos\theta, f(r)\sin\theta)$ , где  $x_1 = r\cos\theta$ ,  $x_2 = r\sin\theta$ , а  $f(r) = \operatorname{tg}(\pi r/(2r_0))$ , является непрерывной биекцией области  $N = \{(x_1, x_2) \mid r < r_0\}$  на  $\mathbb{R}^2$ . Переводит ли это отображение множество концентрических окружностей с центром в  $0$  в области  $N$  на множество окружностей с центром  $0$  в  $\mathbb{R}^2$ ? Какое свойство локальных фазовых портретов линейных систем иллюстрирует этот пример?

3. Нарисовать локальные фазовые портреты в неподвижных точках на рис. 3.5 (a), 3.21 (b) и 3.25.

4. Найти линейризации следующих систем в указанных неподвижных точках. При этом

- (a) либо ввести в неподвижной точке локальные координаты;  
 (b) либо применить теорему Тейлора.

- (i)  $\dot{x}_1 = x_1 + x_1 x_2^2 / (1 + x_1^2)^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 - 3x_2, \quad (0, 0);$   
 (ii)  $\dot{x}_1 = x_1^2 + \sin x_2 - 1, \quad \dot{x}_2 = \operatorname{sh}(x_1 - 1), \quad (1, 0);$   
 (iii)  $\dot{x}_1 = x_1^2 - e^{x_2}, \quad \dot{x}_2 = x_2(1 + x_2), \quad (e^{-1/2}, -1).$

Выбрать в каждом случае наиболее предпочтительный метод (если он существует).

5. Применить теорему о линеаризации и расклассифицировать, где это возможно, неподвижные точки следующих систем:

$$(a) \quad \dot{x}_1 = x_2^2 - 3x_1 + 2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 - x_2^2;$$

$$(b) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_1^3;$$

$$(c) \quad \dot{x}_1 = \sin(x_1 + x_2), \quad \dot{x}_2 = x_2;$$

$$(d) \quad \dot{x}_1 = x_1 - x_2 - e^{x_1}, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - 1;$$

$$(e) \quad \dot{x}_1 = -x_2 + x_1 + x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2 - x_2^2;$$

$$(f) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(1 + x_1^2 + x_1^4)x_2 - x_1;$$

$$(g) \quad \dot{x}_1 = -3x_2 + x_1 x_2 - 4, \quad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^2.$$

6. Линеаризовать систему

$$\dot{x}_1 = -x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_1^5$$

в начале координат. Каков тип неподвижной точки линеаризованной системы? Показать, что траектории нелинейной системы лежат на семействе кривых

$$x_1^2 + x_2^2 - x_1^6/3 = C,$$

где  $C$  — постоянная. Нарисовать эти кривые и показать, что нелинейная система и ее линеаризация имеют качественно эквивалентные локальные фазовые портреты в начале координат. Почему этот вывод нельзя сделать непосредственно из теоремы о линеаризации?

7. Найти главные направления в начале координат, которое является неподвижной точкой всех следующих систем:

$$(a) \quad \dot{x}_1 = e^{x_1 + x_2} - 1, \quad \dot{x}_2 = x_2;$$

$$(b) \quad \dot{x}_1 = -\sin x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = \sin x_2;$$

$$(c) \quad \dot{x}_1 = \ln(x_1 + x_2 + 1), \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 + x_2, \quad x_1 + x_2 > -1.$$

Зная главные направления, нарисовать фазовые портреты.

К пп. 3.4—3.6

8. Найти семейство интегральных кривых уравнения

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2^2 - x_1^3}{2x_1 x_2}, \quad x_1, x_2 \neq 0;$$

сделать замену  $x_2^2 = u$ . Нарисовать это семейство решений и с его помощью (или как-нибудь иначе) изобразить локальный фазовый портрет системы

$$\dot{x}_1 = 2x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2^2 - x_1^3$$

в непростой неподвижной точке  $(0, 0)$ .

9. Являются ли фазовые портреты систем  $\dot{x}_1 = x_1 e^{x_1}$ ,  $\dot{x}_2 = x_2 e^{x_1}$  и  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = x_2$  качественно эквивалентными? Если это так, указать непрерывное взаимно однозначное отображение, устанавливающее эту эквивалентность.

10. Показать, что «прямолинейные» сепаратрисы в непростой неподвижной точке системы

$$\dot{x}_1 = x_2(3x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1(x_1^2 - 3x_2^2)$$

удовлетворяют уравнению  $x_2 = kx_1$ , где

$$k^2(3 - k^2) = 1 - 3k^2.$$

Пользуясь этим соотношением (или иначе) найти эти сепаратрисы и с помощью изоклины нарисовать фазовый портрет.

11. Показать, что система

$$\dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^3, \quad \dot{x}_2 = x_1^2(x_1^2 - x_2^3)$$

имеет целую кривую, составленную из неподвижных точек. Кроме того, показать, что любая точка этой линии непростая. Можно ли сделать этот вывод непосредственно из теоремы о линеаризации? Справедливо ли это утверждение для любой системы, имеющей кривую, составленную из неподвижных точек?

12. Доказать, что неподвижная точка, окруженная континуумом замкнутых траекторий, устойчива, но не асимптотически устойчива.

13. Показать, что для системы

$$\dot{x}_1 = -\frac{3x_2^2}{1+2x_2}, \quad \dot{x}_2 = \frac{1}{1+2x_2}$$

преобразование координат

$$y_1 = x_1 + x_2^3, \quad y_2 = x_2 + x_2^2$$

выпрямляет векторное поле в окрестности любой точки  $(x_1, x_2)$  с  $x_2 \neq -\frac{1}{2}$ .

14. Доказать, что следующие системы не имеют неподвижных точек и нарисовать их фазовые портреты:

(a)  $\dot{x}_1 = e^{x_1+x_2}$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 + x_2$ ;

(b)  $\dot{x}_1 = x_1 + x_2 + 2$ ,  $\dot{x}_2 = x_1 + x_2 + 1$ ;

(c)  $\dot{x}_1 = x_2 + 2x_2^3$ ,  $\dot{x}_2 = 1 + x_2^2$ .

15. Нарисовать фазовые портреты, если известно, что они имеют

(a) две неподвижные точки: седло и устойчивый узел;

(b) три неподвижные точки: седло и два устойчивых узла.

16. Найти локальные фазовые портреты в неподвижных точках системы

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_1^2), \quad \dot{x}_2 = x_2.$$

С помощью полученных результатов нарисовать глобальный фазовый портрет. Проверить правильность своих предположений с помощью метода изоклин.

К п. 3.7

17. Найти первые интегралы для следующих систем и указать области их определения:

(a)  $\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1^2 + 1;$

(b)  $\dot{x}_1 = x_1(x_2 + 1), \quad \dot{x}_2 = -x_2(x_1 + 1);$

(c)  $\dot{x}_1 = \sec x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2^2, \quad |x_1| < \pi/2;$

(d)  $\dot{x}_1 = x_1(x_1 e^{x_2} - \cos x_2), \quad \dot{x}_2 = \sin x_2 - 2x_1 e^{x_2}.$

18. Найти первый интеграл системы

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2 - 3x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_2^2 - 6x_1^2 x_2 + x_1^3$$

(сделать замену  $x_2 = ux_1^2$ ). Нарисовать фазовый портрет.

19. Чем различаются фазовые портреты следующих двух систем:

$$\dot{x}_1 = x_1(x_2^2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = -x_2(x_2^2 - x_1);$$

$$\dot{x}_1 = x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2^2$$

20. Найти первый интеграл системы

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = \ln x_1$$

в области  $x_1 > 1$ . С его помощью (или иначе) нарисовать фазовый портрет.

21. Найти первые интегралы для линейной системы  $\dot{x} = Jx$ , где  $J$  — жорданова  $2 \times 2$ -матрица, для узла, центра или фокуса. Указать максимальные области существования этих первых интегралов.

22. Найти гамильтониан  $H$  для частицы, движущейся на прямой по закону

$$\ddot{x} = -x + \alpha x^2,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $x$  — координата. Нарисовать линии уровня гамильтониана  $H$  на фазовой плоскости. Указать области на фазовой плоскости, в которых движение не колебательное.

К пп. 3.8, 3.9

23. Нарисовать фазовые портреты, согласующиеся со следующей информацией:

(а) имеются неустойчивый предельный цикл и три неподвижные точки: одно седло и два устойчивых узла;

(б) имеются устойчивый фокус и два предельных цикла: один устойчивый и один неустойчивый.

24. Для всех следующих систем покажите, что данные области  $R$  положительно инвариантны:

(а)  $\dot{x}_1 = 2x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2^2, \quad R = \{(x_1, x_2) \mid x_2 \geq 0\};$

(б)  $\dot{x}_1 = -\alpha x_1 + x_2, \quad \dot{x}_2 = (\beta - \alpha)x_2, \quad \alpha, \beta = \text{const},$   
 $R = \{(x_1, x_2) \mid x_2 = \beta x_1\};$

$$(c) \quad \dot{x}_1 = -x_1 + x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

$$R = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\};$$

$$(d) \quad \dot{x}_1 = x_1(x_2^2 - x_1), \quad \dot{x}_2 = -x_2(x_2^2 - x_1),$$

$$R = \{(x_1, x_2) \mid x_1 > x_2^3\}.$$

25. Найти замкнутые траектории следующих дифференциальных уравнений:

$$(a) \quad \ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)\dot{x} + x^3 = 0;$$

$$(b) \quad \ddot{x} + (\dot{x}^2 + x^2 - 4)x = 0;$$

$$(c) \quad \ddot{x} + (2\dot{x}^2 + x^4 - 1)x^3 = 0.$$

26. Показать, что нелинейная система

$$\dot{x}_1 = -x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)$$

в полярных координатах имеет вид

$$\dot{r} = r(1 - r^2), \quad \dot{\theta} = 1.$$

Решить эту задачу с начальными условиями  $r(0) = r_0$ ,  $\theta(0) = \theta_0$  при  $t = 0$  и показать, что

$$r(t) = r_0 / (r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t})^{1/2}.$$

Изобразить график функции  $r(t)$  для

$$(a) \quad 0 < r_0 < 1; \quad (b) \quad r_0 = 1; \quad (c) \quad r_0 > 1$$

и нарисовать фазовый портрет системы. Можно ли более просто получить фазовый портрет непосредственно из дифференциальных уравнений в полярных координатах?

27. Доказать, что существует область  $R = \{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 \leq r^2\}$  такая, что все траектории системы

$$\dot{x}_1 = -\omega x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2), \quad \dot{x}_2 = \omega x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) - F$$

с постоянными  $\omega$  и  $F$  входят в эту область. Показать, что при  $F = 0$  эта система имеет предельный цикл.

28. Доказать, что система

$$\dot{x}_1 = 1 - x_1 x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

не имеет предельных циклов.

29. Рассмотреть систему

$$\dot{x}_1 = -\omega x_2 + x_1(1 - x_1^2 - x_2^2) - x_2(x_1^2 + x_2^2),$$

$$\dot{x}_2 = \omega x_1 + x_2(1 - x_1^2 - x_2^2) + x_1(x_1^2 + x_2^2) - F,$$

где  $\omega$  и  $F$  — постоянные. Доказать, что если эта система имеет предельный цикл, все точки которого отстоят от начала координат на расстояние,

большее чем  $1/\sqrt{2}$ , то этот предельный цикл должен окружать начало координат.

30. Пусть область  $R = \{(x_1, x_2) \mid x_1, x_2 > 0\}$  положительно инвариантна для системы  $\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2)$ ,  $\dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2)$  и пусть

$$\dot{x}_1 \begin{cases} \leq 0 \\ > 0 \end{cases} \text{ при } x_2 \begin{cases} \geq -x_1^2 + 3x_1 + 1, \\ < -x_1^2 + 3x_1 + 1, \end{cases}$$

$$\dot{x}_2 \begin{cases} \leq 0 \\ > 0 \end{cases} \text{ при } x_2 \begin{cases} \geq x_1 \\ < x_1 \end{cases}$$

соответственно. В предположении, что в  $R$  нет замкнутых орбит, доказать, что единственная неподвижная точка, содержащаяся в  $R$ , асимптотически устойчива.



## 4. ПРИЛОЖЕНИЯ

Результаты, полученные в гл. 2 и 3, играют важную роль в построении и исследовании моделей реальных систем, зависящих от времени. В этой главе мы продемонстрируем их возможные приложения на примере построения моделей из различных областей науки.

В каждой из этих моделей зависящий от времени вектор  $x(t)$  задает *состояние* системы в момент времени  $t$  (см. п. 1.2.2). Изменение состояний со временем определяется *динамическими уравнениями* (или уравнениями движения) вида  $\dot{x} = X(x)$ , а качественный характер этого изменения — соответствующим фазовым портретом.

### 4.1. ЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Говорят, что модель линейна, если ее динамические уравнения линейны. Как мы видели в гл. 2, такие уравнения могут иметь только вполне определенное качественное поведение. Например, на плоскости качественное поведение принадлежит одному из типов, указанных в п. 2.4.

#### 4.1.1. МЕХАНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР

Рассмотрим массу  $m$ , поддерживаемую вертикально расположенной пружиной, как это показано на рис. 4.1. Масса может смещаться только вдоль оси пружины. Кроме того, она связана с поршнем, который движется в цилиндре, наполненном жидкостью и помещенном внутри пружины. Поршень создает сопротивление движению массы. Это устройство представляет собой идеализацию амортизаторов, которые стоят на большинстве мотоциклов.

Пусть  $x$  — смещение массы  $m$  вниз от ее положения равновесия. Предположим, что:

(а) пружина подчиняется закону Гука, так что на массу действует сила  $Kx$ ,  $K > 0$ , направленная в сторону положения равновесия;

(b) сила, с которой поршень действует на массу и которая препятствует ее движению, пропорциональна кинетическому моменту  $p$  с коэффициентом  $2k$ ,  $k \geq 0$ .

В этих предположениях уравнения движения массы линейны. Их можно записать, воспользовавшись следующими соображениями:

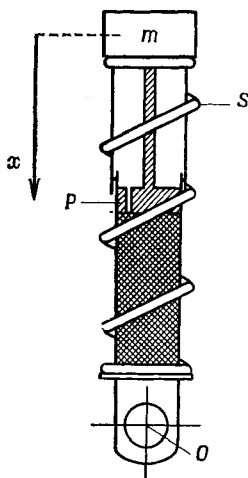


Рис. 4.1. Масса  $m$  находится на вертикально свернутой пружине  $S$ , неподвижно закрепленной на своем нижнем конце. Масса соединена также с поршнем  $P$ . Он движется в цилиндре, наполненном жидкостью, и оказывает сопротивление движению массы  $m$ .

(a) момент  $p$  массы  $m$  задается уравнением  $p = m\dot{x}$ ;

(b) скорость изменения кинетического момента данной массы равна приложенной к ней силе (второй закон Ньютона).

Учитывая (b), имеем

$$\dot{p} = -K(l+x) - 2kp + mg, \quad (4.1)$$

где  $l$  — длина пружины в положении равновесия. Однако в положении равновесия  $\dot{p} = p = x = 0$ , так что  $Kl = mg$ , и уравнение (4.1) можно переписать в виде

$$\dot{p} = m\ddot{x} = -Kx - 2km\dot{x}.$$

Таким образом, координата массы удовлетворяет линейному уравнению второго порядка

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad (4.2)$$

где  $\omega_0^2 = K/m > 0$  и  $k \geq 0$ . Эквивалентную систему первого порядка можно получить, положив  $x_1 = x$  и  $x_2 = \dot{x}$  (см. упр. 28 гл. 1):

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2kx_2. \quad (4.3)$$

Линейная система (4.3) имеет матрицу коэффициентов

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2k \end{bmatrix}, \quad (4.4)$$

причем  $\text{tr } A = -2k \leq 0$  и  $\det A = \omega_0^2 > 0$ . Отсюда следует, что неподвижная точка в начале координат на фазовом портрете системы (4.3) всегда устойчива (асимптотически устойчива при  $k > 0$ ). Как показано на рис. 4.2, для каждого

фиксированного значения  $\omega_0^2$  (т. е. коэффициента упругости пружины  $K$ ) фазовый портрет при возрастании коэффициента  $k$  в пределах  $0 \leq k < \infty$  проходит через следующие стадии: центр, фокус, вырожденный узел, узел. Каждый из указанных типов фазовых портретов дает движение массы

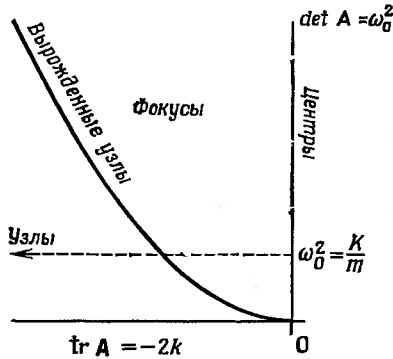


Рис. 4.2. Левый верхний квадрант на плоскости  $\text{tr } A - \det A$ , где находятся матрицы вида (4.4). Из того, что  $\text{tr } A \leq 0$ , следует устойчивость всех фазовых портретов (см. рис. 2.7).

$m$ , качественно отличное от остальных. Существует четыре случая:

(a)  $k = 0$

Тогда  $\text{tr } A = 0$  и собственные значения матрицы  $A$  чисто мнимые:  $\lambda_1 = -\lambda_2 = i\omega_0$ . Соответствующая каноническая система  $\dot{y} = Jy$  имеет решения (2.53) с  $\beta = \omega_0$ , а  $\dot{x} = Ax$  имеет траектории

$$(x_1(t), x_2(t)) = (R \cos(\omega_0 t + \theta), -\omega_0 R \sin(\omega_0 t + \theta)) \quad (4.5)$$

(см. упр. 1). Заметим, что в нашей задаче  $x_2(t) = \dot{x}_1(t)$ . Следовательно, фазовый портрет имеет вид, изображенный на рис. 4.3. На этом рисунке также отражена связь между колебаниями величины  $x_1$  и траекториями.

Итак, движение массы является колебанием; координата и скорость колеблются с одинаковым периодом  $T_0 = 2\pi/\omega_0$ . Говорят, что масса совершает *свободные* (нет воздействия внешних сил) *незатухающие* ( $k = 0$ ) колебания и что собственная частота системы равна  $\omega_0 = K/m$ .

(b)  $0 < k < \omega_0$

В этом случае собственные значения матрицы  $A$  равны  $-k \pm i(\omega_0^2 - k^2)^{1/2}$ ; из (2.52) следует, что

$$x_1(t) = Re^{-kt} \cos(\beta t + \theta), \quad (4.6)$$

где  $\beta = (\omega_0^2 - k^2)^{1/2}$  (см. упр. 1).

Движение характеризуется следующими свойствами:

- (а) амплитуда колебаний уменьшается при возрастании  $t$ ;
- (б) период колебаний равен  $T = 2\pi/\beta > T_0$ .

Говорят, что система совершает *затухающие*, или *демпфированные*, свободные колебания. Эти колебания, а также

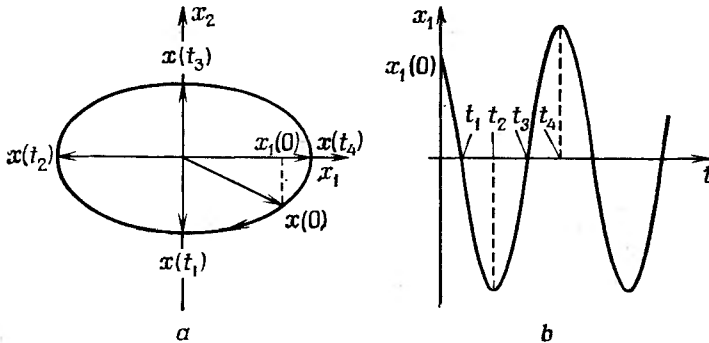


Рис. 4.3. (а) — фазовый портрет системы  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1$  имеет вид континуума концентрических эллипсов. Траектория (4.5), проходящая через точку  $x(0) = (R \cos \theta, -\omega_0 R \sin \theta)$  соответствует колебаниям, изображенным на рисунке (б).

соответствующий фазовый портрет изображены на рис. 4.4.

(с)  $k = \omega_0$

Когда  $k \rightarrow \omega_0$ , период  $T = 2\pi/(\omega_0^2 - k^2)^{1/2}$  стремится к бесконечности, и, наконец, при  $k = \omega_0$  колебания прекращаются. Собственные значения матрицы  $A$  становятся действительными и равными  $-k$ . Мы достигли кривой на рис. 4.2, на которой расположены вырожденные узлы. Такая система называется *критически демпфированной* (затухающие колебания *слабо демпфированного* случая с  $0 < k < \omega_0$  исчезли).

В этом случае из (2.48) мы получаем

$$x(t) = e^{-kt}(a + bt, b - k(a + bt)), \quad (4.7)$$

где  $a, b \in \mathbb{R}$  (см. упр. 4.1). Характер зависимости  $x(t)$  от начальных условий показан на рис. 4.5(а).

Предположим, что масса получает начальную скорость  $x_2 = -s_0$  ( $s_0 > 0$ ), а начальное отклонение  $x_1 = x_0 > 0$ . На фазовом портрете видно, что если  $s_0 > kx_0$  (т. е. мы находимся в точке  $A$  при  $t = 0$ ), то масса проходит положение равновесия и только после этого  $x_1 \rightarrow 0$ . Если же  $s_0 < kx_0$

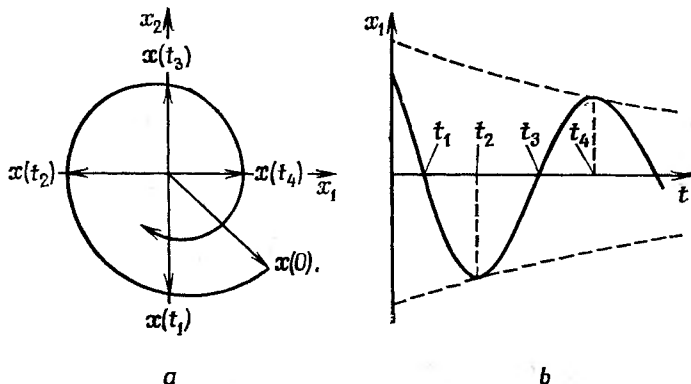


Рис. 4.4. (а) — фазовый портрет системы  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2kx_2$ ,  $0 < k < \omega_0$ ; (б) — график функции  $x_1(t)$ . Фазовый портрет представляет собой устойчивый фокус. На (б) пунктирной линией показаны огибающие колебаний  $x_1(t)$  — кривая  $Re^{-kt}$ .

(т. е. при  $t = 0$  мы находимся в точке  $B$ ), то масса не проходит положение равновесия. Поведение функции  $x_1(t)$  в обоих случаях показано на рис. 4.5(б).

(d)  $k > \omega_0$

Собственные значения матрицы  $A$  в этом случае уже не равны, но оба отрицательны:  $\lambda_1 = -k + (k^2 - \omega_0^2)^{1/2}$ ,  $\lambda_2 = -k - (k^2 - \omega_0^2)^{1/2}$ , так что начало координат является устойчивым узлом. Можно показать, что

$$x_1(t) = ae^{\lambda_1 t} + be^{\lambda_2 t}, \quad x_2(t) = \dot{x}_1(t), \quad (4.8)$$

и фазовый портрет имеет вид, изображенный на рис. 4.6.

Если  $k \rightarrow \infty$ , то  $\lambda_1 \rightarrow 0$ ,  $\lambda_2 \rightarrow -\infty$ ; следовательно, главные направления приближаются к координатным осям, как это показано на рис. 4.6. Траектории становятся все более крутыми, и скорость  $|x_2|$  очень быстро убывает. Такая система называется *сильно демпфированной*.

Различные движения массы, описанные для случаев (а) — (d), легко отличить друг от друга в системе подвесок автомобиля. Сильно демпфированный случай — это «очень жесткая» подвеска, передающая толчки почти непосред-

ственно на кузов. Слабо демпфированный случай — автомобиль может «переваливаться с боку на бок». Оба крайних случая неудовлетворительны. Очевидно, самым разумным яв-

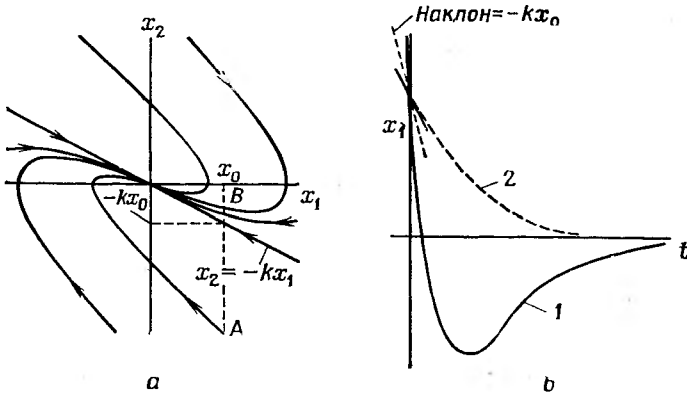


Рис. 4.5. (а) — фазовый портрет системы  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -k^2 x_1 - 2kx_2$ ; начало координат является вырожденным узлом. Траектория, проходящая через точку  $A$ , дает  $x_1(t)$ , что соответствует кривой 1 на рисунке (б), а траектория, проходящая через точку  $B$ , дает кривую 2.

ляется критическое демпфирование, допускающее не более одного перехода через положение равновесия. Читатель мо-

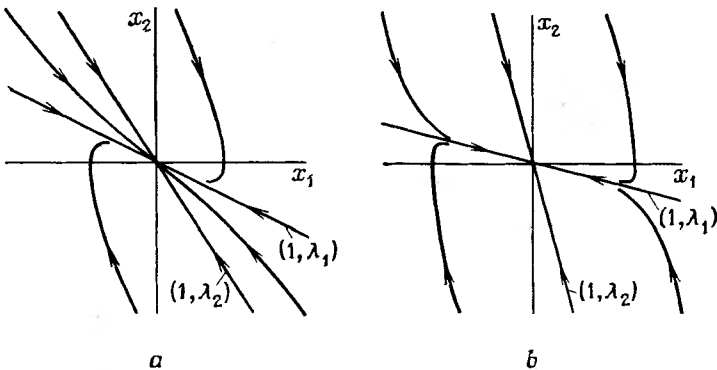


Рис. 4.6. (а) — фазовый портрет системы  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2kx_2$  с  $k = k_1 > \omega_0$ ; (б) — то же с  $k = k_2 > k_1 > \omega_0$ . Главные направления задаются векторами  $(1, \lambda_1)$ ,  $(1, \lambda_2)$  (см. упр. 2).

жет убедиться, что при расчете подвески мотоцикла или автомобиля обычно выбирается именно этот вариант.

Уравнения (4.2) и (4.3) — наиболее часто встречающиеся линейные уравнения движения. Они возникают во всевоз-

можных моделях для системы, зависящей от времени (см. п. 4.1.2 и 4.1.3). Для их решений характерны тригонометрические (или гармонические) колебания, демпфированные (затухающие) при  $k > 0$ . Поэтому уравнения (4.2) и (4.3) называются уравнениями *демпфированного гармонического осциллятора*.

#### 4.1.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ ЦЕПИ

Теория электрических цепей является богатым источником линейных и нелинейных динамических уравнений. Мы кратко напомним эту теорию для читателей, чьи познания в этой области не достаточно глубоки.

Электрическая цепь — это набор «элементов цепи», образующих замкнутую схему. Обозначения для некоторых типичных элементов электрических цепей приведены на рис. 4.7 с указанием единиц измерения.

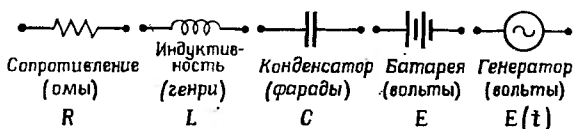


Рис. 4.7. Величины  $R$ ,  $L$  и  $C$  — это сопротивление, индуктивность и емкость; они всегда неотрицательны (если явно не оговорено противное) и не зависят от  $t$ . Батареи и генераторы — источники разности потенциалов.

Разность *электрических потенциалов* (измеряется в вольтах) вызывает движение зарядов по цепи. Это движение зарядов называется *током*, измеряется в амперах и обозначается  $j$ . Мы можем представить себе электрическую цепь как множество «узлов», между которыми вмонтированы элементы цепи. Если элемент цепи находится между узлами  $n$  и  $m$  цепи, то мы связываем с ним

- (а) разность потенциалов, или *напряжение*,  $v_{nm}$ ;
- (б) силу тока  $j_{nm}$ .

Напряжение  $v_{nm}$  есть разность потенциалов между узлом  $n$  и узлом  $m$ , так что  $v_{nm} = -v_{mn}$ . Аналогично  $j_{nm}$  — это сила тока между узлами  $n$  и  $m$ , и, следовательно,  $j_{nm} = -j_{mn}$ .

Разности потенциалов и силы тока в различных элементах цепи связаны между собой.

Разности потенциалов удовлетворяют *закону Кирхгофа для потенциалов*:

Сумма разностей потенциалов для любого замкнутого контура цепи равна нулю;

$$(4.9)$$

а токи удовлетворяют закону Кирхгофа для токов:

Сумма токов, втекающих в узел, равна сумме токов, вытекающих из него. (4.10)

Кроме этих фундаментальных законов есть законы, связывающие ток, протекающий через сопротивление, индуктивность или емкость, с напряжением на соответствующем элементе. Если между узлами  $n$  и  $m$  находится сопротивление, то

$$v_{nm} = j_{nm}R. \quad (4.11)$$

Это закон Ома, и такое сопротивление называется омическим. Вообще говоря, эта связь нелинейна и

$$v_{nm} = f(j_{nm}). \quad (4.12)$$

Если не оговорено противное, мы будем считать выполненным закон (4.11).



Рис. 4.8. В формулах (4.13) и (4.14)  $j = j_{nm}$ ,  $v = v_{nm}$ ; разность потенциалов берется по направлению  $j$ .

В случае индуктивности или емкости соответствующие соотношения содержат производные по времени, что и приводит к динамическим уравнениям. Ниже мы выпишем эти соотношения, используя обозначения, приведенные на рис. 4.8:

$$v = L \frac{dj}{dt} \quad (4.13)$$

и

$$C \frac{dv}{dt} = j. \quad (4.14)$$

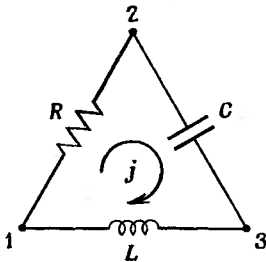


Рис. 4.9. LCR-цепь.

**Пример 4.1.1.** Найти динамические уравнения для LCR-цепи (колебательного контура), изображенной на рис. 4.9. Показать, что если положить  $x_1 = v_{23}$  и  $x_2 = \dot{v}_{23}$ , то эти уравнения можно записать в виде (4.3).

**Решение.** Если задать ток  $j$  в единственной замкнутой петле так, как показано на рисунке, то автоматически будет выполнен закон Кирхгофа для токов; из закона для напряже-



ний следует

$$v_{12} + v_{23} + v_{31} = 0. \quad (4.15)$$

Законы для отдельных элементов цепи дают

$$v_{12} = jR, \quad (4.16)$$

$$v_{31} = L \frac{dj}{dt} \quad (4.17)$$

и

$$C \frac{dv_{23}}{dt} = j. \quad (4.18)$$

Подставив (4.15) и (4.16) в (4.17) и положив  $v_{23} = v$ , получим

$$\frac{dv}{dt} = \frac{j}{C}, \quad \frac{dj}{dt} = -\frac{R}{L}j - \frac{v}{L}. \quad (4.19)$$

Пусть  $x_1 = v$ ,  $x_2 = \dot{v} = j/C$ ; тогда система (4.19) примет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2kx_2, \quad (4.20)$$

где  $\omega_0^2 = 1/LC > 0$  и  $2k = R/L \geq 0$ . Система (4.20) в точности совпадает с системой (4.3) для механического осциллятора.

Тот факт, что системы (4.20) и (4.3) одинаковы, означает, что  $LCR$ -цепь является электрическим аналогом механического осциллятора. Разность потенциалов на конденсаторе (функция  $v = x_1$ ) ведет себя как функция времени в точности так же, как смещение массы на пружине.

Очевидным образом система (4.20) сводится к уравнению

$$\ddot{v} + 2k\dot{v} + \omega_0^2 v = 0. \quad (4.21)$$

Фазовые портреты на рис. 4.3—4.6 можно переосмыслить в терминах  $x_1 = v$ ,  $x_2 = j/C$ . При заданных  $L$  и  $C$  напряжение на конденсаторе может колебаться без затухания ( $R=0$ ), осуществлять затухающие (демпфированные) колебания [ $0 < R < 2(L/C)^{1/2}$ ], быть критически демпфированным [ $R = 2(L/C)^{1/2}$ ] или сильно демпфированным [ $R > 2(L/C)^{1/2}$ ].

Заметим, что знак функции  $j$  определяет направление тока в цепи. Если  $j > 0$ , то ток течет по направлению часовой стрелки; если  $j < 0$ , то против часовой стрелки (см. рис. 4.9). Рассмотрим, например, случай, когда  $R = 0$ , и предположим, что  $v(0) = v_0 > 0$ ,  $j(0) = 0$ . Из уравнения (4.5) следует, что

$$\left( v(t), \frac{j(t)}{C} \right) = \left( v_0 \cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right), -\frac{v_0}{\sqrt{LC}} \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right) \right). \quad (4.22)$$

Ток течет против часовой стрелки до момента  $t = \pi \sqrt{LC}$ , когда

$$v(\pi \sqrt{LC}) = -v_0 \text{ и } j(\pi \sqrt{LC}) = 0. \quad (4.23)$$

При дальнейшем возрастании  $t$  величина  $v(t)$  увеличивается и  $j(t)$  становится положительным. Заряды перемещаются теперь по часовой стрелке до момента  $t = 2\pi \sqrt{LC}$ , когда

$$v(2\pi \sqrt{LC}) = v_0 \text{ и } j(2\pi \sqrt{LC}) = 0. \quad (4.24)$$

Состояние цепи при этом может быть точно такое же, каким оно было при  $t = 0$ , и колебания продолжаются. Здесь мы легко узнаем эллиптические траектории рис. 4.3(а).

### 4.1.3. ЭКОНОМИКА

Говорят, что экономическая система является замкнутой, если весь произведенный продукт либо потребляется, либо вкладывается в рамках этой же экономической системы. В этом случае отсутствуют экспорт, импорт и приток капитала извне. Таким образом, если  $Y$ ,  $C$  и  $I$  являются соответственно объемом производства, потреблением и капиталовложением для некоторой замкнутой экономической системы в момент времени  $t$ , то  $Y = C + I$ . В случае наличия притока капитала (например, правительственные расходы  $G$ ) экономика уже перестает быть замкнутой и объем производства увеличивается на величину  $G$ :

$$Y = C + I + G. \quad (4.25)$$

Далее, потребление возрастает с увеличением объема производства:

$$C = dY = (1 - s)Y, \quad (4.26)$$

где  $d$ ,  $s > 0$  — предельные склонности к потреблению и сбережению (см. Хэйс, 1975).

Рассмотрим экономическую систему, в которой правительственные расходы  $G_0$  постоянны. В каждый момент  $t$  в экономике существует спрос  $D(t)$ , определяющий желаемый уровень потребления и капиталовложений. Задача состоит в том, чтобы сбалансировать экономику таким образом, чтобы объем производства совпадал со спросом, т. е.  $D(t) \equiv Y(t)$ . Однако на практике производство не может мгновенно реагировать на изменение спроса. Существует запаздывание  $\tau$ , которое связано со временем, необходимым для постройки нового завода и т. п.

Чтобы сбалансировать экономику при наличии запаздывания, мы должны составлять планы на будущее и строить

производство так, чтобы удовлетворять прогнозируемый спрос, полагая

$$D(t) = (1 - s)Y(t - \tau) + I(t) + G_0. \quad (4.27)$$

В уравнении (4.27) мы полагаем, что за время  $\tau$  капиталовложения существенно не меняются, т. е.  $I(t - \tau) = I(t)$ . Теперь, если мы учтем, что

$$Y(t - \tau) = Y(t) - \tau \dot{Y}(t) + O(\tau^2), \quad (4.28)$$

то увидим, что уравнение (4.27) означает достижение баланса с точностью до величины первого порядка относительно  $\tau$  при

$$(1 - s)\tau \dot{Y}(t) = -sY(t) + I(t) + G_0 \quad (4.29)$$

для всех  $t \in \mathbb{R}$ .

Хотя величина  $I(t)$  за время порядка  $\tau$  существенно не меняется, она не является постоянной. Капиталовложения зависят от общей тенденции развития производства. Одна из возможных стратегий в области капиталовложения — «принцип акселератора», согласно которому желательно выполнение соотношения  $I(t) \equiv a\dot{Y}(t)$ ,  $a > 0$ . Это равенство не может точно выполняться в силу запаздывания, но мы можем приближаться к нему, если будем брать

$$\dot{I}(t) = b(a\dot{Y}(t) - I(t)), \quad b > 0. \quad (4.30)$$

Уравнения (4.29) и (4.30) служат основой динамической модели экономики. Их можно привести к более привычному виду, продифференцировав (4.29):

$$(1 - s)\tau \ddot{Y} + s\dot{Y} = \dot{I} = b(a\dot{Y} - I). \quad (4.31)$$

Окончательный вид уравнения получим, подставив  $I$  из (4.29):

$$(1 - s)\tau \ddot{y} + (s - ba + (1 - s)\tau b)\dot{y} + sby = 0, \quad (4.32)$$

где  $y = Y - (G_0/s)$ . Таким образом, разность между объемом производства и постоянной величиной  $G_0/s$  удовлетворяет уравнению (4.2) с

$$k = (s - ba + (1 - s)\tau b)/(2\tau(1 - s)), \quad \omega_0^2 = sb/(\tau(1 - s)) > 0. \quad (4.33)$$

Если величина  $k$  неотрицательна, то можно воспользоваться приведенным в п. 4.1.1 анализом фазового портрета, предварительно интерпретировав переменные в соответствии с их экономическим смыслом. В частности, колебания величины  $Y$  около  $G_0/s$  соответствуют периодам подъема и спада.

Новые явления в этой модели возникают, если «коэффициент затухания»  $k$ , заданный формулой (4.33), становится

отрицательным. Это значит, что соответствующая система первого порядка

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 + 2|k|x_2 \quad (4.34)$$

имеет в начале координат неустойчивую неподвижную точку. Качественное поведение в этой точке соответствует поведению систем, расположенных в первом квадранте плоскости  $\text{tr } A - \det A$ , как это изображено на рис. 2.7. В таком случае пики подъемов увеличиваются с возрастанием  $t$  так же, как и глубина спадов. В этих случаях необходимо внешнее вмешательство.

#### 4.1.4. СВЯЗАННЫЕ ОСЦИЛЛЯТОРЫ

Разбиение линейных систем размерности  $n > 2$  на подсистемы меньшей размерности (см. п. 2.7) служит основой рассмотрения некоторых моделей, в которых имеются связанные осцилляторы. Обычно предполагается, что рассматриваемые колебания малы, для того чтобы обеспечить линейность соответствующих уравнений.

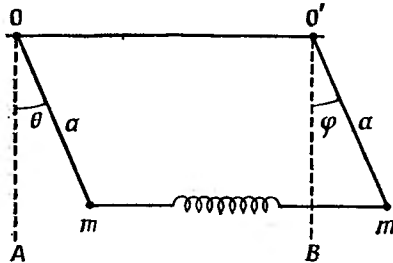


Рис. 4.10. Два одинаковых маятника длиной  $a$  ( $A$  и  $B$ ) подвешены в точках  $O$  и  $O'$  и связаны друг с другом пружиной естественной длины  $l = OO'$  с коэффициентом упругости  $\lambda l$ . Углы отклонения от вертикали обозначены  $\theta$  и  $\varphi$ , как показано на чертеже.

