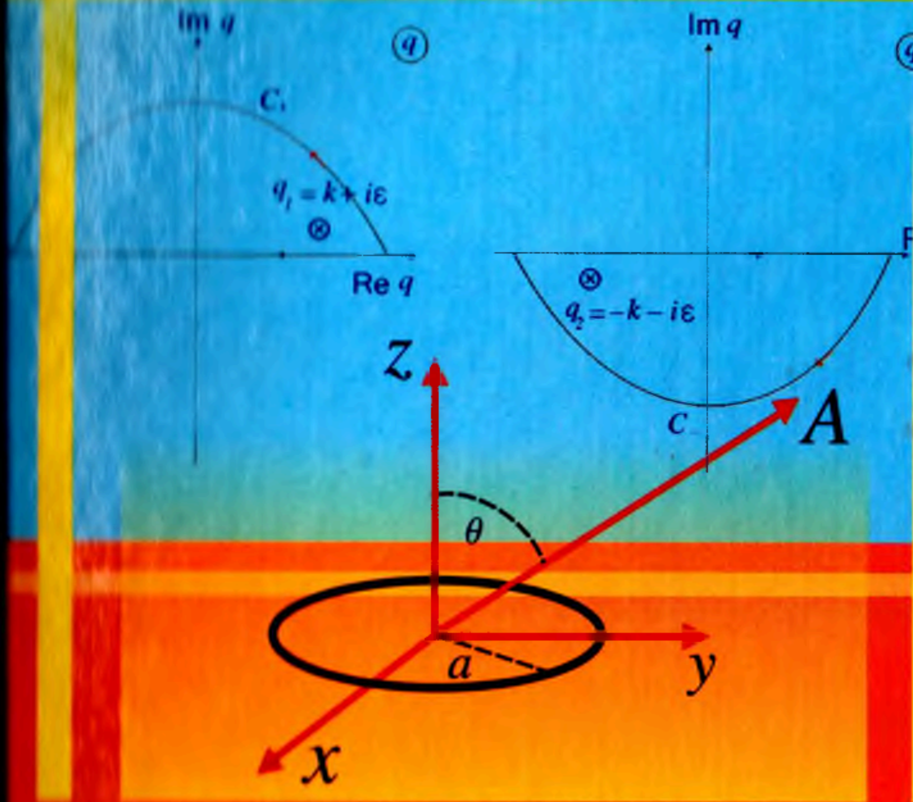
Fayzullayev B. A, Rahmatov A. S

MATEMATIK FIZIKA METODLARI



O‘ZBEKISTON RESPUBLIKASI OLIY VA
O‘RTA MAXSUS TA’LIM VAZIRLIGI
MIRZO ULUG‘BEK NOMIDAGI
O‘ZBEKISTON MILLIY UNIVERSITETI

Fayzullayev B.A., Rahmatov A.S.

MATEMATIK FIZIKA METODLARI

Toshkent
"Universitet"
2014

УДК:51:51(075.8)
Ф.20
Fayzullayev B.A., Rahmatov A.S. "Matematik fizika metodlari" - Toshkent, "Universitet" nashriyoti 2014.
КБК 22311

Fizika - 5140200 o'quv yo'nalishi bo'yicha ushbu darslikda fizikada eng ko'p uchraydigan maxsus funksiyalarning nazariyasi keltirilgan. Unda chiziqli xususiy hosilali ikkinchi tartibli differensial tenglamalarning klassifikatsiyasi ko'rib chiqilgan. To'lqin tarqalishi, issiqlik va massa ko'chishi kabi fizik jarayonlarni o'rganishda paydo bo'ladigan differensial tenglamalar keltirib chiqarilgan va ularni yechishning asosiy usullari berilgan.

Darslik universitetlarning fizika fakultetlari 3-kurs bakalavr-talabalariga mo'ljallangan.

Taqrizchilar: f.-m.f.d., prof. Abdumalikov A.A.,
f.-m.f.d., prof. Axmedov B.J.