Рассмотрим два одинаковых простых маятника, соединенных легкой пружиной, как это показано на рис. 4.10. Мы исследуем движение этой системы в вертикальной плоскости, проходящей через прямую  $OO'$ .

Динамические уравнения можно получить, рассматривая компоненты сил, перпендикулярные стержням маятников. Для малых колебаний мы получим

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} &= -\frac{g}{a}\theta - \frac{\lambda l}{a}(\theta - \varphi), \\ \ddot{\varphi} &= -\frac{g}{a}\varphi + \frac{\lambda l}{a}(\theta - \varphi). \end{aligned} \quad (4.35)$$

Если единицу времени изменить так, что  $t\sqrt{g/a}$  перейдет в  $t$ , и взять

$$x_1 = \theta, \quad x_2 = \dot{\theta}, \quad x_3 = \varphi, \quad x_4 = \dot{\varphi}, \quad (4.36)$$

то уравнения (4.35) можно представить как систему первого порядка:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, & \dot{x}_2 &= -x_1 - \alpha(x_1 - x_3), \\ \dot{x}_3 &= x_4, & \dot{x}_4 &= -x_3 + \alpha(x_1 - x_3), \end{aligned} \quad (4.37)$$

где  $\alpha = \lambda l/g > 0$ .

После линейной замены переменных

$$\begin{aligned} x'_1 &= x_1 + x_3, & x'_2 &= x_2 + x_4, \\ x'_3 &= x_1 - x_3, & x'_4 &= x_2 - x_4 \end{aligned} \quad (4.38)$$

система (4.37) распадается на две двумерные системы. Матрица преобразованной системы имеет вид

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \vdots & -(1+2\alpha) & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Здесь диагональные блоки соответствуют двум незатухающим гармоническим осцилляторам, причем один имеет  $\omega_0 = 1$ , а другой  $\omega_0 = \sqrt{1+2\alpha}$ . Конечно, матрица (4.39) не является жордановой; чтобы привести ее к жордановой форме, надо сделать еще одну замену переменных:

$$\begin{aligned} x'_1 &= y_1, & x'_2 &= -y_2, \\ x'_3 &= y_3, & x'_4 &= -\sqrt{1+2\alpha}y_4. \end{aligned} \quad (4.40)$$

В переменных  $y$  система имеет вид  $\dot{y} = Jy$ , где

$$J = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \vdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \vdots & 0 & -\sqrt{1+2\alpha} \\ 0 & 0 & \vdots & \sqrt{1+2\alpha} & 0 \end{bmatrix}. \quad (4.41)$$

Решения системы (4.37) являются линейными комбинациями решений системы  $\dot{y} = Jy$ , и для разных начальных условий возникают различные интересные эффекты. Например:

(а)  $\theta = \varphi = 0$ ,  $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = v$ .

Из уравнений (4.36), (4.38) и (4.40) следует, что  $y_1 = y_3 = y_4 = 0$ ,  $y_2 = -2v$  или  $t = 0$ ; тогда по формулам (2.53)

$$y_1 = 2v \sin t, \quad y_2 = -2v \cos t, \quad y_3 = y_4 = 0. \quad (4.42)$$

Переходя к естественным переменным, получаем

$$\theta = v \sin t, \quad \varphi = v \sin t. \quad (4.43)$$

Таким образом,  $\theta \equiv \varphi$ , и маятники качаются в одной фазе с периодом  $2\pi$ ; пружина все время остается нерастянутой.

(b)  $\theta = \varphi = 0, \quad \dot{\theta} = -\dot{\varphi} = v.$

В этом случае

$$\begin{aligned} y_1 \equiv y_2 \equiv 0, \quad y_3 &= \frac{2v}{\sqrt{1+2\alpha}} \sin \sqrt{1+2\alpha} t, \\ y_4 &= \frac{-2v}{\sqrt{1+2\alpha}} \cos \sqrt{1+2\alpha} t, \end{aligned} \quad (4.44)$$

и окончательно

$$\theta = -\varphi = \frac{v}{\sqrt{1+2\alpha}} \sin \sqrt{1+2\alpha} t. \quad (4.45)$$

При этом маятники качаются с периодом  $2\pi/\sqrt{1+2\alpha}$ , а разность фаз составляет  $\pi$ . Они все время симметричны относительно вертикальной оси, проходящей через середину отрезка  $OO'$ .

Эти два специальных колебательных режима называются *нормальными модами* для связанных маятников. Они соответствуют тем решениям канонической системы (4.41), для которых колебания имеются только в одной из подсистем, в то время как решения другой подсистемы тождественно равны нулю. В случае (a) одна нормальная координата ( $y_1 = \theta + \varphi$ ) колеблется, в то время как другая ( $y_3 = \theta - \varphi$ ) тождественно равна 0. В случае (b) координаты меняются ролями и  $y_1 \equiv 0$ .

Мы получим другой характер движения, если в начальный момент  $\theta = \varphi = \dot{\theta} = 0$ , а  $\dot{\varphi} = v$  при  $t=0$ , так что  $y_1(0) = y_3(0) = 0, y_2(0) = -v$  и  $y_4(0) = v/\sqrt{1+2\alpha}$ . В этом случае

$$y_1 = v \sin t \quad \text{и} \quad y_3 = \frac{-v}{\sqrt{1+2\alpha}} \sin \sqrt{1+2\alpha} t; \quad (4.46)$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{v}{2} \left\{ \sin t - \frac{\sin \sqrt{1+2\alpha} t}{\sqrt{1+2\alpha}} \right\}, \\ \varphi &= \frac{v}{2} \left\{ \sin t + \frac{\sin \sqrt{1+2\alpha} t}{\sqrt{1+2\alpha}} \right\}. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Предположим теперь, что коэффициент упругости пружины  $\lambda$  достаточно мал, т. е.  $0 \leq \alpha \ll 1$ , так что связь сла-

бая. Так как для любого  $\beta \neq 0$

$$\sin t \pm \frac{\sin \beta t}{\beta} = \sin t \pm \sin \beta t \pm \left(\frac{1}{\beta} - 1\right) \sin \beta t, \quad (4.48)$$

то  $\theta$  и  $\varphi$ , определяемые формулами (4.47), равномерно близки к

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{v}{2} \{ \sin t - \sin \sqrt{1+2\alpha} t \}, \\ \varphi &= \frac{v}{2} \{ \sin t + \sin \sqrt{1+2\alpha} t \}, \end{aligned} \quad (4.49)$$

причем ошибка по модулю не превышает величины

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1+2\alpha}} = \alpha + O(\alpha^2). \quad (4.50)$$

Наконец,  $\theta$  и  $\varphi$  из (4.49) можно приблизить выражениями

$$\theta = -v \cos t \sin(\alpha t/2), \quad (4.51)$$

$$\varphi = v \sin t \cos(\alpha t/2). \quad (4.52)$$

Зависимость  $\theta$  и  $\varphi$  от времени показана на рис. 4.11. Для  $t$ , близких к нулю, маятник  $B$  колеблется сильно, а маятник  $A$

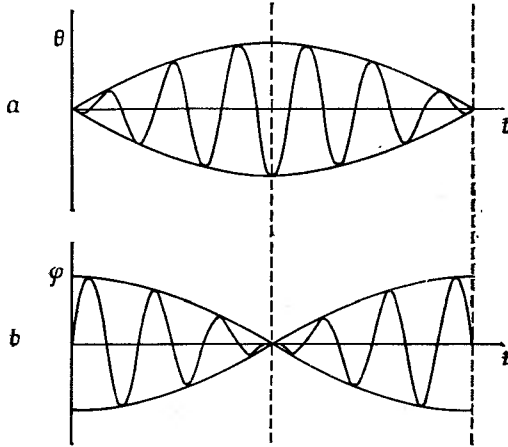


Рис. 4.11. Зависимость от времени угловых отклонений  $\theta$  и  $\varphi$  для связанных маятников (формулы (4.51) и (4.52)). Огибающие (а)  $\sin(\alpha t/2)$  для  $\theta$  и (б)  $\cos(\alpha t/2)$  для  $\varphi$  расходятся по фазе на  $\pi/2$ , так что амплитуда колебаний величины  $\theta$  достигает максимума, когда  $\varphi$  близко к нулю.

испытывает колебания малой амплитуды. По мере увеличения  $t$  амплитуда колебаний  $B$  уменьшается, а  $A$  начинает колебаться все более энергично. При  $t = \pi/\alpha$  маятник  $B$  останавливается, а  $A$  колеблется с максимальной амплитудой. Теперь роли маятников  $A$  и  $B$  переменились, и колебания  $A$

затухают, а колебания  $B$  усиливаются до момента  $t = 2\pi/\alpha$ . Это явление, соответствующее периодическому обмену энергией между двумя маятниками через посредство пружины, называется *биениями*. Оно характерно для движения слабо связанных систем.

#### 4.2. АФФИННЫЕ МОДЕЛИ

В этом параграфе мы рассмотрим модели, описываемые уравнениями вида

$$\dot{x} = Ax + h(t). \quad (4.53)$$

Такие модели могут описывать те же системы, что и в п. 4.1, но с внешними воздействиями, зависящими от времени.

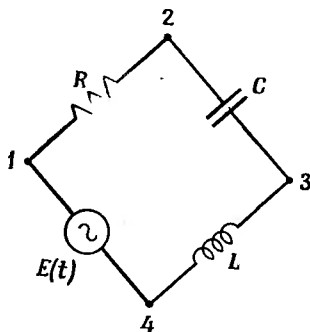


Рис. 4.12. Введение в цепь источника тока, как показано выше, приводит линейную систему (4.20) к аффинной форме.

Внешнее воздействие сказывается в присутствии вынуждающего члена  $h(t)$ ; его физическая природа зависит от рассматриваемой системы. Например, если к массе, находящейся на пружине (см. п. 4.1.1), приложена направленная вниз внешняя сила  $F(t)$ , отнесенная к единице массы, то вместо уравнений (4.3) мы получим

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2kx_2 + F(t) \quad (4.54)$$

и

$$h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ F(t) \end{bmatrix}. \quad (4.55)$$

Аналогично, если в  $LCR$ -цепь из п. 4.1.2 включен источник напряжения (см. рис. 4.12), то

$$h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ E(t)/LC \end{bmatrix}. \quad (4.56)$$



Изучим влияние периодического вынуждающего члена

$$h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ h_0 \cos \omega t \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

на затухающий гармонический осциллятор, рассмотренный в пп. 4.1.1 и 4.1.2.

#### 4.2.1. ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР С ВНЕШНИМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ

Согласно уравнению (2.92), получаем

$$\dot{x}(t) = e^{At}x_0 + e^{At} \int_0^t e^{-As}h(s) ds. \quad (4.58)$$

Эта формула дает решение уравнения (4.53), при  $t = 0$  обращающееся в  $x_0$ .

Если член  $h(t)$  задан формулой (4.57), то интеграл в (4.58) можно вычислить с помощью интегрирования по частям (см. упр. 12). В результате получим

$$(\omega^2 I + A^2) \int_0^t e^{-As}h(s) ds = Ah(0) - e^{-At} \{h(t) + Ah(t)\}. \quad (4.59)$$

Таким образом,

$$x(t) = x_T(t) + x_S(t), \quad (4.60)$$

где

$$\begin{aligned} x_T(t) &= e^{A(t)} \{x_0 + (\omega^2 I + A^2)^{-1} Ah(0)\}, \\ x_S(t) &= -(\omega^2 I + A^2)^{-1} \{h(t) + Ah(t)\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое  $x_T(t)$  в (4.60) является частным решением системы уравнений свободного гармонического осциллятора (без вынуждающего члена)

$$\dot{x} = Ax \text{ с } A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega_0^2 & -2k \end{bmatrix}. \quad (4.61)$$

В п. 4.1.1 мы заметили, что для (4.61) неподвижная точка в начале координат асимптотически устойчива для всех  $k > 0$ , так что  $x_T(t) \rightarrow O$  при  $t \rightarrow \infty$ . Мы говорим, что  $x_T(t) \rightarrow O$  есть *затухающая* компонента решения. Второе слагаемое  $x_S(t)$  является *установившейся* компонентой решения и определяет главную часть решения, когда колебания  $x_T(t)$  уже затухли.

## 4.2.2. РЕЗОНАНС

Если частота вынуждающего члена близка к некоторой специальной частоте, определяемой величинами  $\omega_0$  и  $k$ , то возникает явление резонанса. Чтобы понять его природу, мы более подробно рассмотрим  $x_S(t)$ . Легко показать, что

$$\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 & -2k \\ 2k\omega_0^2 & \omega^2 - \omega_0^2 + 4k^2 \end{bmatrix}. \quad (4.62)$$

Заметим, что

$$\det(\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2) = (\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2 \neq 0 \quad (4.63)$$

для  $k > 0$ ; следовательно, существует обратная матрица. Она задается формулой

$$(\omega^2 \mathbf{I} + \mathbf{A}^2)^{-1} = \frac{1}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2} \begin{bmatrix} \omega^2 - \omega_0^2 + 4k^2 & +2k \\ -2k\omega_0^2 & \omega^2 - \omega_0^2 \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Наконец, мы можем вычислить

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_S(t) &= \begin{bmatrix} x_{S1}(t) \\ x_{S2}(t) \end{bmatrix} = \\ &= \frac{h_0}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2} \begin{bmatrix} (\omega_0^2 - \omega^2) \cos \omega t + 2k\omega \sin \omega t \\ 2k\omega^2 \cos \omega t - (\omega_0^2 - \omega^2) \omega \sin \omega t \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Заметим, что  $x_{S2}(t) = \dot{x}_{S1}(t)$ ; так и должно быть, потому что  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{x}_S(t)$  при  $t \rightarrow \infty$ . Ограничимся тем, что рассмотрим одну лишь функцию  $x_{S1}(t)$ . Она является линейной комбинацией  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ , и, следовательно, ее можно записать в виде

$$x_{S1}(t) = G(\omega) \cos(\omega t - \eta(\omega)), \quad (4.66)$$

где

$$G(\omega) = \frac{h_0}{[(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + 4k^2\omega^2]^{1/2}}, \quad (4.67)$$

а

$$\eta(\omega) = \arctg \left[ \frac{2k\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] + \frac{\pi}{2} [1 - \text{sign}(\omega^2 - \omega_0^2)]. \quad (4.68)$$

Для заданной физической системы (т. е. для заданных  $\omega_0$  и  $k$ ) величина  $G(\omega)$  имеет максимум при  $\omega = \omega_R$ , где

$$\omega_R = (\omega_0^2 - 2k^2)^{1/2}, \quad (4.69)$$

если только  $\omega_0^2 > 2k^2$ . Кроме того,

$$G(\omega_R) = h_0 / [2k(\omega_0^2 - k^2)^{1/2}] \quad (4.70)$$

и  $G(\omega_R)/h_0 \rightarrow \infty$  при  $k \rightarrow 0$ . Это значит, что если затухание в рассматриваемой физической системе достаточно слабо, то амплитуда вынужденного колебания  $G(\omega_R)$  велика по сравнению с амплитудой  $h_0$  вынуждающего члена (см. рис. 4.13). Говорят, что в системе возникает резонанс или система резонирует в ответ на вынуждающее воздействие;  $\omega_R$  называется *резонансной частотой*.

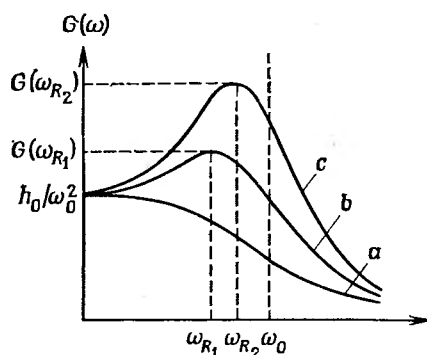


Рис. 4.13. Графики функций  $G(\omega)$  для различных значений  $k$ : (а)  $k = k_0$ , где  $\omega_0^2 < 2k_0^2$ ; (б)  $k = k_1$ , где  $\omega_0^2 > 2k_1^2$ ; максимум достигается при  $\omega = \omega_{R1} < \omega_0$ ; (с)  $k = k_2 < k_1$ ; максимум достигается при  $\omega = \omega_{R2}$ , причем  $\omega_{R1} < \omega_{R2} < \omega_0$ . Обратите внимание на заострение пика и его сдвиг вправо при уменьшении  $k$ .

Явление резонанса имеет многочисленные применения, особенно в электронике, где часто используются настраиваемые устройства. Мы проиллюстрируем эту идею на примере  $LCR$ -цепи, показанной на рис. 4.12, с  $E(t) = E_0 \cos \omega t$ . Мы уже видели в формулах (4.20) и (4.56), что в этом случае

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad 2k = R/L \quad \text{и} \quad h(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ (E_0/LC) \cos \omega t \end{bmatrix}. \quad (4.71)$$

Ток, соответствующий стационарной компоненте решения, равен  $Cx_{S2}(t)$ , т. е.

$$j(t) = -C\omega G(\omega) \sin(\omega t - \eta(\omega)) = j_0 \cos(\omega t + [\pi/2 - \eta(\omega)]). \quad (4.72)$$

Его амплитуда

$$\begin{aligned} j_0 = C\omega G(\omega) &= \frac{E_0 \omega}{L \{[\omega^2 - (1/LC)]^2 + (R^2/L^2) \omega^2\}^{1/2}} = \\ &= \frac{E_0}{\{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2\}^{1/2}}. \end{aligned} \quad (4.73)$$

Отношение  $Z = E_0/j_0$  называется *импедансом* цепи. Для *LCR*-цепи

$$Z = \{R^2 + [\omega L - (1/\omega C)]^2\}^{1/2}. \quad (4.74)$$

В этом случае резонансная частота определяется соотношением

$$\omega_R L - \frac{1}{\omega_R C} = 0 \quad \text{или} \quad \omega_R^2 = \frac{1}{LC}. \quad (4.75)$$

При этой частоте импеданс цепи минимален и принимает значение  $R$ , а для частот, близких к резонансной, импеданс мал, если мало сопротивление  $R$ . Для других частот импеданс возрастает по мере их удаления от частоты  $\omega_R$ , и амплитуды соответствующих токов уменьшаются. В этом случае говорят, что контур *селективный*, сильнее всего отвечающий на воздействие с частотой, близкой к  $\omega_R$ .

Если, например, емкость  $C$  варьируется, то можно менять и резонансную частоту. Поэтому можно настраивать контур, чтобы получать сильный ответ на воздействие заранее заданной частоты.

### 4.3. НЕЛИНЕЙНЫЕ МОДЕЛИ

Несмотря на несомненные успехи, которые приносит изучение простых линейных моделей, они имеют свои ограничения. Например, качественное поведение линейной модели на плоскости должно относиться к ограниченному числу типов. Линейные модели могут иметь только одну изолированную неподвижную точку; если в них возникают незатухающие колебания, то только гармонические (т. е. тригонометрические); такие колебания возможны лишь вокруг положения равновесия в начале координат фазовой плоскости и т. д. Если качественное поведение моделируемой физической системы не подчиняется этим ограничениям, то для такой системы линейная модель не годится.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые задачи из области динамики популяций и теории электрических цепей, для которых необходимо построение нелинейных моделей.

#### 4.3.1. КОНКУРИРУЮЩИЕ ВИДЫ

Два сходных вида животных конкурируют друг с другом на некоторой территории с ограниченными запасами пищи. Возможны различные исходы их конкурентной борьбы:

- (а) вид 1 выживает, а вид 2 вымирает;
- (б) вид 2 выживает, а вид 1 вымирает;
- (с) оба вида сосуществуют;
- (д) оба вида вымирают.

Каждый из этих исходов соответствует некоторому положению равновесия для популяций  $x_1$  и  $x_2$  двух рассматриваемых видов. Поэтому дифференциальные уравнения, моделирующие динамику популяций  $x_1$  и  $x_2$ , должны иметь четыре изолированные особые точки.

Рассмотрим следующие нелинейные динамические уравнения:

$$\dot{x}_1 = (a - bx_1 - \sigma x_2)x_1, \quad \dot{x}_2 = (c - vx_1 - dx_2)x_2, \quad (4.76)$$

где  $a, b, c, d, \sigma, v > 0$ . Заметим, что прирост на особь  $\dot{x}_1/x_1 = a - bx_1 - \sigma x_2$  состоит из трех слагаемых: скорости размножения изолированной популяции  $a$ ; члена, соответствующего внутривидовой конкуренции  $-bx_1$ ; члена, соответствующего межвидовой конкуренции  $-\sigma x_2$ . Аналогично интерпретируются члены  $c, -dx_2$  и  $-vx_1$  в уравнении для  $\dot{x}_2/x_2$ . Необходимое условие для возможности выживания обоих видов состоит в том, что должна существовать неподвижная точка уравнений (4.76), обе координаты которой положительны. Такая неподвижная точка для уравнений (4.76) существует тогда и только тогда, когда линейные уравнения

$$bx_1 + \sigma x_2 = a, \quad vx_1 + dx_2 = c \quad (4.77)$$

имеют решение с положительными координатами. Мы будем предполагать, что система (4.77) имеет единственное решение в первом квадранте плоскости  $x_1, x_2$ . В этом случае неподвижная точка имеет координаты

$$\left( \frac{ad - \sigma c}{bd - v\sigma}, \frac{bc - av}{bd - v\sigma} \right), \quad (4.78)$$

причем либо

$$bd < v\sigma, \quad ad < \sigma c \quad \text{и} \quad bc < av, \quad (4.79)$$

либо

$$bd > v\sigma, \quad ad > \sigma c \quad \text{и} \quad bc > av. \quad (4.80)$$

Геометрический смысл этих неравенств проиллюстрирован на рис. 4.14.

Сейчас мы рассмотрим характер изменения величин  $x_1, x_2$  при условиях (4.79); в упр. 16 предлагается рассмотреть некоторые другие возможности.

Мы начнем с того, что произведем линеаризацию системы во всех четырех неподвижных точках. Каждую из линеаризованных систем мы обозначим  $\dot{y} = Wy$ , где  $y$  — локальные координаты в окрестности соответствующей неподвижной точки. Ниже для каждой из неподвижных точек указана ее

матрица  $W$ :

$$(0, 0), \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}; \quad (4.81)$$

$$(0, c/d), \begin{bmatrix} a - \sigma c/d & 0 \\ -\nu c/d & -c \end{bmatrix}; \quad (4.82)$$

$$(a/b, 0), \begin{bmatrix} -a & -\sigma a/b \\ 0 & c - \nu a/b \end{bmatrix}; \quad (4.83)$$

$$\left( \frac{\sigma c - ad}{\nu \sigma - bd}, \frac{a\nu - bc}{\nu \sigma - bd} \right), \frac{1}{bd - \nu \sigma} \begin{bmatrix} b(\sigma c - ad) & \sigma(\sigma c - ad) \\ \nu(a\nu - bc) & d(a\nu - bc) \end{bmatrix}. \quad (4.84)$$

Все неподвижные точки простые, а их вид определяется собственными значениями соответствующих матриц  $W$ . Для

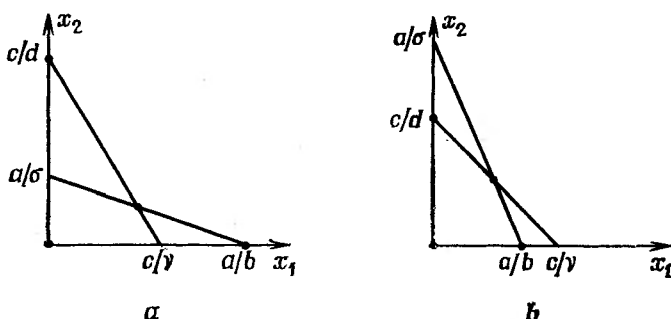


Рис. 4.14. Геометрический смысл условий (4.79) (а) и (4.80) (б). Неподвижные точки системы (4.76) отмечены жирной точкой.

(4.81) это числа  $a > 0$  и  $c > 0$ , и по теореме о линеаризации начало координат — неустойчивый узел. Собственные значения  $W$  из (4.82) тоже легко усматриваются, так как матрица  $W$  треугольная, и оба значения отрицательны (см. (4.79)). То же справедливо относительно  $W$  из (4.83), и в каждом из этих случаев теорема о линеаризации позволяет сделать вывод, что эти точки — устойчивые или вырожденные узлы (заметим, что возможны равенства  $a - \sigma c/d = -c$  или  $c - \nu a/b = -a$ ). Наконец, неподвижная точка (4.84) является седлом, поскольку

$$\det W = \frac{(\sigma c - ad)(a\nu - bc)}{bd - \nu \sigma} < 0 \quad (4.85)$$

(по условиям (4.79)), и собственные значения  $W$  должны обладать противоположными знаками (см. рис. 2.7).

Теперь видно, что сосуществование является чрезвычайно маловероятным, так как при  $t \rightarrow \infty$  в седло входят только две

сепаратрисы. Неподвижные точки  $(0, c/d)$  и  $(a/b, 0)$  устойчивы и соответствуют вымиранию видов 1 и 2. Начало координат является неустойчивым узлом, так что возможность вымирания обоих видов исключена, поскольку все траектории удаляются от точки  $(0, 0)$ . Предполагая, что все начальные положения в первом квадранте равновероятны, мы видим, что наиболее вероятным исходом является вымирание одного из видов. Полученный нами результат находится в соответствии с «принципом конкурентного исключения», согласно которому в таких ситуациях конкурентной борьбы один из видов вымирает.

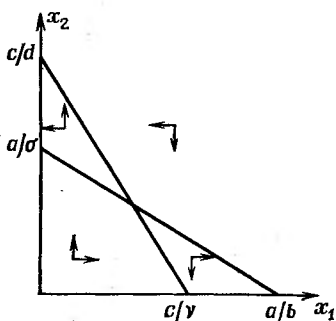


Рис. 4.15. Показаны знаки, которые величины  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$ , заданные уравнениями (4.76), принимают в первом квадранте. Обозначения следующие:  $\nearrow$  означает, что  $\dot{x}_1, \dot{x}_2 > 0$ ;  $\nwarrow$  означает, что  $\dot{x}_1 > 0, \dot{x}_2 < 0$ ;  $\swarrow$  соответствует  $\dot{x}_1 < 0, \dot{x}_2 > 0$  и  $\searrow$  соответствует  $\dot{x}_1, \dot{x}_2 < 0$ .

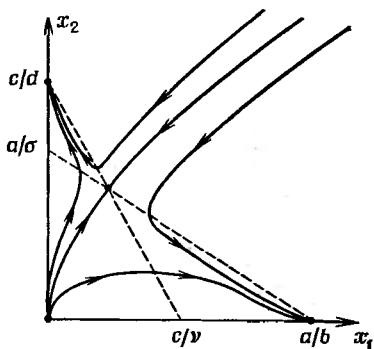


Рис. 4.16. Фазовый портрет системы для конкурирующих видов (4.76) для случая  $bd < c\sigma$ ,  $ad < c\sigma$ ,  $bc < a\gamma$ .

Дальнейшие подробности относительно эволюции этих двух видов можно получить, нарисовав фазовый портрет рассмотренной модели. Заметим, что прямые из уравнений (4.77) — это изоклины направлений  $\dot{x}_1 = 0$  и  $\dot{x}_2 = 0$  соответственно. Направление векторного поля  $((a - bx_1 - \sigma x_2)x_1, (c - \gamma x_1 - dx_2)x_2)$  можно получить, исследуя знаки  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$ , как это показано на рис. 4.15. Этой информации вместе со сведениями о характере неподвижных точек достаточно для того, чтобы построить фазовый портрет, изображенный на рис. 4.16. Различные детали, например какой оси касаются траектории, выходящие из начала координат, зависят уже от величин собственных значений. Например, на рис. 4.16 предполагается, что  $c < a$  и поэтому траектории на рисунке касаются оси  $x_2$ . Относительно аналогичных деталей см. упр. 15.

### 4.3.2 УРАВНЕНИЯ ВОЛЬТЕРРА — ЛОТКА

Самые общие колебания, которые могут возникнуть при рассмотрении автономных линейных уравнений на плоскости, имеют вид

$$x_1(t) = R_1 \cos(\beta t + \theta_1), \quad x_2(t) = R_2 \cos(\beta t + \theta_2); \quad (4.86)$$

им соответствуют замкнутые эллиптические траектории на фазовом портрете. Кривые, заданные уравнениями (4.86), сильно симметричны, и, хотя изменение параметров  $R_i$  и  $\theta_i$  ( $i = 1, 2$ ) допускает изменение амплитуды и сдвиг начального положения точки, форма траекторий остается неизменной.

В динамике популяций существует много примеров, когда изменение численности популяций во времени носит колебательный характер. Однако эти колебания заметно отличаются от гармонических, и для того, чтобы их промоделировать, необходимы нелинейные уравнения. Одним из самых известных примеров уравнений описания динамики взаимодействующих популяций являются уравнения Вольтерра — Лотка.

Рассмотрим модель, содержащую два вида, один вид — хищники, а другой — их добыча. Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — популяции жертв и хищников соответственно. Предположим, что между особями одного вида нет соперничества. Пусть прирост на особь  $\dot{x}_1/x_1$  для жертв составляет  $a - bx_2$ ,  $a, b > 0$ , где  $a$  — скорость размножения жертв в отсутствие хищников, а  $-bx_2$  есть член, учитывающий потери от хищников. Популяция хищников уменьшалась бы в отсутствие их пищи (т. е. жертв), так что  $\dot{x}_2/x_2 = -c$ ,  $c > 0$  при  $x_1 = 0$ . Однако наличие жертв в случае удачной охоты на них компенсирует это уменьшение, так что при  $x_1 > 0$  имеем  $\dot{x}_2/x_2 = -c + dx_1$ ,  $d > 0$ . Таким образом, система имеет вид

$$\dot{x}_1 = (a - bx_2)x_1, \quad \dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2, \quad (4.87)$$

где  $a, b, c, d > 0$ . Это и есть уравнения Вольтерра — Лотка. Система (4.87) имеет две неподвижные точки:  $(0, 0)$  и  $(c/d, a/b)$ . Первая из этих точек — седло, для которого оси  $x_1$  и  $x_2$  являются сепаратрисами, причем ось  $x_2$  устойчивая. Линеаризованная система в нетривиальной неподвижной точке  $(c/d, a/b)$  имеет центр, и, следовательно, теорема о линеаризации не дает возможности определить характер этой точки для исходной системы.

Система (4.87) имеет первый интеграл

$$\hat{f}(x_1, x_2) = x_1^c e^{-dx_1} x_2^a e^{-bx_2} = g(x_1) h(x_2) \quad (4.88)$$

(см. пример 3.7.3). Здесь функции  $g(x_1)$  и  $h(x_2)$  одного и того же вида: обе они положительны на полуоси  $(0, \infty)$  и имеют



на ней один максимум. Типичные графики этих функций изображены на рис. 4.17.

Функции  $g(x_1)$  и  $h(x_2)$  принимают максимальные значения при  $x_1 = c/d$  и  $x_2 = a/b$  соответственно, и, таким образом, функция  $f(x_1, x_2)$  принимает максимальное значение

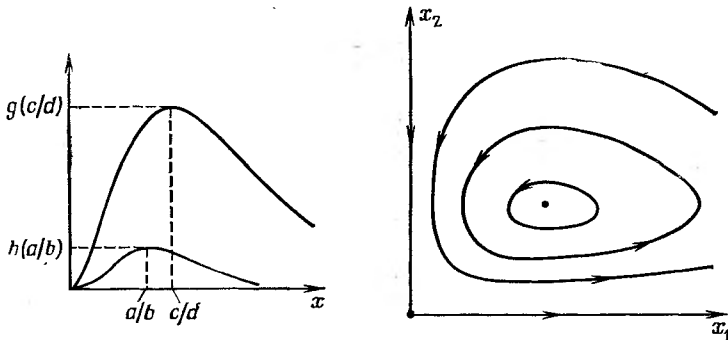


Рис. 4.17. Графики функций  $g(x)$  и  $h(x)$  для  $a = 4,0$ ;  $b = 2,5$ ;  $c = 2,0$ ;  $d = 1,0$ . Максимумы принимаются при  $x = c/d$  и  $x = a/b$  соответственно.

Рис. 4.18. Фазовый портрет для системы уравнений Вольтерра — Лотка:  $\dot{x}_1 = (a - bx_2)x_1$ ,  $\dot{x}_2 = (-c + dx_1)x_2$  с  $a = 4,0$ ;  $b = 2,5$ ;  $c = 2,0$ ;  $d = 1,0$ .

$g(c/d)h(a/b)$  в точке  $(x_1, x_2) = (c/d, a/b)$ . Следовательно, линии уровня функции  $f(x_1, x_2)$  являются замкнутыми кривыми, окружающими точку  $(c/d, a/b)$ . Траектории системы (4.87), совпадают с этими линиями уровня, и точка  $(c/d, a/b)$  является центром.

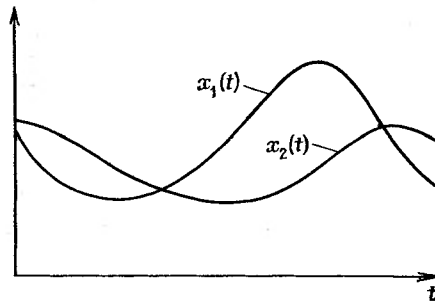


Рис. 4.19. Колебания функций  $x_1$  и  $x_2$ , полученные из фазового портрета на рис. 4.18.

Функции  $g(x_1)$  и  $h(x_2)$  не симметричны относительно своих максимальных значений и, следовательно, замкнутые траектории не являются эллипсами. Обе функции  $g$  и  $h$  имеют крутой подъем и относительно пологий спуск (см. рис. 4.17); это значит, что траектории имеют форму, указанную на

рис. 4.18. Неэллиптическая форма траекторий этого нелинейного центра отражает негармонический характер колебаний численности популяций (см. рис. 4.19).

### 4.3.3. МОДЕЛЬ ХОЛЛИНГА — ТЭННЕРА

Хотя незатухающие негармонические колебания встречаются для нелинейных систем с центрами на фазовых портретах, неизвестно, являются ли такие колебания устойчивыми относительно возмущений самой модели. Мы видели в п. 4.1, что для гармонического осциллятора центр может быть разрушен даже самыми слабыми демпфирующими воздействиями; при этом он превращается в фокус, то же можно сказать о колебаниях простого маятника (см. упр. 25). Аналогичная вещь происходит с уравнениями Вольтерра — Лотка (4.87): предположим мы модифицировали их таким образом, чтобы учитывалась внутривидовая конкуренция. На фазовом портрете измененной таким образом системы уже не будет центра, и колебания популяции затухают. Способность к легкому разрушению вообще является характерным свойством центров; говорят, что они структурно неустойчивы<sup>1)</sup>.

Другая возможность, при которой в нелинейных системах возникают незатухающие колебания, — это наличие предельных циклов на их фазовых портретах (см. п. 3.8). Предельные циклы являются структурно устойчивыми и, следовательно, представляют собой более «постоянную» характерную черту фазового портрета системы: они не имеют тенденции исчезать при относительно малых возмущениях модели. Модели, не чувствительные к малым возмущениям, называются *грубыми*. Поскольку большинство моделей являются идеализациями, в которых внимание сосредоточено только на некоторых основных переменных и соотношениях между ними, такой вид устойчивости чрезвычайно важен.

Система «хищник — жертва» для двух видов является, конечно, именно такой идеализацией, и модель Вольтерра — Лотка не является грубой. Поэтому возникает сомнение, отражает ли система (4.87) настоящий механизм колебаний численности популяций. Модель, в которой возникают структурно устойчивые колебания численности популяций для системы «хищник — жертва», — это модель Холлинга — Тэннера. Динамические уравнения этой модели имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= r(1 - x_1 K^{-1})x_1 - \omega x_1 x_2 (D + x_1)^{-1}, \\ \dot{x}_2 &= s(1 - J x_2 x_1^{-1})x_2,\end{aligned}\quad (4.89)$$

где  $r, s, K, D, J > 0$ .

<sup>1)</sup> Определение структурной устойчивости и неустойчивости см. в книге (Арнольд, 1979), с. 85. — *Прим. перев.*

Скоростью роста популяции жертв  $\dot{x}_1$  является разность двух членов:

(а)  $r(1 - x_1 K^{-1})x_1$ , задающего скорость размножения жертв в отсутствие хищников. Сюда включен член, соответствующий межвидовой конкуренции в условиях ограниченных ресурсов (см. п. 1.2.2);

(б)  $w x_1 x_2 (D + x_1)^{-1}$ , описывающего влияние хищников.

Чтобы объяснить вид члена (б), надо понять влияние хищников в терминах «коэффициента хищничества». Это — количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени. В уравнениях (4.87) коэффициент хищничества равен  $b x_1$ . Это значит, что количество жертв, убиваемых одним хищником в единицу времени, неограниченно растет вместе с популяцией жертв.

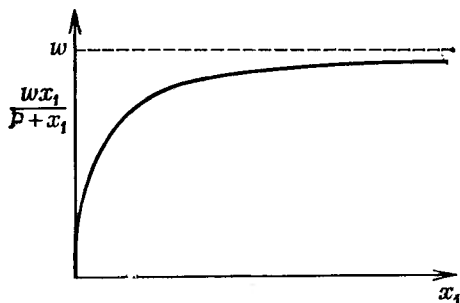


Рис. 4.20. Интенсивность хищничества для модели Холлинга — Тэйнера. Наклон в точке  $x_1 = 0$  есть  $w/D$ , величина насыщения —  $w$ .

Более разумным представляется предположение, что существует верхний предел коэффициента хищничества, т. е. что хищник перестает убивать, когда насыщается. Это учитывается видом члена (б), в котором коэффициент хищничества равен  $w x_1 (D + x_1)^{-1}$  (см. рис. 4.20).

Скорость роста популяции хищников  $\dot{x}_2$  такая же, как в (4.89), в предположении, что жертвы достаточно редки. Допустим, что количество жертв, необходимых для поддержания жизни одного хищника, равно  $J$ . Таким образом, популяция из  $x_1$  жертв может поддерживать не более чем  $x_1/J$  хищников. Мы должны построить модель таким образом, чтобы количество хищников не превышало критическую величину  $x_1/J$ ; это достигается при

$$\dot{x}_2 = x_2 \left( s - \frac{sJ}{x_1} x_2 \right).$$

Именно это уравнение задано в (4.89). Изоклины направленный  $\dot{x}_1 = 0$  и  $\dot{x}_2 = 0$  для уравнений (4.89) показаны на

рис. 4.21. Как видно из чертежа, существует неподвижная точка с положительными значениями  $x_1$  и  $x_2$ ; обозначим ее  $(x_1^*, x_2^*) = (x_1^*, x_2^*)$ . Чтобы определить характер этой неподвижной точки, удобно в уравнениях (4.89) изменить масштаб

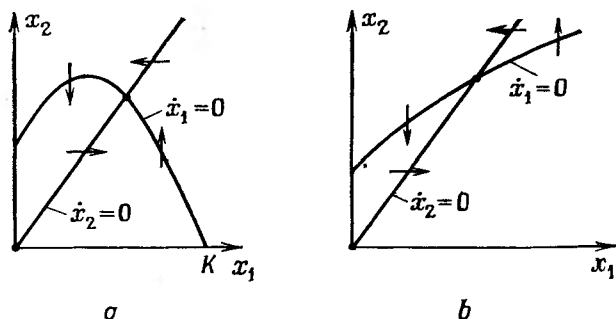


Рис. 4.21. Изоклины для системы (4.89):  $\dot{x}_1 = 0$  на  $x_2 = r\omega^{-1}(1 - x_1K^{-1}) \times (D + x_1)$ ; эта кривая имеет максимум при  $x_1 = (K - D)/2$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  на  $x_2 = J^{-1}x_1$ . Пересечение этих кривых может происходить (а) при  $x_1 > (K - D)/2$  или (б) при  $x_1 < (K - D)/2$ .

переменных, разделив их на  $x_1^*$ :  $y_1 = x_1/x_1^*$ ,  $y_2 = x_2/x_1^*$ . Получим уравнения

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= r(1 - y_1k^{-1})y_1 - \omega y_1 y_2 (d + y_1)^{-1}, \\ \dot{y}_2 &= s(1 - Jy_2y_1^{-1})y_2, \end{aligned} \quad (4.90)$$

где  $k = K/x_1^*$ , а  $d = D/x_1^*$ . Кроме того, на плоскости  $y_1, y_2$  неподвижная точка имеет координаты

$$(y_1^*, y_2^*) = (1, r\omega^{-1}(1 - k^{-1})(1 + d)) = (1, J^{-1}). \quad (4.91)$$

Матрица коэффициентов линеаризованной в точке  $(y_1^*, y_2^*)$  системы имеет вид

$$W = \begin{bmatrix} r(-k^{-1} + \omega(rJ)^{-1}(1 + d)^{-2}) & -\omega(1 + d)^{-1} \\ sJ^{-1} & -s \end{bmatrix}. \quad (4.92)$$

Заметим, что

$$\det W = rs(k^{-1} + \omega d(rJ)^{-1}(1 + d)^{-2}) > 0, \quad (4.93)$$

так что  $(y_1^*, y_2^*)$  никогда не может быть седлом. Однако, подставив  $\omega(rJ)^{-1}$  из (4.91), получим, что

$$\begin{aligned} \text{tr } W &= r(\omega(rJ)^{-1}(1 + d)^{-2} - k^{-1}) - s = \\ &= r(k - d - 2)(k(1 + d))^{-1} - s, \end{aligned} \quad (4.94)$$

а это выражение может быть как положительным, так и отрицательным.

Пусть  $\varphi_t$  — оператор эволюции для системы (4.90). Рассмотрим  $\varphi_t(k, 0_+)$  при  $t > 0$ . Как показано на рис. 4.22, эта

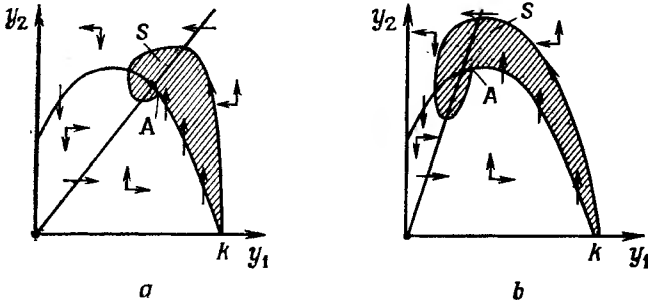


Рис. 4.22. Положительно инвариантные множества  $S$ , содержащие неподвижную точку  $(y_1^*, y_2^*)$  и ограниченные траекторией  $\{\varphi_t(k, 0_+) | t > 0\}$  и частью изоклины  $\dot{x}_1 = 0$ : (a)  $x_1^* > (K - D)/2$ ; (b)  $x_1^* < (K - D)/2$ .

траектория должна обойти вокруг неподвижной точки и пересечь изоклину  $\dot{x}_1 = 0$  в точке  $A$ . Множество  $S$ , заключенное между этой траекторией и участком изоклины  $\dot{x}_1 = 0$  между точками  $A$  и  $(k, 0)$ , положительно инвариантно.

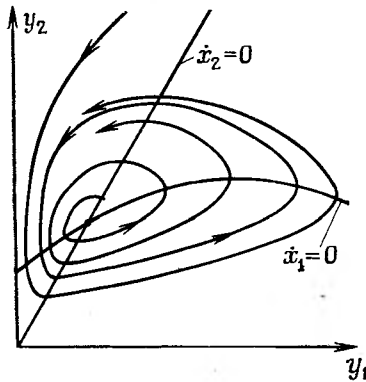


Рис. 4.23. Фазовый портрет системы (4.90) при  $r = (1, 0)$ ;  $s = 0,2$ ;  $k = 7,0$ ;  $d = 1,0$ ; виден устойчивый предельный цикл модели Холлница — Тэннера.

Если  $\text{tr } W > 0$ , то  $(y_1^*, y_2^*)$  является неустойчивой неподвижной точкой, и из теоремы о линеаризации следует, что существует некоторая окрестность  $N$  неподвижной точки, содержащаяся в  $S$  и такая, что  $S \setminus N$  — положительно инвариантное множество. Однако в  $S \setminus N$  нет неподвижных точек, и в силу теоремы 3.9.1 в этом множестве должна содержаться

замкнутая орбита. Таким образом, если набор параметров  $(r, s, k, d)$  удовлетворяет условию

$$s < \frac{r(k-d-2)}{k(1+d)}, \quad (4.95)$$

то на фазовом портрете системы (4.90) имеется устойчивый предельный цикл (см. рис. 4.23). В упр. 19 показано, что это может случиться только тогда, когда точка  $(y_1^*, y_2^*)$  лежит левее максимума на нулевой изоклине  $\dot{x}_1 = 0$ . То есть фазовый портрет, соответствующий рис. 4.22(a), не имеет предельного цикла; точка  $(y_1^*, y_2^*)$  является здесь просто устойчивым фокусом.

#### 4.4. РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ

##### 4.4.1. ОСЦИЛЛЯТОР ВАН-ДЕР-ПОЛЯ

Рассмотрим модификацию последовательной  $LCR$ -цепи, показанную на рис. 4.24. Предположим, что «черный ящик»  $B$  является элементом цепи (или объединением нескольких элементов цепи) с вольт-амперной характеристикой, изображен-

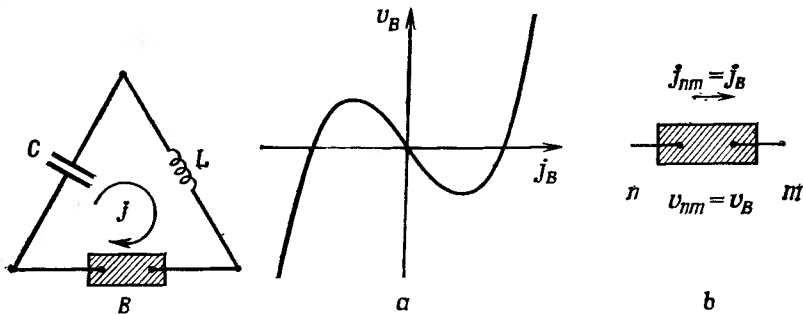


Рис. 4.24. Модификация последовательной  $LCR$ -цепи (рис. слева).

Рис. 4.25. (a) — вольт-амперные характеристики для черного ящика на рис. 4.24. С помощью величины, введенных на рис. (b), можно записать уравнение этой кривой:  $v_B = f(j_B) = i_B \left( \frac{1}{3} j_B^2 - 1 \right)$ .

ной на рис. 4.25(a). Такой черный ящик называется нелинейным резистором с кубической вольт-амперной характеристикой:

$$v_B = f(j_B) = i_B \left( \frac{1}{3} j_B^2 - 1 \right). \quad (4.96)$$

Пусть  $v_L$ ,  $v_B$  и  $-v_C$  суть разности потенциалов на элементах цепи на рис. 4.24 в направлении тока  $j$ . Динамические уравнения цепи имеют вид

$$L \frac{dj}{dt} = v_C - f(j), \quad C \frac{dv_C}{dt} = -j. \quad (4.97)$$

Мы применили здесь закон Кирхгофа для напряжений и исключили  $v_L$ . Теперь сделаем замену  $L^{-1}t \rightarrow t$ ,  $x_1 = j$ ,  $x_2 = v_C$ ,  $L/C = \eta$ , и получим

$$\dot{x}_1 = x_2 - f(x_1), \quad \dot{x}_2 = -\eta x_1. \quad (4.98)$$

Система (4.98) имеет неподвижную точку при  $x_1 = x_2 = 0$  и изоклины, показанные на рис. 4.26. Предположим теперь,

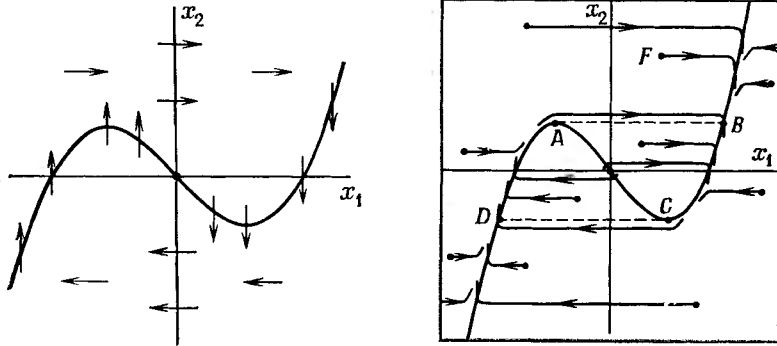


Рис. 4.26. Изоклины для системы (4.98):  $\dot{x}_1 = 0$  на кривой  $x_2 = f(x_1)$ ;  $\dot{x}_2 = 0$  на оси  $x_2$ . Направление векторного поля вне этих изоклин указано для малых  $\eta$  (рис. слева).

Рис. 4.27. Фазовый портрет для системы (4.98) при  $\eta \rightarrow 0$ . Все траектории быстро выходят на предельный цикл  $ABCD$ .

что  $\eta$  настолько мало (это значит, что  $L$  мало по сравнению с  $C$ ), что во всех точках плоскости, кроме непосредственной окрестности изоклины  $\dot{x}_1 = 0$ , величиной  $\dot{x}_2$  можно пренебречь по сравнению с  $\dot{x}_1$ . Это означает, что векторное поле  $(x_2 - f(x_1), -\eta x_1)^T$  имеет почти горизонтальное направление, кроме непосредственной окрестности кривой

$$x_2 = f(x_1) = \frac{x_1^3}{3} - x_1. \quad (4.99)$$

Отсюда следует, что фазовый портрет должен быть таким, как это показано на рис. 4.27. Как легко видеть, все начальные условия порождают траектории, которые при первой возможности выходят на предельный цикл  $ABCD$ . В точках, далеких от кубической параболы (4.99),  $\dot{x}_1$  относительно велико, так что фазовая точка быстро приходит в близкую окрестность этой кривой и затем медленно передвигается вдоль кривой. Быстрое движение на участках  $AB$ ,  $CD$  и медленное на участках  $BC$ ,  $DA$  порождают незатухающие колебания

величины  $x_1(t)$  «почти разрывной» формы (см. рис. 4.28). Колебания такого вида называются *релаксационными колебаниями*.

Система (4.98) имеет предельный цикл не только при  $\eta \rightarrow 0$ . Например, при  $\eta = 1$  эта система является частным случаем уравнения Ван-дер-Поля:

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (4.100)$$

с  $\varepsilon = 1$ . Это уравнение имеет вид

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + h(x) = 0; \quad (4.101)$$

последнее в свою очередь эквивалентно системе

$$\dot{x}_1 = x_2 - \int g(x_1) dx_1, \quad \dot{x}_2 = -h(x_1) \quad (4.102)$$

(см. упр. 27 гл. 1). Уравнения вида (4.101) иногда называются *уравнениями Льенара* (см. п. 5.1), а координаты

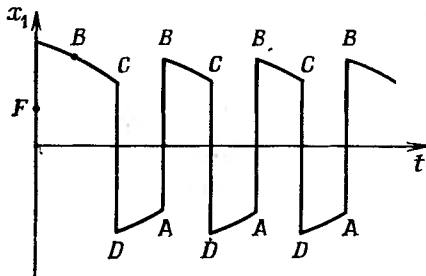


Рис. 4.28. Релаксационные колебания для траектории, выходящей из точки  $F$  на рис. 4.27. Участки, обозначенные  $CD$  и  $AB$  почти вертикальны; они описывают быстрое движение между соответствующими точками фазовой плоскости.

$x_1, x_2$  в (4.102) определяют *плоскость Льенара*. Представление Льенара для уравнения Ван-дер-Поля имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2 - \varepsilon \left( \frac{x_1^3}{3} - x_1 \right), \quad \dot{x}_2 = -x_1, \quad (4.103)$$

что совпадает с (4.98) при  $\varepsilon = \eta = 1$ .

Уравнение Ван-дер-Поля можно рассматривать как некоторое обобщение гармонического осциллятора (4.2). Разница состоит в том, что оно имеет нелинейный коэффициент затухания  $\varepsilon(x^2 - 1)$  вместо коэффициента  $2k$  в (4.2).

Осциллятор Ван-дер-Поля имеет единственный устойчивый предельный цикл для всех значений  $\varepsilon$ . Когда  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , предельный цикл принимает вид, указанный на рис. 4.27,



и возникают релаксационные колебания (см. упр. 28). При  $\varepsilon \rightarrow 0$  предельный цикл приближается к окружности радиуса 2 (см. упр. 27). При увеличении  $\varepsilon$  от нуля до бесконечности

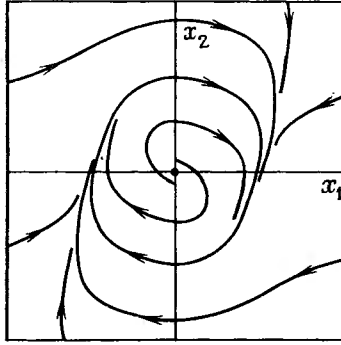


Рис. 4.29. Предельный цикл осциллятора Ван-дер-Поля на плоскости Лянара:  $\varepsilon = 1,0$ .

предельный цикл гладко деформируется из одного крайнего положения в другое (см. рис. 4.29).

#### 4.4.2. СКАЧКИ И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Если мы положим  $L = 0$  в уравнениях электрической цепи (4.97), то дифференциальное уравнение

$$L \frac{dj}{dt} = v_c - f(j) \quad (4.104)$$

заменяется на алгебраическое уравнение

$$v_c = f(j). \quad (4.105)$$

Тогда система двух динамических уравнений (4.97) с  $(j, v_c) \in \mathbb{R}^2$  заменяется одним динамическим уравнением

$$C \frac{dv_c}{dt} = C \dot{v}_c = -j, \quad (4.106)$$

определенным на  $\{(j, v_c) | v_c = f(j)\}$ .

Геометрически уравнение (4.106) означает, что движение точки  $(j, v_c)$  происходит только по кривой (4.105) на плоскости  $j, v_c$ . Из уравнения (4.106) следует, что

$$\dot{v}_c \leq 0 \text{ для } j \geq 0, \quad (4.107)$$

и состояния цепи должны следовать друг за другом так, как указано на рис. 4.30. Из любой начальной точки, лежащей на кривой  $v_c = f(j)$ , состояние цепи переходит в одну из двух точек:  $A$  или  $C$ . Эти точки не являются неподвижными, так как в них  $\dot{v}_c = -j/C \neq 0$ ; однако они являются особыми в том смысле, что производная в них

$$\frac{dj}{dt} = -j \left( C \frac{df}{dj} \right)^{-1} \quad (4.108)$$

не определена, поскольку  $df/dj$  обращается в нуль.

Если бы мы не проанализировали уравнения (4.97) в п. 4.4.1, то нам было бы трудно догадаться, что происходит

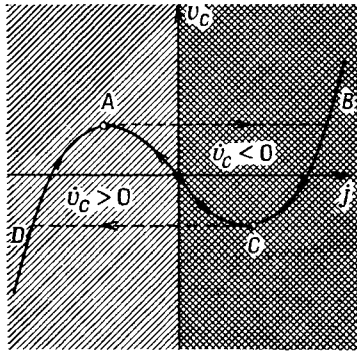


Рис. 4.30. Уравнение (4.107) означает, что  $v_c$  возрастает при  $j < 0$  и убывает при  $j > 0$ . Таким образом, от любой начальной точки  $v_c = f(j)$  состояние цепи приходит либо к точке  $A$ , либо к точке  $C$ .

с фазовой точкой после достижения положений  $A$  и  $C$ . Но теперь мы можем с большим основанием предположить, что величина  $j$  изменяется разрывным образом и происходит мгновенный «скачок» в точки  $B$  и  $D$  соответственно, при этом величина  $v_c$  остается постоянной. Таким образом, происходят релаксационные колебания величины  $j(t)$ , но теперь она изменяется действительно разрывным образом.

Если система динамических уравнений со связями является предельным случаем некоторой системы без связей, то последняя называется *регуляризацией* системы со связями. Таким образом, (4.97) есть регуляризация системы (4.106).

Иногда динамические уравнения с ограничениями и предположения о возможности «скачков» некоторых переменных содержатся уже в естественной формулировке задачи. Ниже мы проиллюстрируем это на примере электрической цепи, содержащей «неоновую трубку».

Неоновая трубка — это стеклянная колба, заполненная инертным газом (неоном) и снабженная двумя электродами. Когда разность потенциалов между электродами начинает возрастать от нуля, ток не возникает до тех пор, пока разность потенциалов не достигнет некоторой пороговой величины  $v_1$ . При напряжении  $v_1$  трубка сразу становится проводником (произошла ионизация инертного газа) и ток скачком поднимается до некоторого значения. После этого ток возрастает почти линейно с ростом напряжения. Для неоновой трубки, изображенной на рис. 4.31, вольт-амперная характеристика в этой части имеет вид  $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow E$ .

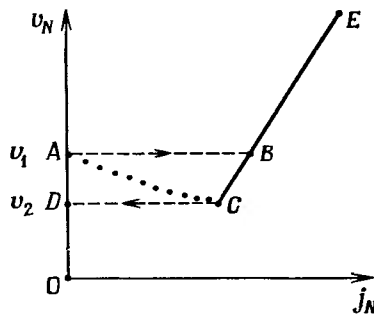


Рис. 4.31. Идеализированная вольт-амперная характеристика неоновой трубки. Заметим аналогию между этим случаем и кубической характеристикой: обе кривые немонотонны (с горбами).

Если теперь разность потенциалов уменьшается от значения, которое она имела в точке  $E$ , то трубка не перестает быть проводником электрического тока при достижении напряжения  $v_1$ . Ток продолжает уменьшаться по мере падения напряжения, пока оно не достигает величины  $v_2$  ( $< v_1$ ); тогда ток резко падает до нуля. Эта часть вольт-амперной характеристики соответствует пути  $E \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$  на рис. 4.31. Если напряжение снова повышается, то поведение трубки в точности повторяется.

Некоторые физические опыты свидетельствуют о возможности прохождения пути  $CA$ , обозначенного на рис. 4.31 точками. Но эта возможность не реализуется в случае плавного повышения и понижения напряжения, которое было описано выше, и в дальнейшем мы не будем заниматься этим вопросом. Однако это должно помочь подчеркнуть немонотонный характер вольт-амперной характеристики.

**Пример 4.4.1.** Показать, что цепь, показанная на рис. 4.32, моделируется динамическими уравнениями с ограничениями для величины напряжения  $v_c$  на конденсаторе.

Предположим, что между узлами 2 и 3 цепи находится небольшая индуктивность  $L$ . Какое влияние это окажет на динамические уравнения?

**Решение.** Пусть  $v_{12} = v_N$ ,  $v_{13} = v_C$  и  $v_{34} = v_R$ . Тогда, пользуясь обозначениями рис. 4.32, мы можем написать

$$v_R + v_C = \mathcal{E} = jR + v_C \quad (4.109)$$

и

$$v_C = v_N = f(i), \quad (4.110)$$

где  $f(i)$  — вольт-амперная характеристика неоновой трубки. Кроме того,

$$C\dot{v}_C = j - i. \quad (4.111)$$

Поведение цепи определяется уравнением

$$C\dot{v}_C = \frac{\mathcal{E} - v_C}{R} - i, \quad \text{где } v_C = f(i), \quad (4.112)$$

что как раз и дает динамическое уравнение с ограничением.

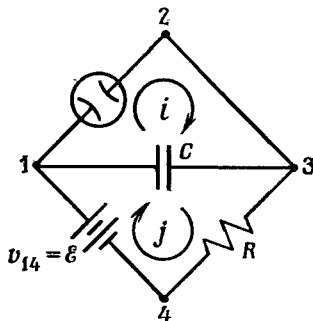


Рис. 4.32. Простейшая схема временной развертки (см. п. 4.5.1).

Если между узлами 2 и 3 поместить индуктивность, то вместо (4.110) мы получим

$$v_L = v_C - v_N, \quad (4.113)$$

где  $v_L = v_{23}$ . Тогда ограничение  $v_C = f(i)$  заменяется новым динамическим уравнением

$$L \frac{di}{dt} = v_C - f(i). \quad (4.114)$$

Это уравнение вместе с дифференциальным уравнением (4.112) составляет систему, уже не имеющую ограничений; она является регуляризацией для (4.112).

В примере 4.4.1 скачки вводятся в динамику емкостного напряжения  $v_C$  через вольт-амперную характеристику неоновой трубки. Предположим, что в начальный момент напряжения  $v_C = 0$ ; батарея  $\mathcal{E}$  заряжает конденсатор  $C$  через сопротивление  $R$ . Напряжение на неоновой трубке  $v_N$  равно  $v_C$ . Ток  $i$ , проходящий через трубку, равен нулю до тех пор, пока не достигнуто значение  $v_N = v_C = v_1$  ( $0 \rightarrow D \rightarrow A$  на рис. 4.31). Тогда трубка начинает проводить, т. е. происходит скачок величины  $i$ . Если сопротивление  $R$  достаточно велико, то путь через неоновую трубку является путем наименьшего сопротивления и конденсатор разряжается через него. Это значит, что напряжение  $v_C$  падает, но неоновая трубка продолжает проводить до тех пор, пока не достигается значение  $v_C = v_N = v_2$ , когда величина  $i$  скачком падает до нуля ( $B \rightarrow C \rightarrow D$  на рис. 4.31). Тогда батарея снова заряжает конденсатор. Скачки возникают потому, что должно выполняться ограничение  $v_C = f(i)$ .

Введение небольшой индуктивности все меняет. Динамические уравнения действуют на всей фазовой плоскости  $i, v_C$ , скачки сглаживаются,  $ABCD$  (на рис. 4.31) становится предельным циклом.

#### 4.5. КУСОЧНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

В п. 4.4 мы рассматривали модели, в которых динамические уравнения и ограничения содержали некоторые функциональные зависимости между переменными. Другой, на первый взгляд отличный от предыдущего, тип ограничений возникает в моделях, в которых действуют разные динамические уравнения на разных интервалах времени или в разных областях изменения динамических переменных. Такие модели часто можно трактовать как составленные из кусков; в них, как правило, возникают кусочно-непрерывные или кусочно-дифференцируемые функции времени.

##### 4.5.1. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О СКАЧКАХ В КУСОЧНЫХ МОДЕЛЯХ

На первый взгляд может показаться, что нет ничего общего между такими моделями и моделями с ограничениями, которые мы рассматривали в п. 4.4. Однако, как показывает следующий пример, это не всегда так.

**Пример 4.5.1.** Показать, что динамические уравнения с ограничениями (4.112), а именно

$$C\dot{v}_C = \frac{\mathcal{E} - v_C}{R} - i, \quad v_C = f(i),$$

полученные в примере 4.4.1, эквивалентны модели, содержащей два разных динамических уравнения на разных интервалах времени. Рассмотреть вольт-амперную характеристику неоновой трубки, показанной на рис. 4.31, предполагая, что на  $CE$  выполнено соотношение  $v_N = rj_N$ . Применить полученные ранее динамические уравнения и найти колебательные решения для  $v_C(t)$ , если  $v_C = v_2$  и  $i = 0$  при  $t = 0$ .

**Решение.** Рассмотрим смысл предположения о скачке, связанного с динамическими уравнениями (4.112). На части  $CE$  вольт-амперной характеристики, показанной на рис. 4.31,

$$j_N = \varphi(v_N); \quad (4.115)$$

значит, в силу предположения о скачке мы должны положить

$$i = \begin{cases} 0 & \text{на } OA, \\ \varphi(v_C) & \text{на } CE. \end{cases} \quad (4.116)$$

Таким образом, если состояние цепи соответствует точке на  $OA$ , то динамическое уравнение имеет вид

$$C\dot{v}_C = \frac{\mathcal{E} - v_C}{R}. \quad (4.117)$$

Но если состояние соответствует точке на  $CE$ , то динамическое уравнение превращается в

$$C\dot{v}_C = \frac{\mathcal{E} - v_C}{R} - \varphi(v_C). \quad (4.118)$$

Если  $v_C(0) = v_2$  и  $i(0) = 0$ , то начальное состояние соответствует точке  $D$  на отрезке  $OA$  и динамика задается уравнением (4.117). Это — линейное (точнее, аффинное) уравнение, и его решение имеет вид

$$v_C(t) = \mathcal{E} [1 - \exp(-t/CR)] + v_2 \exp(-t/CR). \quad (4.119)$$

Поэтому напряжение возрастает и стремится к  $\mathcal{E}$ .

Чтобы возникли колебания, должно выполняться соотношение  $\mathcal{E} > v_1$  так, чтобы через некоторое время, скажем  $T_1$ , трубка стала проводником. Состояние цепи перескакивает в точку  $B \in CE$ , и начинает действовать динамическое уравнение (4.118). Если мы возьмем  $\varphi(v_C) = v_C/r$ , то уравнение (4.118) примет вид

$$\dot{v}_C + \frac{v_C}{C\bar{R}} = \frac{\mathcal{E}}{CR}, \quad (4.120)$$

где  $\bar{R}^{-1} = R^{-1} + r^{-1}$ . Это линейное дифференциальное уравнение имеет решение

$$v_C = \frac{\mathcal{E}\bar{R}}{R} [1 - \exp(-\tau/C\bar{R})] + v_1 \exp(-\tau/C\bar{R}), \quad (4.121)$$

где  $\tau = t - T_1$ . Чтобы возникли колебания, величина  $\mathcal{E}\bar{R}/R$  должна быть меньше, чем  $v_2$ , так, чтобы  $v_c$  (емкостное напряжение теперь уменьшается с ростом времени) достигло значения  $v_2$  при  $\tau = T_2$  (см. рис. 4.33). При этом значении напряжения неоновая трубка перестает быть проводником, и состояние снова переходит скачком в точку  $D$ , где начинает

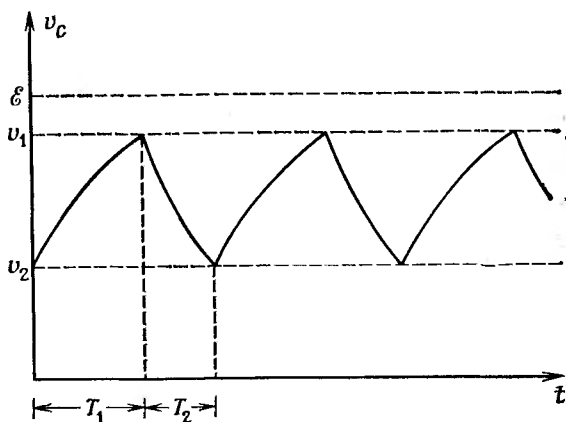


Рис. 4.33. Нелинейные «пилообразные» колебания, полученные из линейных дифференциальных уравнений (4.117) и (4.118).

действовать уравнение (4.117), и  $v_c$  снова начинает возрастать.

Напряжение на конденсаторе в примере 4.5.1 возрастает до значения  $v_1$  со скоростью, определяемой сопротивлением  $R$  (см. (4.119)) и возвращается обратно (релаксирует) к  $v_2$  со скоростью, определяемой  $\bar{R}$  (см. (4.121)). Если  $R \gg r$ , то  $\bar{R} \approx r$ , и релаксация происходит гораздо быстрее, чем возрастание  $v_c$ . Если  $T_2$  достаточно мало по сравнению с  $T_1$ , то возвращение значения напряжения к  $v_2$  происходит практически мгновенно. Кроме того, если величина  $v_1 - v_2$  достаточно мала по сравнению с  $\mathcal{E}$ , то рост  $v_c$  от  $v_2$  до  $v_1$  происходит почти линейно.

Именно такие свойства необходимы для временной развертки в осциллографе. Пластины оси  $x$  соединены друг с другом через конденсатор, а развертываемый сигнал подается на пластины оси  $y$ . Поэтому электронный луч равномерно ведется вдоль экрана и быстро возвращается к своему исходному положению, а затем цикл снова повторяется. Синхронизация периода колебаний  $v_c$  и сигнала позволяет получать изображение сигнала в виде стационарной волны.

Этот пример особенно интересен, так как нелинейные «пилообразные» колебания, очевидно, представляют собой нелинейное явление, которое тем не менее успешно моделируется с помощью линейных уравнений (4.117) и (4.118); каждое из них выполняется на своем временном интервале.

Два типа решений непрерывно соединяются друг с другом при  $t = T_1$  и  $t = T_1 + T_2$  и т. д., хотя наклон  $\dot{v}_c$  в этих точках не является непрерывным. Эта потеря непрерывности возникает в силу скачков точек на фазовой плоскости, как это показано на рис. 4.31. Уравнения (4.117) и (4.118) определены на отделенных друг от друга множествах  $DA$  и  $BC$  этого рисунка, и именно это вызывает скачки и, следовательно, разрывы функции  $\dot{v}_c$ .

#### 4.5.2. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ЦИКЛ, СОСТАВЛЕННЫЙ ИЗ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Существует много моделей, в которых нелинейные явления воспроизводятся путем сращивания решений линейных динамических уравнений. Может быть, самым поучительным примером конструкции такого рода является составление предельного цикла из решений двух линейных уравнений, описывающих затухающие гармонические колебания (Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., 1959).

Система состоит из уравнений

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 g, \quad \dot{x} > 0, \quad (4.122)$$

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0, \quad \dot{x} \leq 0, \quad (4.123)$$

где  $g \in \mathbb{R}$ . Мы уже изучали решения уравнения (4.123) в п. 4.1. Теперь нам достаточно будет рассмотреть уравнение в предположении, что  $0 < k < \omega_0$ , когда система испытывает свободные затухающие колебания вида

$$x(t) = Re^{-kt} \cos(\beta t + \theta), \quad (4.124)$$

где  $\beta = (\omega_0^2 - k^2)^{1/2}$ . На фазовой плоскости переменных  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  фазовый портрет в начале координат имеет устойчивый фокус. Решения уравнения (4.122) легко можно получить, сделав замену  $y = x - g$ ; уравнение для  $y$  будет иметь вид

$$\ddot{y} + 2k\dot{y} + \omega_0^2 y = 0. \quad (4.125)$$

Отсюда получим, что уравнение (4.122) имеет решения вида

$$x(t) = g + \bar{R}e^{-kt} \cos(\beta t + \bar{\theta}) \quad (4.126)$$

и фазовый портрет для (4.122) имеет на плоскости  $x_1, x_2$  устойчивый фокус в точке  $(g, 0)$ .



Чтобы показать, что система, составленная из уравнений (4.122) и (4.123), имеет в своем фазовом портрете предельный цикл, мы покажем, что для нее существует замкнутая траектория. Предположим, что в некоторый момент времени  $t = t_1$  фазовая точка занимает положение  $(x_1(t_1), 0)$  с  $x_1(t_1) > 0$ ; она движется в соответствии с уравнением (4.123) по спирали, закручивающейся вокруг начала координат. При значении времени  $t_1 + \pi/\beta$  она снова пересекает ось  $x_1$ , но

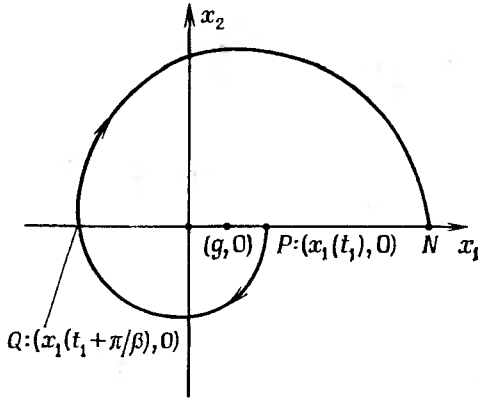


Рис. 4.34. Фазовая плоскость системы, определяемой уравнениями (4.122) и (4.123), с  $x_1 = x$  и  $x_2 = \dot{x}$ . Показана траектория, выходящая из точки  $(x_1(t), 0)$ . При  $x_2 \leq 0$  эта траектория закручивается вокруг точки  $(0, 0)$ ; при  $x_2 > 0$  она закручивается вокруг точки  $(g, 0)$ .

с другой стороны от начала координат (т. е. точка пробегает отрезок траектории от  $P$  до  $Q$  в нижней полуплоскости рис. 4.34). Из уравнения (4.124) получаем

$$x_1(t_1) = R \exp(-kt_1) \cos(\beta t_1 + \theta) \quad (4.127)$$

и

$$\begin{aligned} x_1\left(t_1 + \frac{\pi}{\beta}\right) &= R \exp\left[-k\left(t_1 + \frac{\pi}{\beta}\right)\right] \cos\left(\beta t_1 + \pi + \theta\right) = \\ &= -R \exp(-kt_1) \exp\left(-\frac{k\pi}{\beta}\right) \cos(\beta t_1 + \theta). \end{aligned} \quad (4.128)$$

Таким образом,

$$x_1\left(t_1 + \frac{\pi}{\beta}\right) = -\rho x_1(t_1), \quad (4.129)$$

где  $\rho = \exp(-k\pi/\beta) < 1$ .

При  $t > t_1 + \pi/\beta$  фазовая точка движется в верхней полуплоскости рис. 4.34 и движением ее управляет уравнение (4.122). Точка пробегает отрезок спирали с центром в точке

$(g, 0)$  до тех пор, пока при  $t = t_1 + 2\pi/\beta$  она не пересечет положительную полуось  $x_1$  в точке  $N$ . Из уравнения (4.126) имеем

$$x_1\left(t_1 + \frac{\pi}{\beta}\right) - g = \bar{R} \exp\left[-k\left(t_1 + \frac{\pi}{\beta}\right)\right] \cos(\beta t_1 + \pi + \bar{\theta})$$

и

$$x_1\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right) - g = -\bar{R} \exp\left[-k\left(t_1 + \frac{\pi}{\beta}\right)\right] \rho \cos(\beta t_1 + \pi + \bar{\theta}). \quad (4.130)$$

Применяя (4.129), получим

$$x_1\left(t_1 + \frac{2\pi}{\beta}\right) - g = -[-\rho x_1(t_1) - g]\rho. \quad (4.131)$$

Если существует замкнутая траектория, то должно существовать такое значение  $x_1(t_1)$ , при котором точка  $N$  совпадает с  $P$ . Это произойдет, если существует положительное решение уравнения (4.131), для которого  $x_1(t_1 + 2\pi/\beta) = x_1(t_1)$ . Легко видеть, что существует только одно такое решение, а именно

$$x_1(t_1) = \frac{g}{1 - \rho} = x_1^{(c)}. \quad (4.132)$$

В силу этого существует единственная замкнутая траектория.

Мы можем убедиться в том, что эта замкнутая траектория является устойчивым предельным циклом, с помощью следующего рассуждения. Рассмотрим траекторию, выходящую из произвольной точки плоскости  $x_1, x_2$ , и пусть  $\bar{x}_1 \neq x_1^{(c)}$  есть  $x_1$ -координата первого пересечения этой траектории с положительной полуосью  $x_1$ . Из уравнения (4.131) тогда следует, что  $x_1$ -координаты точек пересечения с положительной полуосью  $x_1$  задаются последовательностью

$$\{\bar{x}_1, g(1 + \rho) + \rho^2 \bar{x}_1, g(1 + \rho + \rho^2 + \rho^3) + \rho^4 \bar{x}_1, \dots, \\ g(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{2m-1}) + \rho^{2m} \bar{x}_1, \dots\}, \quad (4.133)$$

где  $m$  — число полных оборотов траектории вокруг начала координат. Так как  $\rho < 1$ , предел последовательности (4.133) существует и равен сумме геометрической прогрессии

$$g \sum_{t=0}^{\infty} \rho^t = \frac{g}{1 - \rho} = x_1^{(c)}. \quad (4.134)$$

Таким образом, все траектории навиваются на найденную ранее замкнутую траекторию, и мы можем сделать вывод, что система имеет единственный устойчивый предельный цикл.

**Пример 4.5.2.** Рассмотрим электрическую цепь, показанную на рис. 4.35 (Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э., 1959). В ней содержатся два ранее не встречавшихся нам элемента. *Триод*  $T$  состоит из стеклянной вакуумной колбы с тремя электродами, присоединенными к узлам 1, 2 и 3 цепи. Когда возникает разность потенциалов между узлами 2 и 1,

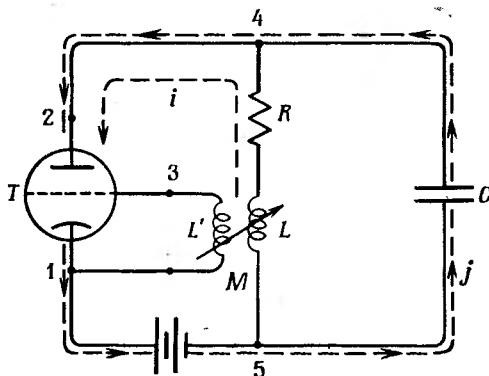


Рис. 4.35. Электрический контур, реализующий уравнения (4.122) и (4.123).

через триод течет ток, но величина этого тока является функцией (обозначим ее  $f$ ) от разности потенциалов между узлами 3 и 1. Эта функция называется *сеточной характеристикой триода*. Так как токи  $j$  и  $i$ , указанные на рис. 4.35, подчиняются закону Кирхгофа, имеем

$$i + j = f(v_{31}). \quad (4.135)$$

Источником напряжения  $v_{31}$  служит новый элемент цепи — *взаимдуктивность*  $M$ . Этот элемент состоит из двух катушек  $L$  и  $L'$ , соединенных вместе. Изменение тока  $i$  в катушке  $L$  вызывает напряжение  $M di/dt$  на катушке  $L'$ , т. е.

$$v_{31} = M di/dt, \quad (4.136)$$

где  $M$  — положительная постоянная. Надо найти динамические уравнения, управляющие током, проходящим через сопротивление  $R$ .

**Решение.** Если  $v_L$ ,  $v_R$  и  $v_C$  — разности потенциалов на соответствующих элементах в том направлении, в котором идут

токи  $i$  и  $j$ , то закон Кирхгофа для напряжений, а также свойства элементов  $L$ ,  $C$ ,  $R$  дают

$$v_L + v_R = v_C; \quad L \frac{di}{dt} = v_L; \quad C \frac{dv_C}{dt} = j; \quad v_R = iR. \quad (4.137)$$

Из уравнений (4.135) и (4.136) следует, что

$$i + j = f\left(M \frac{di}{dt}\right),$$

после чего из (4.137) получаем

$$\frac{dv_C}{dt} = \frac{j}{C} = \frac{dv_L}{dt} + \frac{dv_R}{dt} = L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt}.$$

Таким образом

$$\frac{d^2i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{i}{LC} = \frac{1}{L} f\left(M \frac{di}{dt}\right). \quad (4.138)$$

Предположим теперь, что  $f(v)$  — ступенчатая функция, а именно

$$f(v) = \begin{cases} 0, & v \leq 0, \\ I_0/C, & v > 0. \end{cases}$$

Тогда, полагая  $2k = R/L$  и  $\omega_0^2 = 1/LC$ , получим

$$\frac{d^2i}{dt^2} + 2k \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = \begin{cases} \omega_0^2 I_0, & di/dt > 0, \\ 0, & di/dt \leq 0. \end{cases} \quad (4.139)$$

Отсюда можно заключить, что триод с разрывной сеточной характеристикой может реализовать динамические уравнения (4.122) и (4.123).

## УПРАЖНЕНИЯ

### К п. 4.1

1. Написать каноническую систему  $\dot{y} = Jy$  для уравнений гармонического осциллятора

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2kx_2$$

при

(а)  $k = 0$ , (б)  $0 < k < \omega_0$ , (в)  $k = \omega_0$ , (д)  $k > \omega_0$ .

Найти также решения канонической системы. Не находя явно матрицу перехода  $M$ , показать, что решения на плоскости  $x_1$ ,  $x_2$  имеют вид, заданный уравнениями (4.5) — (4.8).

2. Нарисовать фазовый портрет для канонической системы  $\dot{y} = Jy$ , соответствующей критически демпфированному гармоническому осциллятору:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -k^2 x_1 - 2kx_2.$$

Показать, что  $x = My$ , где

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -k & 1 \end{bmatrix},$$

и найти главные направления в начале координат. С помощью найденных направлений и метода изоклин нарисовать фазовый портрет на плоскости  $x_1, x_2$ . Совпадает ли он с фазовым портретом на рис. 4.5 (а)?