O'zbekiston Respublikasi Oliy va o'rta maxsus ta'lim vazirligining 2013 yil 20-avgustdagi 312-sonli buyrug'iga muvofiq darslik sifatida tasdiqlangan.

ISBN-978-9943-305-95-3

So‘z boshi

"Matematik fizika metodlari" kursi matematikaning fizikadagi beqiyos effektivligiga yaqqol misoldir. U fizik jarayonlarni va qonuniyatlarni matematik yo‘l bilan talqin qilish naqadar unumli ekanligini ko‘rsataqi. Kurs davomida talabalar fizika sohasidagi masalalarni matematik korrekt formada qo‘yish, boshlang‘ich va chegaraviy shartlarni talqin qilish va yechishni o‘rganadi. Matematik fizika tenglamalari sohasidagi tan olingan metodlarning deyarli hammasi mazkur darslikda keltirilgan. Nazariy materiallarga ularni tushuntiradigan deyarli qirqta misollar keltirilgan. Yuzdan ortiq mashqlar o‘zlarining yechimlari bilan berilgan. Bu misol va mashqlardan ko‘rinib turibdiki, matematik fizika fanining tushunchalari va metodlari to‘lqin, massa hamda issiqlik tarqalishi jarayonlarini to‘liq ravishda qamrab olgan, matematik fizika metodlari yordamida bu sohalarda yechib bo‘lmaydigan masala yo‘q.

Ushbu kitob mualliflarning O‘zbekiston Milliy universiteti fizika fakultetidagi ko‘p yillik ish tajribasi asosida yozilgan. Matematik fizika metodlari sohasida ajoyib matematik natijalar va yutuqlar juda ko‘p, ammo fizik-talabalarga o‘tiladigan kursda amaliyotga yaqin bo‘lgan masalalarni yechish metodlari va ularga misollar birinchi o‘rinda turishi kerak. Mualliflar O‘zbekiston universitetlarining fizika fakultetlari bakalavr-talabalari uchun ushbu kitobning foydasi tegadi degan umiddadir.

Mualliflar

I BOB. MAXSUS FUNKSIYALAR

§1. Silindrik funksiyalar (Bessel funksiyalari)

Quyidagi ko'rinishdagi tenglama

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - \nu^2)y(x) = 0 \tag{1}$$

silindrik (yoki ***Bessel***) tenglamasi deyiladi. Keyin ko'ramizki, ushbu tipdagi tenglamalar matematik fizika tenglamalarini silindrik sistemada ochganimizda paydo bo'ladi. Tenglamaning yechimini

$$y(x) = x^s \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = x^s(c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \cdots)$$

ko'rinishda qidiramiz. Tenglamaning yechimini bunday ko'rinishda qidirish ***Frobenius***[1] ***metodi*** deyiladi. Hosilalarni topaylik:

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+s)x^{n+s-1} = sc_0x^{s-1} + (s+1)c_1x^s + (s+2)c_2x^{s+1} + \cdots$$

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s-2} =$$

$$= s(s-1)c_0x^{s-2} + s(s+1)c_1x^{s-1} + (s+2)(s+1)c_2x^s + \cdots$$

Oxirgi uchta tengliklarni (1)-ga olib borib qo'yamiz va x-ning har bir darajasi oldidagi koeffisientlarni yig'ib nolga tenglashtiramiz. Umumiy ko'rinishda

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[c_n(n+s)(n+s-1)x^{n+s} + c_n(n+s)x^{n+s} + (x^2 - \nu^2)c_nx^{n+s}\right] = 0 \tag{2}$$

Bu cheksiz qatorning birinchi bir necha hadlarini ochib yozib olaylik:

$$c_0s(s-1)x^s + c_1s(s+1)x^{s+1} + \cdots + c_0sx^s + c_1(s+1)x^{s+1} + \cdots$$

$$+(x^2 - \nu^2)(c_0x^s + c_1x^{s+1} + \cdots) = 0.$$

[1] Ferdinand Georg Frobenius (1840-1917) - nemis matematigi

x -ning darajasi eng past bo'lgan had x^s, uning oldidagi koeffisientlarni yig'amiz:

$$c_0(s^2 - \nu^2) = 0. \tag{3}$$

x^{s+1} -monomning oldidagi koeffisientlarni yig'aylik:

$$c_1[(s+1)^2 - \nu^2] = 0. \tag{4}$$

Umumiy ko'rinishda (2)-ning yechimi quyidagicha:

$$c_n = -\frac{1}{(s+n)^2 - \nu^2}\, c_{n-2}. \tag{5}$$

(3)-dan quyidagi xulosaga kelamiz:

$$c_0 = 0 \quad \text{yoki} \quad s = \pm\nu. \tag{6}$$

(4)-dan esa

$$c_1 = 0 \quad \text{yoki} \quad s = \pm\nu - 1.$$

Bizning maqsadimizga

$$s = \nu \quad \text{va} \quad c_1 = 0 \tag{7}$$

deb qabul qilish mos keladi. Ko'rilayotgan differensial tenglama - ikkinchi tartibli, $s = -\nu$ hol ikkinchi yechimni berishi kerak, ammo bunday tanlangan ikkinchi yechim $\nu = n$ butun son bo'lgan hollarda mustaqil yechim bo'lmaydi (buni keyin (11)-formuladan ko'ramiz). Shuning uchun ikkinchi yechimni boshqacha yo'l bilan keyin ta'riflaymiz. Demak, (5)-formula quyidagi ko'rinishni oladi:

$$c_n = -\frac{1}{n^2 + 2\nu n}\, c_{n-2}. \tag{8}$$

Bu formulaning nomi - ***rekurrent munosabat***, uni (7)-formula bilan solishtirsak faqat $c_0, c_2, c_4, c_6, \ldots$ largina noldan farqli ekanligini ko'ramiz, va $c_1 = c_3 = c_5 = \cdots = 0$ bo'ladi. Ya'ni, faqatgina juft indeksli c_n lar noldan farqli. Shu sababdan qulaylik uchun

$$n = 2k,\ k = 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots$$

deb olamiz. Bu bizni

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k \cdot 2(k+\nu)}\, c_{2(k-1)} \tag{9}$$

formulaga olib keladi. Ushbu rekurrent munosabatni yechish qiyin emas:

$$c_{2k} = -\frac{1}{2k \cdot 2(k+\nu)} c_{2(k-1)} = (-1)^2 \frac{c_{2(k-2)}}{2^2 k(k-1) \cdot 2^2 (k+\nu)(k+\nu-1)} =$$

$$= \cdots = (-1)^k \frac{\nu!}{2^{2k} k!(k+\nu)!} c_0.$$

Demak, quyidagi yechimni topdik:

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\nu!}{2^{2k} k!(k+\nu)!} x^{2k+\nu}.$$

(1)-tenglama chiziqli bo'lgani uchun c_0 koeffisientni tanlab olish o'zimizning qo'limizda. Odatda uni

$$c_0 = \frac{1}{2^\nu \nu!}$$

ko'rinishda tanlab olish qabul qilingan. Hosil bo'lgan funksiya ***silindrik***, yoki ***Bessel funksiyasi*** [2] deyiladi va quyidagicha belgilanadi:

$$J_\nu(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}. \tag{10}$$

1.1-mashq.

$$J_\nu(-x) = (-1)^\nu J_\nu(x)$$

ekanligiga ishonch hosil qiling.

1.2-mashq. Agar $\nu = n$ butun son bo'lsa

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x) \tag{11}$$

ekanligini ko'rsating.