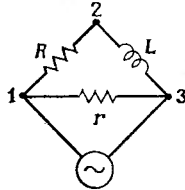
3. Рассмотреть сильно демпфированный гармонический осциллятор

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 x_1 - 2kx_2, \quad k > \omega_0.$$

Написать каноническую систему  $\dot{y} = Jy$ . Найти главные направления в начале координат и исследовать их поведение при  $k \rightarrow \infty$ . Показать, что для больших  $k$  траектории на плоскости  $x_1, x_2$  почти вертикальны всюду, кроме непосредственной окрестности оси  $x_1$ .

4. Рассмотреть электрическую цепь, содержащую три элемента: индуктивность  $L$ , конденсатор  $C$  и линейное сопротивление  $R$ , которые включены параллельно между двумя узлами. Показать, что ток, идущий через индуктивность, удовлетворяет уравнению демпфированного гармонического осциллятора. Найти коэффициент демпфирования  $k$  и естественную частоту  $\omega_0$ . В предположении, что величины  $L$  и  $R$  фиксированы, найти условие на  $C$ , при котором ток через индуктивность испытывает затухающие колебания.

5. Рассмотреть электрическую цепь, изображенную ниже.



Пусть

$$v_{13} = E(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ E_0, & t > 0. \end{cases}$$

Показать, что ток, идущий через сопротивление  $R$ , при  $t > 0$  задается формулой

$$j_R = \frac{E_0}{R} (1 - e^{-Rt/L}).$$

6. Электрическая цепь состоит из конденсатора  $C$  и линейного сопротивления  $R$ , включенных параллельно между двумя узлами. Доказать, что разность потенциалов на сопротивлении экспоненциально стремится к нулю независимо от ее начального значения.

7. Можно дать следующую модель выравнивания цен по уровню актива. Предполагается, что изменение актива ( $q$ ) пропорционально разности между предложением ( $s$ ) и спросом ( $u$ ), г. е.

$$\dot{q} = k(s - u), \quad k > 0.$$

Изменение цены ( $p$ ) считается пропорциональным отклонению актива  $q$  от некоторого фиксированного уровня  $q_0$ , так что

$$\dot{p} = -m(q - q_0), \quad m > 0.$$

Полагая, что обе функции  $s$  и  $u$  являются аффинными функциями  $p$ , получить дифференциальное уравнение второго порядка для  $p$ . Показать, что если  $u > s$  при  $p = 1$  и  $\frac{ds}{dp} > \frac{du}{dp}$ , то  $p$  испытывает колебания в зависимости от времени.

8. Некоторая популяция клеток содержит клетки с двумя и четырьмя хромосомами. Динамика этой популяции моделируется уравнениями

$$\dot{D} = (\lambda - \mu) D, \quad \dot{U} = \mu D + \nu U,$$

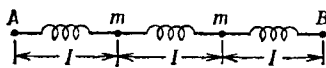
где  $D$  и  $U$  — количества клеток с двумя и четырьмя хромосомами соответственно. Пусть при  $t = 0$   $D = D_0$  и  $U = U_0$ ; найти долю двуххромосомных клеток в популяции как функцию времени. Показать, что при  $t \rightarrow \infty$  эта доля стремится к некоторому уровню насыщения, не зависящему от  $D_0$  и  $U_0$ , если  $\lambda > \mu + \nu$ .

9. Движение частицы  $P$  по плоскости с координатами  $x$  и  $y$  задается дифференциальными уравнениями

$$\ddot{x} = -\omega^2 x, \quad \ddot{y} = -y.$$

Нарисовать график параметрически заданной кривой  $(x(t), y(t))$  на плоскости  $x, y$ , если  $x(0) = 0$ ,  $\dot{x}(0) = 1$ ,  $y(0) = 0$ ,  $\dot{y}(0) = 0$  для  $\omega = 1, 2, 3$ . [Эти динамические уравнения реализуются в бигармоническом осцилляторе, (см. Арнольд (1979)).]

10. Три пружины (каждая имеет естественную длину  $l$  и постоянную упругость  $k$ ) и две массы  $m$  соединены указанным ниже способом на гладком горизонтальном столе. Концы  $A$  и  $B$  фиксированы, а массы смещены по прямой, соединяющей  $A$  и  $B$ , а затем отпущены.



Пусть  $x_1$  и  $x_2$  — отклонения от положения равновесия первой и второй масс соответственно (положительные направления отклонений совпадают). Показать, что уравнения движения масс имеют вид

$$m\ddot{x}_1 = k(-2x_1 + x_2), \quad m\ddot{x}_2 = k(x_1 - 2x_2).$$

Записать эти уравнения в матричной форме:  $\ddot{x} = Ax$ , где  $x = (x_1, x_2)^T$ , и найти линейную замену переменных,  $x = My$ , такую, что система  $\ddot{y} = Dy$  имеет диагональную матрицу  $D$ . Затем найти нормальные координаты и описать нормальные моды колебаний двух масс.

#### К п. 4.2

11. В простейшей модели национальной экономики  $I = I - \alpha C$ ,  $\dot{C} = \beta(I - C - G)$ , где  $I$  — национальный доход,  $C$  — размер потребительских расходов, а  $G$  — размер правительственных расходов. Модель относится только к области естественного изменения переменных, т.е.  $I \geq 0$ ,  $C \geq 0$ ,  $G \geq 0$ , а постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют условиям  $1 < \alpha < \infty$ ;  $1 \leq \beta < \infty$ .

(а) Показать, что если уровень правительственных расходов постоянен,  $G = G_0$ , то существует состояние равновесия. Определить характер неподвижной точки при  $\beta = 1$  и показать, что тогда экономика испытывает колебания.

(b) Пусть правительственные расходы связаны с национальным доходом соотношением  $G = G_0 + kI$ , где  $k > 0$ . Найти верхнюю границу  $A$  для коэффициента  $k$ , ниже которой существует положение равновесия в естественной области изменения переменных. Описать положение и характер этой неподвижной точки для  $\beta > 1$  при приближении  $k$  к критическому значению  $A$ .

12. Пусть  $U(s)$  и  $V(s)$  — матрицы с элементами  $u_{ij}(s)$  и  $v_{ij}(s)$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ). Проверить формулу

$$\frac{d}{ds}(UV) = \frac{dU}{ds}V + U\frac{dV}{ds} = \dot{U}(s)V(s) + U(s)\dot{V}(s)$$

и показать, что

$$\int_0^t U(s)\dot{V}(s)ds = [U(s)V(s)]_0^t - \int_0^t \dot{U}(s)V(s)ds. \quad (1)$$

Пусть

$$P = \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega s) \end{bmatrix} ds$$

и

$$Q = \int_0^t e^{-As} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\omega s) \end{bmatrix} ds.$$

Воспользоваться формулой (1) и получить формулы:

$$(a) \omega P = e^{-At} \begin{bmatrix} 0 \\ \sin(\omega t) \end{bmatrix} + AQ;$$

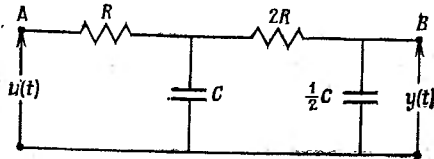
$$(b) \omega Q = \left\{ -e^{-As} \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega s) \end{bmatrix} \right\}_0^t - AP.$$

Затем показать, что

$$(\omega^2 I + A^2)P = A \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + e^{-At} \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ \omega \sin(\omega t) \end{bmatrix} - A \begin{bmatrix} 0 \\ \cos(\omega t) \end{bmatrix} \right\}$$

и получить уравнение (4.59).

13. Рассмотреть электрическую цепь, показанную ниже, где  $u(t)$  — напряжение на «входе», в точке  $A$ , а  $y(t)$  — напряжение на «выходе», измеряемое на меньшем конденсаторе в точке  $B$ .



Получить динамическое уравнение

$$R^2 C^2 \ddot{y}(t) + \frac{5}{2} RC \dot{y}(t) + y(t) = u(t)$$

и свести его к эквивалентной системе первого порядка

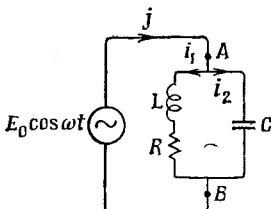
$$\frac{dx_1}{d\tau} = x_2, \quad \frac{dx_2}{d\tau} = -x_1 - \frac{5}{2}x_2 + u(RC\tau),$$

где  $RC\tau = t$ , а  $x_1 = y$ . Затем показать, что установившееся напряжение на выходе равно

$$y_s(t) = \frac{2}{3RC} \int_{t_0}^t [e^{(s-t)/2RC} - e^{2(s-t)/RC}] u(s) ds$$

при любых начальных значениях  $y(t_0)$  и  $\dot{y}(t_0)$ .

14. Рассмотреть электрическую цепь, изображенную ниже.



Получить дифференциальные уравнения для токов  $i_1$  и  $i_2$  и найти затем их установившиеся значения. Вычислить амплитуду  $j_0$  для тока  $j$ . Показать, что импеданс  $Z (= E_0/j_0)$  LCR-цепи (колебательного контура) между точками  $A$  и  $B$  дается формулой

$$Z = \frac{L/C}{[R^2 + (\omega L - 1/\omega C)]^{1/2}},$$

где  $R$  мало по сравнению с  $\omega L$ . Нарисовать график  $Z$  как функции от  $\omega$  и найти резонансную частоту контура.

К н. 4.3

15. Исследовать характер неподвижных точек модели, описывающей конкуренцию видов

$$\dot{x}_1 = (2 - x_1 - 2x_2)x_1, \quad \dot{x}_2 = (2 - 2x_1 - x_2)x_2;$$

указать их положение, найти изоклины  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$  на плоскости  $x_1, x_2$ . Найти главные направления в неподвижных точках, нарисовать фазовый портрет и интерпретировать его в терминах поведения видов.

16. Исследовать поведение особых точек системы, описывающей конкуренцию видов

$$\dot{x}_1 = (1 - x_1 - x_2)x_1, \quad \dot{x}_2 = (v - x_2 - 4v^2x_1)x_2, \quad x_1, x_2 > 0,$$

при изменении параметра  $v$  для всех  $v > 0$ . Показать, что число и характер неподвижных точек меняются при  $v = \frac{1}{4}$  и  $v = 1$ . Нарисовать типичные фазовые портреты для  $v$  в интервалах  $(0, \frac{1}{4})$ ,  $(\frac{1}{4}, 1)$  и  $(1, \infty)$ .

17. Рассмотреть уравнения типа «хищник — жертва» с «логистической» поправкой

$$\dot{x}_1 = x_1(1 - x_2 - \alpha x_1), \quad \dot{x}_2 = -x_2(1 - x_1 + \alpha x_2)$$



для  $0 \leq \alpha < 1$ . Показать, что нетривиальная неподвижная точка, которая является центром при  $\alpha = 0$ , при  $0 < \alpha < 1$  переходит в устойчивый фокус. Нарисовать фазовый портрет.

18. Пусть  $(x_1(t), x_2(t))$  — периодическое решение уравнений типа «хищник — жертва»:

$$\dot{x}_1 = x_1(a - bx_2), \quad \dot{x}_2 = -x_2(c - dx_1).$$

Определить среднее значение  $\bar{x}_i$  переменной  $x_i$ , как

$$\bar{x}_i = \frac{1}{T} \int_0^T x_i(t) dt,$$

где  $T$  — период решения. Показать, что

$$\bar{x}_1 = c/d, \quad \bar{x}_2 = a/b.$$

Предположим, что динамические уравнения модифицированы: добавлены члены, соответствующие изъятию части популяции («сбору урожая»): к  $\dot{x}_i$  добавляется член  $-\epsilon x_i$ ,  $\epsilon > 0$ . Такие члены возникают, например, при описании влияния рыболовства на популяции рыб или инсектицидов при изучении популяций насекомых. Какое влияние эти члены оказывают на средние значения  $\bar{x}_1$  и  $\bar{x}_2$ ?

19. Показать, что неподвижная точка  $(1, J^{-1})$  модели Холлинга — Тэннера (4.90) устойчива, если изоклина  $\dot{y}_2 = 0$  пересекает параболу  $\dot{y}_1 = 0$  правее ее максимума. Затем показать, что если фазовый портрет этой модели содержит только один предельный цикл и этот цикл устойчив, то изоклина  $\dot{y}_2 = 0$  должна пересекать параболу левее максимума.

20. Модель популяции, зависящей от возраста, задается уравнениями

$$\dot{P} = -\mu(P)P + B, \quad \dot{B} = [\gamma - \mu(P)]B, \quad \gamma > 0,$$

где  $P$  — размер популяции, а  $B$  — коэффициент рождаемости. Доказать, что все траектории лежат на прямой  $B = \gamma P$  независимо от выбора функции  $\mu(P)$ . Исследовать фазовый портрет для случая  $\mu(P) = b + cP$ , где  $b < 0$ ,  $c > 0$ . Показать, что для всех положительных начальных значений переменных популяция и уровень рождаемости стабилизируются при некоторых ненулевых значениях.

21. Найти первый интеграл для общей модели эпидемий

$$\dot{x} = -2xy, \quad \dot{y} = 2xy - y,$$

где  $x$  — число восприимчивых к болезни, а  $y$  — число заболевших, в соответствующих масштабах. Нарисовать фазовый портрет для области  $x, y \geq 0$ . Показать, что число заболевших достигает максимума, равного  $c_0 - \frac{1}{2}(1 + \ln 2)$ , при  $x = \frac{1}{2}$ , где  $c_0$  — общее число больных и восприимчивых к болезни при  $x = 1$ . Как развивается эпидемия?

22. Пусть в упр. 21 число восприимчивых к болезни растет с постоянной скоростью, так что

$$\dot{x} = -2xy + 1, \quad \dot{y} = 2xy - y.$$

Показать, что эта новая система имеет устойчивую неподвижную точку в области  $x, y > 0$ . Как добавочный член влияет на развитие эпидемии?

## 23. Система

$$\dot{S} = -rIS, \quad \dot{I} = rIS - \gamma I, \quad R = 1 - S - I$$

( $r, \gamma > 0$ ) описывает, как среди некоторой популяции распространяется болезнь, оставляющая после себя стойкий иммунитет. Пусть  $S, I$  и  $R$  — доли популяции, которые соответственно здоровы, но подвержены инфекции, заражены и обладают иммунитетом. Пусть  $\sigma = r/\gamma$ , и предположим, что  $S = S_0, I = I_0$  и  $R = 0$  при  $t = 0$ . Доказать, что:

(а) если  $\sigma S_0 \leq 1$ , то  $I(t)$  убывает и стремится к нулю;  
 (б) если  $\sigma S_0 > 1$ , то  $I(t)$  возрастает до максимального значения  $1 - (1 + \ln(\sigma S_0))/\sigma$ , а затем убывает до нуля.

Показать, что как в случае (а), так и в случае (б) количество заболевших  $S(t)$  при  $t \rightarrow \infty$  стремится к значению  $S_L$ , где  $S_L$  — единственный корень уравнения  $S_L = (1/\sigma) \ln(S_L/S_0) + 1$  на интервале  $(0, 1/\sigma)$ .

24. Простейшая модель управления молекулярными процессами в клетке описывает  $X$  — количество транспортной рибонуклеиновой кислоты и  $Y$  — количество соответствующего фермента. Динамические уравнения имеют вид

$$\dot{X} = \frac{a}{A + kY} - b, \quad \dot{Y} = \alpha X - \beta, \quad a > bA,$$

где  $A, k, a, b, \alpha, \beta$  — положительные постоянные. Доказать, что обе величины  $X$  и  $Y$  испытывают незатухающие колебания, зависящие от времени.

25. Исследовать неподвижные точки уравнений движения простого маятника

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega_0^2 \sin x_1,$$

где  $\omega_0^2 = g/l$ . Здесь  $g$  — ускорение силы тяжести, а  $l$  — длина маятника. Найти первый интеграл и нарисовать фазовый портрет. Предполагая, что к  $\dot{x}_2$  добавлен демпфирующий член  $-2kx_2$ , определить характер неподвижных точек системы при малом  $k > 0$  и нарисовать фазовый портрет. Интерпретировать оба фазовых портрета в терминах движения маятника.

26. Поведение простейшей дисковой динамомашинны описывается системой уравнений

$$\dot{x} = -\mu x + xy, \quad \dot{y} = 1 - \nu y - x^2, \quad \mu, \nu > 1.$$

Здесь  $x$  — выходной ток машины, а  $y$  — угловая скорость вращающегося диска. Доказать, что для  $\mu\nu > 1$  имеется одна устойчивая неподвижная точка  $A$  в  $(0, \nu^{-1})$ , а для  $\mu\nu < 1$  точка  $A$  становится седлом; устойчивые неподвижные точки — это  $(\pm \sqrt{1 - \mu\nu}, \mu)$ .

## К п. 4.4

27. Проверить, что система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \varepsilon(x_1^2 - 1)x_2, \quad \varepsilon \geq 0, \quad (1)$$

эквивалентна:

- (а) уравнению Ван-дер-Поля при  $\varepsilon > 0$ ;  
 (б) незатухающему гармоническому осциллятору при  $\varepsilon = 0$ .

Получить систему в полярных координатах, эквивалентную системе (1), где  $x_1 = r \cos \theta$ ,  $x_2 = r \sin \theta$ , и найти выражение для  $dr/d\theta$ .

Пусть  $\varepsilon$  мало по сравнению с единицей, и пусть траектория, выходящая из точки  $(r, \theta) = (r_0, 0)$ , приходит в точку  $(r_1, -2\pi)$ . Показать, что

$$\Delta r = r_1 - r_0 = \int_0^{2\pi} \varepsilon r_0 \sin^2 \theta (1 - r_0^2 \cos^2 \theta) d\theta$$

является величиной первого порядка малости относительно  $\varepsilon$ . Оценить этот интеграл и объяснить, почему из этого результата следует, что существует устойчивый предельный цикл с радиусом, приблизительно равным 2.

28. (а) Показать, что уравнение Ван-дер-Поля можно получить дифференцированием по времени уравнения Рэлея:

$$\ddot{x} + \varepsilon \left( \frac{1}{3} \dot{x}^3 - \dot{x} \right) + x = 0,$$

если положить  $y = \dot{x}$ . Показать также, что оба уравнения можно свести к одной и той же системе первого порядка.

(б) Рассмотреть представление Лъенара

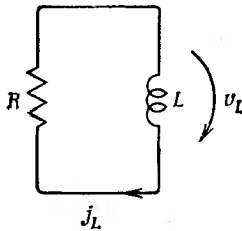
$$\dot{x}_1 = x_2 - \varepsilon \left( \frac{1}{3} x_1^3 - x_1 \right), \quad \dot{x}_2 = -x_1$$

для уравнения Ван-дер-Поля. Показать, что можно сделать характеристику независимой от параметра  $\varepsilon$ , выбрав новый масштаб для переменной  $x_2$  и полагая  $x_2 = \varepsilon \omega$ . Нарисовать фазовый портрет осциллятора Ван-дер-Поля на плоскости  $x_1, \omega$  при  $\varepsilon \rightarrow \infty$ .

29. Пусть сопротивление  $R$  с вольт-амперной характеристикой  $j = v^3 - v$  соединено с индуктивностью  $L$  так, что они образуют отдельный контур. Воспользовавшись обозначениями на рисунке, показать, что динамика цепи определяется уравнением

$$L \frac{dj_L}{dt} = v_L,$$

где  $j_L = v_L - v_L^3$ .



Регуляризовать этот контур, поместив надлежащим образом конденсатор малой емкости, и показать, что в регуляризованных уравнениях могут возникнуть колебания.

К п. 4.5

30. Модель популяции, в которой могут возникать эпидемии, можно построить следующим образом. Первоначально популяция развивается в соответствии с уравнением

$$\dot{p} = ap - bp^2, \quad (1)$$

и ее численность растет до величины  $Q < a/b$ . Когда популяция достигает такого размера, в ней возникает эпидемия, и развитие популяции происходит согласно другому уравнению

$$\dot{p} = Ap - Bp^2, \quad (2)$$

где  $Q > A/B$ . Численность популяции уменьшается до уровня  $q$ , где  $A/B < q < a/b$ ; при достижении этого уровня эпидемия прекращается, рост популяции снова управляется уравнением (1) и т. д. Нарисовать график функции  $p(t)$ , иллюстрирующий флюктуации популяции в зависимости от времени. Показать, что время  $T_1$ , за которое популяция возрастает от  $q$  до  $Q$ , задается формулой

$$T_1 = \frac{1}{a} \ln \left[ \frac{Q(a-bq)}{q(a-bQ)} \right].$$

Найти время  $T_2$ , которое необходимо, чтобы численность популяции сократилась от  $Q$  до  $q$  под действием уравнения (2), и найти период цикла изменения популяции.

31. Модель экономического цикла задается уравнением

$$\ddot{Y} - \varphi(\dot{Y}) + kY = 0, \quad 0 < k < 2,$$

где  $Y$  — объем производства. Функция  $\varphi$  удовлетворяет условию  $\varphi(0) = 0$ ,  $\varphi(x) \rightarrow L$  при  $x \rightarrow \infty$  и  $\varphi(x) \rightarrow -M$  при  $x \rightarrow -\infty$ , где  $M$  — интенсивность выбытия основного капитала, а  $L$  — сумма превышения объема торговли капитальными товарами над  $M$ . При идеализации задачи функция  $\varphi$  удовлетворяет условиям

$$\varphi(0) = 0; \quad \varphi(y) = L, \quad y > 0; \quad \varphi(y) = -M, \quad y < 0.$$

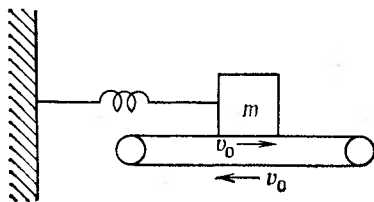
Нарисовать фазовый портрет дифференциального уравнения. Показать, что  $Y$  со временем колеблется с постоянными амплитудой и периодом.

32. Модель экономического развития задана уравнением  $\ddot{Y} + 2\dot{Y} + Y = G(t)$ , где  $Y(t)$  — объем производства, а  $G(t)$  — правительственные расходы. Функция  $G(t)$  имеет следующий вид:  $G(t) = 0$ ,  $0 \leq t < 1$  и  $G(t) = G_0$ ,  $t \geq 1$ . Показать, что существует кривая  $Y = Y_1(t)$ , обладающая следующими свойствами:

- (а)  $Y_1(0) = 0$ ;
- (б)  $Y_1(t)$  возрастает при  $t \in [0, 1]$  до максимального значения  $G_0$ , где  $\dot{Y}_1 = 0$ ;
- (в)  $Y_1(t) = G_0$ ,  $t \geq 1$ .

Исследовать влияние долгосрочного воздействия на  $Y(t)$  при тех же начальных условиях (а) и (б), которым удовлетворяет  $Y_1(t)$ , если правительственные расходы начнутся в момент более поздний, чем  $t = 1$ .

33. Рассмотреть груз массой  $m$ , передвижение которого по конвейерной ленте ограничено легкой пружиной, как показано на рисунке. Предполо-



жим, что лента передвигается с постоянной скоростью  $v_0$ . Пусть  $x(t)$  — растяжение пружины в момент  $t$ . Сила трения  $F$ , которая действует на груз, задается формулой

$$F = \begin{cases} F_0, & \dot{x} < v_0, \\ -F_0, & \dot{x} > v_0. \end{cases}$$

т. е. мы имеем «сухое», или кулоновское, трение. Показать, что уравнение движения груза имеет вид

$$m\ddot{x} + kx = -F,$$

и нарисовать фазовый портрет на плоскости  $x, \dot{x}$ . Описать возможный характер движения груза.

## 5. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим ряд отдельных теоретических проблем и связанных с ними моделей, которые показывают, какое развитие могут получить основные идеи предыдущих глав. Наша цель состоит в том, чтобы заполнить некоторые теоретические пробелы и пробудить интерес к современным приложениям.

### 5.1. УРАВНЕНИЕ ЛЬЕНАРА

В этом параграфе мы докажем, что система

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 + x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 \quad (5.1)$$

имеет единственный устойчивый предельный цикл. Метод доказательства подходит также для систем вида

$$\dot{x}_1 = x_2 - G(x_1), \quad \dot{x}_2 = -h(x_1), \quad (5.2)$$

где функция  $G(x_1)$  ведет себя как кубическая парабола  $x_1^3 - x_1$ , а функция  $h(x_1)$  нечетная (см. теорему 5.1.2). Такие системы соответствуют уравнениям второго порядка вида

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + h(x) = 0, \quad g(x) = dG(x)/dx, \quad (5.3)$$

которые называются *уравнениями Льенара*. Например, уравнение Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0, \quad \varepsilon > 0, \quad (5.4)$$

имеет кубическую характеристику  $G(x_1) = \varepsilon(\frac{1}{3}x_1^3 - x_1)$ . Отсюда следует, что оно обладает единственным устойчивым предельным циклом для любого  $\varepsilon > 0$ .

**Теорема 5.1.1.** Фазовый портрет системы

$$\dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 + x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 \quad (5.5)$$

имеет один устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивый фокус.

*Доказательство.* Разделим доказательство на две части.

(а) Рассмотрим траекторию, проходящую через точку  $x_0$ , находящуюся на положительной полуоси  $x_2$  (эта точка на рис. 5.1 обозначена буквой  $P$ ). В точке  $P$   $\dot{x}_1 > 0$ , а  $\dot{x}_2 = 0$ , и траектория  $\varphi_t(x_0)$  (через  $\varphi_t$  обозначен фазовый поток системы (5.5)) при  $t > 0$  переходит в полуплоскость  $x_1 > 0$ .

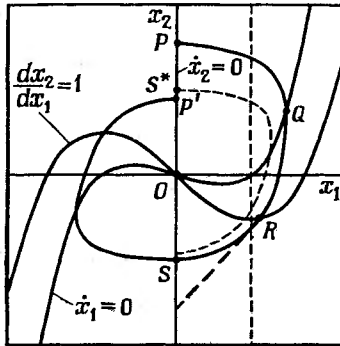


Рис. 5.1. Изоклины  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = 0$ ,  $dx_2/dx_1 = 1$ , а также траектории, проходящие через точки  $P$  и  $S^*$ , для которой  $OS^* = OS$ .

При  $x_1 > 0$  имеем  $\dot{x}_2 < 0$ , так что траектория идет вниз и вправо до некоторой точки  $Q (= \varphi_{t_Q}(x_0))$  на изоклине направления  $\dot{x}_1 = 0$ . Когда  $t$  становится больше  $t_Q$ , траектория входит в область, где  $\dot{x}_1 < 0$  и  $\dot{x}_2 < 0$ , и, следовательно, она обязательно пересекает кривую, на которой  $dx_2/dx_1 = 1$ , в некоторой точке  $R (= \varphi_{t_R}(x_0))$ . При  $t > t_R$  траектория входит в область, где  $x_2 < x_1^3 - 2x_1$  (т. е.  $dx_2/dx_1 < 1$ ). Поэтому прямая наклона 1, проходящая через точку  $R$ , лежит ниже траектории. В области, где  $x_2 < x_1^3 - 2x_1$ , обе производные  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  отрицательны, так что траектория, выходящая из точки  $P$ , должна пересечь отрицательную полуось  $x_2$  в некоторой точке  $S$ .

Заметим, что система (5.5) не меняется при отражении относительно начала координат:  $(x_1, x_2) \rightarrow (-x_1, x_2)$ . Это значит, что траектория, проходящая через точку  $S$ , симметрична относительно начала координат траектории, проходящей через точку  $S^*$  на оси  $x_2$  такую, что  $OS^* = OS$  (см. рис. 5.1). Мы можем заключить, что траектория, проходящая через точку  $P$ , образует спираль, закручивающуюся вокруг начала координат по часовой стрелке, и бесконечное число раз пересекает ось  $x_2$ , если точка  $S^*$  не совпадает с  $P$  (тогда траектория является замкнутой).

(b) Вторая часть доказательства состоит в том, чтобы установить существование одной и только одной замкнутой траектории, которая и является устойчивым предельным циклом.

Пусть  $A$  — некоторая точка на положительной полуоси  $x_2$ . Пусть  $A'$  — первая точка, в которой траектория, исходящая из  $A$ , снова пересекает положительную полуось  $x_2$ . Пусть  $OA' = a'$ ; введем функцию  $f: \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}$ , полагая  $f(a) = a' - a$ <sup>1)</sup>. Заметим, что траектория, проходящая через точку  $A$ , будет замкнутой (периодической) тогда и только тогда,

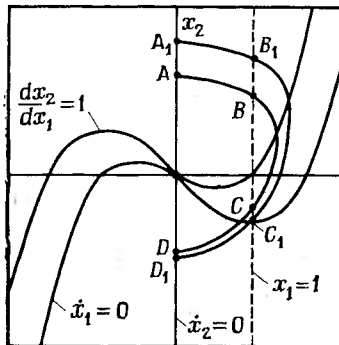


Рис. 5.2. Траектории, проходящие через точки  $A$  и  $A_1$ , расположенные на положительной полуоси  $x_2$ , и точки их пересечения с прямой  $x_1 = 1$ .

когда  $f(a) = 0$ , т. е. когда  $A = A'$ . Отображение  $f$  определяет изменение радиального расстояния  $r$  до начала координат за один полный оборот.

Если через  $r$  обозначить радиальное расстояние до начала координат на плоскости  $x_1, x_2$ , то  $r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2$ , и для системы (5.1) имеем

$$r\dot{r} = x_1^2(1 - x_1^2). \quad (5.6)$$

Пусть

$$\Delta(P_0, P_1) = \int_{t_0}^{t_1} r\dot{r} dt = \int_{t_0}^{t_1} x_1^2(1 - x_1^2) dt. \quad (5.7)$$

Тогда значение  $\Delta(P_0, P_1)$  пропорционально изменению величины  $r^2(t)$  для траектории  $\mathbf{x}(t) \{= x_1(t), x_2(t)\}$  между точкой  $P_0$ , соответствующей  $t = t_0$ , и точкой  $P_1$ , соответствующей  $t = t_1$ . Пусть  $\mathbf{x}(t), \mathbf{x}^*(t)$  — решения, которым соответствуют траектории, проходящие через точки  $A$  и  $A_1$ , где  $OA < OA_1$  (см. рис. 5.2). Предположим, что эти траектории пересекают

<sup>1)</sup>  $a'(a) = f(a) + a$  называется функцией последования. — Прим. пер.



отрицательную полуось  $x_2$  в точках  $D$  и  $D_1$  соответственно. Мы покажем, что

$$\Delta(A_1, D_1) < \Delta(A, D). \quad (5.8)$$

Интегральные кривые разбиваются на три отрезка (см. рис. 5.2):

(а)  $AB$  и  $A_1B_1$

Приращение имеет вид

$$\Delta(A, B) = \int_{x_1=0}^{x_1=1} (x_1(t))^2 [1 - (x_1(t))^2] dt = \int_0^1 \frac{x_1^2(1-x_1^2)}{x_2 - x_1^3 + x_1} dx_1; \quad (5.9)$$

здесь сделана замена  $dx_1/dt = x_2 - x_1^3 + x_1$ . Аналогично

$$\Delta(A_1, B_1) = \int_0^1 \frac{x_1^2(1-x_1^2)}{x_2^* - x_1^3 + x_1} dx_1. \quad (5.10)$$

Но для  $x_1 \in [0, 1]$  имеем  $x_2^* > x_2 > x_1^3 - x_1$ , где  $(x_1, x_2)$  и  $(x_1, x_2^*)$  — точки на кривых  $AB$  и  $A_1B_1$  соответственно, и, таким образом,

$$\Delta(A_1B_1) < \Delta(A, B). \quad (5.11)$$

(б)  $BC$  и  $B_1C_1$

На отрезках  $BC$  и  $B_1C_1$  величину  $x_2$  можно считать независимой переменной и полагать, что уравнения их  $x_1 = x_1(x_2)$ .

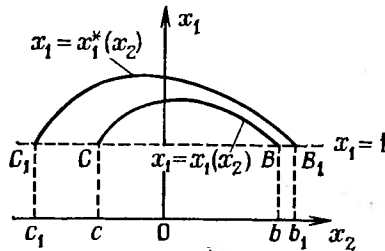


Рис. 5.3. Отрезки  $BC$  и  $B_1C_1$  двух интегральных кривых, проходящих через точки  $A$  и  $A_1$ .

и  $x_1 = x_1^*(x_2)$  соответственно (см. рис. 5.3). Употребляя обозначения рис. 5.3, можем написать

$$\begin{aligned} \Delta(B, C) &= \int_{x_2=b}^{x_2=c} (x_1(x_2))^2 [1 - (x_1(x_2))^2] dx_2 = \\ &= - \int_c^b x_1(x_2) [(x_1(x_2))^2 - 1] dx_2, \end{aligned} \quad (5.12)$$

так как  $\dot{x}_2 = -x_1$ . Приращение  $\Delta(B_1, C_1)$  задается таким же выражением, как (5.12), но с функцией  $x_1^*(x_2)$  вместо  $x_1(x_2)$ , а отрезок интегрирования равен  $[c_1, b_1]$ . Для любого фиксированного  $x_2 \in [c, b]$  имеем  $x_1^*(x_2) > x_1(x_2) \geq 1$ , так что

$$x_1^*(x_2)[(x_1^*(x_2))^2 - 1] \geq x_1(x_2)[(x_1(x_2))^2 - 1] \geq 0. \quad (5.13)$$

так как в правой части равенства (5.12) стоит знак минус, имеем

$$\Delta(B_1, C_1) < \Delta(B, C). \quad (5.14)$$

(с)  $CD$  и  $C_1D_1$

Из тех же соображений, что и в случае (а), находим

$$\Delta(C_1, D_1) < \Delta(C, D). \quad (5.15)$$

Сложив все три полученных выше неравенства, получаем

$$\Delta(A_1, D_1) < \Delta(A, D). \quad (5.16)$$

Из свойства симметрии уравнения Льенара (5.5) можно сделать вывод, что и в области  $x_1 < 0$  радиальное приращение для «внешних» кривых меньше, чем для «внутренних» кривых. Следовательно, если  $A'$  и  $A'_1$  — точки возвращения на положительную ось  $x_2$  траекторий, проходящих через точки  $A$  и  $A_1$ , то

$$\Delta(A_1, A'_1) < \Delta(A, A').$$

Отсюда следует, что  $f$  — убывающая функция, т. е. если  $0 < a < a_1$ , то  $f(a_1) < f(a)$ . Функция  $f$  обладает также следующими свойствами:

1. Начало координат является для системы (5.5) неустойчивым фокусом (по теореме о линеаризации), так что  $f(a)$  положительна для малых  $a$ , когда точка  $A$  близка к началу координат.

2. Для больших  $a$  функция  $f(a)$  отрицательна. При увеличении  $a$  траектория, выходящая из точки  $A$  и идущая в точку  $D$ , перемещается вправо на рис. 5.2, так как  $a = OA$ . В формуле (5.12) и промежутки интегрирования, и подынтегральная функция строго возрастают с увеличением  $a$ . Отсюда следует, что  $\Delta(B, C)$  и, следовательно,  $\Delta(A, A')$  стремятся к  $-\infty$  при  $a \rightarrow \infty$ .

3. Функция  $f$  непрерывна, так как интегральные кривые непрерывно зависят от начальных условий на любых конечных интервалах изменения  $t$ .

Следовательно, существует значение  $a_0 \in \mathbb{R}$  такое, что  $f(a_0) = 0$ , а это означает, что существует замкнутая траектория, проходящая через некоторую точку  $A_0$  на положитель-

ной полуоси  $x_2$ , где  $OA_0 = a_0$ . Кроме того, траектории с каждой стороны стремятся к замкнутой траектории при  $t \rightarrow \infty$ , поскольку  $f(a) \geq 0$  при  $a \leq a_0$ .

Рассмотрим теперь обобщенное уравнение Ван-дер-Поля (5.3). Предположения, сделанные в теореме 5.1.2, относительно функций  $G(x)$  и  $h(x)$  обобщают основные свойства соответствующих коэффициентов в (5.4). Это позволяет утверждать, что существует предельный цикл и что доказать это можно теми же методами, которыми была доказана теорема 5.1.1.

**Теорема 5.1.2.** Пусть для уравнения

$$\ddot{x} + g(x)\dot{x} + h(x) = 0, \quad (5.17)$$

где

$$(a) \quad G(x) = \int_0^x g(u) du \text{ — четная функция, обращающаяся в}$$

нуль при  $x = 0$  и при  $x = \pm\mu$ ,  $\mu > 0$ ;

(b)  $G(x) \rightarrow \infty$  при  $x \rightarrow \infty$  монотонно возрастает при  $x > \mu$ ;

(c)  $h(x)$  — нечетная функция и  $h(x) > 0$  при  $x > 0$ . Тогда фазовый портрет (5.17) содержит один устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивый фокус в начале координат.

Если выполнены условия теоремы 5.1.2, то уравнение (5.3) называется *уравнением Льенара*. Эти условия являются достаточными, но не необходимыми для того, чтобы существовал предельный цикл.

## 5.2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ И НЕКОТОРЫЕ ЭКОНОМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Идея, что динамические уравнения с ограничениями можно иногда регуляризовать (см. п. 4.4), привлекала внимание ученых, занятых построением математических моделей. В настоящем параграфе мы опишем ряд интересных моделей цикла капиталистической экономики, построенных Гудвином (см. Гудвин, 1951). Сначала будет изложена грубая модель, содержащая ограничения и предположения о скачках. На ее примере мы разберем существенно нелинейный характер задачи. Затем как уточнения будут введены механизмы, приводящие к регуляризации; в качестве главного результата для окончательной модели будет получено уравнение типа Рэля (см. упр. 28). Сам процесс уточнения поучителен с точки зрения математического моделирования, причем интересно, как возникает характеристика со «складкой».

Мы рассмотрим экономические модели, причем нас будут интересовать флюктуации, соответствующие подъемам и спадам. Начнем с того, что введем интересующие нас переменные и определим основные зависимости между ними.

Будем считать, что в любой момент  $t$  экономика располагает основным капиталом  $K$ , который включает заводы, оборудование и т. д.; его объем меняется со скоростью  $\dot{K}$ , равной отношению чистых капиталовложений к общему износу за данный период. Источником экономического дохода является объем производства  $Y$  и потребление  $C$ . Эти величины связаны между собой соотношениями

$$C = \alpha Y + \beta, \quad (5.18)$$

$$Y = C + \dot{K}, \quad (5.19)$$

где  $\alpha$  и  $\beta$  — действительные постоянные такие, что  $\alpha < 1$ ,  $\beta < C$ . Из уравнения (5.18) видно, что между объемом производства и потреблением существует линейная зависимость. Уравнение (5.19) показывает, что вся выпускаемая продукция либо потребляется, либо идет на расширение производства. Далее предполагается, что основным капиталом  $K$  управляют так, чтобы поддерживать его на уровне, пропорциональном объему производства. Если  $R$  — желательный уровень основного капитала в момент времени  $t$ , то

$$R = \gamma Y, \quad (5.20)$$

где  $\gamma \in R$ .

### (а) Модель 1

Теперь мы предложим модель, объясняющую, как в экономической системе могут возникать циклы. Из основных уравнений (5.18) и (5.19) следует, что

$$Y = \frac{\beta + \dot{K}}{1 - \alpha}. \quad (5.21)$$

Из соотношения (5.21) видно, что периодическое поведение величины  $Y$  (или  $K$ ) может возникнуть как следствие колебаний в капиталовложении  $K$ . Эти колебания в свою очередь возникают из стремления уравнивать величины  $K$  и  $R$  (желательный уровень основного капитала).