Bessel tenglamasi ikkinchi tartibli tenglama, demak, uning ikkita chiziqli mustaqil yechimi mavjud bo'lishi kerak. Ikkinchi yechimni (6)-ga qarab $s = -\nu$ ga mos keladigan qilib tanlab olishimiz mumkin deb o'ylashimiz mumkin, ammo (11)-dan ko'rinib turibdiki, $\nu = n$ butun son bo'lgan holda bu yechimlar mustaqil bo'lmaydi. Shu sababdan ikkinchi yechim boshqacharoq ko'rinishda olinadi. Uning ta'rifi:

$$N_\nu(x) = \frac{\cos \nu\pi \cdot J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin \nu\pi} \tag{12}$$

---

[2] Silindrik tenglama va silindrik funksiyalar shveytsar matematigi Daniel Bernoulli (1700 - 1782) tomonidan ochilgan, ammo nemis matematigi va astronomi Friedrich Wilhelm Bessel (1784 - 1846) bu tenglamaning yechimlarini birinchi bo'lib klassifikatsiya qilib chiqqan

Bunday tanlab olingan funksiyalar ***Neumann***[3] ***funksiyalari*** deyiladi. Ko'rinib turibdiki, $\nu = n$ holda bu munosabatning surati va maxraji nolga teng, uni l'Hôpital [4] qoidasi bo'yicha ochish kerak.

1.3-mashq. $\nu = n$ butun son bo'lgan holda

$$N_n(x) = \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^\nu \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu}\Bigg|_{\nu=n}$$

ekanligini ko'rsating.

Chiziqli tenglama yechimlarining ixtiyoriy chiziqli kombinatsiyasi yana shu tenglamaning yechimi bo'ladi. Masalan,

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iN_\nu(x), \quad H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iN_\nu(x) \tag{13}$$

funksiyalar (ularning nomi - birinchi va ikkinchi tur ***Hankel*** [5] ***funksiyalari***) ham Bessel tenglamasi (1)-ning yechimlaridir. Bundan keyin Bessel funksiyalari uchun keltirib chiqariladigan rekurrent munosabatlar mana shu to'rta funksiya uchun o'rinlidir.

§1.1. Bessel funksiyalari uchun hosil qiluvchi funksiyasi

Quyidagi munosabatni isbot qilaylik:

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n. \tag{14}$$

Bu tenglikning chap tomonidagi $g(x,t)$ funksiya Bessel funksiyalarining hosil qiluvchi funksiyasi deyiladi, qator esa shu funksiyaning Laurent qatoridir. Isbot qiyin emas:

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{xt}{2}} \cdot e^{-\frac{x}{2t}} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{l!}\left(\frac{xt}{2}\right)^l \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(-\frac{x}{2t}\right)^k =$$

$$= \sum_{l,k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{l!k!}\left(\frac{x}{2}\right)^{l+k} t^{l-k}.$$

Quyidagi almashtirish kiritaylik: $l - k = n$, unda $l = n + k$ bo'ladi va n soni $-\infty$ dan ∞ gacha o'zgaradi:

$$g(x,t) = e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n}\right)t^n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n.$$

[3] Karl Gottfried Neumann (1832-1925) - nemis matematigi

[4] Guillaume Fransois Antoine de l'Hôpital (1661-1704) - fransuz matematigi, rus tilida - Лопиталь.

[5] Hermann Hankel (1839-1873) - nemis matematigi

§1.2. Bessel funksiyalari uchun rekurrent munosabatlar

Hosil qiluvchi funksiyadan foydalanib rekurrent munosabatlarni keltirib chiqaraylik. Buning uchun (14)-tenglikdan bir marta t bo'yicha, bir marta x bo'yicha hosila olamiz. t bo'yicha hosila olaylik:

$$\frac{\partial}{\partial t}g(x,t) = \frac{x}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}.$$

Bu tenglikning chap tomonini ochib yozaylik:

$$\frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^n + \frac{x}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n-2} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nJ_n(x)t^{n-1}.$$

Tenglikning chap va o'ng tomonlaridagi t^n darajalari oldidagi hadlar bir-biriga teng bo'lishi kerak:

$$\frac{x}{2}J_n + \frac{x}{2}J_{n+2} = (n+1)J_{n+1},$$

yoki,

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1}(x) = \frac{2n}{x}J_n(x). \tag{15}$$

Demak, bizga $(n-1)-$ indeksli va $(n)-$indeksli Bessel funksiyalari berilgan bo'lsa biz $(n+1)-$ indeksli Bessel funksiyasini ular orqali ifodalab olishimiz mumkin ekan. Bunday munosabatlar ***rekurrent*** munosabatlar deyiladi. Hosilalarni o'z ichiga olgan rekurrent munosabatlar ham bor. Buning uchun hosil qiluvchi funksiyadan x bo'yicha hosila olamiz:

$$\frac{\partial}{\partial x}g(x,t) = \frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x)t^n.$$

Yana (14)-ta'rifni ishlatamiz, ya'ni, olingan tenglikning chap tomonini u yordamida ochamiz:

$$\frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x)t^{n-1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J'_n(x)t^n.$$

Chap va o'ng tomonlardagi t ning bir xil tartibli darajalarini solishtirsak,

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J'_n(x) \tag{16}$$

ko'rinishga ega bo'lgan rekurrent munosabatga kelamiz.

1.1-misol.

$$J_0'(x) = \frac{1}{2}\left(J_{-1}(x) - J_1(x)\right) = \frac{1}{2}(-J_1(x) - J_1(x)) = -J_1(x).$$

(15)- va (16)-larni keltirib chiqarishda biz faqat butun indeksli Bessel funksiyalari J_n lardan foydalandik, ammo ular

- ixtiyoriy butun bo'lmagan ν indeksli silindrik funksiyalar uchun o'rinlidir;
- hamma silindrik funksiyalar uchun - J_ν, N_ν, $H_\nu^{(1,2)}$ - o'rinlidir.

Rekurrent munosabatlarning yana bir qulay formasi bor. Ularni olish uchun (15)- va (16)-larni bir marta qo'shamiz va bir marta ayiramiz. Natijada

$$J_{n-1} = J_n' + \frac{n}{x}J_n \quad \text{va} \quad J_{n+1} = \frac{n}{x}J_n - J_n'$$

ko'rinishdagi munosabatlarni olamiz. Ularning birinchisini x^n ga va ikkinchisini x^{-n} ga ko'paytirsak quyidagi tez uchrab turadigan munosabatlarga kelamiz:

$$\frac{d}{dx}\Big[x^n J_n(x)\Big] = x^n J_{n-1}(x) \qquad \text{va} \qquad \frac{d}{dx}\Big[x^{-n} J_n(x)\Big] = -x^{-n} J_{n+1}(x). \quad (17)$$

Bu munosabatlarni eslab qolish yanada oson bo'lgan ko'rinishga keltirib olishimiz qiyin emas:

$$\frac{d}{xdx}\left[x^n J_n(x)\right] = x^{n-1} J_{n-1}(x) \qquad \text{va} \qquad \frac{d}{xdx}\left[\frac{J_n(x)}{x^n}\right] = -\frac{J_{n+1}(x)}{x^{n+1}}. \quad (18)$$

1.4-mashq. Quyidagilarni isbot qiling:

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \Big[x^\nu J_\nu(x)\Big] = x^{\nu-m} J_{\nu-m}; \quad (19)$$

$$\left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left[\frac{J_\nu(x)}{x^\nu}\right] = (-1)^m \frac{J_{\nu+m}(x)}{x^{\nu+m}}. \quad (20)$$

§1.3. Bessel funksiyasi uchun integral tasavvur

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(x) t^n$$

formula chap tomondagi funksiyaning Laurent qatoridir. Kompleks o'zgaruvchilar nazariyasidan ma'lumki, qator koeffisienti (bizning holda bu J_n) uchun quyidagi formulaga egamiz:

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}}{z^{n+1}} dz \quad (21)$$

n butun son bo'lganda C kontur koordinat boshini o'z ichiga olgan yopiq konturdir, masalan, birlik radiusli aylana.