Предположим, что проводится экстремальная политика капиталовложений:

$$\dot{K} = \begin{cases} k_1 > 0, & K < R, \\ 0, & K = R, \\ -k_2 < 0, & K > R, \end{cases} \quad (5.22)$$

где  $k_1, k_2$  не зависят от  $t$ . Это соответствует максимальному уровню капиталовложений, если основной капитал меньше желательного уровня, и нулевому вложению, если этот уровень превышен; при этом основной капитал амортизируется со скоростью  $k_2$ . Обычно мы можем предполагать, что при максимальном уровне капиталовложений скорость, с которой могут строиться новые предприятия, больше скорости амортизации и старения, т. е.

$$k_1 > k_2. \quad (5.23)$$

Из уравнений (5.20) — (5.22) следует, что

$$R = \begin{cases} R_1 = \gamma(\beta + k_1)/(1 - \alpha), & K < R, \\ R_0 = \gamma\beta/(1 - \alpha), & K = R, \\ R_2 = \gamma(\beta - k_2)/(1 - \alpha), & K > R. \end{cases} \quad (5.24)$$

Пусть  $R_2 < K < R_1$ , так что при  $t = 0$   $R = R_1$ . Поэтому уровень капиталовложений равен  $k_1 > 0$ , величина  $K$  увеличивается, а  $Y$  остается постоянной, как показано на рис. 5.4, и это происходит до тех пор, пока не достигается равенство  $K = R_1$ . Здесь  $R$  принимает значение  $R_0$ , так как  $K = R$ ; теперь  $K = R_1 > R = R_0$ , и величина  $R$  мгновенно становится равной  $R_2$ . Другими словами, фактически  $K$  мгновенно меняется от величины  $k_1$  до  $-k_2$ , а  $R$  — от  $R_1$  до  $R_2$ . В тот же самый момент в силу формулы (5.21) резко падает объем производства. Теперь  $K$  убывает до величины  $R_2$ . Аналогичное рассуждение показывает, что  $R$  становится при этом равным  $R_1$ , так что  $K = R_2 < R = R_1$ , и величина  $K$  опять становится равной  $k_1$ . Основной капитал  $K$  снова возрастает до  $R_1$ , и цикл замыкается. Таким образом, обе величины  $K$  и  $Y$  испытывают колебания, как показано на рис. 5.4.

Можно подчеркнуть связь этой модели со скачкообразной моделью в п. 4.4, изобразив характер изменения рассматриваемых величин на плоскости  $K, \dot{K}$  (см. рис. 5.5). Движение происходит по прямолинейным отрезкам  $BC$  и  $DA$ , где  $\dot{K} = k_1$  и  $\dot{K} = -k_2$  соответственно. Скачки от  $A$  к  $B$  и от  $C$  к  $D$  соответствуют разрывам функции  $Y$ , показанным на рис. 5.4.

Эта первая модель довольно успешно описывает экономический цикл. Во время периодов капиталовложения объем производства высок и экономика находится в периоде подъема. Когда капиталовложения отсутствуют, объем производства падает и экономика находится в состоянии депрессии. Однако эта модель имеет много недостатков. Например, скачки в капиталовложениях и мгновенная реакция на них со стороны объема производства  $Y$  (что следует из формулы (5.21)) не соответствуют действительности. Кроме того, из условия  $k_1 > k_2$  вытекает, что периоды спада значительно

превышают периоды подъема; но на самом деле эта закономерность не наблюдается. В такой модели отсутствует общий рост экономики, так как объем производства, основной капитал и т. п. периодически принимают прежние значения.

Объем книги не даст возможности подробно остановиться на всех этих вопросах; наша цель — установить соответствие

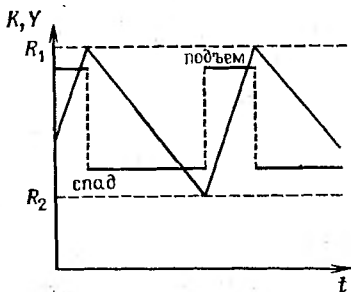


Рис. 5.4. Колебания величин  $K$  (—) и  $Y$  (---) со временем для политики капиталовложений вида «стой — иди».

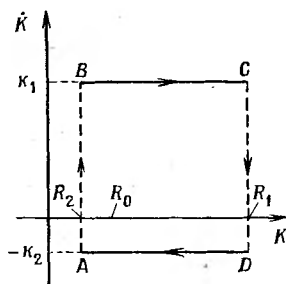


Рис. 5.5. Представление состояния экономики на фазовой плоскости. Скачки показаны пунктиром.

между новой моделью и нашими прежними рассуждениями. Поэтому мы остановимся только на двух пунктах:

1. влияние капиталовложений на рост объема производства;
2. скачкообразные изменения в капиталовложении.

### (b) Модель 2

Учитывая пункт 1, нам надо изменить уравнение (5.21) таким образом, чтобы у функции  $Y$  не было скачков даже в том случае, когда величина  $K$  их имеет. Это можно сделать, заменяя (5.21) на

$$Y = \frac{1}{1-\alpha} (\beta + \dot{K} - \varepsilon \dot{Y}), \quad (5.25)$$

где  $\varepsilon$  — некоторая положительная постоянная.

Легко показать, что новый член, введенный в (5.25), порождает задержку в реакции функции  $Y$  на изменение  $K$ . Заметим, что в силу (5.25)

$$\varepsilon \dot{Y} + (1-\alpha)Y = \beta + k_1, \quad K < R, \quad (5.26)$$

$$\varepsilon \dot{Y} + (1-\alpha)Y = \beta - k_2, \quad K > R. \quad (5.27)$$

Предположим теперь, что в момент  $t = t_1$  депрессия заканчивается и происходит мгновенный переход от уравнения (5.27)

к (5.26). Тогда решение  $Y(t)$  во время следующего периода подъема имеет вид

$$Y(t) = \frac{\beta + k_1}{1 - \alpha} \left\{ 1 - \exp \left[ \frac{\alpha - 1}{\varepsilon} (t - t_1) \right] \right\} + Y(t_1) \exp \left[ \frac{\alpha - 1}{\varepsilon} (t - t_1) \right]. \quad (5.28)$$

Отсюда следует, что величина  $Y$  не возрастает мгновенно до  $(\beta + k_1)/(1 - \alpha)$ ; она стремится к этому значению при  $t \rightarrow \infty$ . Конечно, с практической точки зрения время, которое требуется для того, чтобы функция  $Y(t)$  с заданной точностью стала равна этой величине, целиком зависит от параметра  $\varepsilon$ . Аналогичным образом уравнение (5.27) сглаживает скачкообразное падение  $Y(t)$  (см. рис. 5.4) в конце периода подъема.

Добившись того, что объем производства  $Y(t)$  реагирует на изменения в капиталовложении с запаздыванием, мы можем обратиться к пункту 2 и ликвидировать разрывы в капиталовложении. Нашей целью будет смягчение внезапного перехода от  $K = k_1$  к  $K = -k_2$  (и наоборот), возникающего когда  $K$  становится равным  $R$ .

Чтобы добиться этого, мы рассмотрим ту часть капиталовложений, которая возникает с изменением объема производства. Изменения в капиталовложении происходят от того, что мы хотим поддерживать основной капитал на уровне основного капитала. Изменение величины  $Y$  вызывает изменение  $R$ , что в свою очередь влечет изменение  $K$ . Ясно, что если бы нам удалось постоянно поддерживать  $\dot{K} = \gamma \dot{Y}$ , то было бы справедливо соотношение  $K = R$ .  $K$  сожалению, это равенство не может выполняться при всех значениях  $t$ , так как величина  $K$  имеет верхнюю границу  $k_1$  и нижнюю границу  $-k_2$ .

Поэтому мы предположим, что  $\dot{K} = \psi(\dot{Y})$ , где вид функции  $\psi(\dot{Y})$  изображен на рис. 5.6. Для достаточно малых  $\dot{Y}$  вложения могут соответствовать требованию  $K = \gamma Y$ . Наконец, капиталовложения достигают своего максимального значения, и основной капитал перестает удовлетворять этому требованию.

Это означает, что  $\dot{K}$  надо взять в виде

$$\dot{K} = L + \psi(\dot{Y}), \quad (5.29)$$

где  $\psi(\dot{Y})$  — индуцированные капиталовложения вызванные изменением объема производства,  $L$  — влияние прочих капиталовложений. Тогда уравнение (5.25) надо заменить на

$$Y = \frac{1}{1 - \alpha} [\beta + L + \psi(\dot{Y}) - \varepsilon Y]. \quad (5.30)$$

Вид функции  $\psi(\dot{Y}) - \epsilon \dot{Y}$  —  $\epsilon \dot{Y}$  при  $\epsilon < \gamma$  показан на рис. 5.6; видно, что эта функция немонотонна (т. е. имеет горбы) и похожа на кубическую параболу.

Чтобы получить график функции  $\dot{Y}$  в зависимости от  $Y$ , мы должны сдвинуть функцию  $\psi(\dot{Y}) - \epsilon \dot{Y}$ , изображенную на

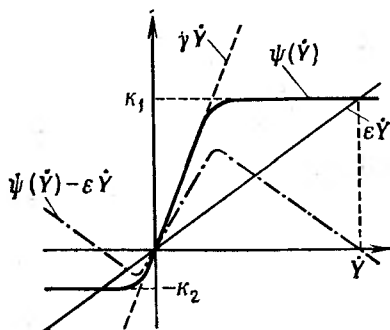


рис. 5.6. Вынужденное капиталовложение  $\omega(\dot{Y})$  близко к идеальному уровню  $\gamma \dot{Y}$  для величин  $\dot{Y}$ , близких к нулю, но при больших  $|\dot{Y}|$  оно ограничено величинами  $k_1$  и  $-k_2$ . Показаны также функции  $\epsilon \dot{Y}$  и  $\psi(\dot{Y}) - \epsilon \dot{Y}$ . Заметим немонотонность этой последней функции.

рис. 5.6, вверх на величину  $\beta + L$  и разделить на  $1 - \alpha$ . Если величина  $\beta + L$  достаточно велика, то мы получим график,

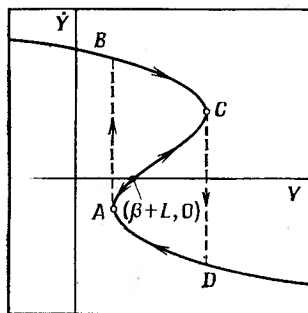


рис. 5.7. Изображение модели 2 на фазовой плоскости. Движение происходит только по немонотонной характеристике.

подобный приведенному на рис. 5.7. Эта кривая вместе с предположением о скачках полностью описывает поведение второй модели.

Точки, соответствующие всем возможным состояниям модели, лежат на этой кривой, и знак  $\dot{Y}$  показывает, возрастает или убывает величина  $Y$ . Таким образом, движение точки, определяющей состояние системы, должно происходить в направлении, указанном стрелками. Точка  $(\beta + L, 0)$  является,



следовательно, неустойчивой неподвижной точкой системы. Из точек  $C$  и  $A$  по аналогии с рис. 4.30 должны происходить скачки. Предположив, что скачки происходят из  $A$  в  $B$  и из  $C$  в  $D$ , получим релаксационные колебания для  $Y$ .

### (с) Модель 3

Перейдя к двумерной системе с предельным циклом, можно избавиться от предположения о скачках. Соответствующую систему можно получить, учитывая запаздывание реальных капиталовложений относительно принятия решения о их необходимости. Это значит, что индуцированные вложения

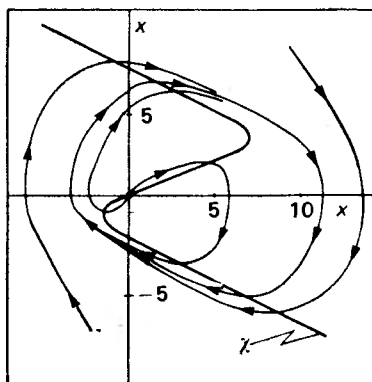


Рис. 5.8. Фазовый портрет для уравнения (5.34) при  $\varepsilon = 0,5$ ,  $\theta = 1,0$ ,  $\alpha = 0,6$ ,  $\gamma = 2,0$ ,  $k_1 = 9,0 + 10^9$ ,  $k_2 = 3,0 \times 10^9$ . Подробности о том, почему возникают такие численные значения параметров, даны в книге (Гудвин, 1951).

в момент  $t$  в действительности зависят не от  $\dot{Y}(t)$ , а от  $\dot{Y}(t - \theta)$ , где  $\theta$  — запаздывание.

Итак, мы заменяем (5.30) на

$$\varepsilon \dot{Y}(t) + (1 - \alpha)Y(t) - \psi(\dot{Y}(t - \theta)) = \beta + L, \quad (5.31)$$

или, положив  $\tau = t - \theta$ , на

$$\varepsilon \dot{Y}(\tau + \theta) + (1 - \alpha)Y(\tau + \theta) - \psi(\dot{Y}(\tau)) = \beta + L. \quad (5.32)$$

Разложив левую часть уравнения по степеням  $\theta$  и сохранив лишь члены первого порядка по  $\theta$ , получим

$$\varepsilon \theta \ddot{Y}(\tau) + [\varepsilon + (1 - \alpha)\theta] \dot{Y}(\tau) - \psi(\dot{Y}(\tau)) + (1 - \alpha)Y(\tau) = \beta + L. \quad (5.33)$$

Если мы предположим, что  $\beta + L$  постоянно, и выберем  $y = Y - (\beta + L)/(1 - \alpha)$ , то (5.33) можно записать в

однородной форме:

$$\varepsilon\theta\ddot{y} + [\varepsilon + (1 - \alpha)\theta]\dot{y} - \psi(y) + (1 - \alpha)y = 0.$$

Кроме того, Гудвин полагает  $x = \sqrt{(1 - \alpha)/(\varepsilon\theta)}y$ ,  $t = \sqrt{(1 - \alpha)/(\varepsilon\theta)}\tau$ ,

$$\chi(\dot{x}) = \{[\varepsilon + (1 - \alpha)\theta]\dot{x} - \psi(x)\}/\sqrt{(1 - \alpha)\varepsilon\theta}$$

и получает

$$\ddot{x} + \chi(\dot{x}) + x = 0. \quad (5.34)$$

Если  $[\varepsilon + (1 - \alpha)\theta] < \gamma$ , то функция  $\chi(\dot{x})$  похожа на кубическую параболу, уравнение (5.34) есть уравнение типа Рэ-лея и для него существует устойчивый предельный цикл. На рис. 5.8 показан фазовый портрет уравнения (5.34) для типичных значений параметров.

### 5.3. МОДЕЛИ ЗИМАНА ПУЛЬСАЦИИ СЕРДЦА И НЕРВНОГО ИМПУЛЬСА

Эти модели (Зиман, 1973) являются примерами геометрического подхода к моделированию с помощью дифференциальных уравнений. Они построены на основе чисто качественного описания динамики соответствующих биологических механизмов. Дифференциальные уравнения, которые выбираются для описания модели, являются просто наиболее элементарными уравнениями с требуемым поведением. К ним не предъявляется никаких особых требований, так как не уточняются механизмы возникновения той или иной динамики. Речь идет только о некоторых качественных признаках фазовых портретов, которые можно принять за математическое описание пульсации сердца и прохождения нервного импульса. Такой подход является полной противоположностью моделирования, описанного в п. 5.6, где предположения, сделанные относительно механизмов изучаемых явлений, полностью определяют вид динамических уравнений.

Сердце может в большинстве случаев находиться в одном из двух состояний: расслабленном (диастола) и сокращенном (систола). Коротко говоря, в ответ на электрохимическое воздействие каждое мышечное волокно быстро сокращается, остается некоторое время в сокращенном состоянии и затем *быстро* возвращается к своему прежнему, расслабленному состоянию и т. д.

В противоположность этому прохождение нервных импульсов имеет совершенно иную динамику. Часть нервной клетки, передающая импульс, называется аксоном. Состояние аксона определяется электрохимически управляемым потен-

циалом между внутренней и внешней частями аксона. В отсутствие возбуждения потенциал аксона остается на уровне покоя — некотором определенном постоянном уровне. Если передается импульс, то потенциал аксона резко меняется, а затем *медленно* возвращается к потенциалу покоя.

Эти процессы имеют три общие качественные черты, которые и служат основой для модели. Эти черты таковы:

(а) существование устойчивого состояния равновесия, к которому система периодически возвращается;

(б) наличие некоторого механизма, включающего действие;

(с) возвращение к состоянию равновесия после окончания действия.

В этом контексте основная разница между механизмами работы сердца и прохождения нервного импульса состоит в том, как осуществляется пункт (с). Чтобы построить модель работы сердца с указанными выше свойствами, мы должны понять, что означают эти свойства в терминах фазового портрета. Свойство (а) состоит в том, что на фазовом портрете имеется устойчивая неподвижная точка. Свойство (б) означает, что существует некоторый механизм, периодически переводящий состояние системы из неподвижной точки в точку, соответствующую некоторому другому состоянию системы. Траектория, проходящая через это новое «пороговое» состояние, совершает некоторое быстрое действие, за которым следует быстрое возвращение в положение равновесия, как это требуется в (с). Чтобы показать, как это можно осуществить, мы рассмотрим последовательный ряд моделей возрастающей сложности.

Воспользуемся обозначениями из работы (Зиман, 1973) и рассмотрим систему

$$\dot{x} = -\lambda x, \quad \dot{b} = -b, \quad (5.35)$$

где  $\lambda$  много больше единицы (см. рис. 5.9). Все траектории, кроме тех, которые расположены на оси  $b$ , почти параллельны главному направлению, соответствующему собственному значению  $-\lambda$ , т. е. «быстрому» собственному значению, а затем идут почти параллельно главному направлению для «медленного» собственного значения  $-1$ . Уравнения  $\dot{x} = -\lambda x$ ,  $\dot{b} = -b$  называются быстрым и медленным уравнением соответственно. Другой пример поведения такого же типа дает система

$$\epsilon \dot{x} = x - b, \quad \dot{b} = x, \quad (5.36)$$

где постоянная  $\epsilon$  положительна и много меньше единицы. Собственные значения этой системы равны приблизительно  $1/\epsilon$  и  $1$ , а их главные направления почти параллельны

прямым  $b = 0$  и  $b = (1 - \epsilon)x$ . Быстрое уравнение здесь имеет вид  $\epsilon \dot{x} = x - b$ , так как оно содержит малый параметр  $\epsilon$ , порождающий быстрое собственное значение  $1/\epsilon$ . Фазовый портрет системы изображен на рис. 5.10. Как и в предыдущем примере, быстрое и медленное движения почти параллельны главным направлениям узла.

Рассмотрим теперь систему

$$\epsilon \dot{x} = x - x^3 - b, \quad \dot{b} = x \quad (5.37)$$

для положительных и малых по сравнению с единицей  $\epsilon$ . Уравнения (5.37) можно рассматривать как некоторую моди-

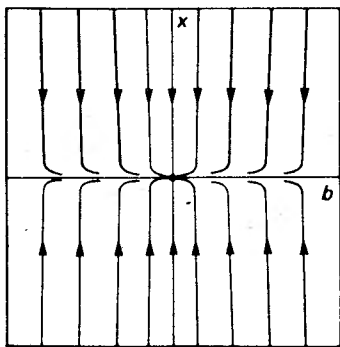


Рис. 5.9. Устойчивый узел системы (5.35) с «быстрым»  $(-\lambda)$  и «медленным»  $(-1)$  собственными значениями.

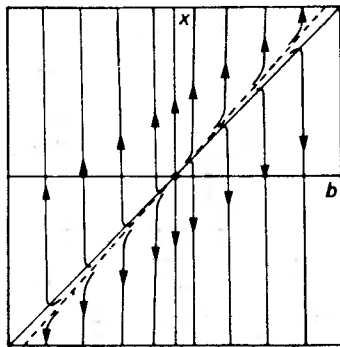


Рис. 5.10. Устойчивый узел для системы  $\epsilon \dot{x} = x - b$ ,  $\dot{b} = x$  с быстрым движением, параллельным оси  $x$ , и медленным движением, близким к направлению  $b = (1 - \epsilon)x$ .

фикацию уравнений (5.36), где линейный член  $x$  заменен кубической функцией  $x - x^3$ . Линеаризацией системы (5.37) в начале координат является как раз система (5.36). Изоклина направления  $\dot{x} = 0$  для нелинейной системы (5.37) — кубическая парабола  $b = x - x^3$ , как это показано на рис. 5.11. Быстрое движение почти параллельно направлению оси  $x$ , а медленное движение происходит в близкой окрестности характеристической кривой  $b = x - x^3$ . Система (5.37) является системой типа Льенара, которая уже рассматривалась в пп. 4.4 и 5.1. Форма предельного цикла и некоторых близких к нему траекторий указана на рис. 5.11.

В работе (Зиман, 1973) рассматривается следующая модификация системы (5.37), описывающая работу сердца:

$$\epsilon \dot{x} = x - x^3 - b, \quad \dot{b} = x - x_0. \quad (5.38)$$

Величина  $x_0$  выбирается больше  $1/\sqrt{3}$ , т. е. больше значения  $x$  в точке  $A$  (см. рис. 5.12). Система (5.38) имеет единственную неподвижную точку  $E = (x_0, b_0)$ , где  $b_0 = x_0 - x_0^3$ . Эта точка находится на верхней части характеристики  $b = x - x^3$ . Линеаризация системы (5.38) в точке  $E$  есть

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - 3x_0^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ b \end{bmatrix},$$

и, следовательно, точка  $E$  устойчива.

Переменная  $x$  — это длина мышечного волокна, а  $b$  — переменная, осуществляющая электрохимическое управление.

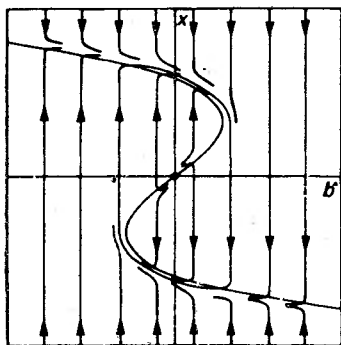


Рис. 5.11 Фазовый портрет системы Льенара  $\epsilon \dot{x} = x - x^3 - b$ ,  $\dot{b} = x$  для  $0 < \epsilon \ll 1$ .

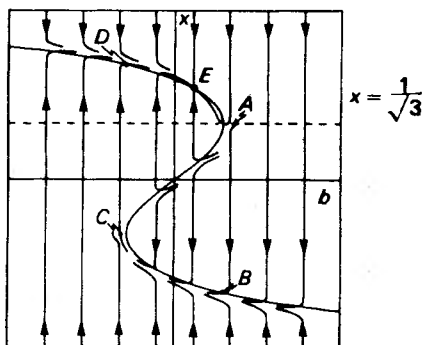


Рис. 5.12 Фазовый портрет системы  $\epsilon \dot{x} = x - x^3 - b$ ,  $\dot{b} = x - x_0$  для  $0 < \epsilon \ll 1$ .

Механизм переключения переводит сердечную мышцу из состояния равновесия  $E$  в близкое состояние  $A$  (см. рис. 5.12). Мышечное волокно быстро сокращается, и при этом  $x$  убывает вдоль траектории от  $A$  до  $B$ . Быстрая релаксация мышечного волокна происходит на части траектории  $CD$ , после чего происходит возвращение к положению равновесия  $E$ . Затем это периодически повторяется под влиянием включающего механизма, имитируя поведение мышечных волокон при работе сердца.

Чтобы получить медленное возвращение, характерное для прохождения нервного импульса, требуется рассмотреть некоторую модель в пространстве  $\mathbb{R}^3$ . Необходимость рассматривать систему дифференциальных уравнений большей размерности вызвана следующими обстоятельствами. Быстрое действие в модели, аналогичной (5.38), возникает из-за складки характеристической кривой (т. е. из-за ее немонотонности). Это означает, что периодическая траектория может существовать только в том случае, когда имеется вторая

складка и, следовательно, быстрое возвращение. Введение дополнительного измерения позволяет обойти эту трудность, потому что возвращение не обязательно должно происходить в окрестности складки. Итак, мы будем рассматривать модели с характеристической поверхностью в  $\mathbb{R}^3$ .

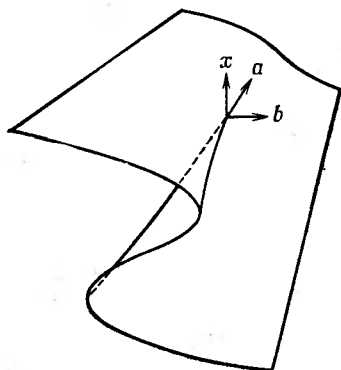


Рис. 5.13. Поверхность, имеющая складку:  $x^3 + ax + b = 0$ .

Поверхность со складкой  $M$ , определяющая динамику модели, в пространстве  $(x, a, b)$  задается уравнением

$$x^3 + ax + b = 0 \quad (5.39)$$

(см. рис. 5.13).

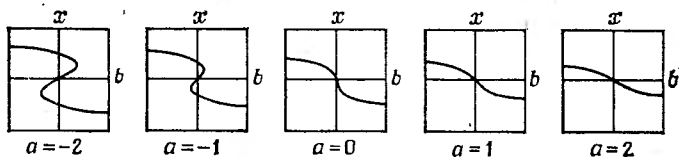


Рис. 5.14. Различные сечения поверхности  $M$  плоскостями  $a = \text{const}$ .

Чтобы понять, почему уравнение (5.39) описывает именно такую поверхность, полезно рассмотреть графики пересечения этой поверхности с плоскостями  $a = \text{const}$  при различных значениях  $a$ . Пусть  $a$  возрастает, начиная от отрицательных значений, принимает нулевое значение и затем становится положительным. При  $a = \text{const}$  уравнение  $x^3 + ax + b = 0$  на плоскости  $x, b$  является кубической параболой. На рис. 5.14 показано, как складка, существующая при  $a \leq 0$ , исчезает для  $a > 0$ .

Дифференциальные уравнения, моделирующие быстрое действие с медленным возвращением, имеют вид

$$\begin{aligned}\epsilon \dot{x} &= -(x^3 + ax + b), \\ \dot{a} &= -2x - 2a, \\ \dot{b} &= -a - 1,\end{aligned}\tag{5.40}$$

где  $\epsilon$  — малая положительная постоянная. Как обычно, быстрое уравнение дает большие значения для величины  $\dot{x}$  для точек, далеких от поверхности  $M$ . Это порождает быстрое движение в направлении оси  $x$  (см. рис. 5.16). Для того чтобы возвращение было медленным, мы должны иметь возможность перехода с нижнего на верхний кусок поверхности  $M$  так, чтобы рассматриваемые переменные не испытывали скачков.

Система (5.40) имеет единственную неподвижную точку  $E$  при  $x = 1$ ,  $a = -1$ ,  $b = 0$ ; она лежит на поверхности  $M$ . Линеаризация системы в этой точке имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{a} \\ \dot{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/\epsilon & -1 & -1/\epsilon \\ -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ a \\ b \end{bmatrix}.\tag{5.41}$$

Собственные значения этой линейной системы с точностью до величин первого порядка относительно  $\epsilon$  равны  $\frac{1}{2}(-1 \pm i\sqrt{3})$  и  $-2/\epsilon$ , так что  $E$  является устойчивой неподвижной точкой. Быстрое собственное значение порождает быстрое движение по направлению к  $E$  всюду, кроме окрестности поверхности  $M$ , а медленные собственные значения порождают спиралеобразное закручивание вокруг  $E$  в окрестности  $M$ . набросок фазового портрета (5.40) (как он виден из некоторой точки, расположенной выше  $M$ ) сделан на рис. 5.15: линия  $OF$  — складка поверхности  $M$ , видная сверху.

С помощью рис. 5.16 мы можем теперь описать динамику системы (5.40): быстрое действие — медленный возврат. Предположим, что механизм включения заставляет величину  $b$  увеличиваться от нулевого значения, соответствующего положению равновесия  $E$ , до некоторого значения  $b_c \geq 2/(3\sqrt{3})$ , причем величины  $x$  и  $a$  остаются постоянными. Ограничение величины  $b_c$  означает, что точка  $A(1, -1, b_c)$  расположена правее линии складки  $OF$  (см. рис. 5.16). В силу уравнений (5.40) происходит быстрое изменение величины  $x$  от 1 в точке  $A$  до значения, соответствующего точке  $B$ , расположенной почти вертикально под  $A$  на нижней части поверхности  $M$ . Далее траектория, проходящая через  $B$ , идет близко к поверхности  $M$ , что дает сравнительно медленное возвращение

на верхнюю часть поверхности перед закручиванием вокруг положения равновесия  $E$ . Затем весь цикл повторяется снова.

Чтобы построить модель прохождения нервного импульса, переменные  $x$ ,  $a$ ,  $b$  надо соответствующим образом интерпретировать. Во время прохождения нервного импульса способность ионов натрия проникать через клеточную мембрану существенно и быстро возрастает. Натриевая проницаемость

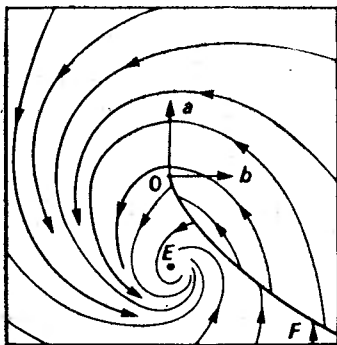


Рис. 5.15. набросок фазового портрета системы (5.40) вблизи поверхности  $M$  (вид из точки на положительной полуоси  $x$ ).

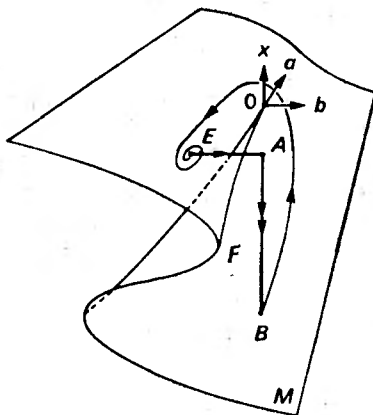


Рис. 5.16. Основные черты динамики системы (5.40) на  $M$ .

соответствует величине  $-x$  ( $x$  быстро убывает). Возбуждающим воздействием для этого перехода служит малое изменение величины  $b$ . Если  $b$  придать смысл потенциала на клеточной мембране, то небольшое увеличение этого потенциала и является возбуждающим механизмом для прохождения нервного импульса. Наконец, переменная  $a$  соответствует калиевой проницаемости. После прохождения импульса изменение калиевой проницаемости со временем, по-видимому, согласуется с поведением траектории, проходящей через точку  $B$ . За медленным повышением величины  $a$  следует медленное уменьшение до величины  $a = -1$ , соответствующей отрезку траектории от  $A$  до  $E$  с поворотом вокруг точки  $O$ .

## 5.4. ФУНКЦИИ ЛЯПУНОВА

### 5.4.1. ТЕОРИЯ

В гл. 3 основным способом исследования поведения нелинейной системы в окрестности одной из ее неподвижных точек было применение теоремы о линеаризации. Эта теорема дает убедительные результаты только в том случае,



когда неподвижная точка простая и не является центром. Но в п. 3.5 было показано, как можно расклассифицировать все неподвижные точки на асимптотически устойчивые, нейтрально устойчивые и неустойчивые. В этом параграфе рассматривается метод, позволяющий выяснить, когда имеют место эти типы устойчивости.

Предположим, например, что мы хотим исследовать характер неподвижной точки в начале координат для системы

$$\dot{x}_1 = -x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_2^3. \quad (5.42)$$

Здесь нельзя применять теорему о линеаризации, так как ясно, что линеаризованная система не является простой. Однако мы можем показать, что начало координат асимптотически устойчиво, если рассмотреть поведение функции  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  на траекториях системы (5.42).

Пусть  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$  — произвольная интегральная кривая системы (5.42). Тогда

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V}{\partial x_1} \dot{x}_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} \dot{x}_2 = -2(x_1^4 + x_2^4). \quad (5.48)$$

Поэтому производная  $\dot{V}(\mathbf{x}(t))$  отрицательна во всех точках плоскости  $x_1, x_2$ , кроме начала координат, так что функция  $V(\mathbf{x}(t))$  убывает при возрастании  $t$ . Действительно, из того, что  $\dot{V}(\mathbf{x}(t)) < 0$  при  $\mathbf{x}(t) \neq \mathbf{0}$ , следует, что  $V(\mathbf{x}(t)) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , и, следовательно,  $\mathbf{x}(t) \rightarrow \mathbf{0}$  при  $t \rightarrow \infty$ . Таким образом, начало координат — асимптотически устойчивая неподвижная точка системы (5.42).

Приведенное выше исследование системы (5.42) является простейшим примером применения функции Ляпунова. Чтобы развить эти идеи далее, нам понадобятся следующие определения.

**Определение 5.4.1.** Действительнозначная функция  $V: N \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $N$  — некоторая окрестность точки  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$ , называется *положительно (отрицательно) определенной* в  $N$ , если  $V(\mathbf{x}) > 0$  ( $V(\mathbf{x}) < 0$ ) для  $\mathbf{x} \in N \setminus \{\mathbf{0}\}$  и  $V(\mathbf{0}) = 0$ .

**Определение 5.4.2.** Действительнозначная функция  $V: N \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $N$  — некоторая окрестность точки  $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$  называется *положительно (отрицательно) полупределенной* в  $N$ , если  $V(\mathbf{x}) \geq 0$  ( $V(\mathbf{x}) \leq 0$ ) для  $\mathbf{x} \in N \setminus \{\mathbf{0}\}$  и  $V(\mathbf{0}) = 0$ <sup>1)</sup>.

**Определение 5.4.3.** Производная функции  $V: N \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  вдоль параметрически заданной кривой  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$

<sup>1)</sup> Употребляется также термин «неотрицательно (неположительно) определенная функция». — *Прим. перв.*

определяется как

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \frac{\partial V(\mathbf{x}(t))}{\partial x_1} \dot{x}_1(t) + \frac{\partial V(\mathbf{x}(t))}{\partial x_2} \dot{x}_2(t). \quad (5.44)$$

Функция  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ , рассмотренная во вводимом примере, положительно определена в  $\mathbb{R}^2$ . Поведение этой функции типично для положительно определенных функций, применяемых в этом параграфе. Любая положительно определенная непрерывно дифференцируемая функция имеет континуум замкнутых линий уровня, окружающих начало координат. Конечно, эти кривые не обязаны быть окружностями (см. рис. 5.17). При этом если производная  $\dot{V}$  отрицательна

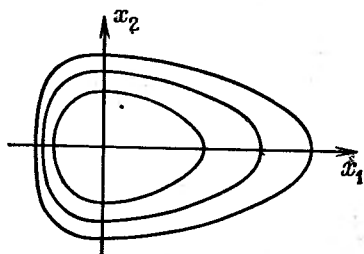


Рис. 5.17. Линии уровня функции  $V(x_1, x_2) = C$  для положительно определенной функции  $V(x_1, x_2) = x_1 - \ln(1 + x_1) + x_2^2$  для  $C = 0,5; 1,0; 1,5$ .

на некоторой траектории, то эта траектория должна все время двигаться к началу координат, так как функция  $V$  вдоль траектории убывает. Заметим, что для любой системы  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$

$$\dot{V}(\mathbf{x}(t)) = \left( \frac{\partial V}{\partial x_1} X_1 + \frac{\partial V}{\partial x_2} X_2 \right) \quad (5.45)$$

зависит только от  $x_1$  и  $x_2$  и поэтому часто обозначается просто  $\dot{V}(\mathbf{x})$ .

**Теорема 5.4.1.** (Теорема Ляпунова об устойчивости).

Пусть система  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in S \subseteq \mathbb{R}^2$ , имеет неподвижную точку в начале координат. Если в некоторой окрестности  $N$  начала координат существует действительная функция  $V$  такая, что

(а) частные производные  $\partial V/\partial x_1$ ,  $\partial V/\partial x_2$  существуют и непрерывны;

(б)  $V$  положительно определенная;

(с)  $\dot{V}$  отрицательно полуопределенная,

то начало координат является устойчивой неподвижной точкой системы.

Если вместо (с) предполагается, что  
(с')  $\dot{V}$  отрицательно определенная,  
то начало координат — асимптотически устойчивая неподвижная точка.

*Доказательство.* Из свойств (а) и (б) следует, что линии уровня функции  $V$  представляют собой континуум замкнутых кривых, окружающих начало координат. Поэтому существует положительное число  $k$  такое, что окрестность начала координат  $N_1 = \{x | V(x) < k\}$  содержится в окрестности  $N$ . Если  $x_0 \in N_1 \setminus \{0\}$ , то в силу предположения (с)  $\dot{V}(\varphi_t(x_0)) \leq 0$  для всех  $t \geq 0$  и  $V(\varphi_t(x_0))$  является невозрастающей функцией  $t$ . Поэтому для всех  $t \geq 0$  справедливо неравенство  $V(\varphi_t(x_0)) < k$  и  $N_1$  является положительным инвариантным множеством. Следовательно, согласно определению 3.5.2, неподвижная точка устойчива.

Для случая (с') асимптотическая устойчивость устанавливается с помощью следующего рассуждения. Функция  $V(\varphi_t(x_0))$  убывает и ограничена снизу нулем, так что она обязана иметь предел при  $t \rightarrow \infty$ . Тогда должно выполняться равенство  $\lim_{t \rightarrow \infty} \dot{V}(\varphi_t(x_0)) = 0$ , но для отрицательно определенной функции  $\dot{V}$  это может произойти только тогда, когда  $\varphi_t(x_0) \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

**Определение 5.4.4.** Функция  $V$ , удовлетворяющая предположениям (а), (б), (с) теоремы 5.4.1, называется *слабой функцией Ляпунова*. Если (с) заменено на (с'), то  $V$  называется *сильной функцией Ляпунова*.

**Пример 5.4.1.** Доказать, что функция

$$V(y_1, y_2) = y_1^2 + y_1^2 y_2^2 + y_2^4, \quad (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2, \quad (5.46)$$

является сильной функцией Ляпунова для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 1 - 3x_1 + 3x_1^2 + 2x_2^2 - x_1^3 - 2x_1 x_2^2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 2x_1 x_2 + x_1^2 x_2 - x_2^3 \end{aligned} \quad (5.47)$$

в неподвижной точке  $(1, 0)$ .

**Решение.** Введем локальные координаты  $y_1, y_2$  в окрестности точки  $(1, 0)$ ; система (5.47) примет вид

$$\dot{y}_1 = -y_1^3 - 2y_1 y_2^2, \quad \dot{y}_2 = y_1^2 y_2 - y_2^3. \quad (5.48)$$

Функция  $V$ , заданная формулой (5.46), положительно определена, и

$$\begin{aligned}\dot{V}(y_1, y_2) &= \frac{\partial V}{\partial y_1} \dot{y}_1 + \frac{\partial V}{\partial y_2} \dot{y}_2 = (2y_1 + 2y_1 y_2^2)(-y_1^3 - 2y_1 y_2^2) + \\ &+ (2y_1^2 y_2 + 4y_2^3)(y_1^2 y_2 - y_2^3) = \\ &= -2y_1^4 - 4y_1^2 y_2^2 - 2y_1^2 y_2^4 - 4y_2^4\end{aligned}$$

есть отрицательно определенная функция. Следовательно,  $V$  является сильной функцией Ляпунова для (5.47).

**Пример 5.4.2.** Исследовать устойчивость уравнения второго порядка

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 + x = 0 \quad (5.49)$$

в окрестности начала координат на фазовой плоскости.

**Решение.** Если  $x_1 = x$  и  $x_2 = \dot{x}$ , то

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3 \quad (5.50)$$

есть система первого порядка, соответствующая уравнению (5.49). Производная функция  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  вдоль траекторий (5.50) равна

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_2^4,$$

так что  $\dot{V}$  отрицательно полуопределенная. Тогда по теореме 5.4.1 получаем, что начало координат является устойчивой точкой системы (5.50).