§1.4. Yarim butun indeksli Bessel funksiyalari

(10)-qatorda $\nu = 1/2$ deb olaylik:

$$J_{1/2}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+1/2}.$$

Legendrening ikkilash formulasi deyiladigan

$$k!\left(k+\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\pi}\, 2^{-2k-1}(2k+1)! \tag{22}$$

formuladan foydalansak ([9], 19-bet) yuqoridagi qator quyidagi ko'rinishga keladi:

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Xuddi shunday yo'l bilan $\nu = -1/2$ holni ham soddalashtirishimiz mumkin:

$$J_{-1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k-1/2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-1/2} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1/2} 2^{-2k+1/2}}{2^{-2k}\sqrt{\pi}(2k)!} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Ana endi (20)-rekurrent munosabatni ishlataylik. Undan kelib chiqadiki,

$$J_{m+1/2}(x) = (-1)^m x^{m+1/2} \left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left[\frac{J_{1/2}(x)}{\sqrt{x}}\right] =$$

$$= (-1)^m \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{m+1/2} \left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(\frac{\sin x}{x}\right).$$

Xuddi shu yo'sinda (19)-ni ishlatsak quyidagini olamiz:

$$J_{-m-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, x^{m+1/2} \left(\frac{d}{xdx}\right)^m \left(\frac{\cos x}{x}\right).$$

Yarim butun indeksli Bessel funksiyalari Helmholtz tenglamasini sferik sistemada yechganda ham paydo bo‘ladi (6-bobning ohiridagi shar uchun issiqlik tarqalishi masalasining yechilishida paydo bo‘lgan (75)-tenglamaning analiziga qarang).

§1.5. Mavhum argumentli Bessel funksiyalari

Agar (1)-silindrik tenglamada $x \to ix$ almashtirish bajarsak,

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0 \tag{23}$$

tenglamani olamiz. Albatta, $J_\nu(ix)$ funksiya bu tenglamaning yechimi, ammo bu holdagi yechim uchun quyidagi belgilash qabul qilingan:

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} J_\nu(ix).$$

Keltirib chiqarish qiyin emaski,

$$I_\nu(x) = i^{-\nu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{ix}{2}\right)^{2k+\nu} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{k!(k+\nu)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+\nu}.$$

Ikkinchi yechim odatda

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin \nu\pi}$$

ko'rinishda tanlab olinadi. Bu funksiyaning nomi Macdonald funksiyasi (ba'zi-bir kitoblarda - Kelvin funksiyasi). Xususiy hollar:

$$I_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{sh} x, \qquad I_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \operatorname{ch} x.$$

$$K_{1/2}(x) = K_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-x}.$$

§1.6. Bessel funksiyalarining nollari. Ortogonallik munosabatlari

(1)-tenglamada $x = kr$ almashtirish bajaraylik:

$$r^2 \frac{d^2 J_\nu(kr)}{dr^2} + r \frac{dJ_\nu(kr)}{dr} + (k^2r^2 - \nu^2) J_\nu(kr) = 0.$$

Bu tenglamani

$$\frac{d}{dr}\left(r \frac{d}{dr} J_\nu(kr)\right) + \left(k^2 r - \frac{\nu^2}{r}\right) J_\nu(kr) = 0 \tag{24}$$

ko'rinishga keltirib olaylik. Shu tenglamani bir gal k_1 parametr bilan, bir gal k_2 parametr bilan yozib olib, k_1 li tenglamani $J_\nu(k_2 r)$ ga, k_2 li tenglamani $J_\nu(k_1 r)$ ga ko'paytiramiz va birini ikkinchisidan ayiramiz. Natijada

$$J_\nu(k_2 r)\,(r J_\nu'(k_1 r))' - J_\nu(k_1 r)\,(r J_\nu'(k_2 r))' = (k_2^2 - k_1^2) r J_\nu(k_1 r) J_\nu(k_2 r)$$

formulani olamiz (har bir shtrih - r bo'yicha hosila). Tenglamaning chap tomonini bizning maqsadimiz uchun qulayroq ko'rinishga keltiraylik:

$$J_\nu(k_2r)\,(rJ'_\nu(k_1r))' - J_\nu(k_1r)\,(rJ'_\nu(k_2r))' =$$

$$= \frac{d}{dr}\left[r\left(J_\nu(k_2r)\frac{d}{dr}J_\nu(k_1r) - J_\nu(k_1r)\frac{d}{dr}J_\nu(k_2r)\right)\right].$$

Demak,

$$\int_0^1 J_\nu(k_1r)J_\nu(k_2r)r\,dr = \frac{1}{k_2^2-k_1^2}\left(rJ_\nu(k_2r)\frac{d}{dr}J_\nu(k_1r) - rJ_\nu(k_1r)\frac{d}{dr}J_\nu(k_2r)\right)\Bigg|_0^1. \tag{25}$$

Faraz qilaylik, k_1 va k_2 sonlar quyidagi tenglamaning yechimlaridan bo'lsin:

$$\alpha J_\nu(k) + \beta kJ'_\nu(k) = 0, \quad \alpha+\beta>0, \quad \alpha\geq 0,\ \beta\geq 0. \tag{26}$$

Unda (25)-ning o'ng tomoni $k_1 \neq k_2$ holda nolga teng bo'ladi va biz olamiz:

$$\int_0^1 J_\nu(k_1r)J_\nu(k_2r)r\,dr = 0, \qquad k_1\neq k_2. \tag{27}$$

$k_1 = k_2$ holni quyidagicha ko'ramiz. (25)-ning o'ng tomonida $k_2 = k_1+\delta$ deymiz va $\delta\to 0$ limitga o'tamiz:

$$\frac{1}{2k_1\delta}\left[k_1J_\nu(k_1+\delta)J'_\nu(k_1) - (k_1+\delta)J_\nu(k_1)J'_\nu(k_1+\delta)\right] \to$$

$$\to \frac{1}{2}\left[J'_\nu(k_1)\right]^2 - \frac{1}{2k_1}\left(J_\nu(k_1)J'_\nu(k_1) + k_1J_\nu(k_1)J''_\nu(k_1)\right).$$

Bessel tenglamasidan

$$k_1^2J''_\nu(k_1) + k_1J'(k_1) = (\nu^2-k_1^2)J_\nu(k_1)$$

kelib chiqadi, shuni ishlatib

$$\int_0^1\left[J_\nu(kr)\right]^2 r\,dr = \frac{1}{2}\left[J'_\nu(k)\right]^2 + \frac{1}{2}\left(1-\frac{\nu^2}{k^2}\right)\left[J_\nu(k)\right]^2 \tag{28}$$

munosabatga kelamiz. (27)- va (28)-formulalar Bessel funksiyalarining o'zaro ortogonalligini va normasini ko'rsatadi.

(26)-ga qaytib kelaylik. Agar $\beta = 0$ bo'lsa k soni $J_\nu(k) = 0$ tenglamaning yechimi, ya'ni, Bessel funksiyasining noli bo'ladi. Bessel funksiyalarining nollari masalasi adabiyotda keng muhokama qilinadigan masaladir. Ma'lumki, $J_0(0) = 1$ bo'ladi va $J_0(k)$ ning birinchi noli $k_1 = 2.4844$ ga teng, qolgan nollari shu songa taxminan $n\pi$, $n = 1, 2, 3, ..$ larni qo'shib olinadi. $J_n(k)$, $n \geq 1$ holda Bessel funksiyalari koordinat boshida nolga teng bo'ladi $J_n(0) = 0$, ularning boshqa nollarini matematik ladvallardan topish mumkin.