На самом деле для систем, обладающих функцией Ляпунова, аналогичной только что построенной в примере 5.4.2, можно доказать асимптотическую устойчивость. Заметим, что функция  $\dot{V}(x)$  не является строго отрицательной только на прямой  $x_2 = 0$ . На этой прямой компоненты векторного поля системы (5.50) равны  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1$ . Поэтому все траектории (кроме начала координат) пересекают прямую  $x_2 = 0$  и функция  $\dot{V}$  обращается в нуль только для отдельных значений  $t$ . Во всех других точках плоскости  $\dot{V}$  отрицательно. В таком случае следующая теорема позволяет установить асимптотическую устойчивость.

**Теорема 5.4.2.** Пусть начало координат является изолированной неподвижной точкой системы  $\dot{x} = X(x)$  и в некоторой окрестности этой точки существует слабая функция Ляпунова. Тогда, если  $\dot{V}(x)$  не обращается тождественно в нуль ни на какой траектории, кроме траектории, состоящей из неподвижной точки, то начало координат асимптотически устойчиво.

**Пример 5.4.3.** Показать, что все траектории системы

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - (1 - x_1^2)x_2, \quad (5.51)$$

проходящие через точки  $(x_1, x_2)$  с  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ , стремятся к началу координат при  $t \rightarrow \infty$ .

**Решение.** Функция  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  является слабой функцией Ляпунова в области  $x_1^2 + x_2^2 < 1$  ( $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_2^2(1 - x_1^2)$ ). Функция  $\dot{V}$  обращается в нуль только на прямых  $x_2 = 0$  и  $x_1 = \pm 1$ . Однако не существует траекторий системы (5.51), лежащих на этих прямых, так как на  $x_2 = 0$  справедливо  $\dot{x}_2 = -x_1 \neq 0$ , а на  $x_1 = \pm 1$  выполняется  $\dot{x}_1 = x_2 \neq 0$ . Следовательно, по теореме 5.4.2 начало координат асимптотически устойчиво. Кроме того, с помощью рассуждений, аналогичных тем, которые применялись при доказательстве этой теоремы, можно установить, что любая траектория  $\varphi_t(x_0)$ ,  $|x_0| < 1$ , имеет предел  $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi_t(x_0) = 0$ .

Тот факт, что начало координат — асимптотически устойчивая неподвижная точка системы (5.51), можно также получить с помощью теоремы о линеаризации. Однако приведенное доказательство отличается тем, что оно дает явное выражение для «области устойчивости»  $N = \{(x_1, x_2) | x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . Все траектории, проходящие через точки области  $N$ , стремятся к началу координат при возрастании времени. Теорема о линеаризации утверждает, что область устойчивости существует, но не дает понятия о ее размере.

**Теорема 5.4.3.** Пусть система  $\dot{x} = X(x)$  имеет неподвижную точку в начале координат. Если существует действительная непрерывная функция  $V$  такая, что

- (а) область определения  $V$  содержит некоторую окрестность вида  $N\{x | |x| \leq r\}$ ,  $r > 0$ ;
- (б) сколь угодно близко к началу координат существуют точки, где  $V > 0$ ;
- (с) функция  $\dot{V}$  положительно определенная;
- (д)  $V(0) = 0$ ,

то начало координат неустойчиво.

**Доказательство.** Мы покажем, что для любой точки  $x_0$  из  $N$ , для которой  $V(x_0) > 0$ , траектория  $\varphi_t(x_0)$  покидает окрестность  $N$  при достаточно больших положительных  $t$ . По предположению такие точки можно найти сколь угодно близко к началу координат, и, следовательно, начало координат неустойчиво.

Пусть  $0 < r_1 < r$ ; тогда существует точка  $x_0 \neq 0$  с  $|x_0| < r_1$  и такая, что  $V(x_0) > 0$ . Функция  $\dot{V}$  положительно определена на  $N$ , так что  $V(\varphi_t(x_0))$  является возрастающей функцией  $t$ . Следовательно, траектория  $\varphi_t(x_0)$  при всех  $t$  остается вне некоторой окрестности начала координат. Поэтому функция  $\dot{V}(\varphi_t(x_0))$  отделена от нуля снизу, т. е. существует такая положительная постоянная  $K$ , что  $\dot{V}(\varphi_t(x_0)) \geq K$  для всех положительных  $t$ . Если мы предположим, что траектория  $\varphi_t(x_0)$  остается в окрестности  $N$ , то

$$V(\varphi_t(x_0)) - V(x_0) \geq Kt \quad (5.52)$$

для всех положительных  $t$ . Это означает, что функция  $V(\varphi_t(x_0))$  принимает сколь угодно большие значения на замкнутом и ограниченном множестве  $N$ . Таким образом, траектория  $\varphi_t(x_0)$  должна покинуть  $N$  при возрастании  $t$ .

**Пример 5.4.4.** Показать, что начало координат — неустойчивая неподвижная точка для системы

$$\dot{x}_1 = x_1^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_2^2 - x_1x_2 \quad (5.53)$$

с помощью функции

$$V(x_1, x_2) = \alpha x_1^3 + \beta x_1^2 x_2 + \gamma x_1 x_2^2 + \delta x_2^3 \quad (5.54)$$

при подходящем выборе констант  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ .

**Решение.** Производная функции  $V$  вдоль траекторий системы (5.53) равна

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= 3\alpha x_1^2 + \beta x_1^3 x_2 + (2\beta - \gamma) x_1^2 x_2^2 + \\ &+ (4\gamma - 3\delta) x_1 x_2^3 + 6\delta x_2^4. \end{aligned} \quad (5.55)$$

Заметим, что если выбрать  $\alpha = \frac{1}{3}$ ,  $\beta = 4$ ,  $\gamma = 2$ ,  $\delta = \frac{4}{3}$ , то отдельные слагаемые функции  $\dot{V}$  можно сгруппировать следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_1, x_2) &= x_1^4 + 4x_1^3 x_2 + 6x_1^2 x_2^2 + 4x_1 x_2^3 + 8x_2^4 = \\ &= (x_1 + x_2)^4 + 7x_2^4, \end{aligned} \quad (5.56)$$

откуда видно, что  $\dot{V}$  положительно определенная. Функция  $V$  имеет вид

$$V(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1^3 + 4x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 + \frac{4}{3} x_2^3. \quad (5.57)$$

Эта функция такова, что  $V(x_1, x_2) = \frac{1}{3} x_1^3$  при  $x_2 = 0$ , так что сколь угодно близко к началу координат на оси  $x_1$  имеются точки, для которых  $V > 0$ . Из этого, согласно теореме 5.4.3, следует, что начало координат — неустойчивая неподвижная точка системы.

**5.4.2. МОДЕЛЬ КОНФЛИКТНОГО ПОВЕДЕНИЯ ЖИВОТНЫХ**

Предположим, что мы хотим построить модель ритуальных конфликтов, которые возникают среди особей одного вида, например при соперничестве на самку (самца), за территорию или за доминантное положение. Конфликты возникают, когда животные сталкиваются друг с другом, и мы будем предполагать, что при этом возможны три вида поведения:

- (а) демонстрация;
- (б) драка;
- (с) убежание.

Предположим, что индивидуумы популяции, которую мы моделируем, реагируют на конфронтацию ограниченным числом способов. Пусть каждый индивидуум действует по одной из стратегий, заданных следующей таблицей:

Номер $i$	Стратегия	Первоначальная тактика	Тактика, если противник вступает в драку
1	«Ястреб»	Драка	Драка
2	«Голубь»	Демонстрация	Убежание
3	«Агрессивный трус»	Драка	Убежание

Индивидуум, применяющий стратегию  $i$  по отношению к противнику, применяющему стратегию  $j$ , получает «выигрыш»  $a_{ij}$ . Считается, что этот выигрыш влияет на возможность размножения животного (чем больше выигрыш, тем больше потомства оставляет животное). Предположим, что применяются только чистые стратегии, т. е. каждый индивидуум всегда принадлежит одному и тому же типу и применяет одну и ту же стратегию, и что потомство наследует стратегию родителя. Тогда наша модель может описывать эволюцию всех трех типов популяции.

Пусть  $x_i$  — доля особей в популяции, применяющих  $i$ -ю стратегию. Тогда

$$\sum_{i=1}^3 x_i = 1 \quad (5.58)$$

и

$$x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5.59)$$

Выигрыш для особей, применяющих стратегию  $i$  против всех остальных особей популяции, составляет

$$\sum_j a_{ij} x_j = (Ax)_i, \quad (5.60)$$

где  $A$  — платежная матрица. Средний выигрыш члена популяции составляет

$$\sum_i x_i (Ax)_i = x^T Ax. \quad (5.61)$$

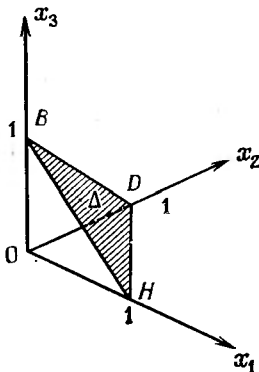
Поэтому «выгода» от применения стратегии  $i$  равна

$$(Ax)_i - x^T Ax. \quad (5.62)$$

Скорость размножения на особь популяции для группы, применяющей стратегию  $i$ , считается пропорциональной преимуществу данной стратегии, что дает

$$\dot{x}_i = x_i ((Ax)_i - x^T Ax), \quad (5.63)$$

$i = 1, 2, 3$ . Эти уравнения имеют смысл только для тех точек пространства  $R^3$ , которые удовлетворяют условиям (5.58)



*Рис. 5.18.* Динамика модели, описывающей конфликтное поведение животных (уравнение (5.63));  $x_1, x_2, x_3$  изменяются только в области

$\Delta = \left\{ x_1, x_2, x_3 \mid \sum_{i=1}^3 x_i = 1, x_i \geq 0, i = 1, 2, 3 \right\}$ . Это плоская треугольная «поверхность возможных значений».

и (5.59). т. е. для области  $\Delta$  на рис. 5.18. Мы можем получить платежную матрицу, задав «очки» за результат каждого столкновения, например: победа = 6, поражение = 0, травма = -10, потеря времени = -1. Те конкретные значения, которые заданы здесь, несущественны; важны их знак и порядок абсолютных величин. Если «ястреб» встречается с «голубем» или «агрессивным трусом», то он побеждает, так что  $a_{12} = a_{13} = 6$ . Если встречаются два «ястреба», то они дерутся до тех пор, пока один из них не получает травму. Оба «ястреба» выигрывают с равной вероятностью, и выигрыш равен  $a_{11} = \frac{1}{2}(6 - 10) = -2$ . Если «голубь» встречает «ястреба» или «агрессивного труса», то он проигрывает, поэтому



$a_{21} = a_{23} = 0$ , но два «голубя» продолжают свои демонстрации друг перед другом, пока один из них не сдастся, так что  $a_{22} = \frac{1}{2}(6 + 0) - 1 = 2$ . Наконец, «агрессивные труссы» проигрывают «ястребам» ( $a_{31} = 0$ ), выигрывают у «голубей» ( $a_{32} = 6$ ) и имеют 50 %-ный шанс выигрыша у себе подобных  $[a_{33} = \frac{1}{2}(6 + 0) = 3]$ . Таким образом,

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 6 & 6 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 3 \end{bmatrix}. \quad (5.64)$$

Полезно также заметить, что преимущество стратегии не меняется, если к любому столбцу матрицы  $A$  добавить постоянную величину. С помощью такого преобразования матрицу  $A$  можно упростить, сделав ее диагональные элементы равными нулю. Динамические уравнения (5.63) при этом не изменятся. Поэтому мы можем положить

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 2 & 4 & 0 \end{bmatrix}. \quad (5.65)$$

На самом деле динамические уравнения (5.63) являются только частью фундаментальной модели, составленной Зиманом (1979); в этой работе можно найти подробное изложение модели и ее динамики. Наша цель состоит в том, чтобы привлечь внимание читателя к моделям такого рода и одновременно проиллюстрировать подход Ляпунова к определению областей устойчивости.

**Пример 5.4.5.** Показать, что динамические уравнения (5.63), где матрица  $A$  задана формулой (5.65), имеют неподвижную точку  $(x_1, x_2, x_3) = (\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$ . Применить функцию «типа Ляпунова»

$$V(x) = x_1^{3/5} x_3^{2/5} \quad (5.66)$$

и доказать, что эта неподвижная точка асимптотически устойчива и область устойчивости есть

$$\overset{\circ}{\Delta} = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 = 1; \quad x_1, x_2, x_3 > 0\}.$$

Найти остальные неподвижные точки (5.63), определить их характер и нарисовать фазовый портрет на  $\Delta$ . Что произойдет с популяцией, состоящей исключительно из «ястребов» и «голубей», если появится мутант — «агрессивный трус»?

**Решение.** Чтобы проверить, является ли точка  $x = (\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$  неподвижной точкой для системы (5.63), мы заметим, что  $x^T Ax = 5(\frac{3}{5})(\frac{2}{5}) = \frac{6}{5}$ . Для  $i=1$  и  $i=3$   $(Ax)_i = \frac{6}{5}$  и, следовательно,  $\dot{x}_1 = \dot{x}_3 = 0$ , а для  $i=2$   $\dot{x}_2 = 0$ , так как  $x_2 = 0$ .

Покажем, что точка  $(\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$  асимптотически устойчива на  $\dot{\Delta}$ , с помощью рассуждений «типа Ляпунова». Поверхности

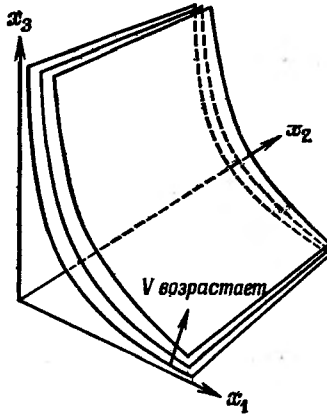


Рис. 5.19. Поверхности уровня функции  $V(x_1, x_2, x_3) = x_1^3/5 x_3^2/5$  порождаются параллельным переносом гипербол  $x_3 = C x_1^{-3/2}$  ( $C \in \mathbb{R}$ ) вдоль оси  $x_2$ .

уровня функции  $V(x_1, x_2, x_3)$  инвариантны относительно сдвига вдоль оси  $x_2$  и пересекают плоскость  $x_2 = 0$  по гиперболам (см. рис. 5.19). Треугольник  $\Delta$  пересекает эти поверхности уровня по системе кривых, изображенных на рис. 5.20. На  $\Delta$  производная  $V$  вдоль траекторий (5.63) определяется как

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= V(x) \left( \frac{3\dot{x}_1}{5x_1} + \frac{2\dot{x}_3}{5x_3} \right) = V(x) \left[ \left( \frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5} \right) Ax - x^T Ax \right] = \\ &= V(x) \left[ (1 - x_1 - x_3) \left( \frac{11}{5} - x_1 - x_3 \right) + 5 \left( x_1 - \frac{3}{5} \right)^2 \right]. \quad (5.67) \end{aligned}$$

Следовательно, производная  $\dot{V}(x)$  положительна на  $\dot{\Delta}$  и  $V$  увеличивается вдоль траекторий до своего максимума в точке  $Q$ . (Аналогично в доказательстве теоремы 5.4.1 функция  $V$  убывает до своего минимума.)

Таким образом, все траектории в  $\dot{\Delta}$  при возрастании  $t$  приближаются к точке  $Q$ . Отсюда следует, что  $\dot{\Delta}$  является подмножеством области устойчивости и не может содержать

неподвижных точек. Следовательно, все неподвижные точки системы (5.63) должны находиться на границе  $\Delta$ . На  $NB$  ( $x_2 = 0$ ) уравнения  $\dot{x}_1 = 0$ ,  $\dot{x}_3 = 0$  превращаются в  $x_1(3x_3 - 5x_1x_3) = 0$ ,  $x_3(2x_1 - 5x_1x_3) = 0$  соответственно. Таким образом, кроме  $Q$  существуют неподвижные точки  $H = (1, 0, 0)$

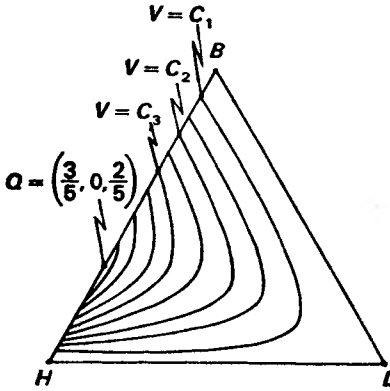


Рис. 5.20. Линии уровня функции  $V = x_1^{3/5} x_3^{2/5}$  на  $\Delta$  получаются пересечением поверхностей уровня  $V$  и  $\Delta$ . Функция  $V$  принимает свое единственное наибольшее значение на  $\Delta$  в точке  $Q$ , так что  $C_3 > C_2 > C_1$ .

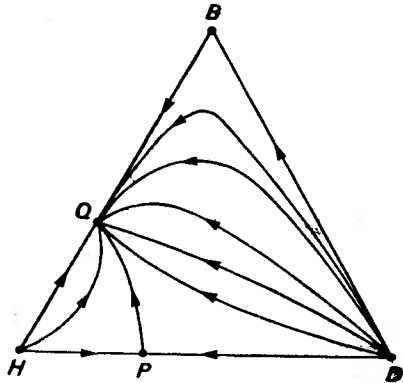


Рис. 5.21. Фазовый портрет системы (5.63) на  $\Delta$ ; матрица  $A$  задана формулой (5.65).

и  $B = (0, 0, 1)$ . Аналогично на  $BD$  ( $x_1 = 0$ ) и  $HD$  ( $x_3 = 0$ ) находятся неподвижные точки  $D = (0, 1, 0)$  и  $P = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 0)$ ; других неподвижных точек на  $\Delta$  нет.

Мы можем определить поведение траекторий на границе, заметив, что

- (а) на  $NB$ ,  $\dot{x}_1 > 0$  при  $x_1 < \frac{3}{5}$  и  $\dot{x}_1 < 0$  при  $x_1 > \frac{3}{5}$ ;
- (б) на  $BD$ ,  $\dot{x}_3 > 0$ ;
- (с) на  $HD$ ,  $\dot{x}_2 > 0$  при  $x_2 < \frac{1}{3}$  и  $\dot{x}_2 < 0$  при  $x_2 > \frac{1}{3}$ .

Эти замечания позволяют получить фазовый портрет, изображенный на рис. 5.21. Предположим, что в популяции, состоящей из «ястребов» и «голубей», появляется мутант — «агрессивный трус». Новому состоянию популяции соответствует фазовая точка в  $\Delta$ , близкая к прямой  $HD$ . Так как все траектории в  $\Delta$  стремятся к точке  $Q$  при возрастании  $t$ , мы можем заключить, что состояние популяции стремится к  $x = (\frac{3}{5}, 0, \frac{2}{5})$  и что «голуби» вымрут.

## 5.5. БИФУРКАЦИЯ В СИСТЕМАХ

## 5.5.1. НЕСКОЛЬКО ПРОСТЫХ ПРИМЕРОВ

В динамические уравнения часто входят кроме динамических переменных также параметры или «константы». Например,

(а) скорость размножения на особь популяции  $a$  в уравнении, описывающем рост популяции,

$$\dot{x} = ax; \quad (5.68)$$

(б) естественная или собственная частота  $\omega_0$  и постоянная демпфирования  $k$  в уравнении гармонического осциллятора

$$\ddot{x} + 2k\dot{x} + \omega_0^2 x = 0;$$

(с) величина  $\varepsilon$  в уравнении Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} + \varepsilon(x^2 - 1)\dot{x} + x = 0$$

это всё параметры.

Мы имеем дело с *бифуркацией* дифференциального уравнения, если качественное поведение его фазового портрета

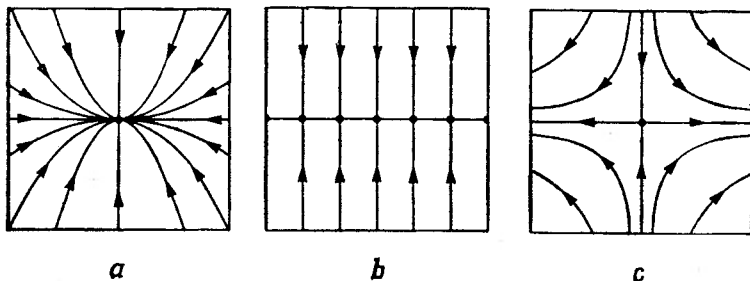


Рис. 5.22. Фазовые портреты для системы с параметром:  $\dot{x}_1 = \mu x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -x_2$ ; (а)  $\mu < 0$ ; (б)  $\mu = 0$ ; (с)  $\mu > 0$ .

меняется при изменении параметра (или параметров). Например, для уравнения (5.68) точка  $x = 0$  — аттрактор при  $a < 0$  и репеллер при  $a > 0$ . Когда  $a$  возрастает, проходя через нулевое значение, то решения из убывающих превращаются в возрастающие функции от  $t$ . Говорят, что это дифференциальное уравнение имеет *точку бифуркации* при  $a = 0$ . Аналогично система

$$\dot{x}_1 = \mu x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2, \quad (5.69)$$

где  $\mu \in \mathbb{R}$ , испытывает бифуркацию при  $\mu = 0$ . Здесь возникают качественно различные фазовые портреты при  $\mu < 0$ ,  $\mu = 0$  и  $\mu > 0$ , как это показано на рис. 5.22. Для любого

$\mu < 0$  фазовый портрет является устойчивым узлом; для  $\mu = 0$  — это фазовый портрет непростой неподвижной точки (см. рис. 2.6(b)); для любого  $\mu > 0$  фазовый портрет — седло.

**Пример 5.5.1.** Найти различные качественные типы фазовых портретов для однопараметрической системы

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2), \quad \dot{x}_2 = x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2) \quad (5.70)$$

при изменении  $\mu$  от  $-\infty$  до  $+\infty$ .

**Решение.** Систему (5.70) можно упростить, введя полярные координаты  $r, \theta$ . Получим

$$\dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\theta} = 1. \quad (5.71)$$

При  $\mu < 0, \dot{r} = 0$  при  $r = 0$ ; в противном случае  $\dot{r} < 0$ . Таким образом, все фазовые портреты — это закручивающиеся

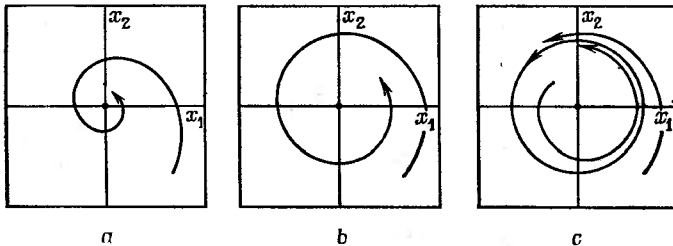


Рис. 5.23. Фазовые портреты системы с параметром (5.70): (a)  $\mu < 0$ ; (b)  $\mu = 0$ ; (c)  $\mu > 0$ .

вокруг начала координат спирали. При  $\mu = 0, \dot{r} = -r^3$ , так что портрет качественно такой же. Спирали закручиваются вокруг начала с малой скоростью (в линеаризованной системе при  $\mu = 0$  мы имеем центр). Но при  $\mu > 0$  начало координат уже неустойчиво, так как  $\dot{r} > 0$  при  $0 < r < \sqrt{\mu}$ . Функции  $r(t) \equiv \sqrt{\mu}, \theta(t) = t$  дают решение системы (5.71), так что окружность  $r = \sqrt{\mu}$  является замкнутой орбитой. При  $r > \sqrt{\mu}, \dot{r} < 0$ ; следовательно, эта замкнутая орбита — устойчивый предельный цикл, и траектории закручиваются вокруг него с обеих сторон.

Различные качественные типы фазовых портретов показаны на рис. 5.23. Мы заключаем, что система (5.70) претерпевает бифуркацию при  $\mu = 0$ .

Заметим, что собственные значения линеаризации системы (5.70) в начале координат равны  $\mu \pm i$  и становятся чисто мнимыми при критическом значении  $\mu = 0$ . При  $\mu > 0$  система (5.70) имеет предельный цикл, который возникает из неподвижной точки и постепенно увеличивается в размерах

при возрастании  $\mu$ . Это пример так называемой бифуркации Хопфа <sup>1)</sup>. Сейчас мы укажем достаточные условия для такого появления цикла.

### 5.5.2. БИФУРКАЦИЯ ХОПФА

**Теорема 5.5.1.** Пусть система с параметром

$$\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \mu), \quad \dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, \mu) \quad (5.72)$$

имеет неподвижную точку в начале координат при всех значениях действительного параметра  $\mu$ . Кроме того, предположим, что собственные значения линеаризованной системы  $\lambda_1(\mu)$ ,  $\lambda_2(\mu)$  являются чисто мнимыми при  $\mu = \mu_0$ . Если для действительной части собственных значений  $\text{Re}[\lambda_1(\mu)]$ ,  $\{\text{Re}[\lambda_2(\mu)]\}$  выполняется условие  $(d/d\mu) \{\text{Re}[\lambda_1(\mu)]\}|_{\mu=\mu_0} > 0$  и начало координат — асимптотически устойчивая неподвижная точка при  $\mu = \mu_0$ , то

- (а)  $\mu = \mu_0$  является точкой бифуркации для системы;
- (б) существует интервал  $(\mu_1, \mu_0)$ ,  $\mu_1 < \mu_0$ , такой, что при  $\mu \in (\mu_1, \mu_0)$  начало координат является устойчивым фокусом;
- (в) существует интервал  $(\mu_0, \mu_2)$ ,  $\mu_2 > \mu_0$ , такой, что при  $\mu \in (\mu_0, \mu_2)$  начало координат — неустойчивый фокус, окруженный предельным циклом, размер которого растет с возрастанием  $\mu$ .

Отличительной чертой бифуркации Хопфа является изменение характера устойчивости неподвижной точки, сопровождаемое возникновением предельного цикла. Теорема 5.5.1 указывает явные условия для того, чтобы при  $\mu = \mu_0$  возникла подобная бифуркация. Математические методы, необходимые для доказательства теоремы, превышают возможности этой книги (см. Марсден и Мак-Кракен, 1976). В противоположность этому технику применения теоремы мы здесь обсудим.

**Теорема 5.5.2.** Доказать, что система с параметром

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mu x_1 - 2x_2 - 2x_1(x_1^2 + x_2^2)^2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + \mu x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2)^2 \end{aligned} \quad (5.73)$$

испытывает в начале координат бифуркацию при  $\mu = 0$ .

<sup>1)</sup> Такую бифуркацию называют также бифуркацией рождения цикла; см. название книги (Марсден, Мак-Кракен, 1976) в русском переводе. — *Прим. перев.*

**Решение.** Начало координат есть неподвижная точка системы при всех  $\mu$ . Линеаризованные уравнения имеют вид

$$\dot{x}_1 = \mu x_1 - 2x_2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 + \mu x_2; \quad (5.74)$$

собственные значения  $\lambda_1(\mu) = \lambda_2(\mu) = \mu \pm 2i$ , и, следовательно,  $\lambda_1(0) = \lambda_2(0) = \pm 2i$  при  $\mu = 0$ , как это требуется в условии теоремы.

Система (5.73) имеет сильную функцию Ляпунова

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2,$$

причем

$$\dot{V}(x_1, x_2) = -2(2x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_2^2)^2, \quad (5.75)$$

так что начало координат асимптотически устойчиво. Тогда по теореме 5.5.1 система при  $\mu = 0$  претерпевает бифуркацию, и в ней при  $\mu > 0$  возникает устойчивый предельный цикл, окружающий начало координат.

Если не удастся найти сильную функцию Ляпунова, бывает трудно установить асимптотическую устойчивость начала координат, когда  $\mu$  принимает бифуркационное значение  $\mu_0$ . Линеаризованная система никогда не позволяет определить характер этой нелинейной неподвижной точки, потому что линеаризованная система имеет в ней центр. Однако существует индекс, который иногда может все же дать возможность установить устойчивость при  $\mu = \mu_0$ . Этот индекс вычисляется следующим образом:

(а) находят линеаризацию  $\dot{x} = Ax$  в начале координат при  $\mu = \mu_0$ ;

(б) находят неособую матрицу  $M$  такую, что

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} 0 & |\omega_0| \\ -|\omega_0| & 0 \end{bmatrix} \quad (5.76)$$

(собственные значения матрицы  $A$  равны  $\pm i\omega_0$ );

(с) систему  $\dot{x}_1 = X_1(x_1, x_2, \mu_0)$ ,  $\dot{x}_2 = X_2(x_1, x_2, \mu_0)$  с помощью замены переменных  $x = My$  преобразуют к виду  $\dot{y}_1 = Y_1(y_1, y_2)$ ,  $\dot{y}_2 = Y_2(y_1, y_2)$ ;

(д) вычисляют величину

$$I = |\omega_0| (Y_{111}^1 + Y_{122}^1 + Y_{112}^2 + Y_{222}^2) + (Y_{11}^1 Y_{11}^2 - Y_{11}^1 Y_{12}^1 + Y_{11}^2 Y_{12}^2 + Y_{22}^2 Y_{12}^2 - Y_{22}^1 Y_{12}^1 - Y_{22}^1 Y_{22}^2), \quad (5.77)$$

где  $Y_{jk}^i = \frac{\partial^2 Y_i}{\partial y_j \partial y_k}(0, 0)$  и  $Y_{lkl}^i = \frac{\partial^3 Y_i}{\partial y_l \partial y_k \partial y_l}(0, 0)$ .

Если индекс  $I$  отрицателен, то начало координат асимптотически устойчиво<sup>1)</sup>.

**Пример 5.5.3.** Показать, что уравнение

$$\ddot{x} + (x^2 - \mu)\dot{x} + 2x + x^3 = 0 \quad (5.78)$$

имеет точку бифуркации при  $\mu = 0$  и имеет колеблющиеся решения при  $\mu > 0$ .

**Решение.** Соответствующая система первого порядка имеет вид

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -(x_1^2 - \mu)x_2 - 2x_1 - x_1^3. \quad (5.79)$$

Она имеет неподвижную точку в начале координат. Собственные значения линеаризованной системы  $\lambda = [\mu \pm \sqrt{\mu^2 - 8}]/2$ ; при  $\mu = 0$  они чисто мнимые и  $(d/d\mu)[\operatorname{Re} \lambda]_{\mu=0} = \frac{1}{2}$ . Линеаризация системы (5.79) имеет вид

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & \mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad (5.80)$$

так что матрица коэффициентов еще не подготовлена к вычислению индекса  $I$ .

Матрица  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$  обладает следующим свойством:

$$M^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix},$$

так что пункт (b) выполнен. Замена переменных  $x = My$  при  $\mu = 0$  преобразует систему (5.79) в

$$\dot{y}_1 = \sqrt{2}y_2, \quad \dot{y}_2 = -\sqrt{2}y_1 - y_1^2y_2 - y_1^3/\sqrt{2}, \quad (5.81)$$

и по (5.77) получаем  $I = -2\sqrt{2}$ .

Таким образом, для системы (5.79) при  $\mu > 0$  возникает устойчивый предельный цикл, окружающий неустойчивую неподвижную точку в начале координат. Система (5.79) дает представление решений (5.78) на фазовой плоскости, и из существования замкнутой траектории следует колебательный характер  $x(t)$  при некоторых  $\mu > 0$ .

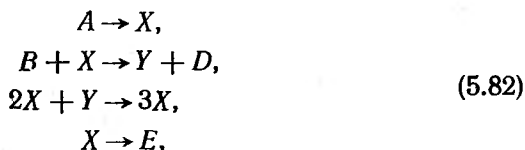
<sup>1)</sup> Доказательство этого факта, а также более подробные сведения о характере устойчивости неподвижной точки, в которой линеаризация имеет центр, — см. в книге (Брюно, 1979\*). — *Прим. перев.*



**5.5.3. ОДНО ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРЕМЫ О БИФУРКАЦИИ ХОПФА**

Лефевр и Николис (1971) рассмотрели простую модель колебательных процессов в химических системах.

Они исследуют последовательность химических реакций



причем считается, что обратимыми реакциями можно пренебречь и что концентрации веществ  $A, B, D, E$  постоянны.

Уравнения химической кинетики имеют вид

$$\dot{X} = a - (b + 1)X + X^2Y, \quad \dot{Y} = bX - X^2Y, \quad (5.83)$$

где  $a$  и  $b$  — некоторые положительные постоянные. Существует единственная неподвижная точка  $P$  с координатами  $(a, b/a)$ . Линеаризация системы (5.83) в точке  $P$  имеет матрицу коэффициентов

$$\left[ \begin{array}{cc} 2XY - b - 1 & X^2 \\ b - 2XY & -X^2 \end{array} \right] \Big|_{(a, b/a)} = \left[ \begin{array}{cc} b - 1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{array} \right]. \quad (5.84)$$

Определитель этой матрицы равен  $a^2$ , так что устойчивость точки  $P$  определяется следом. Неподвижная точка устойчива при  $a^2 + 1 > b$  и неустойчива при  $a^2 + 1 < b$ .

Чтобы применить теорему о бифуркации Хопфа, мы введем локальные координаты  $x_1 = X - a$ ,  $x_2 = Y - b/a$  и получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (b - 1)x_1 + a^2x_2 + 2ax_1x_2 + \frac{b}{a}x_1^2 + x_1^2x_2, \\ \dot{x}_2 &= -bx_1 - a^2x_2 - 2ax_1x_2 - \frac{b}{a}x_1^2 - x_1^2x_2. \end{aligned} \quad (5.85)$$

Мы можем рассматривать (5.85) как систему с параметром  $b$ , считая  $a$  фиксированным. Действительная часть собственных значений равна  $\frac{1}{2}(b - a^2 - 1)$  для  $(a - 1)^2 < b < (a + 1)^2$ , так что

$$\frac{d}{db} \left[ \frac{1}{2}(b - a^2 - 1) \right] = \frac{1}{2}$$

при критическом значении  $b = a^2 + 1$ .

Единственное, что осталось проверить, — это устойчивость неподвижной точки  $P$  при  $b = a^2 + 1$ . Матрица

$$M = \begin{bmatrix} a^2 & 0 \\ -a^2 & a \end{bmatrix}$$

удовлетворяет равенству

$$M^{-1} \begin{bmatrix} b-1 & a^2 \\ -b & -a^2 \end{bmatrix} M = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}, \quad (5.86)$$

и преобразование  $x = My$  приводит систему (5.85) к виду

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= ay_2 + (1-a^2)ay_1^2 + 2a^2y_1y_2 - a^4y_1^3 + a^3y_1^2y_2, \\ \dot{y}_2 &= -ay_1. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Теперь можно вычислить индекс устойчивости для системы (5.87), и, так как только  $Y_{111}^1$  и  $Y_{11}^1Y_{12}^1$  не равны нулю,  $I = -2a^5 - 4a^3$ . Отсюда следует, что при бифуркации, когда

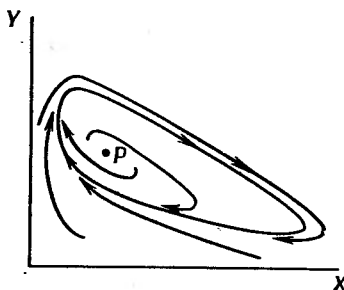


Рис. 5.24. Предельный цикл системы (5.83) при  $a = 1$ ,  $b = 3$ .

величина  $b$  проходит, возрастая, через критическое значение  $1 + a^2$ , в системе (5.83) возникает устойчивый предельный цикл, окружающий точку  $P$ . Пример типичного фазового портрета дан на рис. 5.24.

## 5.6. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РОСТА ОПУХОЛИ

В последнее время теория бифуркации дифференциальных уравнений привлекает большой интерес и дает новые возможности для построения математических моделей. В этом параграфе мы рассмотрим одну модель, которая особенно хорошо иллюстрирует характер таких моделей. Она касается реакции иммунной системы животного на постороннюю ткань (в нашем случае — опухоль). Эта модель, построенная Решиньо и Де Лизи (1977), подробно представлена в обзоре Свана (1977); мы здесь дадим только ее краткое описание.

### 5.6.1. ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Клетки опухоли содержат особые вещества (антигены), которые вызывают резкую иммунную реакцию у больного животного. Эта реакция состоит в том, что производятся клет-

ки — лимфоциты, которые атакуют и уничтожают клетки опухоли.

Модель оперирует следующими переменными (во всех случаях имеется в виду размер названной популяции клеток):

- (а)  $L$  — свободные лимфоциты на поверхности опухоли;
- (б)  $C$  — опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности;
- (в)  $C_s$  — опухолевые клетки на поверхности опухоли;
- (г)  $\bar{C}$  — опухолевые клетки на поверхности опухоли, не связанные лимфоцитами;
- (д)  $C_f$  — опухолевые клетки внутри опухоли и на ее поверхности, не связанные лимфоцитами.

Из этих определений немедленно следует, что

$$C = C_f - \bar{C} + C_s. \quad (5.88)$$

Предполагается, что шарообразная форма опухоли не меняется, так что

$$C_s = K_1 C^{2/3}, \quad (5.89)$$

где  $K_1$  — постоянная, и что взаимодействие опухолевых клеток с лимфоцитами происходит только на поверхности опухоли. Не все опухолевые клетки подвержены действию лимфоцитов, поэтому только в части случаев, когда встречаются опухолевая клетка и свободный лимфоцит, происходит связывание. Будем считать, что между количеством свободных и связанных лимфоцитов выполняется соотношение

$$C_s - \bar{C} = K_2 \bar{C} L, \quad (5.90)$$

где  $K_2$  — некоторая постоянная. Из (5.88) и (5.89) следует, что

$$C_f = C - K_1 K_2 L C^{2/3} / (1 + K_2 L) \quad (5.91)$$

и

$$\bar{C} = K_1 C^{2/3} / (1 + K_2 L). \quad (5.92)$$

Из этих равенств следует, что переменные  $L$  и  $C$  можно взять за основные переменные модели.

Предполагается, что величина  $L/L$  для популяции лимфоцитов состоит из двух слагаемых:

(а) постоянного уровня смертности  $\lambda_1$ ;

(б) уровня стимуляции  $\alpha_1 \bar{C} (1 - L/L_M)$ .

Выражение (б) показывает, что, когда  $L$  мало, стимуляция свободных лейкоцитов возрастает линейно с ростом  $\bar{C}$  и что существует максимальный размер популяции  $L_M$ , при котором уровень стимуляции обращается в нуль. Таким образом,  $L$  удовлетворяет уравнению

$$\dot{L} = -\lambda_1 L + \alpha_1 \bar{C} L (1 - L/L_M). \quad (5.93)$$

Скорость роста популяции опухолевых клеток дается уравнением

$$\dot{C} = \lambda_2 C_f - \alpha_2 \bar{C} L. \quad (5.94)$$

Первый член правой части уравнения (5.94) описывает рост опухоли, не подвергающейся атакам лимфоцитов, а второй член учитывает взаимодействие свободных лимфоцитов с опухолевыми клетками на поверхности опухоли.

Подсчитывая значения  $\bar{C}$  и  $C_f$  из уравнений (5.91) и (5.92), мы можем переписать (5.93) и (5.94) в виде

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda_1 x + \alpha_1 x y^{2/3} \left(1 - \frac{x}{c}\right) / (1+x), \\ \dot{y} &= \lambda_2 y - \alpha_2 x y^{2/3} / (1+x), \end{aligned} \quad (5.95)$$

где

$$x = K_2 L, \quad c = K_2 L_M, \quad y = K_2 C,$$

а  $\lambda_1, \lambda_2, \alpha_1, \alpha_2$  — положительные параметры. Так как  $x$  и  $y$  — размеры популяций, они должны быть неотрицательными, а  $x$  не может превышать  $c$ , поскольку  $L$  ограничено сверху величиной  $L_M$ .

Теперь мы перейдем к изучению качественных следствий из динамических уравнений (5.95) и постараемся построить для этой системы фазовые портреты, возникающие для разных областей изменения параметров.

### 5.6.2. АНАЛИЗ ДИНАМИКИ

Легко видеть, что система (5.95) имеет седло в начале координат при всех значениях параметров; это следует из теоремы о линеаризации. Положительные полуоси  $x$  и  $y$  — траектории системы; они являются сепаратрисами седла.

Чтобы исследовать нетривиальные неподвижные точки, мы запишем систему (5.95) в виде

$$\dot{x} = x f(x, y), \quad \dot{y} = y^{2/3} g(x, y), \quad (5.96)$$

где

$$f(x, y) = -\lambda_1 + \alpha_1 y^{2/3} \left(1 - \frac{x}{c}\right) / (1+x), \quad (5.97)$$

а

$$g(x, y) = \lambda_2 y^{1/3} - \alpha_2 x / (1+x). \quad (5.98)$$

Уравнения для неподвижных точек имеют вид

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0,$$

из них следует, что

$$y^{2/3} = \frac{\lambda_1}{\alpha_1} \left( \frac{1+x}{1-(x/c)} \right) = \left( \frac{\alpha_2}{\lambda_2} \frac{x}{1+x} \right)^2.$$

так что  $x$  — координаты нетривиальных неподвижных точек — удовлетворяют уравнению

$$\psi(x) = \frac{x^2(1 - (x/c))}{(1+x)^3} = \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\alpha_1 \alpha_2^2}. \quad (5.99)$$

Функция  $\psi(x)$  имеет единственный глобальный максимум при  $x^* = 2c/(c+3)$ , причем  $\psi(x^*) = 4c^2/27(c+1)^2$ . Положим теперь

$$\mu_1 = \frac{\lambda_1 \lambda_2^2}{\alpha_1 \alpha_2^2} - \frac{4c^2}{27(c+1)^2}. \quad (5.100)$$

Уравнение (5.99)

- (а) не имеет действительных корней при  $\mu_1 > 0$ ;
- (б) имеет ровно один корень  $x = x^*$  при  $\mu_1 = 0$ ;
- (с) имеет ровно два корня  $x_1^*$  и  $x_2^*$  с  $0 < x_1^* < 2c/(c+3) < x_2^* < c$  при  $\mu_1 < 0$ .

Геометрически случаи (а), (б), (с) соответствуют характеру пересечения кривых  $f(x, y) = 0$  и  $g(x, y) = 0$ , показанному на рис. 5.25.

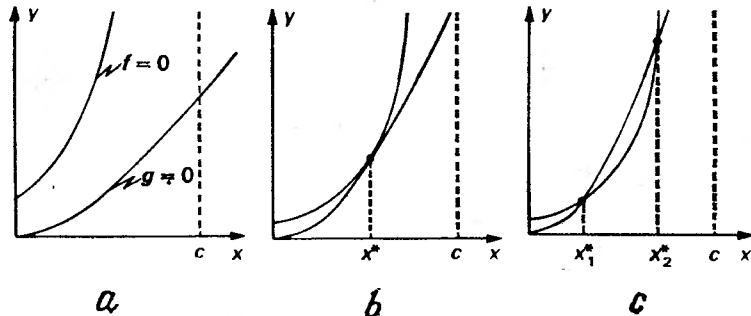


Рис. 5.25. Уравнение  $f(x, y) = 0$  определяет кривую, выпуклую вниз и имеющую асимптоту  $x = c$ ; кривая  $g(x, y) = 0$  имеет асимптоту  $y = (\alpha_2/\lambda_2)^2$ . Возможные взаимные расположения этих кривых показаны на рисунках: (а)  $\mu_1 > 0$ ; (б)  $\mu_1 = 0$ ; (с)  $\mu_1 < 0$ .

Рассмотрим теперь фазовый портрет для каждого из этих случаев:

(а)  $\mu_1 > 0$

Не существует нетривиальных неподвижных точек. Если вспомнить, что начало координат — седло, и учесть знаки  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$ , то можно нарисовать фазовый портрет (см. рис. 5.26).

Заметим, что  $y \rightarrow \infty$  при  $t \rightarrow \infty$  для всех начальных состояний популяций. Это соответствует неконтролируемому росту опухоли.

(b)  $\mu_1 = 0$

Существует единственная нетривиальная неподвижная точка  $(x^*, y^*)$ , где  $x^* = 2c/(c+3)$ . Матрица коэффициентов

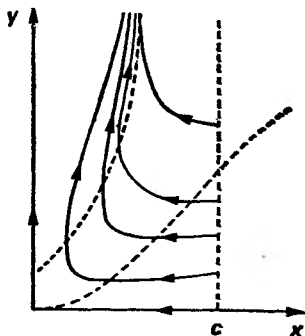


Рис. 5.26. Фазовый портрет (5.95) при  $\mu_1 > 0$ . Все траектории асимптотически стремятся к  $x=c$  при  $t \rightarrow \infty$ .

линеаризованной системы равна

$$W = \begin{bmatrix} x f_x & x f_y \\ y^{2/3} g_x & y^{2/3} g_y \end{bmatrix} \Big|_{(x^*, y^*)}, \quad (5.101)$$

так как  $f(x^*, y^*) = g(x^*, y^*) = 0$ . Мы здесь пользуемся обозначениями

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad g_x = \frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{и} \quad g_y = \frac{\partial g}{\partial y}.$$

Получаем

$$\det W = x^* y^{2/3} (f_x g_y - f_y g_x) \Big|_{(x^*, y^*)}. \quad (5.102)$$

Но на рис. 5.25(b) видно, что при  $\mu_1 = 0$  наклоны кривых  $f(x, y) = 0$  и  $g(x, y) = 0$  в точке  $(x^*, y^*)$  одинаковы. Отсюда следует, что

$$\frac{f_x}{f_y} \Big|_{(x^*, y^*)} = \frac{g_x}{g_y} \Big|_{(x^*, y^*)}, \quad (5.103)$$

так что  $\det W = 0$ . В этом случае  $(x^*, y^*)$  — непростая неподвижная точка, и мы не можем определить ее характера с помощью линеаризации.

Мы вернемся к исследованию точного характера этой неподвижной точки позднее. Однако глобальный характер фа-

зового портрета при  $\mu = 0$ , очевидно, таков, что для большинства начальных состояний (площадь области устойчивости для точки  $(x^*, y^*)$  конечна) возникнет неконтролируемый рост опухоли.

(с)  $\mu_1 < 0$

Существуют две нетривиальные неподвижные точки  $P_1 = (x_1^*, y_1^*)$  и  $P_2 = (x_2^*, y_2^*)$ , причем  $0 < x_1^* < x^* < x_2^* < c$ , где  $x^* = 2c/(c+3)$ .

Если  $W_i$  ( $i = 1, 2$ ) — матрицы коэффициентов линеаризованной системы в точках  $(x_i^*, y_i^*)$ , то формулы (5.97), (5.98) и (5.102) дают

$$\det W_i = \left\{ \alpha_1 \lambda_2 x y^{2/3} \left( \frac{2c}{x} - c - 3 \right) / (3c(1+x)^2) \right\} \Big|_{(x_i^*, y_i^*)}. \quad (5.104)$$

Отсюда следует, что  $\det W_1$  положителен, а  $\det W_2$  отрицателен. Мы можем сразу заключить, что точка  $P_2$  является сед-

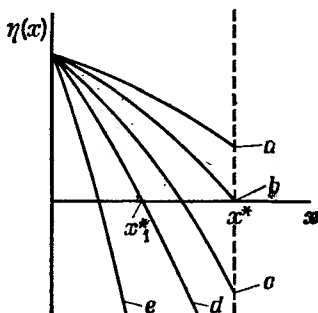


Рис. 5.27. Возможные графики функции  $\eta(x)$ . Заметим, что  $\text{tr}(W_1) = \eta(x_1^*)$  положительно для кривых (a) — (c), равно нулю для (d) и отрицательно для (e).

лом, а устойчивость или неустойчивость  $P_1$  определяется знаком  $\text{tr} W_1$ . Если вычислить матрицу (5.101) в точке  $(x_1^*, y_1^*)$ , получим

$$\begin{aligned} \text{tr} W_1 &= (x f_x + y^{2/3} g_y) \Big|_{(x_1^*, y_1^*)} = \\ &= \frac{\lambda_2}{3} \left\{ 1 - 3 \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left( \frac{1+c}{c} \right) \frac{x}{(1+x)(1-x/c)} \right\} \Big|_{x_1^*} = \eta(x_1^*); \quad (5.105) \end{aligned}$$

здесь для исключения  $y$  мы использовали равенство (5.97). Функция  $x \{ (1+x)(1-x/c) \}^{-1}$  строго возрастает на интервале  $(0, c)$ , и, следовательно,  $\eta(x)$  является строго убывающей функцией переменной  $x$  на интервале  $(0, x^*)$  (напомним,

что  $0 < x^* < c$ ). Для  $\text{tr } W_1 = \eta(x_1^*)$  могут возникать разные возможности, как это видно на рис. 5.27.

Заметим, что из  $\eta(x^*) \geq 0$  следует,  $\eta(x_1^*) > 0$  (кривые (а) и (б)), в то время как в случае  $\eta(x^*) < 0$  значение  $\eta(x_1^*)$  может быть положительным (кривая (с)), нулевым (кривая (d)) или отрицательным (кривая (е)). Мы можем следующим образом истолковать полученный результат в терминах параметров изучаемой модели. Если  $x = x^* = 2c/(c+3)$ , то

$$\eta(x^*) = \frac{\lambda_2}{3} \left\{ 1 - \left( \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \right) \left( \frac{2(c+3)}{c+1} \right) \right\}. \quad (5.106)$$

Величина (5.106) обращается в нуль (кривая (б) на рис. 5.27) при  $\lambda_1/\lambda_2 = (c+1)/(2(c+3))$ . Положим теперь

$$\mu_2 = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{(c+1)}{2(c+3)}.$$

Тогда получим, что

(а) если  $\mu_2 \leq 0$ , то  $\eta(x^*) \geq 0$  и  $\text{tr } W_1 = \eta(x_1^*) > 0$ , и, следовательно, точка  $P_1$  неустойчива;

(б) если  $\mu_2 > 0$ , то знак  $\text{tr } W_1$  не определен.

Если  $\mu_2 > 0$ , то мы можем утверждать, что кривая  $\eta(x)$  имеет характер кривых (с), (d) и (е) при последовательном увеличении параметра  $\mu_2$ , начиная от нуля. Соответственно  $\text{tr } W_1 = \eta(x_1^*)$  сначала положителен, затем равен нулю и, наконец, отрицателен. Таким образом, при увеличении  $\mu_2$  от 0 до  $\infty$  (при постоянном значении  $\mu_1$ ) точка  $P_1$ , неустойчивая при  $\mu_2 = 0$ , при достаточно больших значениях  $\mu_2$  становится устойчивой.

Мы подытожим полученные результаты на рис. 5.28. На нем показана плоскость  $\mu_1, \mu_2$ , разделенная на следующие области: область А, где имеется только одна неподвижная точка в начале координат; В, где точка  $P_1$  неустойчива, и С, где точка  $P_2$  устойчива. Мы не определили форму границы между областями В и С на рис. 5.28; поэтому она показана схематически пунктирной линией.

Локальное поведение, показанное на рис. 5.28, качественно эквивалентно поведению более простой двухпараметрической системы

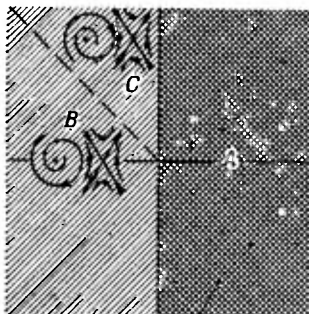
$$\dot{x} = -(\bar{\mu}_1 + y^2), \quad \dot{y} = -(x + \bar{\mu}_2 y + y^2). \quad (5.107)$$

Эту систему исследовал Такенс (1974). Основные результаты глобального исследования системы (5.107) приведены на рис. 5.29 и 5.30. Заметим, что локальные фазовые портреты в неподвижных точках на рис. 5.30(б) и (с) совпадают. Таким образом, с точки зрения локального поведения области



$B'_1$  и  $B'_2$  эквивалентны, и мы можем установить аналогию между  $A$  и  $A'$ ,  $B$  и  $B' = B'_1 \cup B'_2$ ,  $C$  и  $C'$ .

Аналогия между системами (5.95) и (5.107) распространяется не только на локальное поведение; действительно, все глобальные фазовые портреты для (5.95), полученные Сваном (1977), имеют качественные аналоги в исследовании Такенса для системы (5.107). Конечно, это не доказывает, что системы (5.95) и (5.107) качественно эквивалентны, так как



Нет нетривиальных неподвижных точек

Рис. 5.28. Итоги исследования устойчивости по линейному приближению для системы (5.95). Характер особой точки на прямой  $\mu_1 = 0$  и границы между областями  $B$  и  $C$  не могут быть определены с помощью линеаризации.

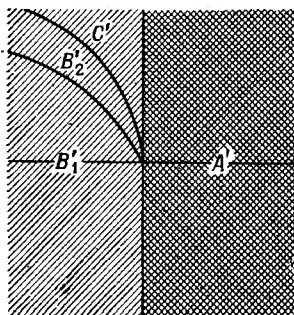


Рис. 5.29. Итоги глобального исследования системы (5.107). Плоскость  $\mu_1, \mu_2$  разбита на четыре области  $A', B'_1, B'_2, C'$ ; фазовые портреты в каждой из этих областей изображены на рис. 5.30.

исследование Свана не исчерпывает всех возможных фазовых портретов системы (5.95). Однако такая качественная эквивалентность представляется вполне возможной.

Предположение о том, что системы (5.95) и (5.107) качественно эквивалентны, влечет за собой важное следствие для системы (5.95). Такенс дал полный анализ системы (5.107), и он может послужить образцом для анализа (5.95). Например, мы могли бы предположить, что граница между  $C$  и  $B$  на рис. 5.28 определяется бифуркацией Хопфа, как это и есть для границы между  $C'$  и  $B'$  на рис. 5.29. Напомним, что линеаризация системы (5.95) имеет чисто мнимые собственные значения на границе между  $C$  и  $B$  ( $\text{tr } W_1 = 0$ ) и имеет место резкое изменение устойчивости точки  $P_1$ . Это как раз «симптомы» бифуркации Хопфа. Предельный цикл, характерный для этой бифуркации, также возникает в исследовании Свана.

В работе Свана не упомянуто, какая бифуркация происходит на границе между областями  $B'_2$  и  $B'_1$  на рис. 5.29, но

из гипотезы о качественной эквивалентности вытекает ее существование. При убывании  $\mu_2$  (при фиксированном  $\mu_1 < 0$ ), мы можем ожидать возникновения предельного цикла на границе между  $B$  и  $C$  обусловленного бифуркацией Хопфа; затем предельный цикл должен увеличиваться до тех пор, пока он не дойдет до седла  $P_2$ . Тогда должна произойти следую-

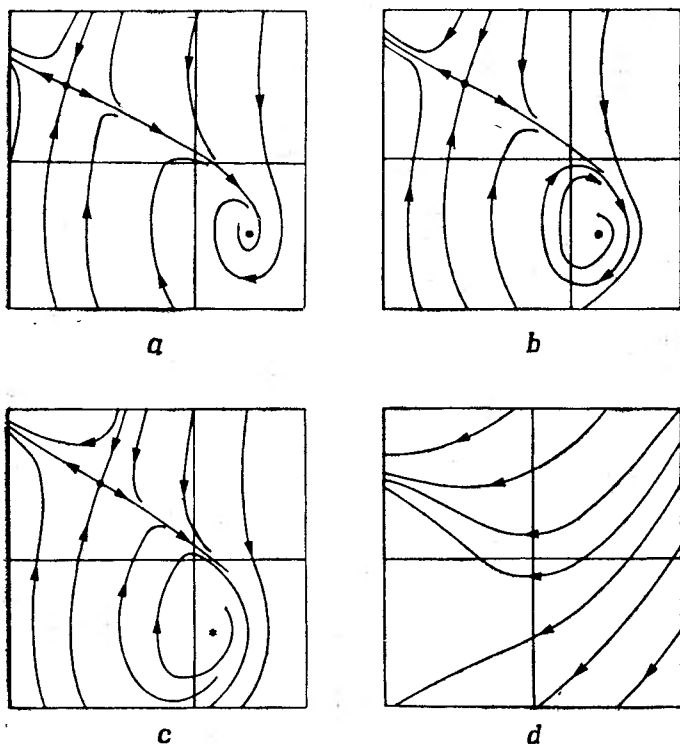


Рис. 5.30. Фазовые портреты для системы (5.107), когда точка  $(\bar{\mu}_1, \bar{\mu}_2)$  находится в областях: (а)  $C'$ ; (б)  $B_2'$ ; (в)  $B_1'$ ; (д)  $A'$ .

щая бифуркация и ограниченные колебания, возникающие при наличии цикла, должны смениться неконтролируемым ростом опухоли (см. рис. 5.30(c)). Наконец, качественная эквивалентность систем (5.95) и (5.107) позволила бы нам исследовать характер неподвижной точки в начале координат для системы (5.95),  $\mu_1 = 0$ . Классификация Такенса содержит все такие «вырожденные» случаи для системы (5.107). Например, при  $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0$  непростая неподвижная точка системы (5.107) в начале координат имеет фазовый портрет, изображенный на рис. 5.31. Этот портрет эквивалентен порт-

рету, полученному Сваном для нетривиальной неподвижной точки  $(x^*, y^*)$  системы (5.95).

Все четыре фазовых портрета, показанных на рис. 5.30, реализуются и для системы (5.95) при некоторых значениях параметров  $(\mu_1, \mu_2)$ . Можно убедиться в том, что чаще всего имеет место неконтролируемый рост опухоли. Для остальных областей  $(\mu_1, \mu_2)$ , где фазовые портреты аналогичны рис. 5.30(a) или (b), неконтролируемый рост все-таки может возникнуть, если начальное состояние популяций принадлежит определенным ограниченным областям плоскости  $x, y$ .

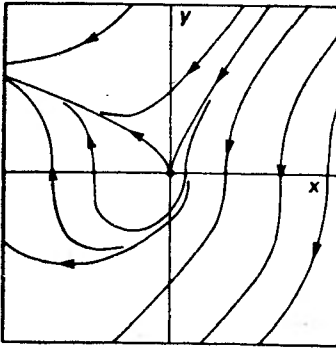


Рис. 5.31. Непростая неподвижная точка системы (5.107) при  $\bar{\mu}_1 = \bar{\mu}_2 = 0$ .

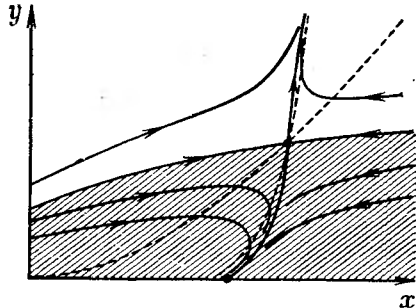


Рис. 5.32 Фазовый портрет для системы (5.108) с источником лимфоцитов. Область устойчивости для точки  $(x_0, 0)$  заштрихована.

Ключевой идеей здесь является поиск каких-либо реальных возможностей для расширения областей устойчивости. Например, Решиньо и Де Лизи (1977) рассматривают модель с источником лимфоцитов, с постоянной скоростью поступающих в систему. В этом случае динамические уравнения (5.95) заменяются уравнениями

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -\lambda_1(x - x_0) + \alpha_1 x y^{2/3} \left(1 - \frac{x}{c}\right) / (1 + x), \\ \dot{y} &= \lambda_2 y - \alpha_2 y^{2/3} x / (1 + x), \end{aligned} \quad (5.108)$$

где член  $\lambda_1 x_0$ ,  $x_0 > 0$ , соответствует источнику лимфоцитов. Система (5.108) имеет устойчивую неподвижную точку с координатами  $(x_0, 0)$ , которая соответствует полной ремиссии опухоли. Один из возможных фазовых портретов изображен на рис. 5.32. Размер области устойчивости неподвижной точки  $(x_0, 0)$  увеличивается при убывании величины  $\lambda_1 \lambda_2^2 / \alpha_1 \alpha_2^2$ . Дальнейшие подробности читатель может найти в отличном обзоре Свана (1977).

## УПРАЖНЕНИЯ

К п. 5.4

1. Показать, что функция  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  является сильной функцией Ляпунова в начале координат для каждой из следующих систем;

$$(a) \dot{x}_1 = -x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_1 - x_2^3;$$

$$(b) \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 \sin x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - x_1^2 x_2 - x_1 \sin x_1;$$

$$(c) \dot{x}_1 = -x_1 - 2x_2^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 - x_2^3;$$

$$(d) \dot{x}_1 = -x_1 \sin^2 x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_2 - x_2^5;$$

$$(e) \dot{x}_1 = -(1 - x_2)x_1, \quad \dot{x}_2 = -(1 - x_1)x_2.$$

2. Найти области устойчивости в начале координат для всех систем упр. 1

3. Показать, что функция  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  является слабой функцией Ляпунова в начале координат для следующих систем:

$$(a) \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2^3(1 - x_1^2)^2;$$

$$(b) \dot{x}_1 = -x_1 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 x_2 - x_1^2;$$

$$(c) \dot{x}_1 = -x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2;$$

$$(d) \dot{x}_1 = -x_1 + 2x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1^2 x_2^3.$$

Для каких из этих систем начало координат асимптотически устойчиво?

4. Доказать, что если  $V$  является сильной функцией Ляпунова для уравнения  $\dot{x} = -X(x)$  в некоторой окрестности начала координат, то  $x = X(x)$  имеет в начале координат неустойчивую неподвижную точку. Используя этот результат, показать, что системы

$$(a) \dot{x}_1 = x_1^3, \quad \dot{x}_2 = x_2^3;$$

$$(b) \dot{x}_1 = \sin x_1, \quad \dot{x}_2 = \sin x_2;$$

$$(c) \dot{x}_1 = -x_1^3 + 2x_1^2 \sin x_1, \quad \dot{x}_2 = x_2 \sin^2 x_2$$

в начале координат неустойчивы.

5. Доказать, что уравнения

$$(a) \ddot{x} + \dot{x} - \dot{x}^3/3 + x = 0; \quad (b) \ddot{x} + \dot{x} \sin(\dot{x}^2) + x = 0;$$

$$(c) \ddot{x} + \dot{x} + x^3 = 0; \quad (d) \ddot{x} + \dot{x}^3 + x^3 = 0$$

имеют асимптотически устойчивые нулевые решения.

6. Доказать, что функция  $V(x_1, x_2) = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$  положительно определена тогда и только тогда, когда  $a > 0$  и  $ac > b^2$ . С помощью этого критерия (или иначе) доказать, что система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 - (x_1 + 2x_2)(x_2^2 - 1)$$

асимптотически устойчива в начале координат. Рассмотреть область  $|x_2| < 1$ . Найти область устойчивости.

7. Найти области устойчивости для следующих систем, построив соответствующие функции Ляпунова:

$$(a) \dot{x}_1 = x_2 - x_1(1 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + 1),$$

$$\dot{x}_2 = -x_1 - x_2(1 - x_1^2 - x_2^2)(x_1^2 + x_2^2 + 1);$$

$$(b) \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_2 + x_2^3 - x_1^5.$$

8. Использовать функцию  $V(x_1, x_2) = (x_1/a)^2 + (x_2/b)^2$  и показать, что система

$$\dot{x}_1 = x_1(x_1 - a), \quad \dot{x}_2 = x_2(x_2 - b), \quad a, b > 0,$$

имеет асимптотически устойчивое начало координат. Показать, что все траектории стремятся к началу координат при  $t \rightarrow \infty$  в области

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1.$$

9. Пусть задана система

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_2 - x_1^3;$$

показать, что можно подобрать положительно определенную функцию вида

$$V(x_1, x_2) = ax_1^4 + bx_1^2 + cx_1x_2 + dx_2^2$$

так, что  $V(x_1, x_2)$  также будет положительно определенной. Вывести из этого, что начало координат неустойчиво.

10. Показать, что для системы

$$\dot{x}_1 = x_2^2 - x_1^2, \quad \dot{x}_2 = 2x_1x_2$$

начало координат неустойчиво; использовать функцию

$$V(x_1, x_2) = 3x_1x_2^2 - x_1^3.$$

11. Показать, что неподвижная точка в начале координат для системы

$$\dot{x}_1 = x_1^4, \quad \dot{x}_2 = 2x_1^2x_2^2 - x_2^2$$

неустойчива, применив функцию  $V(x_1, x_2) = \alpha x_1 + \beta x_2$  и подобрав соответствующим образом постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ . Проверить неустойчивость начала, исследуя поведение сепаратрис.

### К п. 5.5

12. Рассмотреть различные типы фазовых портретов, которые получаются, когда параметр  $\mu$  изменяется от  $-\infty$  до  $+\infty$ , для следующих систем:

$$(a) \dot{r} = -r^2(r + \mu), \quad \dot{\theta} = 1; \quad (b) \dot{r} = \mu r(r + \mu)^2, \quad \dot{\theta} = 1;$$

$$(c) \dot{r} = r(\mu - r)(\mu - 2r), \quad \dot{\theta} = 1; \quad (d) \dot{r} = r(\mu - r^2), \quad \dot{\theta} = 1;$$

$$(e) \dot{r} = r^2\mu, \quad \dot{\theta} = \mu, \quad (f) \dot{r} = r^2, \quad \dot{\theta} = 1 - \mu^2.$$

13. Вычислить индекс устойчивости и показать, что приведенные ниже системы являются устойчивыми в начале координат:

$$(a) \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3 + x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - x_1 x_2^2;$$

$$(b) \dot{x}_1 = x_2 - x_1^2 \sin x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_1 x_2 + 2x_1^2;$$

$$(c) \dot{x}_1 = x_2 - x_1^2 + 2x_1 x_2 + x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_1 x_2 + x_2^2.$$

14. Доказать, что при  $\mu = 0$  все написанные ниже однопараметрические системы испытывают бифуркацию Хопфа, так что возникает устойчивый предельный цикл, окружающий начало координат при  $\mu > 0$ :

$$(a) \dot{x}_1 = x_2 - x_1^3, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - x_1^2 x_2;$$

$$(b) \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 - x_1^3 \cos x_1, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2;$$

$$(c) \dot{x}_1 = \mu x_1 + x_2 + \mu x_1^2 - x_1^2 - x_1 x_2^2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + x_2^2.$$

152. Показать, что уравнение Рэля

$$\ddot{x} + \dot{x}^3 - \mu \dot{x} + x = 0$$

при  $\mu = 0$  испытывает бифуркацию Хопфа. Описать фазовые портреты при  $\mu = 0$  и в окрестности  $\mu = 0$ .

16. Доказать, что линейаризация системы

$$\dot{x}_1 = (\mu - 3)x_1 + (5 + 2\mu)x_2 - 2(x_1 - x_2)^3,$$

$$\dot{x}_2 = -2x_1 + (3 + \mu)x_2 - (x_1 - x_2)^3$$

в начале координат при  $\mu = 0$  имеет чисто мнимые собственные значения. Найти новые координаты  $y_1, y_2$ , в которых линейаризация системы имеет форму, удобную для проверки устойчивости. С помощью этой формы (или иначе) показать, что при  $\mu = 0$  система испытывает бифуркацию Хопфа и возникает устойчивый предельный цикл при  $\mu > 0$ .

17. Доказать, что однопараметрическая система

$$\dot{x}_1 = -\mu x_1 - x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1 + x_2^3$$

испытывает бифуркацию Хопфа при  $\mu = 0$  и при  $\mu > 0$  возникает неустойчивый предельный цикл вокруг начала координат,

## ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ К УПРАЖНЕНИЯМ

### К ГЛ. 1.

1. (a)  $x = 1 + t + Ce^t$ .

(b)  $x = te^t + Ce^t$ .

(c)  $x = -5e^{\cos t} \operatorname{cosec} t + C \operatorname{cosec} t, \quad (n-1)\pi < t < n\pi,$   
 $n \in \mathbb{Z}.$

2. (a)  $x = Ce^{t^2/2} \quad x > 0.$

$x = C'e^{t^2/2}, \quad x < 0.$

$x \equiv 0.$

(b)  $x = C/t, \quad t < 0.$

$x = C'/t, \quad t > 0.$

(c)  $x = \sqrt{C-t^2}, \quad -\sqrt{C} < t < \sqrt{C}.$

$x = -\sqrt{C'-t^2}, \quad -\sqrt{C'} < t < \sqrt{C'}.$

(d)  $x = \frac{c}{\operatorname{sh} t}, \quad t < 0.$

$x = \frac{C'}{\operatorname{sh} t}, \quad t > 0.$

3.  $F(t, x) = x \ln(tx).$

4. (a)  $x = \frac{1}{C-t}, \quad t < C.$

$x = \frac{1}{C'-t}, \quad t > C'.$

$x \equiv 0.$

(b)  $x = (C-t)^{-1/2}, \quad t < C; \quad x = -(C'-t)^{-1/2}, \quad t < C';$

$x \equiv 0.$

(c)  $x_1 = (1 + Ce^t)/(1 - Ce^t), \quad x < -1, \quad t > -\ln C, \quad C \in \mathbb{R}^+.$

$x = (1 - C'e^t)/(1 + C'e^t), \quad -1 < x < 1, \quad -\infty < t < +\infty,$   
 $C' \in \mathbb{R}^+.$

$x = (1 + \bar{C}e^t)/(1 - \bar{C}e^t), \quad x > 1, \quad t < -\ln \bar{C},$

$\bar{C} \in \mathbb{R}^+.$

$x \equiv -1 \quad x \equiv +1.$

$$(d) x = (t - C)^3, \quad t < C; \quad x \equiv 0, \quad C \leq t \leq C';$$

$$x = (t - C')^3, \quad C' < t.$$

$$x = (t - C)^3, \quad t < C; \quad x \equiv 0, \quad C \leq t.$$

$$x \equiv 0, \quad t < C; \quad x = (t - C)^3, \quad C \leq t.$$

$$x \equiv 0.$$

$$(e) x \equiv -1, \quad t < C - \pi/2;$$

$$x = \sin(t - C), \quad C - \pi/2 \leq t \leq C + \pi/2;$$

$$x \equiv 1, \quad t > C + \pi/2;$$

$$x \equiv 1; \quad x \equiv -1.$$

$$(f) x \equiv 0, \quad t \leq C; \quad x = (t - C)^2, \quad t > C.$$

$$x \equiv 0.$$

На последний вопрос ответ «да» как в случае (e), так и в случае (f).

$$5. 4 (d) x = (t - C)^3, \quad t \leq C;$$

$$x \equiv 0, \quad t > C,$$

удовлетворяет условию  $x(0) = 0$  для всех отрицательных  $C$ .

$$4 (f) x \equiv 0, \quad t < C;$$

$$x = (t - C)^2, \quad t > C,$$

удовлетворяет условию  $x(0) = 0$  для всех положительных  $C$ .

$$4 (e) x = \begin{cases} -1, & t < C - \pi/2, \\ \sin(t - C), & C - \pi/2 \leq t \leq C + \pi/2, \\ 1, & t > C + \pi/2, \end{cases}$$

удовлетворяет условию  $x(0) = 1$  для  $C < -\pi/2$  и  $x(0) = -1$  для  $C > \pi/2$ .

6. (a)  $\xi(-t)$  является решением.

(b)  $-\xi(t)$  является решением.

7. Если  $C = h(t_0, x_0)$ , то  $C = h(at_0, ax_0)$ ,  $\forall a \neq 0$ . В уравнении  $\dot{x} = e^{x/t}$  подстановка  $u = x/t$  дает  $\int \frac{dx}{e^x - x} = \ln t + C$ ; этот интеграл не вычисляется в элементарных функциях.

8. Выражение  $\ddot{x} = \dot{x} \frac{d}{dx}(\dot{x}) = (a - 2bx) \dot{x} (a - bx)$  позволяет найти области выпуклости и вогнутости на плоскости  $t, x$ .

$$9. \dot{y} = -ay + b; \quad y = \frac{b}{a} + Ce^{-at}.$$

11. (b), (d) и (e) — автономные уравнения; изоклины — прямые  $x = \text{const}$ .

12. (a) 1 (R); (b) -1 (A), 0 (R), 1 (A); (c) 0 (S);

(d) -1 (A); 0 (S); 2 (R); (e) — нет.

((A) — аттрактор, (R) — репеллер, (S) — шунт.)

13. {(a), (b), (f)}, {(c), (e)}, {(d)}.



14.  $\lambda \leq 0 \leftarrow \rightarrow$ ;  $\lambda > 0 (\lambda \neq 1) \leftarrow \rightarrow \rightarrow \leftarrow \rightarrow$ ;  $\lambda = 1 \leftarrow \rightarrow \rightarrow \rightarrow$ .

15. 16;  $2^{n+1}$ .

16. Уравнение  $\dot{y} = y(y - c)$  переходит в  $k\dot{x} = (kx + l)(kx + (l - c))$ ;  $k = 1$ ,  $l - c = -a$ ,  $l = -b$  или  $l - c = -b$ ,  $l = -a$ .

17. Пусть  $y = x^3 + ax - b$ . Количество действительных корней уравнения  $y = 0$  определяется следующим образом:

$$a > 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} > 0 \Rightarrow 1 \text{ корень;}$$

$$a < 0 \Rightarrow y_{\max} = -\frac{2a}{3} \sqrt{\left(-\frac{a}{3}\right)} - b, \quad y_{\min} = +\frac{2a}{3} \sqrt{\left(-\frac{a}{3}\right)} - b$$

(i)  $y_{\max} < 0 \Rightarrow 1$  корень;

(ii)  $y_{\min} > 0 \Rightarrow 1$  корень;

(iii)  $y_{\max} > 0 > y_{\min} \Rightarrow 3$  корня.

18.  $b/q$ .

19. (a)  $(0, 0)$ ,  $(c/d, a/b)$ ; (b)  $(n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ ;

(c)  $(0, 0)$ ; (d)  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2/3, 2/3)$ ;

(e)  $(n\pi, (2m + 1)\pi/2)$ ,  $m, n \in \mathbb{Z}$ .

20. (a)  $\dot{x}_1 = -x_2$ ,  $\dot{x}_2 = x_1$ ; (b)  $\dot{x}_1 = \frac{1}{2}x_2$ ,  $\dot{x}_2 = 2x_1$ ;

(c)  $\dot{x}_1 = x_1$ ,  $\dot{x}_2 = -2x_2$ ; (d)  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = x_1$ ;

(e)  $\dot{x}_1 = x_1 + x_2$ ,  $\dot{x}_2 = 2x_2$ .

21.  $\{(a), (b)\}$ ,  $\{(c), (d)\}$ ,  $\{(e)\}$ .

22. Траектории обеих систем удовлетворяют одному и тому же дифференциальному уравнению

$$\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{X_2(x_1, x_2)}{X_1(x_1, x_2)}.$$

23.  $\dot{y}_1 = y_1$ ,  $\dot{y}_2 = -y_2$ .

24. Предположите, что существует другое решение:  $(x'_1(t), x'_2(t))$ , и рассмотрите разность  $x_1 - x'_1$ ,  $x_2 - x'_2$ .

25. См. упр. 9.

26. Из инвариантности системы относительно преобразования  $x \rightarrow -x$  следует, что  $-x = X(-x)$ . Таким образом,  $X(x) = -X(-x)$  (см. упр. 6).

30. (a) Все изоклины — прямые, проходящие через точку  $(2, 1)$ . Кроме того, направление поля всегда перпендикулярно изоклине; замкнутые траектории существуют.

(b) Определите области, где  $\dot{x}_1$ ,  $\dot{x}_2$  имеют определенный знак, и рассмотрите направление траекторий. Замкнутых траекторий нет.

(с) Изоклины — прямые, проходящие через начало координат, а касательные к траекториям всегда образуют острый угол с направлениями этих прямых от начала координат. Замкнутых траекторий нет.

31. Изоклина наклона  $k$  имеет уравнение  $kx_2 + x_2 = -x_1$ . Решения

$$e^{2x_1} \left( x_2^2 + x_1 - \frac{1}{2} \right) = C.$$

32.  $\frac{x^2}{1-x^2} = Ce^{2t}.$

33. (a)  $\varphi_t(x) = \text{sh}^{-1}(e^t \text{sh } x),$

(b)  $\varphi_t(x) = x(e^t).$

34. (a)  $x_1(t) = e^t x_1(0), \quad x_2(t) = \frac{e^t x_1(0)}{2} + e^{-t} \left[ x_2(0) - \frac{x_1(0)}{2} \right]$  для всех  $t$ .

(b)  $x_2(t) = \frac{1}{[1/x_2(0)] - t}$ ; это значение  $x_2$  надо подставить в уравнение

$$\dot{x}_1 = x_1 x_2, \quad t < \frac{1}{x_2(0)}, \quad t > \frac{1}{x_2(0)}.$$

36. Для  $x_0 > 0$ ,  $\ln \left( \frac{x}{x_0} \right) = \frac{t^2}{2} - \frac{t_0^2}{2}$ ;

здесь использованы начальные условия. Для  $x_0 = 0$ ,  $x \equiv 0$ .

## К ГЛ. 2

2. {(a)}, {(b), (f)}, {(c), (d)}, {(e)}.

3.  $J, M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix};$   
 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}.$

4.  $J, M = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}; \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 41 & -1 \\ 58 & 0 \end{bmatrix};$   
 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 & -1/3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}.$

5.  $\dot{y}_1 = -y_1, \quad \dot{y}_2 = -2y_2 - 3y_3, \quad \dot{y}_3 = -2y_2 - 4y_3.$

6. Подобные матрицы имеют одинаковые собственные значения. Проверьте, что жордановы матрицы предложения 2.2.1 однозначно определяются своими собственными значениями в случаях (a) и (b). Подобны ли матрицы  $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$  и  $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ ?

8. Примените результаты упр. 4, получите канонические системы, решите их и сделайте преобразование  $x = My$ .

11.  $\dot{x}_1 = -\frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2$ ;  $\dot{x}_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2$ .

12.  $x_1(t) = (2e^{-2t} - e^{-3t})x_1(0) + (e^{-3t} - e^{-2t})x_2(0)$ ;

$x_2(t) = (2e^{-2t} - 2e^{-3t})x_1(0) + (-e^{-2t} + 2e^{-3t})x_2(0)$ .

Имеем  $y = 4e^{-2t} = x_1 + 3x_2$ . Приравняем друг другу коэффициенты при  $e^{-2t}$  и  $e^{-3t}$  в левой и правой частях и получим совместные уравнения для  $x_1(0)$  и  $x_2(0)$  [ $x_1(0) = x_2(0) = 1$ ].

13. (а) неустойчивый узел; (б) седло; (с) центр; (д) устойчивый фокус; (е) неустойчивый вырожденный узел.

14.  $x_1 = y_1 + 3y_2$ ,  $x_2 = 2y_1 + 4y_2$ ;  $\dot{y}_1 = -y_1$ ,  $\dot{y}_2 = -3y_2$ .

15. Линейные преобразования непрерывны, так что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (Nx(t)) = N \left( \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \right).$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} Nx(t) = N \left( \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) \right) = NO = 0.$$

Если система  $\dot{x} = Ax$  имеет устойчивую неподвижную точку в  $O$ , то  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  для всех траекторий  $x(t)$  и, следовательно,  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 0$  для всех траекторий системы  $\dot{y} = NAN^{-1}y$ .

16. Если  $y(t) = Nx(t)$ , то  $\lim_{t \rightarrow -\infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow -\infty} Nx(t) = 0$ . Если точка  $O$  — седло, то существуют две траектории  $x(t)$  и  $x'(t)$  такие, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} x'(t) = 0$ . Соответствующие траектории  $y(t) = Nx(t)$ ,  $y'(t) = Nx'(t)$  удовлетворяют условиям  $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} y'(t) = 0$ .

Из всех неподвижных точек линейных систем только седло обладает таким свойством.

17. Линейное преобразование сохраняет прямые; поэтому либо  $y_1 = ax_1$ ,  $y_2 = dx_2$ , либо  $y_1 = bx_2$ ,  $y_2 = cx_1$ . Далее

$$y_2 = C'y_1^{\mu'} \Rightarrow x_2 = \frac{C'a^{\mu'}}{d} x_1^{\mu'} \Rightarrow g = \mu';$$

$$y_2 = C'y_1^{\mu'} \Rightarrow x_2 = \frac{C'b^{\mu'}}{c} x_2^{\mu'} \Rightarrow \mu = \frac{1}{\mu'}.$$

18. Если  $\lambda_2 k = \lambda_1$ , то  $\dot{y}_1 = \lambda_1 y_1$ ,  $\dot{y}_2 = \lambda_1 y_2$ ; эта система качественно эквивалентна системе  $\dot{y}_1 = \varepsilon y_1$ ,  $\dot{y}_2 = \varepsilon y_2$ , где  $\varepsilon = \text{sign}(\lambda_1)$ .