§1.7. Helmholtz tenglamasi silindrik sistemada

Quyidagi ***Helmholtz***[6] ***tenglamasi*** deb ataladigan tenglamani

$$\Delta f + k^2 f = 0$$

silindrik sistemada ochamiz:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} + k^2 f = 0.$$

Ushbu tipdagi tenglama matematik fizikaning ko'pgina qismlarida uchraydi - elektromagnit nurlanish masalalarida, issiqlik tarqalishi masalalarida va h.k. Masalada silindrik simmetriya bor deb faraz qilamiz, boshqacha so'z bilan aytganda, z ga bog'liqlik yo'q deymiz: $f = f(r, \varphi)$. Yechimni

$$f(r, \varphi) = R(r)\Phi(\varphi)$$

ko'rinishda qidiraylik:

$$\frac{\Phi(\varphi)}{r}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + \frac{R(r)}{r^2}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + k^2 R(r)\Phi(\varphi) = 0.$$

Bu tenglamaning quyidagi ko'rinishga kelishini tekshirib ko'rish qiyin emas:

$$\frac{r}{R(r)}\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + k^2 r^2 = -\frac{1}{\Phi(\varphi)}\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} = \lambda.$$

Tenglamaning o'ng tomonida yangi konstanta λ paydo bo'ldi. Uning kelib chiqishining sababi quyidagicha. Tenglamaning chap tomoni faqat r ning funksiyasi, o'ng tomoni esa faqat φ ning. Demak, r ni o'zgartirsak, tenglikning o'ng tomoni o'zgarmaydi, bu degani, chap tomoni ham. Xuddi shunday,

[6] Herman Ludwig Ferdinand von Helmholtz (1821-1894)- nemis fizigi. Ruschasi - Гельмгольц

φ ni o'zgartirsak tenglikning chap tomoni o'zgarmaydi, demak, o'ng tomoni ham. Xulosa - tenglikning ikkala tomoni ham o'zgarmas son, shu sonni λ deb belgiladik. Bu son musbat bo'lishi kerak, buni tezda tushunamiz. Natijada biz ikkita tenglamaga egamiz:

$$r\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR(r)}{dr}\right) + (k^2r^2 - \lambda)R(r) = 0;$$

$$\frac{d^2\Phi(\varphi)}{d\varphi^2} + \lambda\Phi(\varphi) = 0.$$

Ikkinchi tenglamaning yechimi:

$$\Phi(\varphi) = c_1\cos(\sqrt{\lambda}\varphi) + c_2\sin(\sqrt{\lambda}\varphi).$$

φ va $\varphi + 2\pi$ burchaklar bir nuqtaga mos kelgani uchun yechimdan

$$\Phi(\varphi) = \Phi(\varphi + 2\pi)$$

bo'lishini talab qilishimiz kerak. Bu degani, $\sqrt{\lambda} = m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$ bo'lishi kerak. Shuni hisobga olsak, R uchun tenglamamiz quyidagi ko'rinishni oladi:

$$r^2R''(r) + rR'(r) + (k^2r^2 - m^2)R(r) = 0. \tag{29}$$

Agarda $kr = x$ va $y = R$ deb belgilasak, tenglamamiz

$$x^2y''(x) + xy'(x) + (x^2 - m^2)y(x) = 0 \tag{30}$$

ko'rinishga keladi. Bu esa Bessel tenglamasi (1)-ning o'zidir, faqatgina u yerda ixtiyoriy bo'lgan son ν ning o'rniga butun son m turibdi. Agar Helmholtz tenglamasini sferik sistemada yechsak, yarim butun indeksli Bessel funksiyalariga kelamiz - (75)-tenglamaga qarang.

1.5-mashq. (14)-formulada $t = e^{i\theta}$ almashtirish bajarib

$$e^{ix\sin\theta} = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)e^{in\theta}$$

formulani oling.

1.6-mashq. Yuqoridagi formuladan quyidagilarni keltirib chiqaring:

$$\cos(x\sin\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\cos(n\theta); \tag{31}$$

$$\sin(x\sin\theta) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(x)\sin(n\theta). \tag{32}$$