20. (а)  $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ; (б)  $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ; (с)  $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ ; (д)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ .

21. (а)  $\begin{bmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$ ; (б)  $\begin{bmatrix} e^t & 2e^t(e^t - 1) \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$ ;

(с)  $\frac{e^{6t}}{7} \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \frac{e^{-t}}{7} \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$ ;

$$(d) \frac{e^{-2t}}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \sqrt{2} \cos \beta t & \sin \beta t \\ -2 \sin \beta t & \sqrt{2} \cos \beta t \end{bmatrix}, \quad \beta = 2\sqrt{2};$$

$$(e) e^{-3t} \begin{bmatrix} 1-t & t \\ -t & 1+t \end{bmatrix}.$$

$$22. (a) \frac{e^{-t}}{4} \begin{bmatrix} 7 & -7 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} + \frac{e^{-5t}}{4} \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ -3 & 7 \end{bmatrix};$$

$$(b) e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 2t - \sin 2t & 2 \sin 2t \\ -\sin 2t & \cos 2t + \sin 2t \end{bmatrix}.$$

$$23. y_1 = x_1, \quad y_2 = x_3, \quad y_3 = x_2, \quad y_4 = x_4.$$

$$24. \frac{(P+Q)^k}{k!} = \sum_{l=0}^k \frac{1}{l!(k-l)!} P^l Q^{k-l}.$$

$$25. (a) C^2 = 0; \quad e^{At} = e^{\lambda_0 t} (I + tC).$$

$$(b) e^{atI} = e^{at} I.$$

$$e^{\beta t D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} (\beta t)^{2n} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} (\beta t)^{2n+2} D,$$

$$D = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

26. Характеристическое уравнение матрицы  $A$  имеет вид

$$\lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) \lambda + \lambda_1 \lambda_2 = 0,$$

где  $\lambda_1, \lambda_2$  — собственные значения. Теорема Кэли — Гамильтона утверждает, что

$$A^2 - (\lambda_1 + \lambda_2) A + \lambda_1 \lambda_2 I = 0, \quad (1)$$

так что

$$(A - \lambda_1 I)(A - \lambda_2 I) = 0.$$

Величину  $(A - \lambda_1 I)^2$  можно найти, раскрывая скобки и подставляя  $A^2$  из (1).

27. Покажите, что  $e^{At} = e^{\lambda_0 t} e^{Qt}$  и  $Q^3 = 0$ . Воспользуйтесь при этом формулой

$$e^{At} = e^{\lambda_0 t} \left[ I + tQ + \dots + \frac{t^{n-1} Q^{n-1}}{(n-1)!} \right].$$

$$28. (a) y_1 = x_1 + 1, \quad y_2 = x_2 + 1; \quad (d) y_1 = x_1 + \frac{1}{4}, \quad y_2 = x_2 - \frac{1}{2};$$

$$(e) y_1 = x_1 - 1/3, \quad y_2 = x_2 + 5/3, \quad y_3 = x_3 + 1/3.$$

$$29. x(x) = \left\{ \frac{1}{2}(a-b) + \frac{1}{2}t \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + \left\{ \frac{1}{2}e^{2t}(a+b) - \frac{1}{4}(1-e^{2t}) \right\} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

30. Если  $x = My$ , то  $\dot{x} = Ax + h$  переходит в  $\dot{y}(t) = M^{-1}AMy(t) + M^{-1}h(t)$ . Если  $A$  имеет действительные различные собственные значения  $\lambda_1, \lambda_2$ , то матрицу  $M$  надо выбрать так, чтобы

$$M^{-1}AM = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}.$$

Нет; если  $h(t) \neq 0$ , то  $M^{-1}h(t) \neq 0$ .

31. (а) Сведите к линейной системе; (б) используйте изоклины.  
32. Например,

$$M = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{и} \quad a=1, \quad b=2, \quad c=3.$$

На плоскости  $y_1, y_2$  неустойчивый фокус. На оси  $y_3$  репеллер.

33.  $x_2 = 5e^{2t} - (4t + 5)e^t$ ,  $x_2 = 2e^{2t} - 2e^t$ ,  $x_3 = e^{2t}$ .

34.  $e^{At} =$

$$(a) \quad e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2} & \frac{t^3}{6} \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

$$(b) \quad \left[ \begin{array}{cc|cc} e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ \hline & 0 & & e^{\lambda t} \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right].$$

$$(c) \quad \left[ \begin{array}{cc|cc} e^{\alpha t} \begin{bmatrix} \cos \beta t & -\sin \beta t \\ \sin \beta t & \cos \beta t \end{bmatrix} & & & 0 \\ & & & \\ \hline & 0 & & e^{\gamma t} \begin{bmatrix} \cos \delta t & -\sin \delta t \\ \sin \delta t & \cos \delta t \end{bmatrix} \end{array} \right].$$

35. Подсистемы получаются для следующих подмножеств координат:  $\{x_1\}$ ;  $\{x_2, x_3\}$ ;  $\{x_4\}$ ;  $\{x_5, x_6\}$ ; фазовые портреты подсистем соответственно: репеллер, центр, репеллер, неустойчивый вырожденный узел.

### К ГЛ. 3

2. Пусть  $y_1 = f(r)\cos \theta$ ,  $y_2 = f(r)\sin \theta$ . Покажите, что окружность  $x_1^2 + x_2^2 = r^2$  преобразуется в окружность  $y_1^2 + y_2^2 = f^2(r)$ . Этот результат показывает качественную эквивалентность глобального фазового портрета и локального портрета в начале координат.
4. (i)  $\dot{y}_1 = y_2$ ,  $\dot{y}_2 = 2y_1 - 3y_2$ ;  
(ii)  $\dot{y}_1 = 2y_1 + y_2$ ;  $\dot{y}_2 = y_1$ ;  
(iii)  $\dot{y}_1 = 2e^{-\frac{1}{2}t}y_1 - e^{-t}y_2$ ,  $\dot{y}_2 = -y_2$ .

5. (a)  $(1, -1)$ , седло;  $(1, 1)$ , устойчивый узел;  $(2, -2)$ , неустойчивый фокус;  $(2, 2)$ , седло.  
 (b)  $(\pm 1, 0)$ , седло;  $(0, 0)$ , центр.  
 (c)  $(m\pi, 0)$ , неустойчивый вырожденный узел при четном  $m$ , седло при нечетном  $m$ .  
 (d)  $(0, -1)$ , устойчивый фокус.  
 (e)  $(0, 0)$ , непростая точка;  $(2, -2)$ , седло.  
 (f)  $(0, 0)$ , устойчивый фокус.  
 (g)  $(-1, -1)$ , устойчивый фокус;  $(4, 4)$ , неустойчивый фокус.

6. Решите уравнение  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_1 - x_1^5}{-x_2}$ . Функция  $f(x_1, x_2) = 3(x_1^2 + x_2^2) - x_1^6$  имеет минимум в начале координат, и, следовательно, в окрестности начала линии уровня функции  $f$  замкнуты. Теорема о линеаризации здесь неприменима, так как линеаризованная система имеет центр.

7. (a)  $(1, 0)$ ; (b)  $(1, 2)$ ,  $(1, 0)$ ; (c)  $(\sqrt{2}, 1)$ ,  $(-\sqrt{2}, 1)$ .

8.  $x_1 \frac{du}{dx_1} = u - x_1^3$ ,  $u = Cx_1 - \frac{x_1^3}{2}$ .

9. Да; для установления эквивалентности достаточно тождественного преобразования. Траектории обеих систем удовлетворяют уравнению  $\frac{dx_2}{dx_1} = \frac{x_2}{x_1}$ , и обе системы имеют единственную неподвижную точку в начале координат.

10. Если траектория лежит на прямой  $x_2 = kx_1$ , то  $\frac{dx_2}{dx_1} = k$ .

11. Неподвижные точки лежат на кривой  $x_1^2 = x_2^3$ . Линеаризация в неподвижной точке  $(k^3, k^2)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , имеет матрицу

$$\begin{bmatrix} 2k^3 & -3k^4 \\ 3k^9 & -3k^{10} \end{bmatrix}.$$

Да; предположите, что неподвижная точка простая, и с помощью теоремы о линеаризации придите к противоречию. Да.

12. Пусть  $N$  — окрестность неподвижной точки, ограниченная замкнутой траекторией. Тогда для  $x_0 \in N$   $\varphi_t(x_0) \in N$  для всех  $t \geq 0$ , и, следовательно, неподвижная точка устойчива. Если  $x_0 \in N \setminus \{0\}$ ,  $x_0 = \varphi_T(x_0)$  для некоторого  $T > 0$ , так как все траектории в  $N$  периодические; поэтому  $\varphi_t(x_0) \not\rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

13.  $\dot{y}_1 = \dot{x}_1 + 3x_2^2 \dot{x}_2 = 0$ ,  $\dot{y}_2 = \dot{x}_2 + 2x_2 \dot{x}_2 = 1$ . Функции  $y_1, y_2$  зависят от  $x_1$  и  $x_2$  дифференцируемым образом; обратное преобразование

$$x_1 = y_1 - x_2^3, \quad x_2 = \frac{-1 + \sqrt{1 + 4y_2}}{2}$$

также дифференцируемо по  $y_1, y_2$  при  $y_2 > -\frac{1}{4}$  (это условие обязательно выполняется, если  $y_2 = x_2 + x_2^2$ ).

16.  $(-1, 0)$  — седло;  $(0, 0)$  — неустойчивый узел;  $(1, 0)$  — седло. Заметим, что прямые  $x_1 = 0, \pm 1$  и  $x_2 = 0$  являются объединением траекторий.

17. (a)  $\frac{x_1^3}{3} + x_1 - \frac{x_2^2}{2}, D = \mathbb{R}^2$ .

(b)  $x_1 + \ln |x_1| + x_2 + \ln |x_2|, D = \{(x_1, x_2) \mid x_1 x_2 \neq 0\}$ ;

(c)  $\frac{1}{x_2} - \sin x_1, D = \{(x_1, x_2) \mid |x_1| < \pi/2, x_2 \neq 0\}$ ;

(d)  $x_1^2 e^{x_2} - x_1 \sin x_2, D = \mathbb{R}^2$ .

18.  $\frac{du}{dx_1} = \frac{-(u^2 - 1)}{x_1(3 - u)}$ ;  $(x_1 - x_2) = C(x_1 + x_2)^2$ . Надо ввести новые координаты  $y_1 = x_1 + x_2$  и  $y_2 = x_1 - x_2$  и изобразить графики интегральных кривых при  $C = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3$ .

19. Траектории обеих систем лежат на интегральных кривых уравнения  $\frac{dx_2}{dx_1} = -\frac{x_2}{x_1}$ . Первая система имеет целую кривую из неподвижных точек  $(x_1 = x_2^2)$ , а вторая — седло в начале координат.

20.  $x_2^2 = (\ln x_1)^2 + C$ .

21.  $J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, (x_2/x_1)^{\lambda_2/\lambda_1}, D = \mathbb{R}^2 \setminus \{x_1 = 0\}$ .

$J = \begin{bmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{bmatrix}, x_1^2 + x_2^2, D = \mathbb{R}^2$ ;

$J = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, r e^{-\alpha\theta/\beta}, \beta \neq 0, D = \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .

Пусть траектория  $x(t)$  стремится к некоторой фиксированной точке  $x_0$  при  $t \rightarrow \infty$ . Для первого интеграла  $f$  имеем  $f(x(t)) = f(x_0)$  в силу непрерывности  $f$ . Если точка  $x_0$  асимптотически устойчива, то  $f(x) = f(x_0)$  для всех  $x$  из некоторой окрестности точки  $x_0$ .

22.  $H = \frac{1}{2} x_2^2 + \frac{x_1^2}{2} - \frac{\alpha x_1^3}{3}$ ; в точке  $(0, 0)$  — центр, в точке  $(\alpha^{-1}, 0)$  — седло.

24. (a) Пусть  $x_2(0) \geq 0$ ; тогда из того, что  $\dot{x}_2 \geq 0$ , следует  $x_2(t) \geq x_2(0)$  для всех положительных  $t$ .

(b) При  $x_2 = \beta x_1$  имеем  $\dot{x}_1 = (\beta - \alpha)x_1$  и  $\dot{x}_2 = (\beta - \alpha)x_2$ . Таким образом,  $\dot{x}_2 = \beta \dot{x}_1$ .

(c) В полярных координатах  $\dot{r} = -r(1 - r^2)$ , и, следовательно,  $\dot{r} < 0$  для  $r < 1$ .

(d) Траектории лежат на семействе гипербол  $x_1 x_2 = C$ . Покажите, что границей указанной области является парабола, состоящая из неподвижных точек.

25. (a)  $2\dot{x}^2 + x^4 = 1$ ; (b)  $\dot{x}^2 + x^2 = 5$ ; (c)  $2x^2 + x^4 = 2$ .

26. Да.

27. Если  $r$  — полярный радиус, то  $\dot{r} = r(1 - r_2) - F \sin \theta$ . При  $F = 0$  предельный цикл задается равенством  $r \equiv 1$ .
28. Эта система не имеет неподвижных точек. Если существует по крайней мере один предельный цикл, то можно выбрать область  $R$ , ограниченную предельным циклом и не содержащую внутри себя других предельных циклов. С помощью теоремы Пуанкаре — Бендиксона придите к противоречию, показав, что в  $R$  должна содержаться хотя бы одна неподвижная точка.
29.  $\frac{\partial X_1}{\partial x_1} + \frac{\partial X_2}{\partial x_2} = 2 - 4(x_1^2 + x_2^2)$ . Предельный цикл либо пересекает кривую  $x_1^2 + x_2^2 = \frac{1}{2}$ , либо окружает ее.
30. Найдите, в каких подобластях  $R$  производные  $\dot{x}_1$  и  $\dot{x}_2$  имеют определенный знак. Рассмотрите поведение траекторий, проходящих через точки параболы  $x_2 = -x_1^2 + 3x_1 + 1$ , и покажите, что они не накручиваются на неподвижную точку против часовой стрелки.

## К ГЛ. 4

3. Главные направления —  $(1, \lambda_1)$ ,  $(1, \lambda_2)$ , где  $\lambda_1, \lambda_2$  ( $\lambda_1 > \lambda_2$ ) — собственные значения. Покажите, что при  $k \rightarrow \infty$ ,  $\lambda_1 \rightarrow 0$  и  $\lambda_2 \rightarrow -\infty$ .
4.  $\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{CR} \frac{di}{dt} + \frac{1}{CL} i = 0$ .
5.  $L \frac{dj_R}{dt} + Rj_R = E_0$ .
6.  $C \frac{dv_C}{dt} = \frac{v_C}{R}$ .
8.  $\frac{D}{U + D} = \frac{kD_0}{(k + \mu)D_0 + (kU_0 - \mu D_0)e^{-kt}}$ ,  $k = \lambda - \nu - \mu$ .  
 $\frac{D}{U + D} \rightarrow \frac{k}{k + \mu}$ ,  $t \rightarrow \infty$ .
9.  $x = \frac{1}{\omega} \sin \omega t$ ,  $y = \cos t$ .
10.  $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ,  $D = \begin{bmatrix} -k/m & 0 \\ 0 & -3k/m \end{bmatrix}$ .
- Нормальные моды колебаний:  $y_1 \equiv 0$ , частицы испытывают симметричные колебания вокруг середины отрезка  $AB$ ;  $y_2 \equiv 0$ , колебания происходят так, что между частицами сохраняется расстояние  $l$ .
11. (а) Положение равновесия есть  $\left( \frac{\alpha G_0}{\alpha - 1}, \frac{G_0}{\alpha - 1} \right)$ ; надо ввести локальные координаты и воспользоваться классификацией на плоскости  $\text{tr} - \det$ .
- (б) Положение равновесия есть  $\left( \frac{\alpha G_0}{\alpha(1 - k) - 1}, \frac{G_0}{\alpha(1 - k) - 1} \right)$  с  $k < \alpha - 1/\alpha (= A)$ . Устойчивая неподвижная точка стремится к бесконечности при  $k \rightarrow A$ .



$$13. A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -5/2 \end{bmatrix}, -e^{At} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 4e^{-\frac{1}{2}t} - e^{-2t} & 2e^{-\frac{1}{2}t} - 2e^{-2t} \\ -2e^{-\frac{1}{2}t} + 2e^{-2t} & -e^{-\frac{1}{2}t} + 4e^{-2t} \end{bmatrix}$$

14. Установившиеся решения имеют вид

$$i_1 = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos(\omega t - \varphi), \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = \omega L/R;$$

$$i_2 = -E_0 C \omega \sin \omega t.$$

Ток  $i_1 + i_2$  имеет амплитуду

$$\frac{E_0 C}{L} \left[ R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

15. Неподвижные точки — это: (а)  $(0, 0)$  — неустойчивый узел; (б)  $(2, 0)$  — устойчивый вырожденный узел; (с)  $(0, 2)$  — устойчивый вырожденный узел; (д)  $(2/3, 2/3)$  — седло. Главные направления: (а)  $(1, 0)$  и  $(0, 1)$ ; (б)  $(1, 0)$ ; (с)  $(0, 1)$ ; (д)  $(1, 1)$  и  $(1, -1)$ .

16. Неподвижные точки — это:  $O = (0, 0)$ ,  $A = (0, v)$ ,  $B = (1, 0)$  и  $C = ((1-v)/(1-4v^2), v(1-4v)/(1-4v^2))$ ; их характер следующим образом зависит от  $v$ :

$$A: \begin{cases} \text{седло, } 0 < v < 1, \\ \text{устойчивый узел } v > 1; \end{cases}$$

$$B: \begin{cases} \text{седло, } v < \frac{1}{4}, \\ \text{устойчивый узел, } v > \frac{1}{4}; \end{cases}$$

$$C: \begin{cases} \text{устойчивый узел, } v < \frac{1}{4}, \\ \text{седло } v > 1. \end{cases}$$

(Точка  $C$  не находится в первом квадранте при  $\frac{1}{4} < v < 1$ ).  $O$ : неустойчивый узел,  $v > 0$ .

17. Неподвижные точки:  $O = (0, 0)$ ,  $A = (0, -1/\alpha)$ ,  $B = (1/\alpha, 0)$ ,  $C = \left( \frac{1+\alpha}{1+\alpha^2}, \frac{1-\alpha}{1+\alpha^2} \right)$ . Линеаризация в точке  $C$  имеет след  $-2\alpha/(1+\alpha^2)$ , определитель  $(1-\alpha^2)/(1+\alpha^2)$  и, следовательно,  $\Delta < 0$ .

$$18. \bar{x}_1 = \frac{1}{T} \int_0^T x_1 dt = \frac{1}{T} \int_0^T \left( \frac{c}{d} + \frac{\dot{x}_2}{x_2} \right) dt = \frac{c}{d}.$$

$$\int_{x_2(0)}^{x_2(T)} \frac{dx_2}{x_2} = 0, \text{ так как } x_2(0) = x_2(T), \bar{x}_2 = a/b.$$

С учетом «сбора урожая»  $\dot{x}_1 = x_1[(a-e) - bx_2]$ ,

$$\dot{x}_2 = -x_2[(c+e) - dx_1], \bar{x}_1 = \frac{c+e}{d}, \bar{x}_2 = \frac{a-e}{d}.$$

19. Вершина параболы имеет координату  $y_1 = \frac{k-d}{2}$ , что больше 1.

Применяя этот результат, докажите, что  $\text{tr } W \sim$  (см. (4.94)) отрицателен. Фазовый портрет с единственным устойчивым предельным циклом должен содержать неустойчивую неподвижную точку.

20.  $\dot{B} = \gamma P$ , так как  $B = \gamma P$ . При  $\mu(P) = b + cP$  неподвижные точки:  $0 = (0, 0)$  — неустойчивый узел;  $S = (-b/c, 0)$  — седло;  $T = \left( \frac{\gamma - b}{c}, \frac{\gamma(\gamma - b)}{c} \right)$  — устойчивый узел или фокус. Неподвижная точка  $T$  имеет область устойчивости первый квадрант.

21.  $y = -x + \frac{1}{2} \ln x - c_0$  (ориентация определяется тем, что  $x$  убывает при  $x, y > 0$ ). Число восприимчивых к болезни ( $x$ ) убывает, а число заболевших ( $y$ ) достигает некоторого максимального значения перед тем, как упасть до нуля.

22. Неподвижная точка  $\left( \frac{1}{2}, 1 \right)$  является устойчивым фокусом. При эпидемии обычно имеется ненулевое количество больных.

23.  $I = 1 - S + \frac{1}{\sigma} \log(S/S_0)$  (при  $t = 0, I_0 + S_0 = 1, R_0 = 0$ ).

(a)  $\sigma S_0 \leq 1$ ; тогда  $\sigma S(t) < 1$  для всех положительных  $t$  ( $S < 0$ ). Отсюда  $I = \gamma I(\sigma S - 1)$  отрицательно и  $I = 0$  тогда и только тогда, когда  $I = 0$ .

(b)  $\sigma S_0 > 1$ ; тогда  $S$  убывает. Пусть при  $t = t_0, \sigma S(t_0) = 1$ . Тогда  $I$  положительно для  $t < t_0$  и отрицательно для  $t > t_0$ . Заметим, что  $S = S_L$  при  $I = 0$ . Чтобы доказать единственность корня  $S_L$ , докажем, что  $I$  — возрастающая функция  $S$  на  $(0, 1/\sigma)$ , если  $I(0) < 0$  и  $I(1/\sigma) > 0$ .

24. Первый интеграл имеет вид  $f(X, Y) = h(X) + g(Y)$ , где  $h(X) = \frac{1}{2} \alpha X^2 - \beta X$ , а  $g(Y) = bY - \frac{a}{k} \ln(A + kY)$ . Функции  $h(X)$  и  $g(Y)$  обе имеют глобальный минимум при положительных значениях  $X$  и  $Y$  соответственно.

25. Первый интеграл имеет вид  $f(x_1, x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \omega_0^2(1 - \cos x_1)$ . Линеаризованная система в неподвижных точках  $(2n\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , имеет центр, а в неподвижных точках  $((2n+1)\pi, 0)$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , — седло.

26. В неподвижной точке  $(0, v^{-1})$  собственные значения равны  $\left( -\mu + \frac{1}{v}, -v \right)$ ; в неподвижной точке  $(\pm \sqrt{1 - \mu v}, \mu)$  след равен  $-v$ , а определитель  $2(1 - \mu v)$ .

27.  $r\dot{r} = x_1\dot{x}_1 + x_2\dot{x}_2, r^2\dot{\theta} = x_1\dot{x}_2 - x_2\dot{x}_1, \dot{r} = \varepsilon r_0 \sin^2 \theta (1 - r_0^2 \cos^2 \theta) + O(\varepsilon^2)$   
 $\dot{\theta} = -1 + \varepsilon (r_0^2 \cos^2 \theta - 1) + O(\varepsilon^2)$ .

$$\Delta r = \varepsilon \pi r_0 (1 - r_0^2/4).$$

$\Delta r > 0, r_0 < 2, \Delta r < 0, r_0 > 2$  с точностью до величин первого порядка по  $\varepsilon$ , так что для  $r_0 = 2$  верно  $\Delta r = 0$ .

28. (а) Получите уравнения второго порядка для  $x$  и  $y$ , заданных системой  $\dot{x} = y - \varepsilon \left( \frac{1}{3} x^3 - x \right)$ ,  $\dot{y} = -x$ .

(б) Если  $x_2 = \varepsilon \omega$ , то  $\dot{x}_1 = \varepsilon \left( \omega - \frac{1}{3} x_1^3 + x_1 \right)$ ,  $\dot{\omega} = -\frac{X_1}{\varepsilon}$ . При  $\varepsilon \rightarrow \infty$ ,  $\dot{x}_1 \rightarrow \infty$ , кроме близкой окрестности  $\omega = \frac{1}{3} x_1^3 - x_1$ .

29. Введите конденсатор  $C$ , подключив его параллельно; уравнения цепи примут вид

$$C \frac{dv_C}{dt} = j_L - v_C^3 + v_C, \quad L \frac{dj}{dt} = -v_C.$$

Эти уравнения типа Льенара, поэтому возникают колебания.

$$30. T_1 = \int_a^Q \frac{dp}{ap - bp^2}, \quad T_2 = \int_Q^a \frac{dp}{(Ap - Bp^2)}.$$

Цикл изменения популяции имеет период  $T_1 + T_2$ .

31. Получите систему уравнений

$$\begin{aligned} \ddot{Y} + k\dot{Y} + Y &= L & (\dot{Y} > 0), \\ \ddot{Y} + k\dot{Y} + Y &= -M & (\dot{Y} < 0). \end{aligned}$$

Сделайте замену  $Y' = Y - L$  в обоих уравнениях, чтобы можно было воспользоваться аналогией с системой, рассмотренной в п. 4.5.2.

32.  $Y_1(t) = G_0 t e^{1-t}$ ,  $0 \leq t < 1$ ;  $Y_1(t) = G_0$ ,  $t \geq 1$ .

Общее решение дифференциального уравнения для  $t > 1$  есть  $Y(t) = (At + B)e^{-t} + G_0$ , где  $A$  и  $B$  — постоянные. Независимо от выбора  $A$  и  $B$ ,  $Y(t) \rightarrow G_0$  при  $t \rightarrow \infty$ .

### К ГЛ. 5

- (d)  $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(\sin x_1)^2 - 2x_2^2 - 2x_2^6$  отрицательно определена если  $x_1^2 + x_2^2 < \pi^2$ .  
(e)  $\dot{V}(x_1, x_2) = -2x_1^2(1 - x_2) - 2x_2^2(1 - x_1)$  отрицательно определена при  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ .
- Область устойчивости  $-\mathbb{R}^2$  для (а), (б), (с);  $\{(x_1, x_2) \mid x_1^2 + x_2^2 < r^2\}$  при  $r = \pi$  для (d) и  $r = 1$  для (e).
- Асимптотически устойчивы (а) и (б). Нейтрально устойчивы (с) и (d).
- Система  $\dot{x} = -X(x)$  имеет асимптотически устойчивую точку в начале координат. Пусть  $x_0$  таково, что  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Phi_t(x_0) = 0$ . Выберем окрестность  $N$  точки 0, не содержащую  $x_0$ . Траектория системы  $\dot{x} = X(x)$ , проходящая через точку  $x_0$ , удовлетворяет условию  $\lim_{t \rightarrow -\infty} \Phi_t(x_0) = 0$ . Пользуясь этим свойством, докажите неустойчивость начала координат В случаях (а) и (с) воспользуйтесь функцией  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ :

5. Воспользуйтесь функцией  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$  в случаях (а) и (б) и функцией  $V(x_1, x_2) = x_1^4 + 2x_2^2$  в случаях (с) и (д).

6. Если  $V$  положительно определенная, то значение  $V(1, 0)$  положительно и, следовательно,  $a$  положительно; кроме того,

$$V(x_1, x_2) = a \left( x_1 + \frac{b}{a} x_2 \right)^2 + \left( c - \frac{b^2}{a} \right) x_2^2,$$

и, таким образом, положительны величины  $a$  и  $c - \frac{b^2}{a}$ . Возьмите, например,  $a = 5$ ,  $b = 1$ ,  $c = 2$ ; тогда

$$V(x_1, x_2) = 5 \left( x_1 + \frac{x_2}{5} \right)^2 + \frac{9}{5} x_2^2.$$

Если  $V(x_1, x_2) < 9/5$ ,  $x_2^2 < 1$ , так что имеется область устойчивости, определенная неравенством  $25x_1^2 + 10x_1x_2 + 10x_2^2 < 9$ .

7. (а)  $V(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ ,  $\dot{V}(x_1, x_2) = -2r^2(1 - r^2)(1 + r^2)$ ;  $x_1^2 + x_2^2 < 1$ .

(б)  $V(x_1, x_2) = x_1^6 + 3x_2^2$ ,  $\dot{V} = -x_2^2(1 - x_2^2)$ ;  $x_1^6 + 3x_2^2 < 3$ .

8.  $\dot{V}(x_1, x_2) = \frac{2x_1^2}{a^2}(x_1 - a) + \frac{2x_2^2}{b^2}(x_2 - b)$  — отрицательно определенная при  $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} < 1$ .

9. Функция  $V(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1^4 + \frac{1}{2}x_2^2 - x_1x_2 + x_2^2$  удовлетворяет условиям теоремы 5.4.3.

10.  $\dot{V}(x_1, x_2) = 3(x_1^2 + x_2^2)^2$ .

11.  $V(x_1, x_2) = x_1 - x_2$ .

Одна сепаратриса —  $x_2 = 0$ ; на ней  $\dot{x}_1 = x_1^4$ . Таким образом, фазовый портрет на оси  $x_1$  — шунт, и неподвижная точка неустойчива.

12. (а)  $\mu < 0$ : неустойчивый фокус, устойчивый предельный цикл  $r = -\mu$ ;

$\mu \geq 0$ : устойчивый фокус.

(б)  $\mu < 0$ : устойчивый фокус, полуустойчивый предельный цикл  $r = -\mu$ .

$\mu = 0$ : центр;

$\mu > 0$ : неустойчивый фокус.

(с)  $\mu \leq 0$ : неустойчивый фокус;

$\mu > 0$ : неустойчивый фокус; устойчивый предельный цикл  $r = \mu/2$  и неустойчивый предельный цикл  $r = \mu$ .

(д)  $\mu \leq 0$ : устойчивый фокус;

$\mu > 0$ : неустойчивый фокус, окруженный устойчивым предельным циклом  $r = \sqrt{\mu}$ .

(е)  $\mu < 0$ : устойчивый фокус (по часовой стрелке);

$\mu = 0$ : плоскость, заполненная неподвижными точками;

$\mu > 0$ : неустойчивый фокус (против часовой стрелки).

- (f)  $\begin{cases} \mu < 1: & \text{неустойчивый фокус (против часовой стрелки);} \\ \mu = 1: & \text{неустойчивый звездный узел} \\ \mu > 1: & \text{неустойчивый фокус (по часовой стрелке).} \end{cases}$

13. (a)  $I = -4$ ; (b)  $I = -2$ ; (c)  $I = -2$ .

15. Пусть  $\dot{x}_1 = x_2$ ,  $\dot{x}_2 = -x_1 + \mu x_2 - x_2^3$ . Когда  $\mu$  проходит нулевое значение, возрастая, система испытывает бифуркацию от устойчивой неподвижной точки к устойчивому предельному циклу, окружающему неустойчивую неподвижную точку.

16. Примените преобразование  $x = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} y$  и получите систему  $\dot{y}_1 = \mu y_1 + y_2$ ,  $\dot{y}_2 = -y_1 + \mu y_2 - y_2^3$ .

17. Рассмотрите систему с теми же траекториями, но обратной ориентации. Покажите, что эта система испытывает при  $\mu = 0$  бифуркацию Хопфа к устойчивым предельным циклам.

## ЛИТЕРАТУРА

### Монографии

- Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматгиз, 1959.
- Ариольд В. И. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, (1975) 1975.
- Арнольд В. И. Математические методы классической механики. — М.: Наука, (1979) 1979.
- Барнетт (Barnett S.) Introduction to Mathematical Control Theory, O. U. P., (1975) Oxford.
- Браун (Braun M.) Differential Equations and Their Applications: an Introduction to Applied Mathematics, Applied Mathematical Sciences, Vol. 15, Springer-Verlag, New York, NY.
- Джордан, Смит (Jordan D. W., Smith P.) Non-linear Ordinary Differential Equations, Clarendon Press, Oxford.
- Марсден, Мак-Кракен (Marsden J. E., McCracken M.) The Hopf Bifurcation and its Applications, Applied Mathematical Sciences, Vol. 19, Springer-Verlag, New York, NY. [Имеется перевод: Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркация рождения цикла и ее приложения. — М.: Мир, 1980.]
- Мэй (May R. M.) Stability and Complexity in Model Ecosystems, Monographs in Population Biology, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Мэйнард-Смит (Maynard-Smith J.) Models in Ecology, C. U. P., London. (1974)
- Петровский И. Г. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: МГУ, 1984.
- Пилоу (Pielou E. C.) Mathematical Ecology, Wiley, New York, NY. (1977)
- Сван (Swan G. W.) Some Current Mathematical Topics in Cancer Research, (1977) Xerox University Microfilms, Ann Arbor, Michigan, MI.
- Такенс (Takens F.) Applications of Global Analysis I, Comm. Math. Inst. (1974) Rijksuniversiteit Utrecht, 3.
- Хаберман (Haberman R.) Mathematical Models, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Хартли, Хоукс (Hartley B., Hawkes T. O.) Rings, Modules and Linear Algebra, Chapman and Hall, London.
- Хартман (Hartman P.) Ordinary Differential Equations, Wiley, New York, (1964) NY. [Имеется перевод: Хартман Ф. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.]
- Хирш, Смейл (Hirsch M. W., Smale S.) Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra, Academic Press, London.
- Хэйс (Hayes P.) Mathematical Methods in the Social and Managerial Sciences, Wiley, New York, NY. (1975)

## Статьи

- Гудвин (Goodwin R. M.) The non-linear accelerator and the persistence of business cycles, *Econ.*, **19**, 1—17.
- Зиман (Zeeman E. C.) Differential Equations for the Heartbeat and Nerve Impulse, Salvador Symposium on Dynamical Systems, Academic Press, 683—741.
- Зиман (Zeeman E. C.) Population Dynamics from Game Theory, Int. Conf. Global Theory of Dynamical Systems, Northwestern University, Evanston, IL.
- Лефевр, Николис (Lefever R., Nicolis G.) Chemical instabilities and sustained oscillations *J. Theor. Biol.*, **30**, 267—284.
- Решиньо, Де Лизи (Rescigno A., De Lisi C.) Immune surveillance and neoplasia II, *Bull. Math. Biol.*, **39**, 487—497.
- Сван (Swan G. W.) Immunological surveillance and neoplastic development, *Rocky Mountain J. Math.*, **9**, 143—148.
- Тэннер (Tanner J. T.) The stability and intrinsic growth rate of prey and predator populations, *Ecol.*, **56**, 855—867.

## Литература, добавленная при переводе

- Арнольд В. И. Дополнительные главы обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1978.
- Баути Н. Н., Леоитович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1976.
- Брюно А. Д. Локальный метод нелинейного анализа дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1979.
- Кострикин А. И. Введение в алгебру. — М.: Наука, 1977.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгебраическая эквивалентность 65  
Аттрактор 20  
Аффинное отображение 69
- Биения 136  
Бифуркация 204  
— *Хопфа* 206
- Векторное поле 32  
Вольт-амперная характеристика 150
- Гамильтониан 106  
Главные направления 61, 95
- Динамические уравнения 121  
Дифференциальное уравнение 11  
— — автономное 17  
— — в полных дифференциалах 40  
— — однородное 41  
— — с разделяющимися переменными 40
- Жорданова форма матрицы 50
- Закон *Кирхгофа* для потенциалов 127  
— — для токов 128
- Изоклина 15, 32  
Импеданс 140  
Интегральная кривая 13
- Качественная эквивалентность 13, 20, 21, 64  
Колебания затухающие демпфированные 124  
— релаксационные 152  
— свободные незатухающие 123  
— сильно демпфированные 124  
— слабо демпфированные 124  
Компонента решения затухающая 137  
— — установившаяся 137
- Линеаризация системы 86  
Локальные координаты 87
- Матрица коэффициентов 47  
Модели грубые 146
- Неподвижная точка 19  
— — асимптотически устойчивая 97  
— — гиперболическая 91  
— — нейтрально устойчивая 98  
— — неустойчивая 99  
— — простая 89  
— — устойчивая 97  
Нормальная мода 134
- Обыкновенная точка 100  
Окрестность 83  
Оператор эволюции 36  
Орбита 25
- Первый интеграл 103  
Плоскость *Льенара* 152  
Предельный цикл 86, 109  
— — неустойчивый 110  
— — полуустойчивый 110  
— — устойчивый 110
- Регуляризация системы 154  
Репеллер 20  
Решение дифференциального уравнения 11  
— — — максимальное 11
- Седло 57  
Сепаратриса 57, 93  
Система каноническая 55  
— консервативная 105  
— линеаризованная 86  
— линейная 47  
— — простая 55  
— распадающаяся 30  
— — частично 31  
Состояние системы 23, 121  
Спираль отталкивающая 58  
— притягивающая 58
- Теорема о трубке траекторий 100, 101



- Точка бифуркации 204  
Траектория 25
- Узел вырожденный 58  
— звездный 57  
— неустойчивый 56  
— устойчивый 56
- Уравнение *Ван-дер-Поля* 111, 152  
— *Вольтерра — Лотка* 144  
— *Льенара* 152, 174, 179
- Фазовый портрет 19  
— — сужение 83  
— поток 36
- — глобальный 83, 84  
— — локальный 83, 84
- Фокус 58  
Функция *Ляпунова* 195  
— положительно (отрицательно)  
определенная 193  
— — (—) полуопределенная 193
- Центр 59
- Частота резонансная 139
- Шунт 20
- Экспонента матрицы 66

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Несколько слов к читателю . . . . .	5
Предисловие . . . . .	9
<b>1. ВВЕДЕНИЕ . . . . .</b>	<b>11</b>
1.1. Предварительные идеи . . . . .	11
1.2. Автономные уравнения . . . . .	17
1.3. Автономные системы на плоскости . . . . .	24
1.4. Построение фазовых портретов на плоскости . . . . .	30
1.5. Потoki и эволюция . . . . .	35
Упражнения . . . . .	40
<b>2. ЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ . . . . .</b>	<b>47</b>
2.1. Линейная замена переменных . . . . .	47
2.2. Классы подобия для действительных $2 \times 2$ -матриц . . . . .	50
2.3. Фазовые портреты для канонических систем на плоскости . . . . .	55
2.4. Классификация простых линейных фазовых портретов на плоскости . . . . .	61
2.5. Оператор эволюции . . . . .	66
2.6. Аффинные системы . . . . .	69
2.7. Линейные системы в пространствах размерности, большей чем два . . . . .	71
Упражнения . . . . .	76
<b>3. НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ . . . . .</b>	<b>83</b>
3.1. Локальное и глобальное поведение . . . . .	83
3.2. Линеаризация в окрестности неподвижной точки . . . . .	86
3.3. Теорема о линеаризации . . . . .	89
3.4. Непростые неподвижные точки . . . . .	95
3.5. Устойчивость неподвижных точек . . . . .	97
3.6. Обыкновенные точки и глобальное поведение . . . . .	100
3.7. Первые интегралы . . . . .	103
3.8. Предельные циклы . . . . .	109
3.9. Теория Пуанкаре — Бендиксона . . . . .	111
Упражнения . . . . .	115
<b>4. ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .</b>	<b>121</b>
4.1. Линейные модели . . . . .	121
4.2. Аффинные модели . . . . .	136
4.3. Нелинейные модели . . . . .	140
4.4. Релаксационные колебания . . . . .	150
4.5. Кусочное моделирование . . . . .	157
Упражнения . . . . .	164

---

5. БОЛЕЕ СЛОЖНЫЕ МЕТОДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ . . . . .	174
5.1. Уравнение Лъенара . . . . .	174
5.2. Регуляризация и некоторые экономические модели . . . . .	179
5.3. Модели Зимана пульсации сердца и нервного импульса . . . . .	186
5.4. Функции Ляпунова . . . . .	192
5.5. Бифуркация в системах . . . . .	204
5.6. Математическая модель роста опухоли . . . . .	210
Упражнения . . . . .	220
Ответы и указания к упражнениям . . . . .	223
Литература . . . . .	238
Предметный указатель . . . . .	240